



www.epito.bme.hu

→ Tanszékek

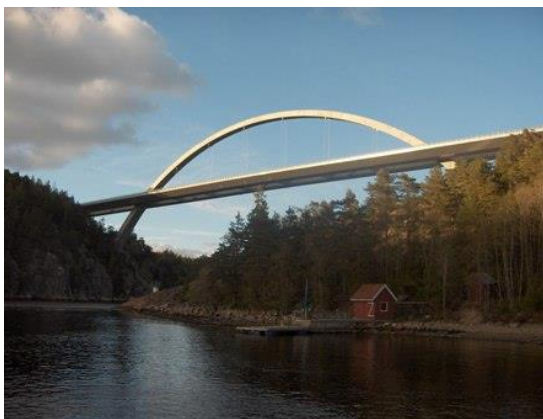
→ Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék →

→ Tantárgyak → Elemi Szilárdságtan →

→ Tananyag → [Alapfogalmak.pdf](#)



A SZILÁRDSÁGTAN ALAPFOGALMAI



Miről szól ez az előadás?

→ Szilárdságtan, szilárd test, szerkezetek szilárdságtani vizsgálata

→ Alapfogalmak definíciói:

kontinuum

feszültségállapot és számszerű megadása

alakváltozási állapot és számszerű megadása

az anyagi viselkedés fő típusai

→ Közelítések az Elemi szilárdságtanban:

Hooke-modell

homogén kontinuum

izotrop anyagi viselkedés

hőmérséklettől független, időtől független anyagi viselkedés

Saint-Venant-elv

Szilárdságtan

≡ szilárd testek mechanikai viselkedésének vizsgálata

Fő halmazállapotok:



légnemű



folyadék



szilárd

Szilárd test fogalma:

≈ „önálló alakkal és mérettel rendelkeznek”

≈ „részecskéi csak helyhez kötött rezgőmozgást végeznek”

Szilárdságtan

Szilárd test fogalma:

≈ „tönkremenetelt még nem okozó erőhatások esetén a test alakjának és méreteinek megváltozása kicsiny az eredeti méretekhez képest”

Szerkezetek szilárdságtani vizsgálata:



1. „Szilárdsági ellenőrzés” → a keletkező belső erők nem okoznak-e tönkremenetelt?

→ **ELEMI SZILÁRDSÁGTAN; ...**

2. „Merevségi ellenőrzés” → a deformációk és elmozdulások nem túl nagyok-e?

→ **TARTÓK STATIKÁJA I.; ...**

3. „Stabilitásvizsgálat” → a kialakult egyensúlyi állapot stabil-e?

→ **ÁLTALÁNOS SZILÁRDSÁGTAN; ...**

Miről szól ez az előadás?

→ Szilárdságtan, szilárd test, szerkezetek szilárdságtani vizsgálata

→ Alapfogalmak definíciói:

kontinuum

feszültségállapot és számszerű megadása

alakváltozási állapot és számszerű megadása

az anyagi viselkedés fő típusai

→ Közelítések az Elemi szilárdságtanban:

Hooke-modell

homogén kontinuum

izotrop anyagi viselkedés

hőmérséklettől független, időtől független anyagi viselkedés

Saint-Venant-elv

Szilárdságtan

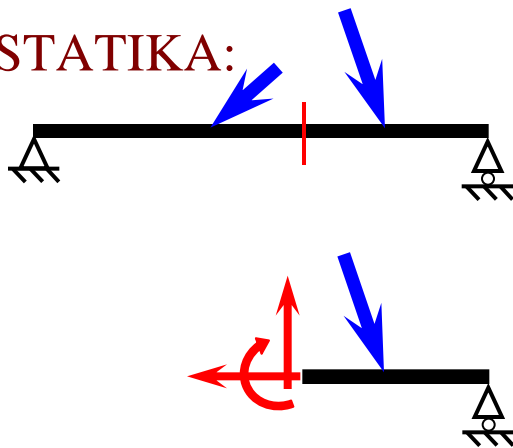
Szilárd test fogalma:

≈ „tönkremenetelt még nem okozó erőhatások esetén a test alakjának és méreteinek megváltozása kicsiny az eredeti méretekhez képest”

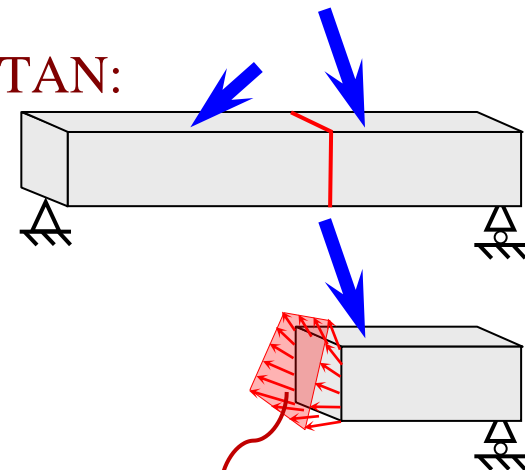
Szerkezetek szilárdságtani vizsgálata:

1. „Szilárdsági ellenőrzés” → a keletkező belső erők nem okoznak-e tönkremenetelt?

STATIKA:



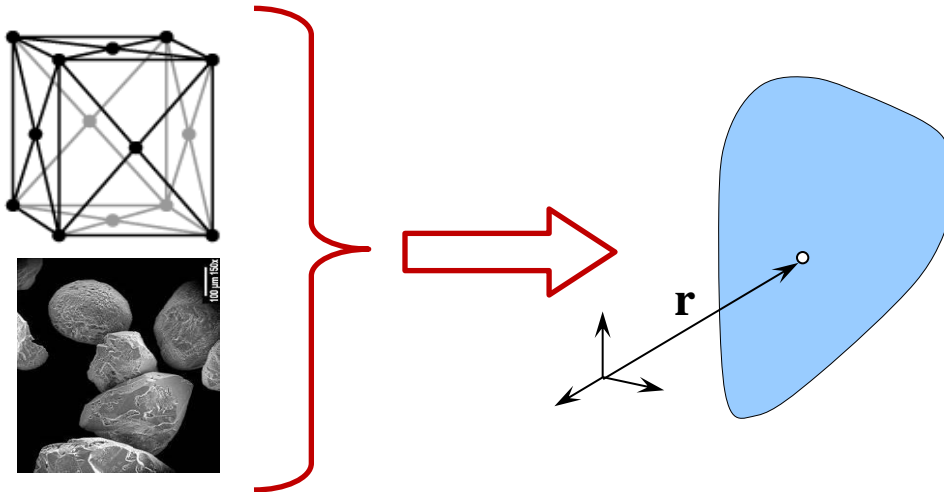
ELEMI SZILTAN:



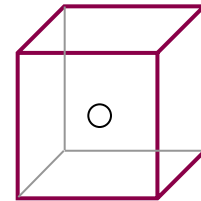
folytonos felület mentén
megoszló erőrendszer

