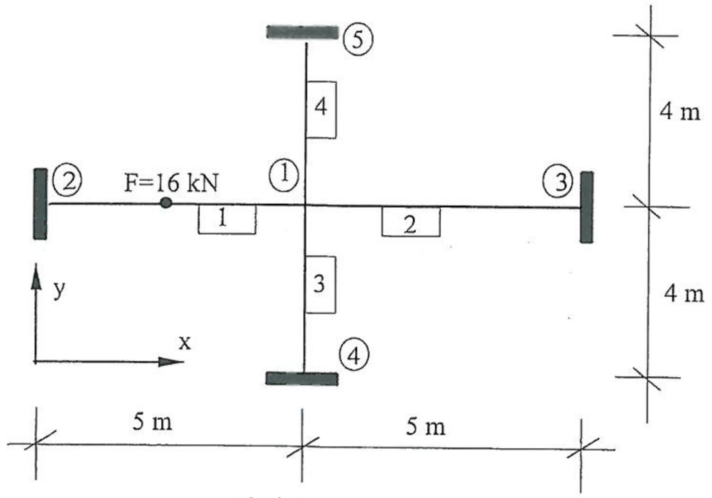
1.5. Födém tartórácsok

A hídtartórácsnál megkülönböztettük a megtámasztott hossztartókat és az őket összekötő kereszttartókat. Az utóbbiaknak nem volt külső megtámasztásuk. A tartórács egy másik alkalmazási területe az, amikor a tartórácsot térlezárásra használjuk, és a tartóráccsal biztosítjuk a födém kétirányú teherviselését. Ehhez természetesen az kell, hogy mind a két irányban futó gerendák megtámasszuk. A födémtartórácsok általában derékszögűek és célszerű a globális koordinátarendszer xy tengelyeit a gerendákkal párhuzamosan felvenni. Az alábbiakban egy egyszerű példán mutatjuk be a fentebb ismertetett számítási eljárást. A 22. ábrán látható szerkezetnél a két irányba futó gerendák a végeiken egyaránt befogottak. Csomóponti elmozdulások csak a keresztezésnél lévő csomópontnál lesznek. Ennek megfelelően a csomópontszámozást az elmozduló csomópontnál kezdjük, és a megtámasztásokat úgy vesszük figyelembe, hogy az egyenletrendszerben nem szerepeltetjük a befogott csomópontok elmozdulásaihoz tartozó sorokat és oszlopokat. Ennek megfelelően csak egy három ismeretlenes egyenletrendszert kell majd megoldanunk.



29.ábra

A merevségeknek adott konstanssal osztott értékeit adjuk meg. Ebben az esetben az elmozdulások nagyítottak lesznek, de az igénybevételeket helyesen kapjuk meg.

Merevségek x irányban:

$$EI_h = 125,$$
$$GI_{cs} = 80.$$

Merevségek y irányban:

$$EI_h = 96,$$
$$GI_{cs} = 48.$$

Egyensúlyi egyenleteket csak a keresztezésnél lévő csomópontnál írunk fel, így a szerkezet merevségi mátrixa egy blokkból áll. Az 1. számú csomópont minden csatlakozó rúdnál a kezdőpont, így:

$$\underline{\underline{K}} = \boxed{\begin{matrix} \underline{\underline{K}}^1_{ii} + \underline{\underline{K}}^2_{ii} + \\ + \underline{\underline{K}}^3_{ii} + \underline{\underline{K}}^4_{ii} \end{matrix}}$$

Ezek alapján a merevségi mátrix előállításához elegendő a $\underline{\underline{K}}^r_{ii}$ blokkokat előállítani.

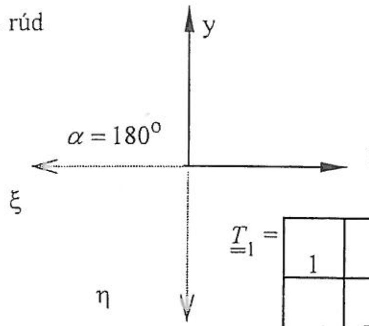
a.) A $\underline{\underline{K}}^r_{ii}$ blokkok saját koordinátarendszerben

A blokkokat az I. táblázat alapján állíthatjuk elő. Ha egy rúdnál a merevségi adatok és a rúd hossza azonos, az elemi merevségi mátrix - a saját koordinátarendszerben - azonos lesz.

$$\underline{\underline{K}}^1_{ii} = \underline{\underline{K}}^2_{ii} = \begin{bmatrix} 12 & & -30 \\ & 16 & \\ -30 & & 100 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{K}}^3_{ii} = \underline{\underline{K}}^4_{ii} = \begin{bmatrix} 18 & & -36 \\ & 12 & \\ -36 & & 96 \end{bmatrix}$$

