MŰEGYETEM 1782

Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Tartók statikája II

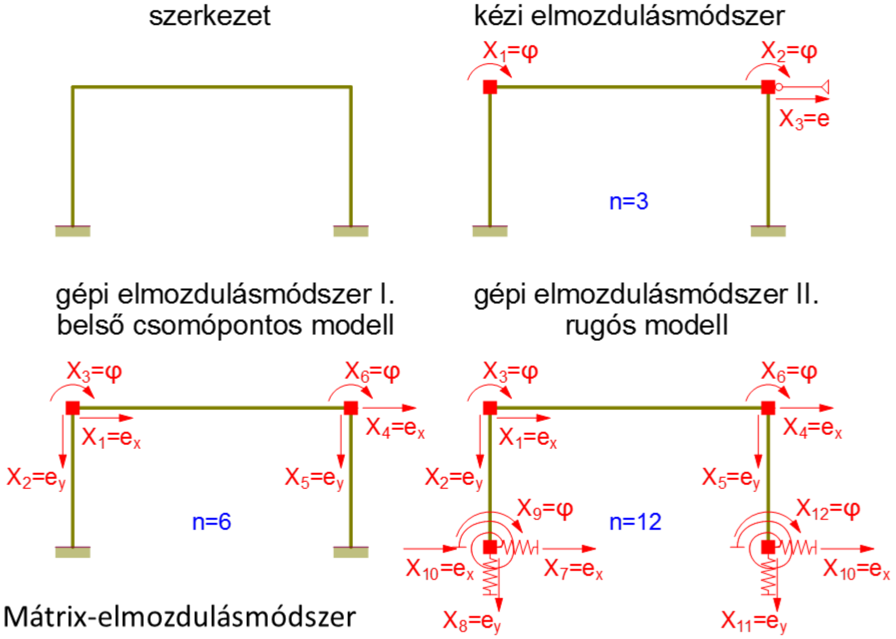
Mátrix-elmozdulásmódszer

Dr. Hortobágyi Zsolt

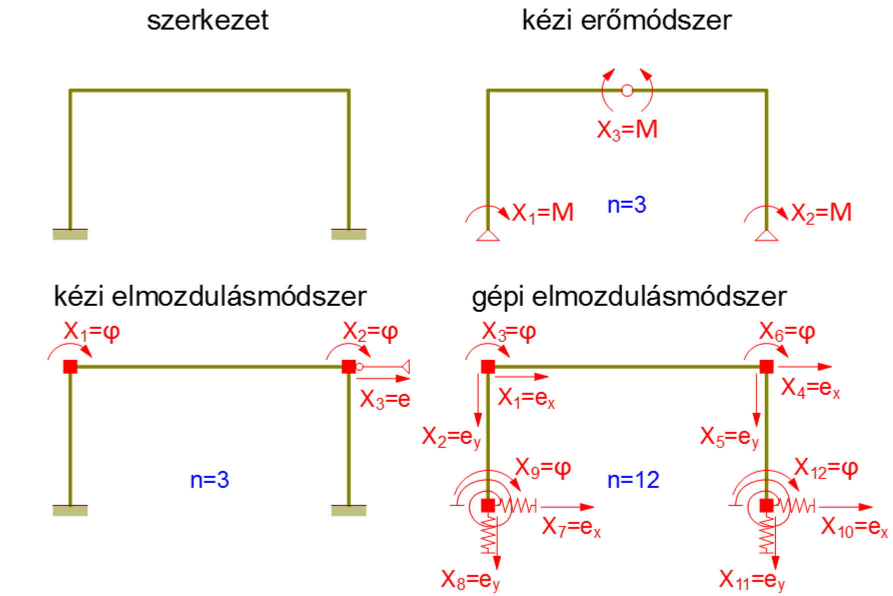
Alapelv

- Síkbeli egyenes rudakból álló rúdszerkezet.
- Merev vagy csuklós kapcsolódás lehetősége.
- Prizmatikus rúdelemek (EA, EI a rúd hossza mentén állandó).