Kontinuum fogalma

≡ „folytonos tartomány”, matematikai absztrakció



elemi
hasáb:



infinitezimálisan kicsi
 $dx \cdot dy \cdot dz$
forgatható!

klasszikus kontinuum állapotváltozói:

eltolódásvektor

feszültségállapot jellemzői

alakváltozási állapot jellemzői

} a hely (\mathbf{r})
folytonos
függvényei

a valódi anyag tulajdonságainak modellezése:

σ és ε közötti összefüggések, mérésekből
(„fenomenológiai modellalkotás”)

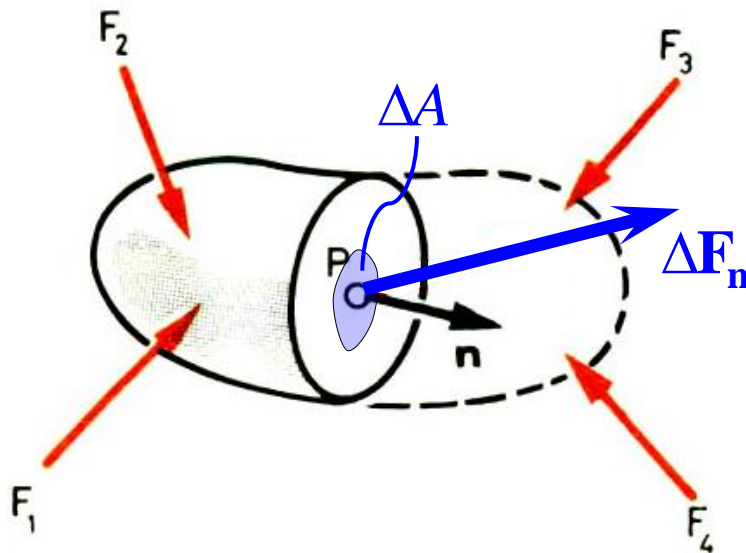
Jelölések:

vastag betű: vektor / tenzor

dőlt betű: skalár

A feszültségállapot jellemzése

Feszültségvektor fogalma:



→ a vizsgált ponthoz (P), és ott

→ egy adott irányú (\mathbf{n}) metszethez: $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$
(\mathbf{n} egységvektor!)

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta A}$$

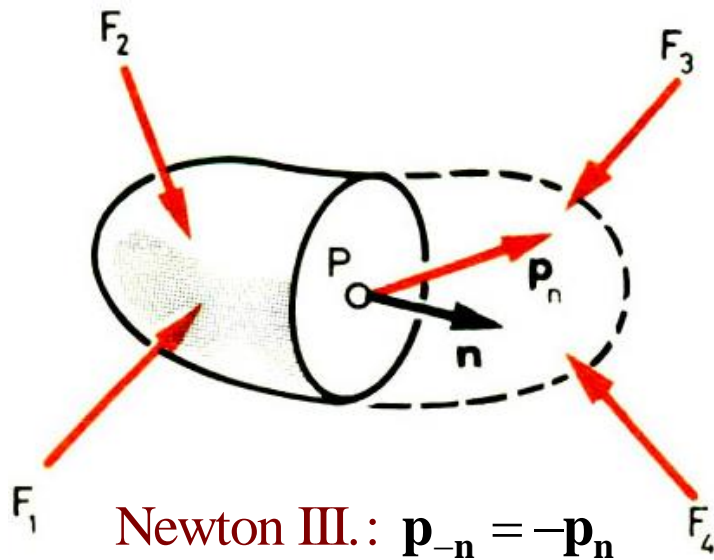
Megoszló erőrendszer az \mathbf{n} metszeten:

iránya P -ben
nagysága P -ben

$$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix}$$

A feszültségállapot jellemzése

Feszültségvektor fogalma:

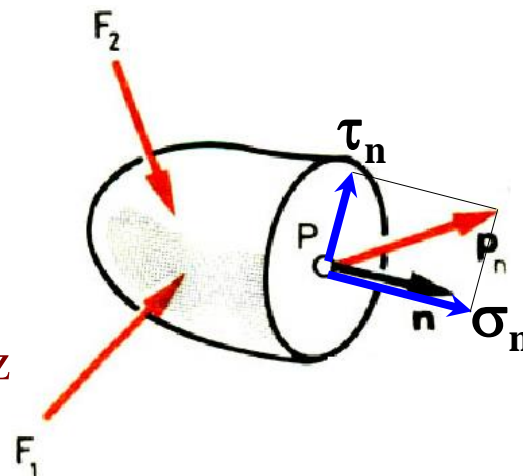


A feszültségvektor komponensei:

σ_n normálfeszültség: a síkra \perp

τ_n nyírófeszültség: a síkkal \parallel

a P pont feszültségállapota \equiv a P ponthoz tartozó feszültségvektorok összessége

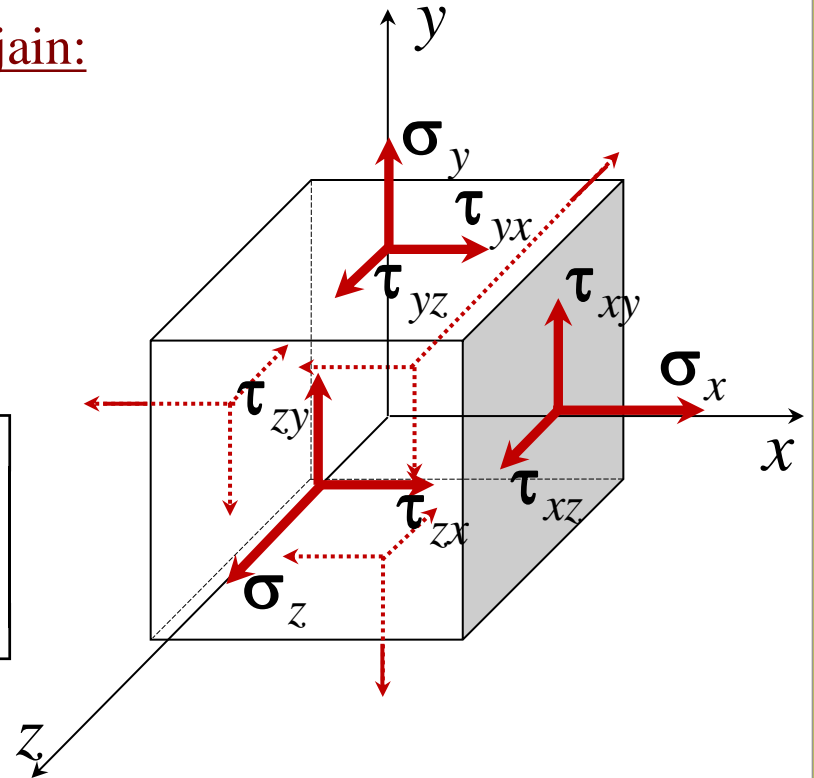


A feszültségvektor

Feszültségvektorok az elemi hasáb oldallapjain:

$$\mathbf{p}_x = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_y = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_z = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_{-x} = \begin{bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{xy} \\ -\tau_{xz} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_{-y} = \begin{bmatrix} -\tau_{yx} \\ -\sigma_y \\ -\tau_{yz} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_{-z} = \begin{bmatrix} -\tau_{zx} \\ -\tau_{zy} \\ -\sigma_z \end{bmatrix}$$



