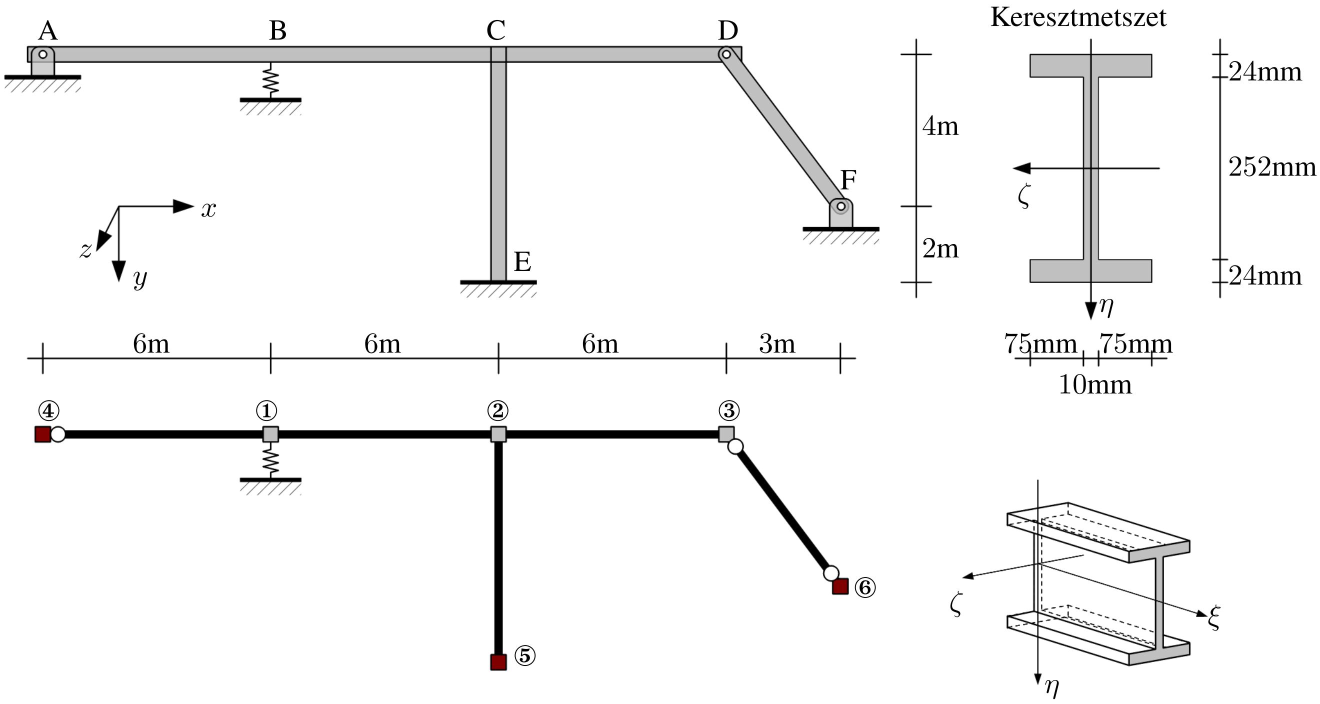
Síkbeli keretek mátrixmódszerrel

1 Határozzuk meg a tartó elmozdulásait és igénybevételeit! (Terhek részletesen a 4. oldalon)
Keresztmetszet: vékonyfalú acélprofil ($E = 200\,\text{GPa}$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}/°\text{C}$). Rugalmas támasz: $c = 50000\,\text{kN/m}$.



A keresztmetszet geometriai jellemzői:

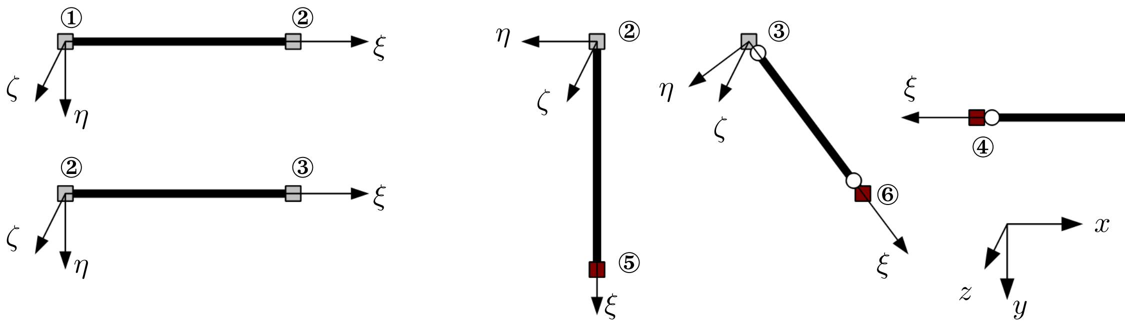
$$A = 160 \cdot 300 - 150 \cdot 252 = 10200\,\text{mm}^2 = 102\,\text{cm}^2$$

$$I_\zeta = \frac{1}{12} \cdot 160 \cdot 300^3 - \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 252^3 = 159\,962\,400\,\text{mm}^4 = 15996,24\,\text{cm}^4$$

$$EA = 200\,\text{GPa} \cdot 102\,\text{cm}^2 = 2\,040\,000\,\text{kN}$$

$$EI_\zeta = 200\,\text{GPa} \cdot 15996,24\,\text{cm}^4 = 31992,48\,\text{kNm}^2$$

Koordináta-rendszerek:



$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(x,\xi) & \cos(x,\eta) & \cos(x,\zeta) \\ \cos(y,\xi) & \cos(y,\eta) & \cos(y,\zeta) \\ \cos(z,\xi) & \cos(z,\eta) & \cos(z,\zeta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{14} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{25} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{36} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alapváltozók:

Csomóponti elmozdulások:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \\ v_{3z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} & v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} & v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Csomóponti erők:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ W_{1z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ W_{2z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ W_{3z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & W_{1z} & F_{2x} & F_{2y} & W_{2z} & F_{3x} & F_{3y} & W_{3z} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Rudak igénybevételei:

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} N_{12\xi} \\ T_{12\eta} \\ M_{12\zeta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{14} = \begin{bmatrix} N_{14\xi} \\ T_{14\eta} \\ M_{14\zeta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{23} = \begin{bmatrix} N_{23\xi} \\ T_{23\eta} \\ M_{23\zeta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{25} = \begin{bmatrix} N_{25\xi} \\ T_{25\eta} \\ M_{25\zeta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{36} = \begin{bmatrix} N_{36\xi} \\ T_{36\eta} \\ M_{36\zeta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{14} \\ \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{25} \\ \mathbf{s}_{36} \end{bmatrix}$$

Merevségek:

Elemi merevségi mátrixok (befogott–befogott, befogott–csuklós, csuklós–csuklós) a lokális koordináta-rendszerben

$$\mathbf{k}^{\mathrm{bb}} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & +\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{k}^{\mathrm{bc}} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{3EI}{l^3} & +\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & +\frac{3EI}{l^2} & +\frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & +\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}^{\mathrm{cc}} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Rudak elemi merevségi mátrixai a lokális koordináta-rendszerben

$$\mathbf{k}_{12}^{\xi\eta\zeta} = \mathbf{k}_{23}^{\xi\eta\zeta} = \mathbf{k}_{25}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} +340000 & 0 & 0 & -340000 & 0 & 0 \\ 0 & +1777,36 & +5332,08 & 0 & -1777,36 & +5332,08 \\ 0 & +5332,08 & +21328,32 & 0 & -5332,08 & +10664,16 \\ -340000 & 0 & 0 & +340000 & 0 & 0 \\ 0 & -1777,36 & -5332,08 & 0 & +1777,36 & -5332,08 \\ 0 & +5332,08 & +10664,16 & 0 & -5332,08 & +21328,32 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{k}_{14}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} +340000 & 0 & 0 & -340000 & 0 & 0 \\ 0 & +444,34 & +2666,04 & 0 & -444,34 & 0 \\ 0 & +2666,04 & +15996,24 & 0 & -2666,04 & 0 \\ -340000 & 0 & 0 & +340000 & 0 & 0 \\ 0 & -444,34 & -2666,04 & 0 & +444,34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{k}_{36}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} +408000 & 0 & 0 & -408000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -408000 & 0 & 0 & +408000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Elemi merevségi mátrixok transzformációja a globális koordináta-rendszerbe

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{k}_{ij}^{\xi\eta\zeta} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Rudak elemi merevségi mátrixai a globális koordináta-rendszerben

$$\mathbf{k}_{12} = \mathbf{k}_{12}^{\xi\eta\zeta}, \quad \mathbf{k}_{23} = \mathbf{k}_{23}^{\xi\eta\zeta},$$

$$\mathbf{k}_{14} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{14} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{14} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{k}_{14}^{\xi\eta\zeta} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{14}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{14}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{14} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{14} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{14}^{11,\xi\eta\zeta} & \mathbf{k}_{14}^{14,\xi\eta\zeta} \\ \mathbf{k}_{14}^{41,\xi\eta\zeta} & \mathbf{k}_{14}^{44,\xi\eta\zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{14}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{14}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{14}^{11} = \mathbf{T}_{14} \cdot \mathbf{k}_{14}^{11,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{14}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +340000 & 0 & 0 \\ 0 & +444,34 & +2666,04 \\ 0 & +2666,04 & +15996,24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{14}^{11} = \begin{bmatrix} +340000 & 0 & 0 \\ 0 & +444,34 & -2666,04 \\ 0 & -2666,04 & +15996,24 \end{bmatrix} \tag{6}$$

A $\mathbf{k}_{14}^{14}$, $\mathbf{k}_{14}^{41}$ és $\mathbf{k}_{14}^{44}$ blokkok számítása nem szükséges a teljes merevségi mátrixhoz.

$$\mathbf{k}_{25} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{25} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{25} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{k}_{25}^{\xi\eta\zeta} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{25}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{25}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{25} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{25}^{22,\xi\eta\zeta} & \mathbf{k}_{25}^{25,\xi\eta\zeta} \\ \mathbf{k}_{25}^{52,\xi\eta\zeta} & \mathbf{k}_{25}^{55,\xi\eta\zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{25}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{25}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{25}^{22} = \mathbf{T}_{25} \cdot \mathbf{k}_{25}^{22,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{25}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +340000 & 0 & 0 \\ 0 & +1777,36 & +5332,08 \\ 0 & +5332,08 & +21328,32 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{25}^{22} = \begin{bmatrix} +177736 & 0 & -5332,08 \\ 0 & +340000 & 0 \\ -5332,08 & 0 & +21328,32 \end{bmatrix} \tag{7}$$

A $\mathbf{k}_{25}^{25}$, $\mathbf{k}_{25}^{52}$ és $\mathbf{k}_{25}^{55}$ blokkok számítása nem szükséges a teljes merevségi mátrixhoz.

$$\mathbf{k}_{36} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{36} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{36} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{k}_{36}^{\xi\eta\zeta} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{36}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{36}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{36} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{36}^{33,\xi\eta\zeta} & \mathbf{k}_{36}^{36,\xi\eta\zeta} \\ \mathbf{k}_{36}^{63,\xi\eta\zeta} & \mathbf{k}_{36}^{66,\xi\eta\zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{36}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{36}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{36}^{33} = \mathbf{T}_{36} \cdot \mathbf{k}_{36}^{33,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{36}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +408000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{36}^{33} = \begin{bmatrix} +146880 & +195840 & 0 \\ +195840 & +261120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

A $\mathbf{k}_{36}^{36}$, $\mathbf{k}_{36}^{63}$ és $\mathbf{k}_{36}^{66}$ blokkok számítása nem szükséges a teljes merevségi mátrixhoz.