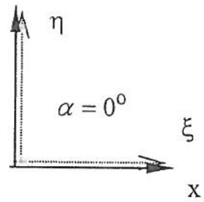
b.) Transzformáló mátrixok

1. rúd



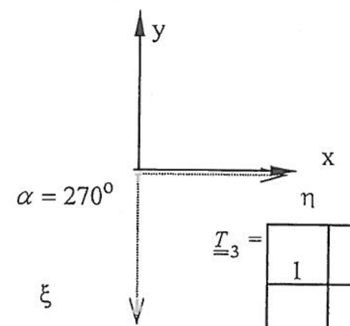
$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. rúd



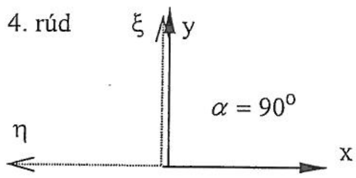
$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. rúd



$$\underline{\underline{T}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. rúd



$$\underline{\underline{T}}_4 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c.) A $\underline{\underline{K}}^r_{ii}$ blokkok globális koordinátarendszerben

$$\underline{\underline{T}}_1 \underline{\underline{K}}^1_{ii} \underline{\underline{T}}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 12 & & -30 \\ & 16 & \\ -30 & & 100 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & & 30 \\ & 16 & \\ 30 & & 100 \end{bmatrix}$$

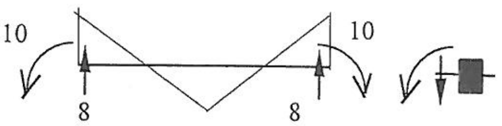
$$\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{K}}^2_{ii} \underline{\underline{T}}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 12 & & -30 \\ & 16 & \\ -30 & & 100 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & & -30 \\ & 16 & \\ -30 & & 100 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}_3 \underline{\underline{K}}_{ii}^3 \underline{\underline{T}}_3^{\,T} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 18 & & -36 \\ & 12 & \\ -36 & & 96 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -36 & \\ -36 & 96 & \\ & & 12 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}_4 \underline{\underline{K}}_{ii}^4 \underline{\underline{T}}_4^{\,T} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 18 & & -36 \\ & 12 & \\ -36 & & 96 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 36 & \\ 36 & 96 & \\ & & 12 \end{bmatrix}$$

d.) A szerkezet merevségi mátrixa és tehervektora

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 60 & & \\ & 224 & \\ & & 224 \end{bmatrix}$$



$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix} Q_z \\ W_x \\ W_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ \\ 10 \end{bmatrix}$$

e.) A szerkezet elmozdulásai globális koordinátarendszerben

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} u_z^{\,1} \\ \varphi_x^{\,1} \\ \varphi_y^{\,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}133333 \\ 0 \\ 0{,}044643 \end{bmatrix}$$

f.) Rúdvégi erők az 1. csomópontnál lokális koordinátarendszerben

1. rúd. Rúdvégi erők az elmozdulásokból

$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix} 12 & & -30 \\ & 16 & \\ -30 & & 100 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}133333 \\ 0 \\ 0{,}044643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}9393 \\ 0 \\ -8{,}\ 4643 \end{bmatrix}$$

Rúdvégi erők a kezdeti rúdvégi erőkkel való összegzés után

$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix} 2{,}9393 \\ 0 \\ -8{,}\ 4643 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5{,}0607 \\ 0 \\ 1{,}5357 \end{bmatrix}$$

2. rúd

$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix} 12 & & -30 \\ & 16 & \\ -30 & & 100 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}133333 \\ 0 \\ 0{,}044643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2607 \\ 0 \\ 0{,}\ 4644 \end{bmatrix}$$

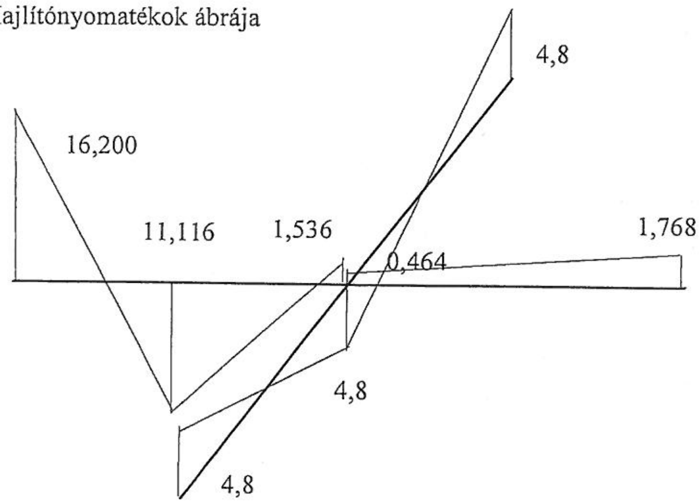
3. rúd

$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix} 18 & & -36 \\ & 12 & \\ -36 & & 96 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}133333 \\ 0 \\ 0{,}044643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}4 \\ -0{,}5357 \\ -4{,}8 \end{bmatrix}$$

4. rúd

$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix} 18 & & -36 \\ & 12 & \\ -36 & & 96 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}133333 \\ 0 \\ 0{,}044643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}4 \\ 0{,}5357 \\ -4{,}8 \end{bmatrix}$$

g.) Hajlítónyomatékok ábrája



Az x irányú tartónál - a kereszteződésnél - az y irányú tartóban ébredő csavarónyomaték miatt ugrás van.