Egy pont feszültségállapota ismert,

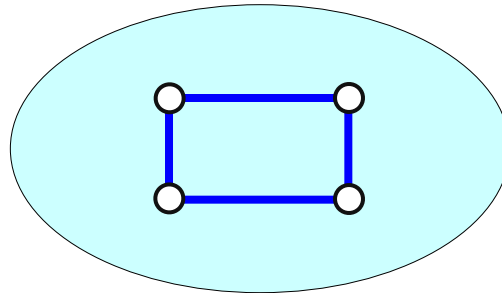
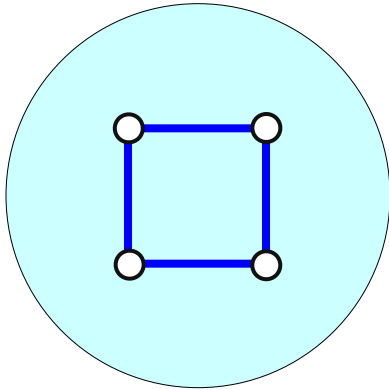
ha bármely síkmetszetére meg tudjuk állapítani a feszültségvektort.

Később látni fogjuk:

ehhez elegendő \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y és \mathbf{p}_z ismerete; és ez csak **6 skalár adat!**

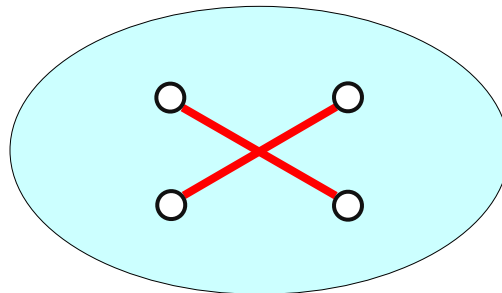
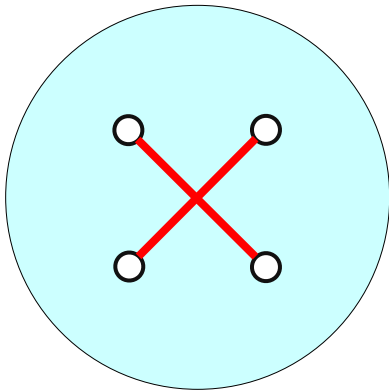
Az alakváltóási állapot jellemzése

Alakváltóás fogalma:



a test pontjainak
távolsága

vagy



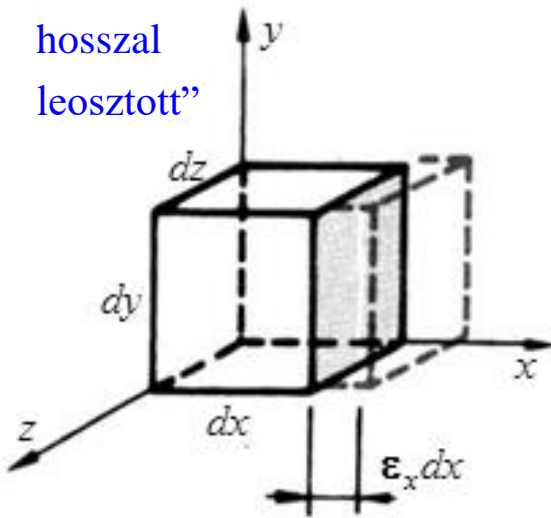
az irányok
relatív szöge megváltozik

Az alakváltozási állapot jellemzése

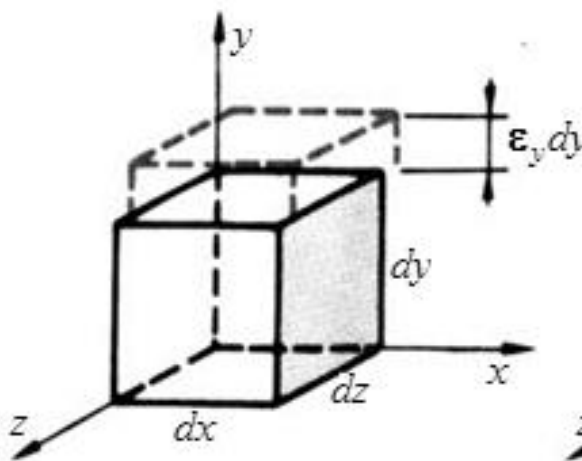
Az elemi hasáb alakváltozásának számszerű leírása:

a) Fajlagos nyúlások: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

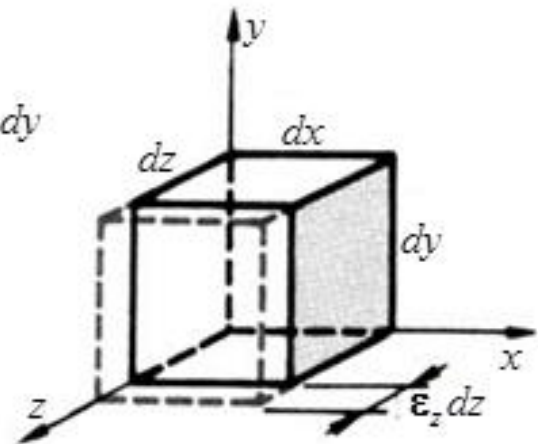
„az eredeti
hosszal
leosztott”