A rugalmas támasz merevségi mátrixa

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +50000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

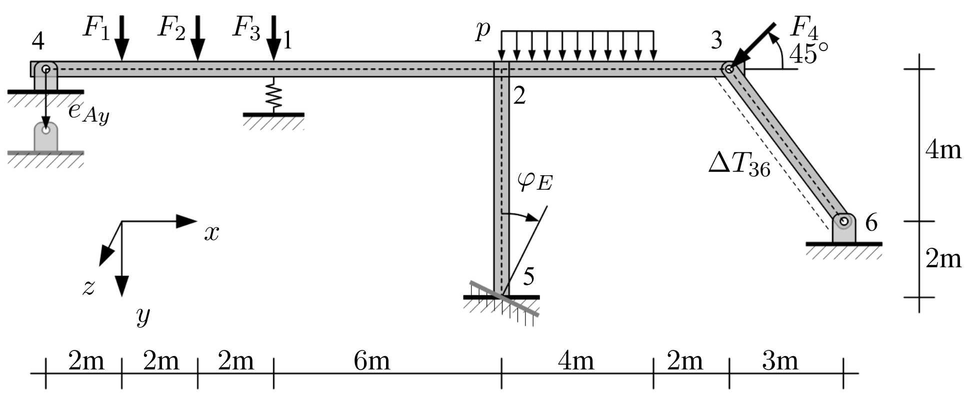
A szerkezet teljes merevségi mátrixa

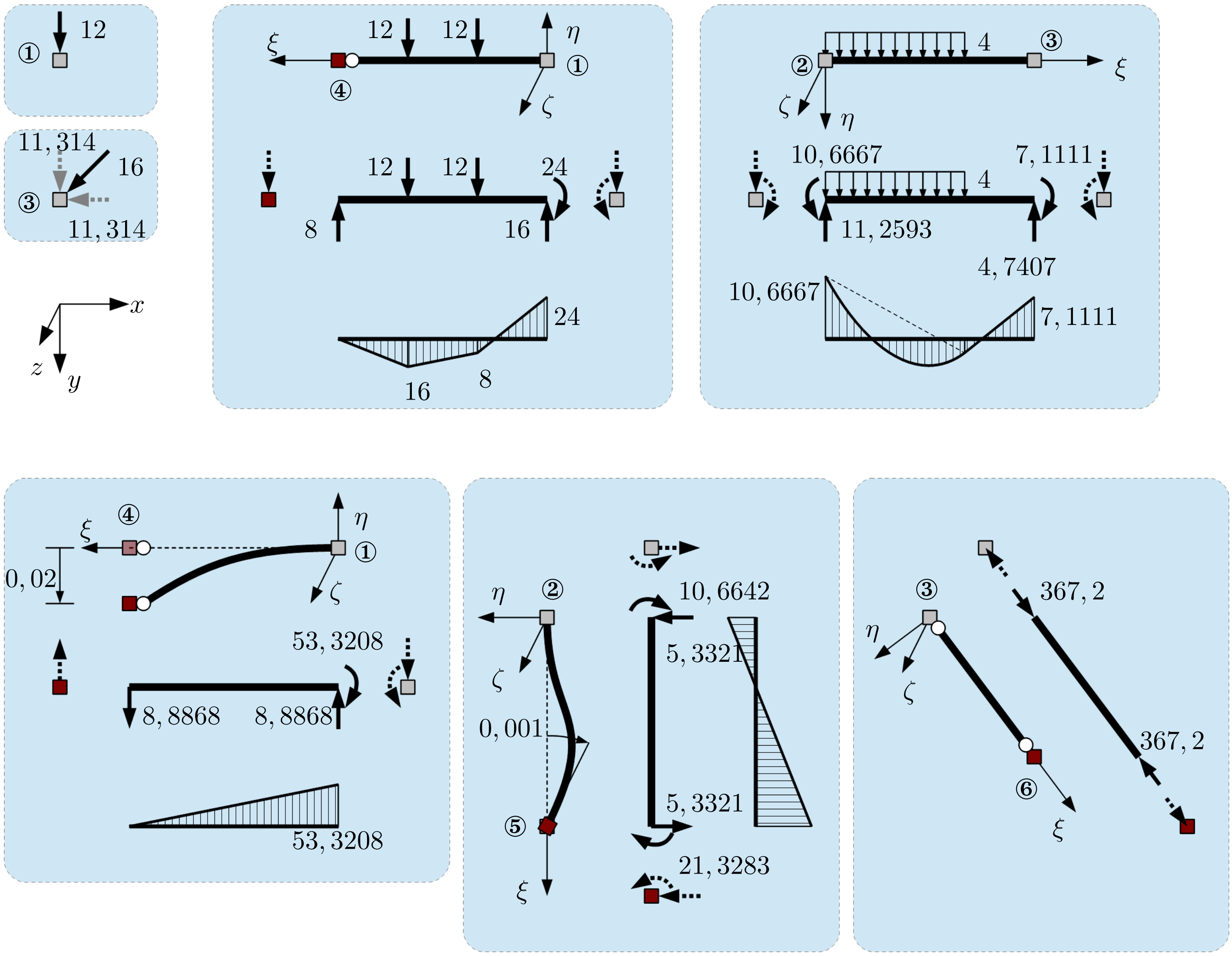
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{12}^{11} + \mathbf{k}_{14}^{11} + \mathbf{C}_1 & \mathbf{k}_{12}^{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{12}^{21} & \mathbf{k}_{12}^{22} + \mathbf{k}_{23}^{22} + \mathbf{k}_{25}^{22} & \mathbf{k}_{23}^{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{23}^{32} & \mathbf{k}_{23}^{33} + \mathbf{k}_{36}^{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 680000 & 0 & 0 & -340000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52221,70 & 2666,04 & 0 & -1777,36 & 5332,08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2666,04 & 37324,56 & 0 & -5332,08 & 10664,16 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -340000 & 0 & 0 & 681777,36 & 0 & -5332,08 & -340000 & 0 & 0 \\ 0 & -1777,36 & -5332,08 & 0 & 343554,72 & 0 & 0 & -1777,36 & 5332,08 \\ 0 & 5332,08 & 10664,16 & -5332,08 & 0 & 63984,96 & 0 & -5332,08 & 10664,16 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -340000 & 0 & 0 & 486880 & 195840 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1777,36 & -5332,08 & 195840 & 262897,36 & -5332,08 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5332,08 & 10664,16 & 0 & -5332,08 & 21328,32 \end{array}\right] \tag{9}$$