Nézzük meg hogyan alakul a megoldás, ha a csavarómerevséget elhanyagoljuk. Ez esetben a szerkezet merevségi mátrixa és elmozdulásai:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 60 & & \\ & 192 & \\ & & 200 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} u_z^{\,1} \\ \varphi_x^{\,1} \\ \varphi_y^{\,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}133333 \\ 0 \\ 0{,}05 \end{bmatrix}$$

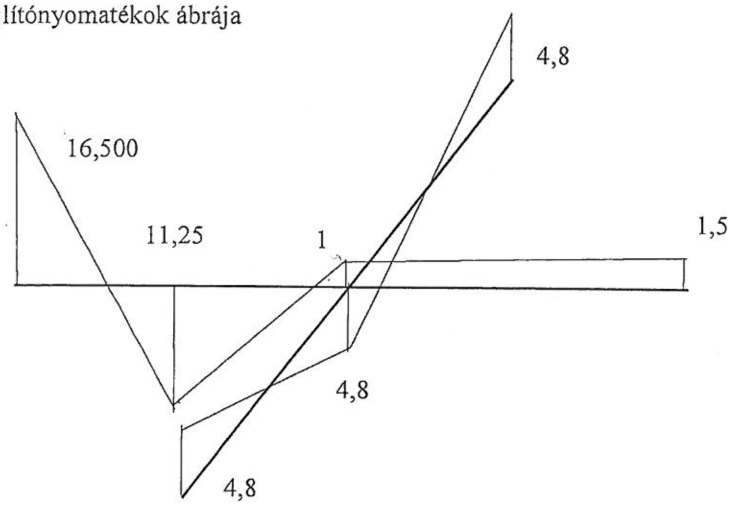
Rúdvégi erők az 1. számú rúdnál, a kezdeti rúdvégi erőkkel való összegzés után

$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix}3,1\\0\\-9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-8\\0\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4,9\\0\\1\end{bmatrix}$$

Rúdvégi erők a 2-4. számú rudaknál

$$\begin{bmatrix}0,1\\0\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2,4\\0\\-4,8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2,4\\0\\-4,8\end{bmatrix}$$

A hajlítónyomatékok ábrája



Az x irányú tartónál az kereszteződésnél most nincs ugrás.

Vajon hogyan alakul a megoldás, ha a csavarómerevséget tízszeresére növeljük. A szerkezet merevségi mátrixa és elmozdulásai:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix}60 & & \\ & 440 & \\ & & 512\end{bmatrix} \qquad \underline{x}_1 = \begin{bmatrix}u_z^1\\ \varphi_x^1\\ \varphi_y^1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,133333\\0\\0,022727\end{bmatrix}$$

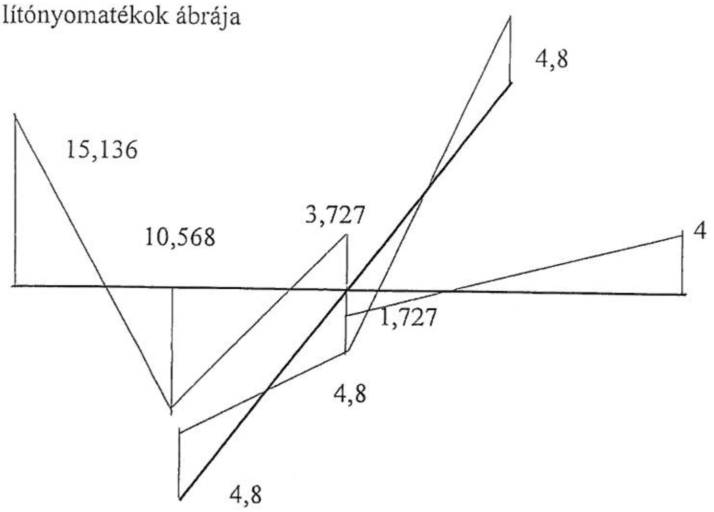
Rúdvégi erők az 1. számú rúdnál a kezdeti rúdvégi erőkkel való összegzés után

$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix}2,2818\\0\\-6,2727\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-8\\0\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5,7182\\0\\3,7273\end{bmatrix}$$

Rúdvégi erők a 2-4. számú rudaknál

0,9182	2,4	2,4
0	-2,727	2,727
-1,7273	-4,8	-4,8

A hajlítónyomatékok ábrája



Látható, hogy a 2. számú rúd igénybevételei nőttek, a terhelt 1. számú rúd igénybevételei pedig csökkentek.