$$" \varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} "$$



$$" \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} "$$

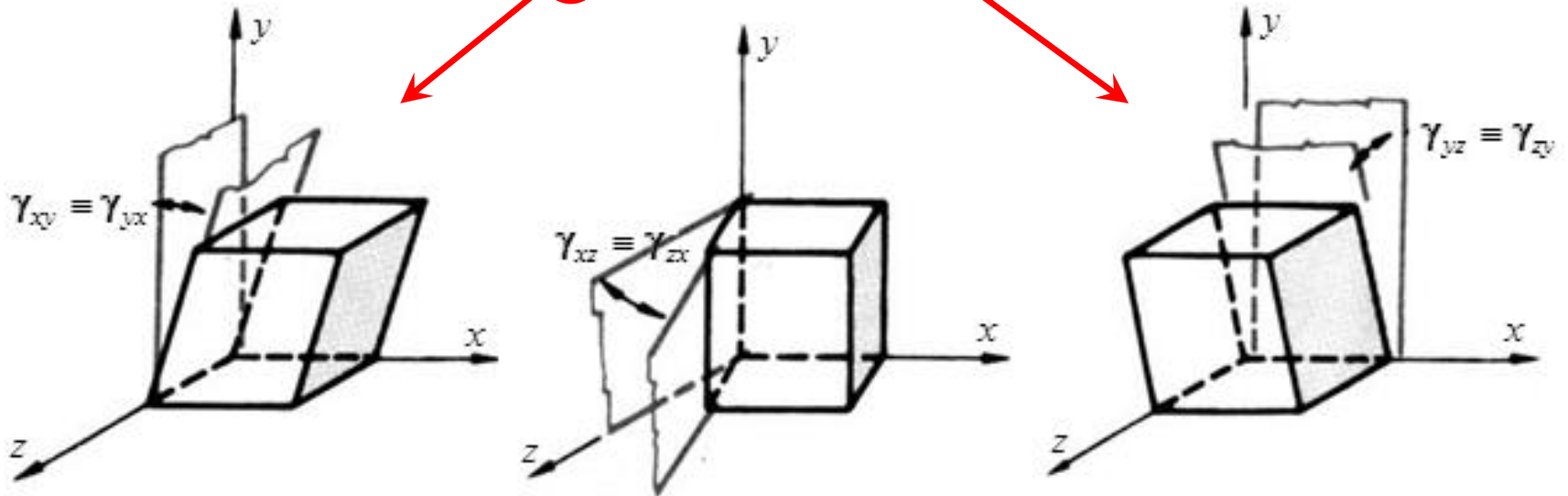


$$" \varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z} "$$

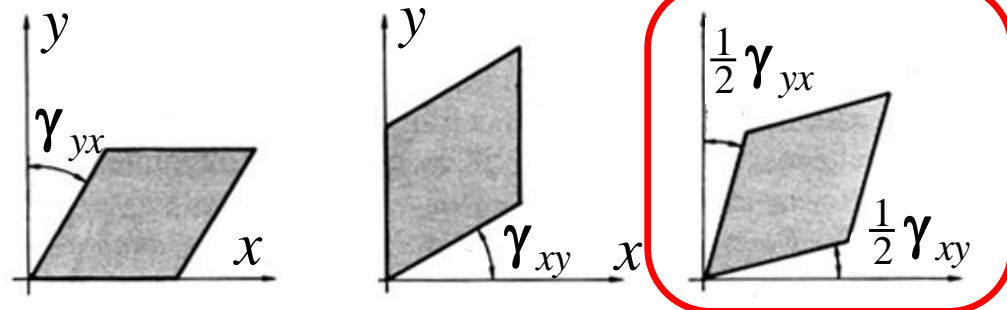
Az alakváltozási állapot jellemzése

Az elemi hasáb alakváltozásának számszerű leírása:

b) Szögtorzulások: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$



Szögtorzulások reciprocitása:



Az alakváltozási állapot jellemzése

Alakváltozási állapot jellemzése egy vizsgált pontban:

a pont állapotváltozására jellemző $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ megadása

Homogén alakváltozási állapot:

a vizsgált test minden pontjában ugyanazok az

$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ deformáció-jellemzők

Dilatáció („fajlagos térfogatváltozás”):

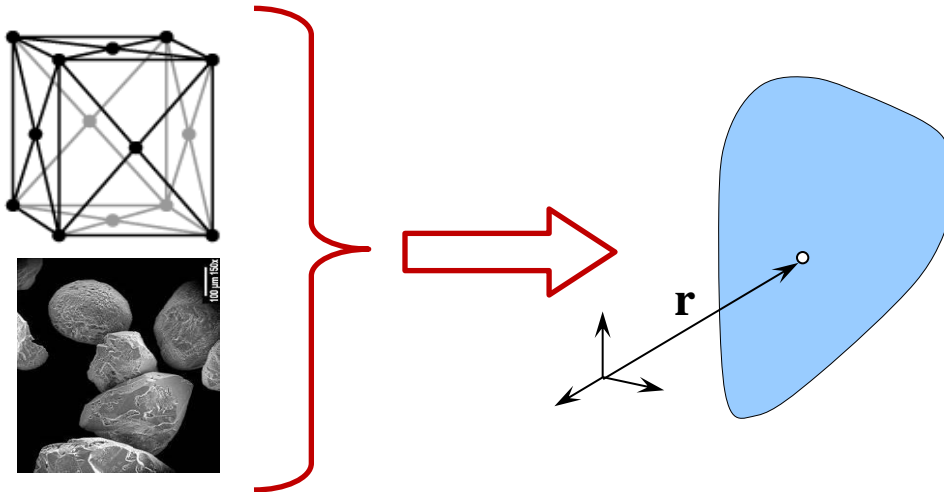
$$e = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{dx(1 + \varepsilon_x) \cdot dy(1 + \varepsilon_y) \cdot dz(1 + \varepsilon_z) - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz}$$

$$e = \frac{(1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) - 1}{1} = \frac{1^3 + \varepsilon_x \cdot 1^2 + \varepsilon_y \cdot 1^2 + \varepsilon_z \cdot 1^2 + \cancel{\varepsilon_x \varepsilon_y \cdot 1} + \cancel{\varepsilon_x \varepsilon_z \cdot 1} + \cancel{\varepsilon_y \varepsilon_z \cdot 1} + \cancel{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z} - 1}{1} \cong \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

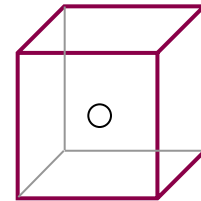
Megjegyzés: e invariáns!

Kontinuum fogalma

≡ „folytonos tartomány”, matematikai absztrakció



elemi
hasáb:



infinitezimálisan kicsi
 $dx \cdot dy \cdot dz$
forgatható!