Terhek:

- $F_1 = F_2 = F_3 = 12\,\mathrm{kN}$, $F_4 = 16\,\mathrm{kN}$ koncentrált erők,
- $p = 4\,\mathrm{kN/m}$ részleges megoszló teher,
- $e_{Ay} = 2\,\mathrm{cm}\downarrow$ $\quad \varphi_E = 0,001\,\mathrm{rad}\circlearrowright$ támaszelmozdulások,
- $\Delta T_{36} = +15°\mathrm{C}$ egyenletes hőmérsékletváltozás.





Közvetlen csomóponti terhek

① csomópont:

$$F_{1y} = 12\,\mathrm{kN}, \qquad \mathbf{q}_1^{\mathrm{csp}} = \begin{bmatrix} 0 \\ +12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③ csomópont:

$$F_{3x} = -16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -11,314\,\mathrm{kN}, \quad F_{3y} = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 11,314\,\mathrm{kN}, \quad \mathbf{q}_3^{\mathrm{csp}} = \begin{bmatrix} -11,314 \\ +11,314 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Csomópontokra redukált rúdterhek

①–④ rúd

Két azonos F koncentrált erővel harmadpontokban terhelt csuklós-befogott rúd reakciói:

$$R^{\mathrm{cs}} = \frac{2}{3}F, \quad R^{\mathrm{bef}} = \frac{4}{3}F, \quad M^{\mathrm{bef}} = \frac{1}{3}Fl$$

$$R_4 = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8\,\mathrm{kN}, \quad R_1 = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16\,\mathrm{kN}, \quad M_1 = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 = 24\,\mathrm{kNm}$$

④ támaszcsomópont elmozdulása hatására a csuklós-befogott rúd reakciói:

$$R_1 = R_4 = \frac{3EI}{l^3} e_{Ay} = \frac{3 \cdot 31992,48}{6^3} \cdot 0,02 = 8,8868\,\mathrm{kN}$$

$$M_1 = \frac{3EI}{l^2} e_{Ay} = \frac{3 \cdot 31992,48}{6^2} \cdot 0,02 = 53,3208\,\mathrm{kNm}$$

$$\mathbf{q}_1^{14,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -8,8868 \\ -53,3208 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -24,8868 \\ -77,3208 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_1^{14} = \mathbf{T}_{14}\,\mathbf{q}_1^{14,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -24,8868 \\ -77,3208 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +24,8868 \\ -77,3208 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_4^{14,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8,8868 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +0,8868 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_4^{14} = \mathbf{T}_{14}\,\mathbf{q}_4^{14,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ +0,8868 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,8868 \\ 0 \end{bmatrix}$$

②–③ rúd
p megoszló erővel részlegesen (α hosszon) terhelt befogott-befogott rúd reakciói:

$$R_{\mathrm{bal}} = pl\alpha\left(1 - \alpha^2 + \tfrac{1}{2}\alpha^3\right), \quad R_{\mathrm{jobb}} = pl\alpha\left(\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^3\right),$$

$$M_{\mathrm{bal}} = -\tfrac{1}{12}pl^2\alpha^2\left(6 - 8\alpha + 3\alpha^2\right), \quad M_{\mathrm{jobb}} = -\tfrac{1}{12}pl^2\alpha^3\left(4 - 3\alpha\right)$$

$$\alpha = \frac{4}{6}, \quad R_{\mathrm{bal}} = 11,2593\,\mathrm{kN}, \quad R_{\mathrm{jobb}} = 4,7407\,\mathrm{kN}, \quad M_{\mathrm{bal}} = -10,6667\,\mathrm{kNm}, \quad M_{\mathrm{jobb}} = -7,1111\,\mathrm{kNm}$$

$$\mathbf{q}_2^{23} = \mathbf{q}_2^{23,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0 \\ +11,2593 \\ +10,6667 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_3^{23} = \mathbf{q}_3^{23,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0 \\ +4,7407 \\ -7,1111 \end{bmatrix}$$

②–⑤ rúd
⑤ támaszcsomópont elfordulása hatására a befogott-befogott rúd reakciói:

$$R_2 = R_5 = \frac{6EI}{l^2}\varphi_E = \frac{6 \cdot 31992,48}{6^2} \cdot 0,001 = 5,3321\,\mathrm{kN}$$

$$M_2 = \frac{2EI}{l}\varphi_E = \frac{2 \cdot 31992,48}{6} \cdot 0,001 = 10,6642\,\mathrm{kNm}$$

$$M_5 = \frac{4EI}{l}\varphi_E = \frac{4 \cdot 31992,48}{6} \cdot 0,001 = 21,3283\,\mathrm{kNm}$$

$$\mathbf{q}_2^{25,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5,3321 \\ -10,6642 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_2^{25} = \mathbf{T}_{25}\,\mathbf{q}_2^{25,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -5,3321 \\ -10,6642 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5,3321 \\ 0 \\ -10,6642 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_5^{25,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5,3321 \\ -21,3283 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_5^{25} = \mathbf{T}_{25}\,\mathbf{q}_5^{25,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5,3321 \\ -21,3283 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,3321 \\ 0 \\ -21,3283 \end{bmatrix}$$