klasszikus kontinuum állapotváltozói:

eltolódásvektor

feszültségállapot jellemzői

alakváltozási állapot jellemzői

a hely (\mathbf{r})

folytonos

függvényei

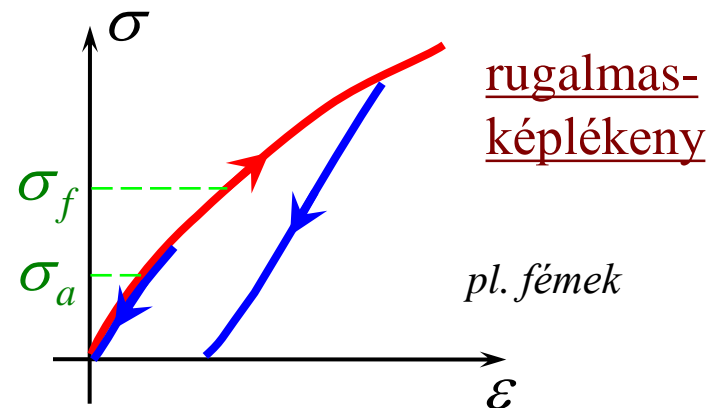
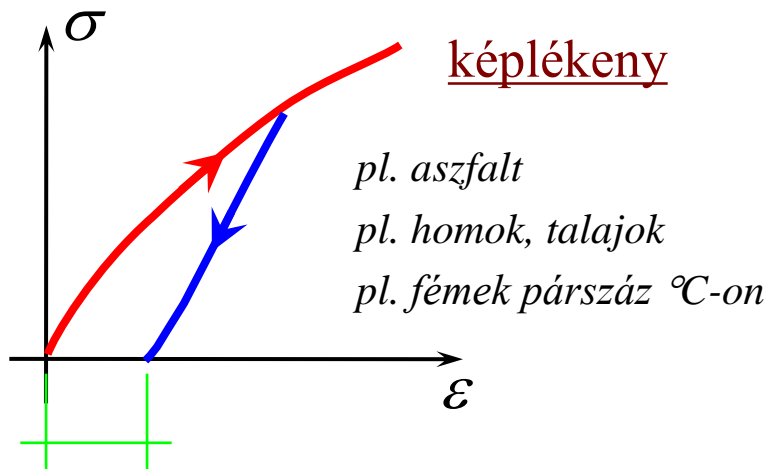
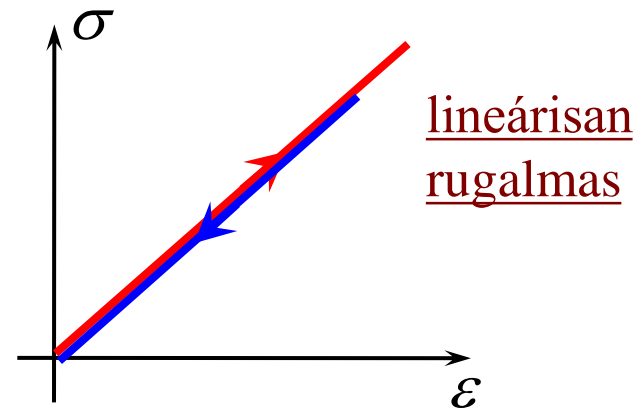
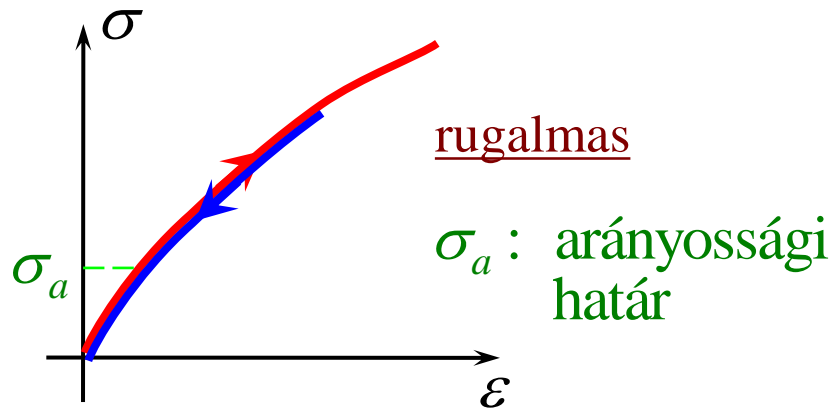
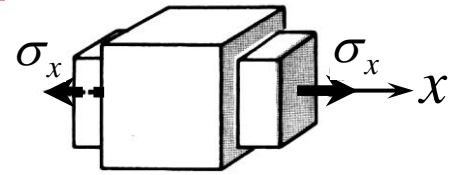
a valódi anyag tulajdonságainak modellezése:

σ és ε közötti összefüggések, mérésekből
(„fenomenológiai modellalkotás”)

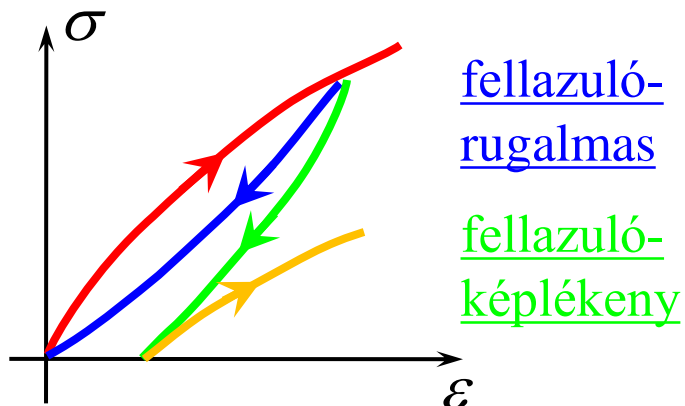
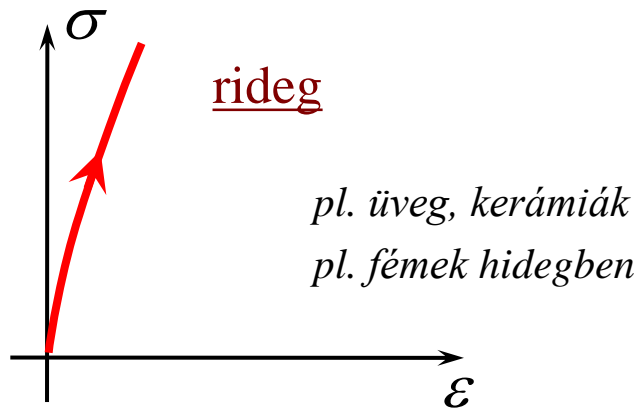
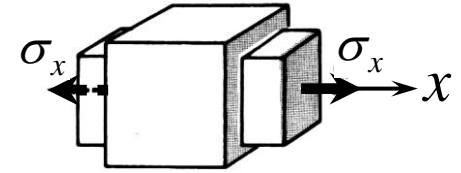
például:

Hooke-modell

Az anyagok osztályozása az egytengelyű húzó/nyomódiagramok alapján



Az anyagok osztályozása az egytengelyű húzó/nyomódiagramok alapján



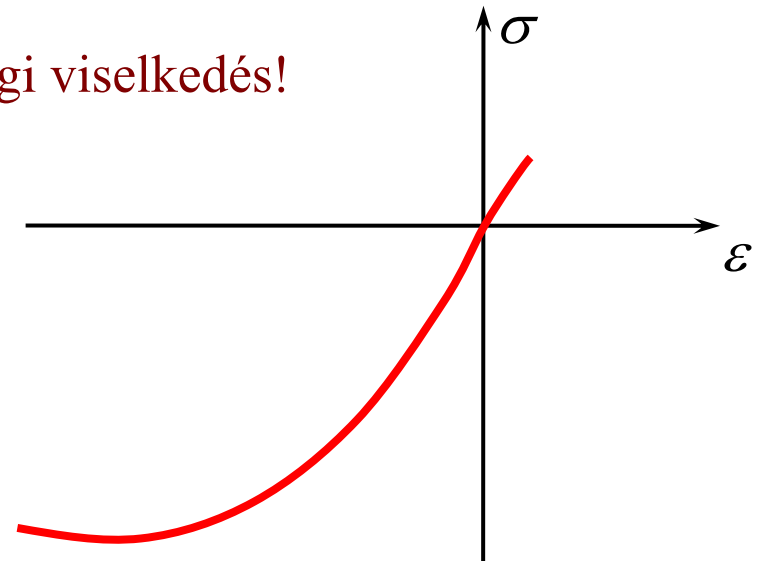
*pl. üveg kis teherre,
finomszemcsés közetek*

pl. beton, heterogén közetek

Az anyagok osztályozása az egytengelyű húzó/nyomódiagramok alapján

Húzásra és nyomásra eltérő is lehet az anyagi viselkedés!

pl. Beton egytengelyű húzása és nyomása:

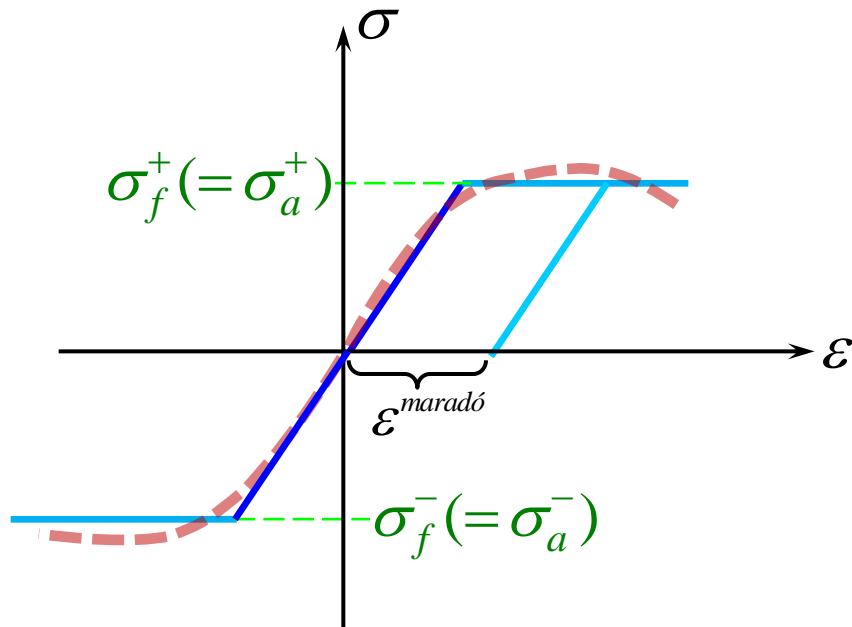


pl. Száraz szemcsés anyagok:



nincs húzási ellenállás!

A lineárisan rugalmas – tökéletesen képlékeny anyagmodell



Miről szól ez az előadás?

→ Szilárdságtan, szilárd test, szerkezetek szilárdságtani vizsgálata

→ Alapfogalmak definíciói:

kontinuum

feszültség és számszerű megadása

alakváltozás és számszerű megadása

az anyagi viselkedés fő típusai

→ Közelítések az Elemi szilárdságtanban:

Hooke-modell

homogén kontinuum

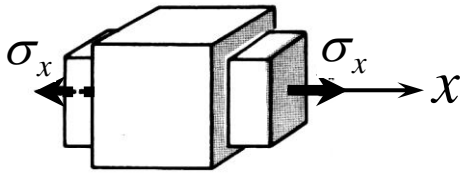
izotrop anyagi viselkedés

hőmérséklettől független, időtől független anyagi viselkedés

Saint-Venant-elv

A Hooke-modell

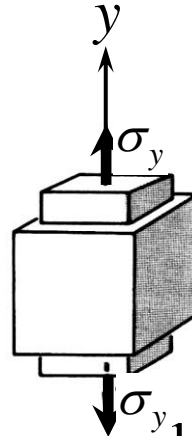
Fajlagos nyúlásokra:



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$$

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x = \frac{1}{E} [-\nu \cdot \sigma_x]$$

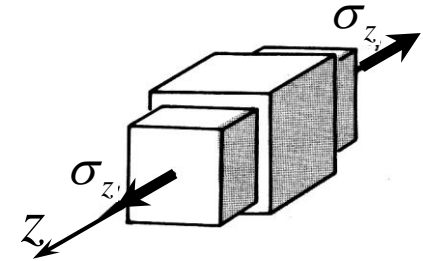
$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = \frac{1}{E} [-\nu \cdot \sigma_x]$$



$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_y = \frac{1}{E} [-\nu \cdot \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y$$

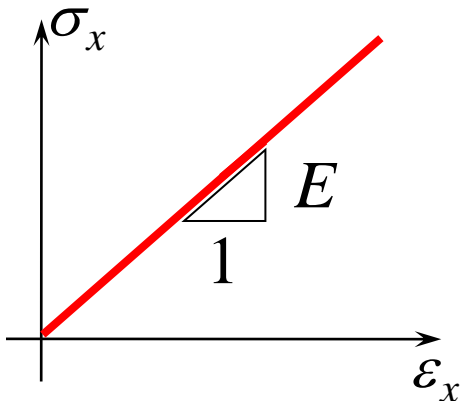
$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_y = \frac{1}{E} [-\nu \cdot \sigma_y]$$



$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_z = \frac{1}{E} [-\nu \cdot \sigma_z]$$

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z = \frac{1}{E} [-\nu \cdot \sigma_z]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z$$



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

E : Young-modulus

ν : Poisson-tényező

A Hooke-modell

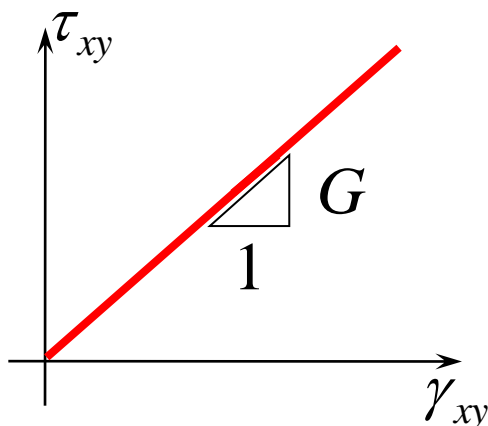
Fajlagos nyúlásokra:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

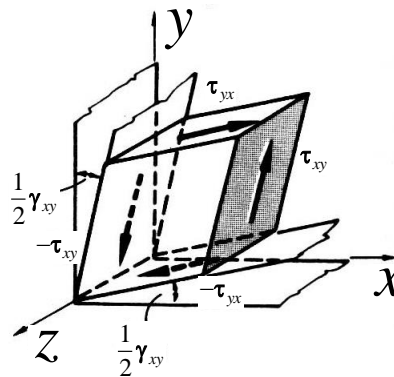
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

Szögtorzulásokra:



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$



G : nyírási modulus

$$G = \frac{1}{2 \cdot (1 + \nu)} E$$

A Hooke-modell hőmérsékletváltozás esetén

Fajlagos nyúlásokra:

EGYMÁSRA HALMOZÁS!