③–⑥ rúd
egyenletes hőmérsékletváltozás hatására a csuklós-csuklós rúd reakciói:

$$\varepsilon_{36} = \Delta T_{36} \cdot \alpha = +15°\mathrm{C} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}/°\mathrm{C} = 0,00018$$

$$R_3 = R_6 = EA \cdot \varepsilon_{36} = 2040000 \cdot 0,00018 = 367,2\,\mathrm{kN}$$

$$\mathbf{q}_3^{36,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} -367,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_3^{36} = \mathbf{T}_{36}\,\mathbf{q}_3^{36,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -367,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -220,32 \\ -293,76 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_6^{36,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 367,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_6^{36} = \mathbf{T}_{36}\,\mathbf{q}_6^{36,\mathrm{lok}} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 367,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +220,32 \\ +293,76 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teljes tehervektor

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1^{\mathrm{csp}} + \mathbf{q}_1^{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ +12 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +24,8868 \\ -77,3208 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +36,8868 \\ -77,3208 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2^{23} + \mathbf{q}_2^{25} = \begin{bmatrix} 0 \\ +11,2593 \\ +10,6667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +5,3321 \\ 0 \\ -10,6642 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +5,3321 \\ +11,2593 \\ +0,0025 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_3^{\mathrm{csp}} + \mathbf{q}_3^{23} + \mathbf{q}_3^{36} = \begin{bmatrix} -11,3137 \\ +11,3137 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +4,7407 \\ -7,1111 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -220,32 \\ -293,76 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -231,6337 \\ -277,7056 \\ -7,1111 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ +36,8868 \\ -77,3208 \\ +5,3321 \\ +11,2593 \\ +0,0025 \\ -231,6337 \\ -277,7056 \\ -7,1111 \end{bmatrix} \tag{10}$$

A szerkezet egyenletrendszere

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{q} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{q}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,046178 \\ +0,785215 \\ -2,224315 \\ -0,092357 \\ +0,008960 \\ +0,342751 \\ -0,160076 \\ -0,945146 \\ -0,743313 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \tag{11}$$

Igénybevételek

$$\mathbf{s}_{ij} = -\mathbf{q}_j^{ij} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{ji,\mathrm{lok}} & \mathbf{k}_{ij}^{jj,\mathrm{lok}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix}$$

①-② rúd

$$\mathbf{s}_{12} = -\mathbf{q}_2^{12} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{12}^{21,\mathrm{lok}} & \mathbf{k}_{12}^{22,\mathrm{lok}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{12}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -340000 & 0 & 0 & +340000 & 0 & 0 \\ 0 & -1777,36 & -5332,08 & 0 & +1777,36 & -5332,08 \\ 0 & +5332,08 & +10664,16 & 0 & -5332,08 & +21328,32 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,046178 \\ +0,785215 \\ -2,224315 \\ -0,092357 \\ +0,008960 \\ +0,342751 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} -15,7006 \\ +8,6530 \\ -12,2711 \end{bmatrix} \tag{12}$$

②-③ rúd

$$\mathbf{s}_{23} = -\mathbf{q}_3^{23} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{23}^{32,\mathrm{lok}} & \mathbf{k}_{23}^{33,\mathrm{lok}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{23}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{23}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_{23} = -\begin{bmatrix} 0 \\ +4,7407 \\ -7,1111 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -340000 & 0 & 0 & +340000 & 0 & 0 \\ 0 & -1777,36 & -5332,08 & 0 & +1777,36 & -5332,08 \\ 0 & +5332,08 & +10664,16 & 0 & -5332,08 & +21328,32 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,092357 \\ +0,008960 \\ +0,342751 \\ -0,160076 \\ -0,945146 \\ -0,743313 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{s}_{23} = \begin{bmatrix} -23,0245 \\ -4,3007 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

①-④ rúd

$$\mathbf{s}_{14} = -\mathbf{q}_4^{14} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{14}^{41,\text{lok}} & \mathbf{k}_{14}^{44,\text{lok}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{14}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{14}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_{14} = -\begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -340000 & 0 & 0 & +340000 & 0 & 0 \\ 0 & -444,34 & -2666,04 & 0 & +444,34 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,046178 \\ +0,785215 \\ -2,224315 \\ 0 \\ +20 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{s}_{14} = \begin{bmatrix} -15,7006 \\ +5,3922 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

②-⑤ rúd

$$\mathbf{s}_{25} = -\mathbf{q}_5^{25} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{25}^{52,\text{lok}} & \mathbf{k}_{25}^{55,\text{lok}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{25}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{25}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_{25} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -340000 & 0 & 0 & +340000 & 0 & 0 \\ 0 & -1777,36 & -5332,08 & 0 & +1777,36 & -5332,08 \\ 0 & +5332,08 & +10664,16 & 0 & -5332,08 & +21328,32 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,092357 \\ +0,008960 \\ +0,342751 \\ 0 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