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha \cdot \Delta T$$

Szögtorzulásokra: $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} + 0$

NINCS !

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} + 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} + 0$$

A fontosabb anyagi tulajdonságok közelítése a szilárdságtanban

a) Homogén / Inhomogén „anyag”

„HOMOGÉN”: minden pontban azonosak a szilárdsági tulajdonságai

„INHOMOGÉN”: szilárdsági tulajdonságai helytől függően változnak

Milyen részletességgel vizsgáljuk?



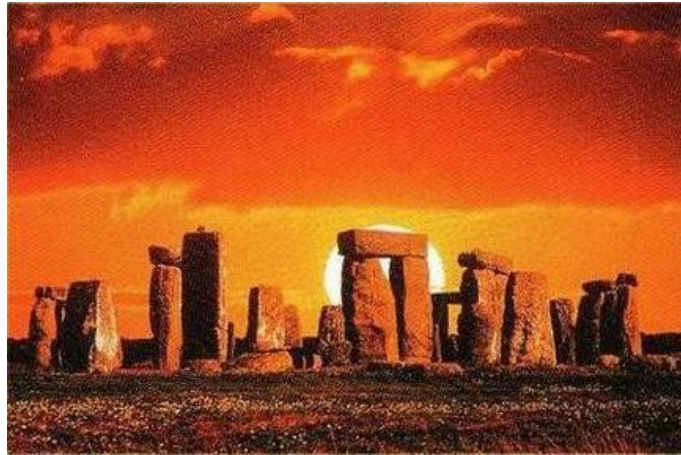
pl. homok távolról



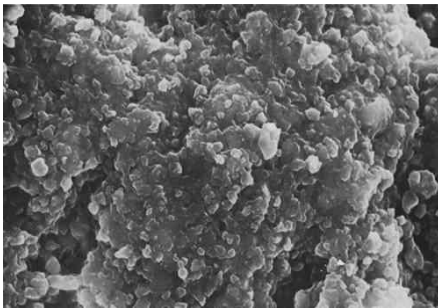
pl. homok nagyító alatt

Homogén / Inhomogén „anyag”

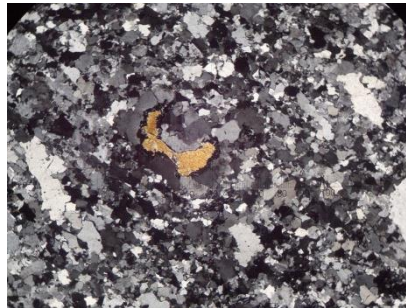
Kő:



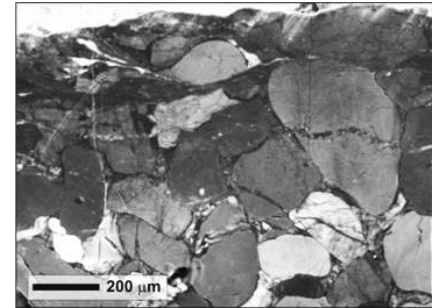
Mikroszerkezet:



mész



granulit

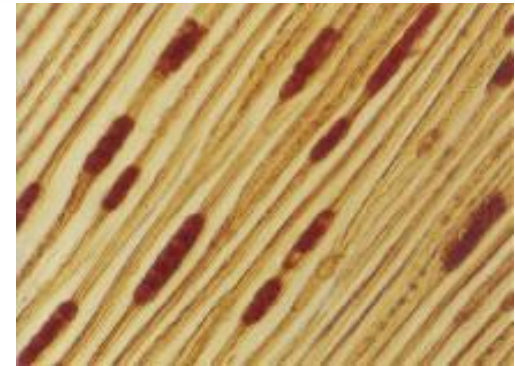
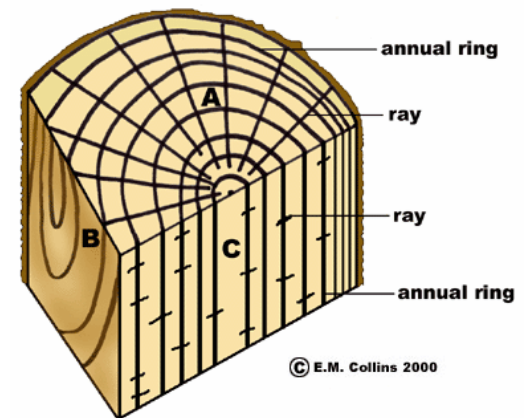


homokkő

Homogén / Inhomogén „anyag”

Fa:

Mikroszerkezet:

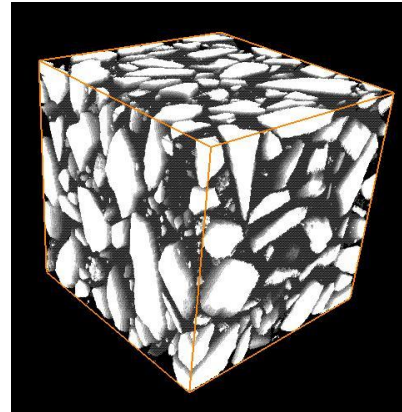


Homogén / Inhomogén „anyag”

Beton:



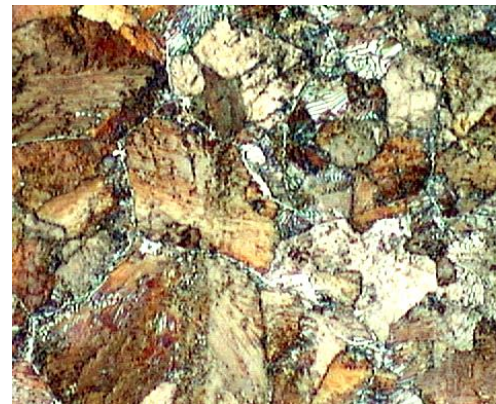
Mikroszerkezet:



Acél:



Mikroszerkezet:

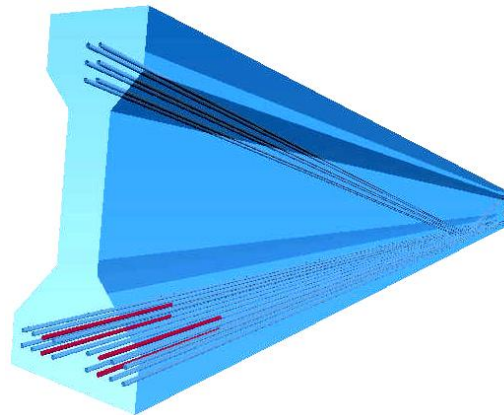


Homogén / Inhomogén „anyag”

Azonos anyag, bár a mikroszerkezet inhomogén:

→ modellje a szilárdságtanban: homogén (egyetlen folytonos tartomány, mindenhol azonos anyagjellemzőkkel)

DE: pl. vasbeton:



(+ Öszvérszerkezetek, stb.)