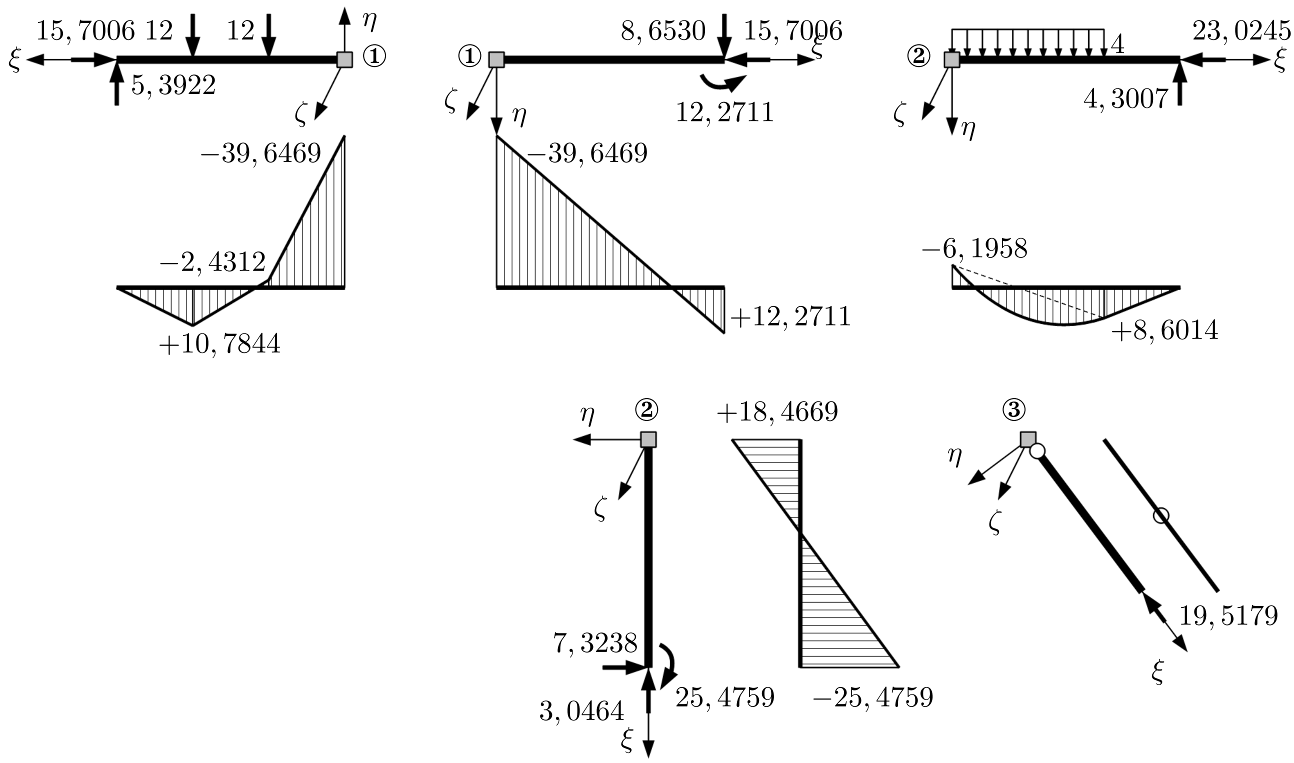
$$\mathbf{s}_{25} = \begin{bmatrix} -3,0464 \\ -7,3238 \\ +25,4759 \end{bmatrix} \tag{15}$$

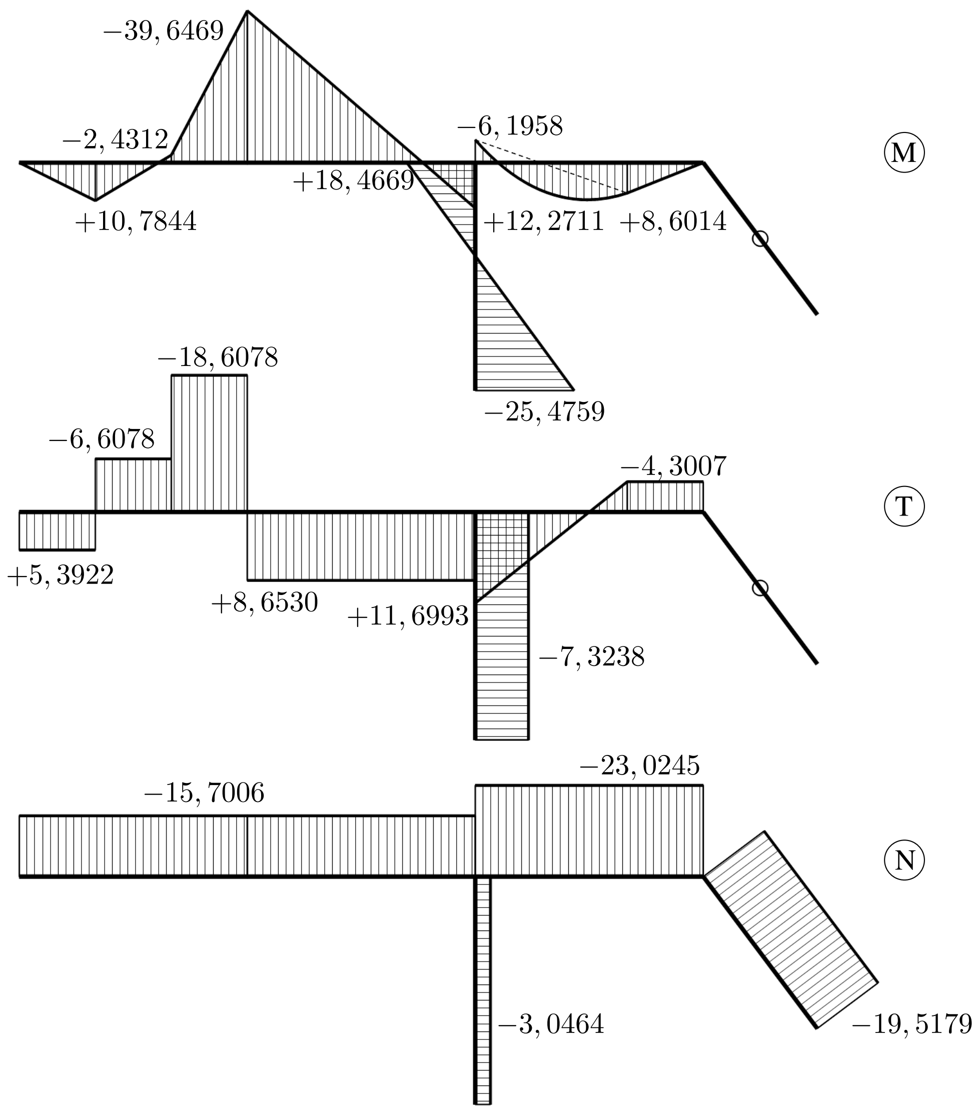
③-⑥ rúd

$$\mathbf{s}_{36} = -\mathbf{q}_6^{36} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{36}^{63,\text{lok}} & \mathbf{k}_{36}^{66,\text{lok}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{36}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{36}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix}$$