Ha a szerkezet makroszinten is több különböző anyagból áll:

→ modellje a szilárdságtanban: inhomogén
(több folytonos, homogén tartomány, más-más anyagjellemzőkkel)

A fontosabb anyagi tulajdonságok közelítése a szilárdságtanban

a) Homogén / Inhomogén „anyag”

b) Izotróp / anizotróp anyagi viselkedés

→ izotróp anyag:

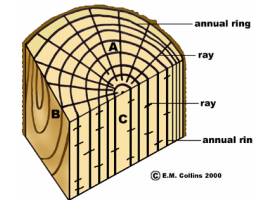
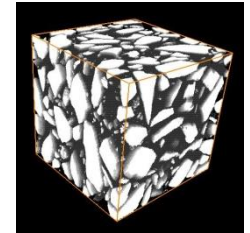
pl. beton

mechanikai viselkedését nem befolyásolja a terhelés iránya

→ anizotróp anyag:

pl. fa

a terhelés irányától függ a mechanikai viselkedése



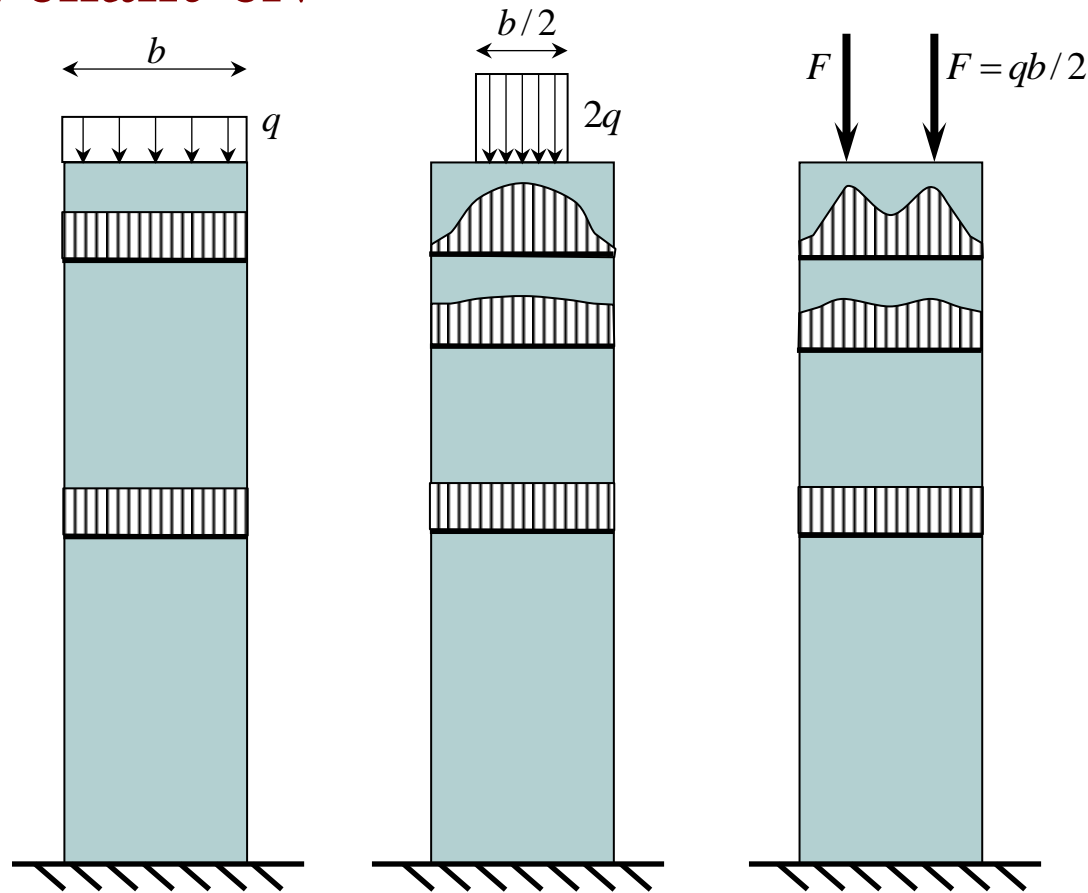
c) Hőmérséklettől függő / hőmérséklettől független anyagi viselkedés

d) Időfüggő / időfüggetlen anyagi viselkedés

↳ pl. kúszás

↳ pl. terhelés sebességétől függő anyagi merevség és teherbírás

A Saint-Venant-elv



Ha a teher eloszlása módosul egy kicsiny tartományon:

→ a feszültségek és alakváltozások csak a közelében változnak meg
„lokális változásnak lokális a hatása”

Az elemi szilárdságtan alapfeltevései

Az anyag modellje:

- homogén (*egyes feladatokban: inhomogén, 2-3 tartományból áll*)
- izotrop,
- lineárisan rugalmas – tökéletesen képlékeny,
- terheletlen állapotban feszültségmentes
- mechanikai viselkedése független a hőmérséklettől, időtől,
terhelési úttól

Az elmozdulások és alakváltozások:

- kicsik, közöttük lineáris kapcsolatok [ld. később]
- egyensúlyi egyenletek felírásakor a kiindulási geometria használható

A terhelés:

- kvázistatikus [nincsenek gyorsulások, sebességek, mozgási energia]
- Saint-Venant-elv

Ellenőrző kérdések

1. Mit értünk homogén/inhomogén kontinuumon? Mit értünk izotrop és anizotrop anyagi viselkedésen? Mit jelent a rugalmas, a lineárisan rugalmas és a képlékeny anyagi viselkedés?
2. Mi a feszültségvektor? Mit jelent a normálfeszültség és a nyírófeszültség?
3. Mikor mondjuk azt, hogy egy elemi hasáb deformálódik? Ismertesse az elemi hasáb alakváltozásának számszerű jellemzőit!
4. Mutassa be az elemi szilárdságtanban alkalmazott legfontosabb alapfeltevéseket! Mit mond ki a Saint-Venant-elv? Szemléltesse is egy példa segítségével!
5. Ismertesse a lineárisan rugalmas anyag Hooke-modelljét! Magyarázza el a képletekben szereplő anyagjellemzők jelentését: mit ad meg a Poisson-tényező, a Young-modulus és a nyírési modulus?