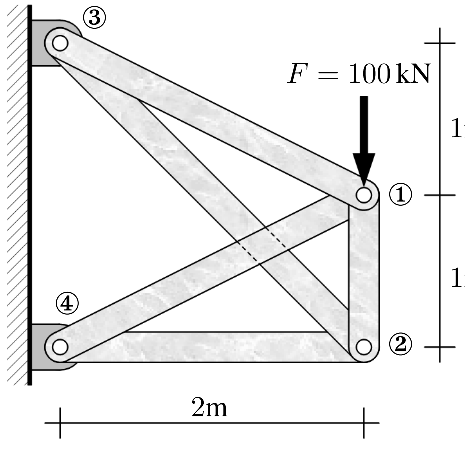
$$\mathbf{s}_{36} = -\begin{bmatrix} 367,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -408000 & 0 & 0 & +408000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,160076 \\ -0,945146 \\ -0,743313 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

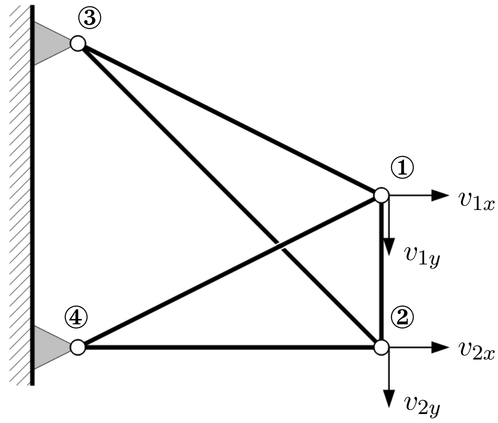
$$\mathbf{s}_{36} = \begin{bmatrix} -19,5179 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

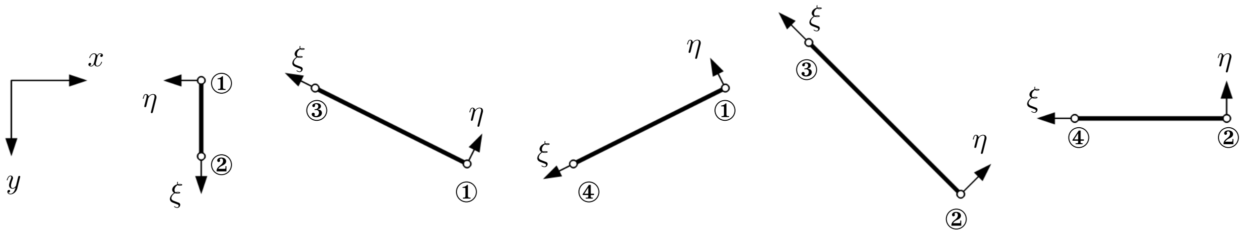

15, 7006
12
12
η
ξ
①
5, 3922
ζ
−39, 6469
−2, 4312
+10, 7844
①
8, 6530
15, 7006
ξ
ζ
η
12, 2711
−39, 6469
+12, 2711
②
4
23, 0245
ξ
ζ
η
4, 3007
−6, 1958
+8, 6014
η
②
ζ
7, 3238
3, 0464
25, 4759
ξ
+18, 4669
−25, 4759
③
η
ζ
19, 5179
ξ


−39, 6469
−2, 4312
−6, 1958
+18, 4669
+10, 7844
+12, 2711
+8, 6014
−25, 4759
M
−18, 6078
−6, 6078
−4, 3007
+5, 3922
+8, 6530
+11, 6993
−7, 3238
T
−23, 0245
−15, 7006
N
−3, 0464
−19, 5179

2 Határozzuk meg a rácsos tartó elmozdulásait és igénybevételeit!
Keresztmetszet: 1-2, 1-3 és 2-3: 1cm×4cm, 1-4 és 2-4: $2,5$cm×4cm acél ($E = 200\,\mathrm{GPa}$).







A keresztmetszet geometriai jellemzői:

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 1 \cdot 4 = 4\,\mathrm{cm}^2, \qquad EA_1 = 200\,\mathrm{GPa} \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 = 80\,000\,\mathrm{kN}$$

$$A_{14} = A_{24} = 2,5 \cdot 4 = 10\,\mathrm{cm}^2, \qquad EA_2 = 200\,\mathrm{GPa} \cdot 10\,\mathrm{cm}^2 = 200\,000\,\mathrm{kN}$$

Koordináta-rendszerek:

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(x,\xi) \\ \cos(y,\xi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{13} = \begin{bmatrix} -0,8944 \\ -0,4472 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{14} = \begin{bmatrix} -0,8944 \\ +0,4472 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} -0,7071 \\ -0,7071 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{24} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Statikai elemzés:

Geometriai (egyensúlyi) mátrix:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} & \mathbf{T}_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,8944 & -0,8944 & 0 & 0 \\ -1 & -0,4472 & +0,4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,7071 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & -0,7071 & 0 \end{bmatrix}$$

Mátrix mérete: 4×5, rangja: $\rho = 4 \to$ statikailag egyszeresen határozatlan

Alapváltozók:

Csomóponti elmozdulások:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{2x} & v_{2y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Csomóponti erők:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{2x} & F_{2y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Rudak igénybevételei:

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} N_{12\xi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{13} = \begin{bmatrix} N_{13\xi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{14} = \begin{bmatrix} N_{14\xi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{23} = \begin{bmatrix} N_{23\xi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_{24} = \begin{bmatrix} N_{24\xi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{12} & \mathbf{s}_{13} & \mathbf{s}_{14} & \mathbf{s}_{23} & \mathbf{s}_{24} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Merevségek:

Elemi merevségi mátrix (csuklós–csuklós) a lokális koordináta-rendszerben

$$\mathbf{k}^{\mathrm{cc}} = \begin{bmatrix} +\dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l} \\ -\dfrac{EA}{l} & +\dfrac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

Rudak elemi merevségi mátrixai a lokális koordináta-rendszerben

$$l_{12} = 1, \quad EA = 80000, \quad \mathbf{k}_{12}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} +80000 & -80000 \\ -80000 & +80000 \end{bmatrix}$$

$$l_{13} = \sqrt{5} = 2,2361, \quad EA = 80000, \quad \mathbf{k}_{13}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} +35777 & -35777 \\ -35777 & +35777 \end{bmatrix}$$

$$l_{14} = \sqrt{5} = 2,2361, \quad EA = 200000, \quad \mathbf{k}_{14}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} +89443 & -89443 \\ -89443 & +89443 \end{bmatrix}$$

$$l_{23} = 2\sqrt{2} = 2,8284, \quad EA = 80000, \quad \mathbf{k}_{23}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} +28284 & -28284 \\ -28284 & +28284 \end{bmatrix}$$

$$l_{24} = 2, \quad EA = 200000, \quad \mathbf{k}_{24}^{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} +100000 & -100000 \\ -100000 & +100000 \end{bmatrix}$$

Elemi merevségi mátrixok transzformációja a globális koordináta-rendszerbe

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{k}_{ij}^{\xi\eta\zeta} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Rudak elemi merevségi mátrixai a globális koordináta-rendszerben

$$\mathbf{k}_{12}^{11} = \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{k}_{12}^{11,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{12}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (+80000) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +80000 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{12}^{22}$$

$$\mathbf{k}_{12}^{12} = \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{k}_{12}^{12,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{12}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-80000) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -80000 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{12}^{21}$$

$$\mathbf{k}_{13}^{11} = \mathbf{T}_{13} \cdot \mathbf{k}_{13}^{11,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{13}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -0,8944 \\ -0,4472 \end{bmatrix} \cdot (+35777) \cdot \begin{bmatrix} -0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +28620 & +14310 \\ +14310 & +7155 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{k}_{13}^{13}$, $\mathbf{k}_{13}^{31}$ és $\mathbf{k}_{13}^{33}$ blokkok számítása nem szükséges a teljes merevségi mátrixhoz.

$$\mathbf{k}_{14}^{11} = \mathbf{T}_{14} \cdot \mathbf{k}_{14}^{11,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{14}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -0,8944 \\ +0,4472 \end{bmatrix} \cdot (+89443) \cdot \begin{bmatrix} -0,8944 & +0,4472 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +71550 & -35775 \\ -35775 & +17888 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{k}_{14}^{14}$, $\mathbf{k}_{14}^{41}$ és $\mathbf{k}_{14}^{44}$ blokkok számítása nem szükséges a teljes merevségi mátrixhoz.

$$\mathbf{k}_{23}^{22} = \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{k}_{23}^{22,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{23}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -0,7071 \\ -0,7071 \end{bmatrix} \cdot (+28284) \cdot \begin{bmatrix} -0,7071 & -0,7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +14142 & +14142 \\ +14142 & +14142 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{k}_{23}^{23}$, $\mathbf{k}_{23}^{32}$ és $\mathbf{k}_{23}^{33}$ blokkok számítása nem szükséges a teljes merevségi mátrixhoz.

$$\mathbf{k}_{24}^{22} = \mathbf{T}_{24} \cdot \mathbf{k}_{24}^{22,\xi\eta\zeta} \cdot \mathbf{T}_{24}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (+100000) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +100000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{k}_{24}^{24}$, $\mathbf{k}_{24}^{42}$ és $\mathbf{k}_{24}^{44}$ blokkok számítása nem szükséges a teljes merevségi mátrixhoz.

A szerkezet teljes merevségi mátrixa

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{12}^{11} + \mathbf{k}_{13}^{11} + \mathbf{k}_{14}^{11} & \mathbf{k}_{12}^{12} \\ \mathbf{k}_{12}^{21} & \mathbf{k}_{12}^{22} + \mathbf{k}_{23}^{22} + \mathbf{k}_{24}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +100170 & -21465 & 0 & 0 \\ -21465 & +105043 & 0 & -80000 \\ 0 & 0 & +114142 & +14142 \\ 0 & -80000 & +14142 & +94142 \end{bmatrix}$$

Terhek:

Csak csomóponti terhek vannak.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A szerkezet egyenletrendszere

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{q} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{q}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} +0,68744 \\ +3,20804 \\ -0,34417 \\ +0,27778 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Igénybevételek

$$\mathbf{s}_{ij} = -\mathbf{q}_j^{ij} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{ji,\mathrm{lok}} & \mathbf{k}_{ij}^{jj,\mathrm{lok}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} -80000 & +80000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +0,68744 \\ +3,20804 \\ -0,34417 \\ +0,27778 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = -34,417$$

$$\mathbf{s}_{13} = \begin{bmatrix} -35777 & +35777 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,8944 & -0,4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +0,68744 \\ +3,20804 \\ +0,00000 \\ +0,00000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = +73,324$$

$$\mathbf{s}_{14} = \begin{bmatrix} -89443 & +89443 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,8944 & +0,4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8944 & +0,4472 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +0,68744 \\ +3,20804 \\ +0,00000 \\ +0,00000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = -73,324$$

$$\mathbf{s}_{23} = \begin{bmatrix} -28284 & +28284 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,7071 & -0,7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,7071 & -0,7071 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,34417 \\ +0,27778 \\ +0,00000 \\ +0,00000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = +48,672$$

$$\mathbf{s}_{24} = \begin{bmatrix} -100000 & +100000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,34417 \\ +0,27778 \\ +0,00000 \\ +0,00000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = -34,417$$