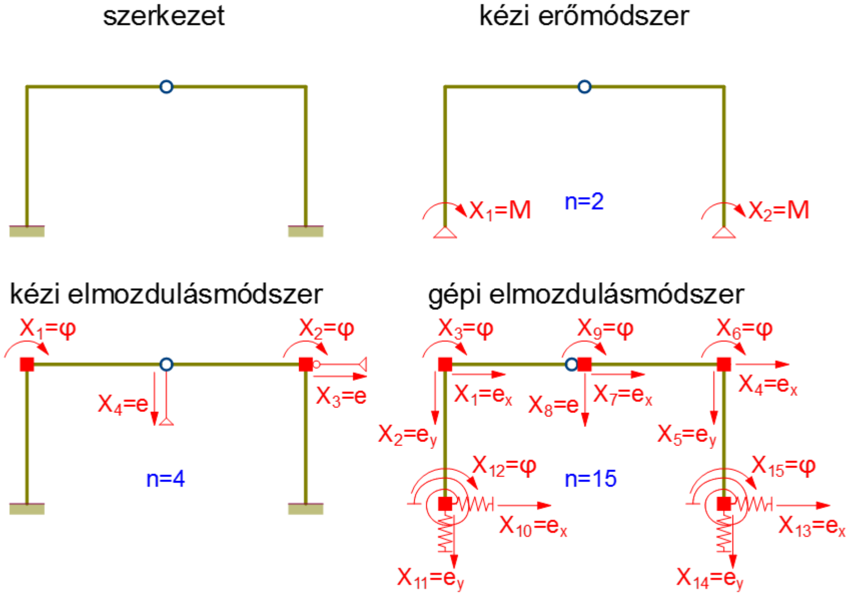
Modellalkotás



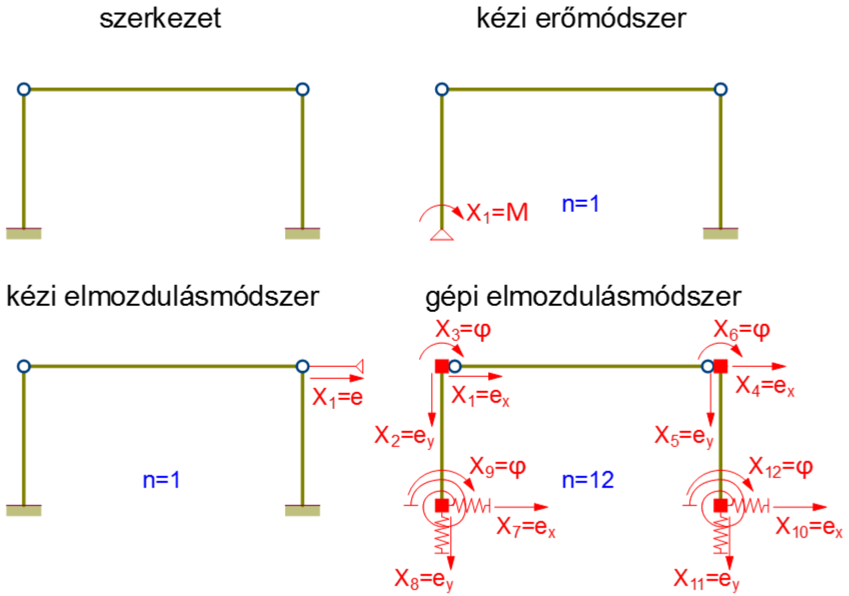
Elmozdulás ismeretlenek



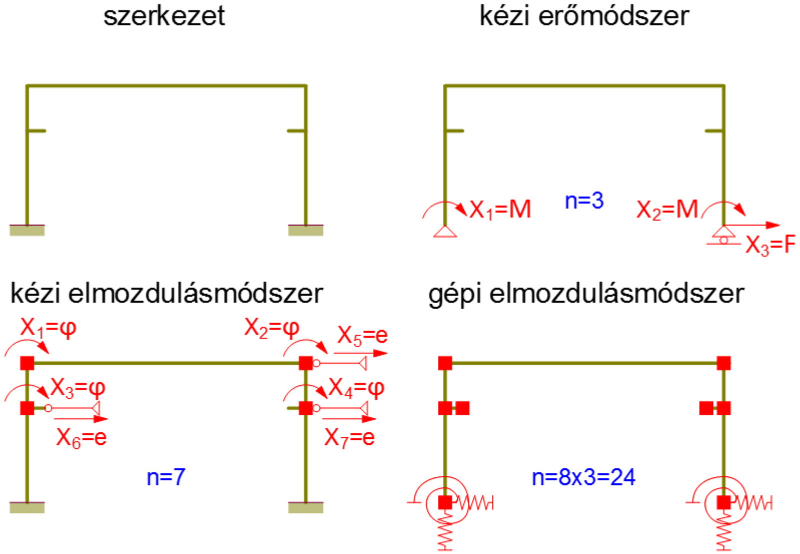
Elmozdulás ismeretlenek



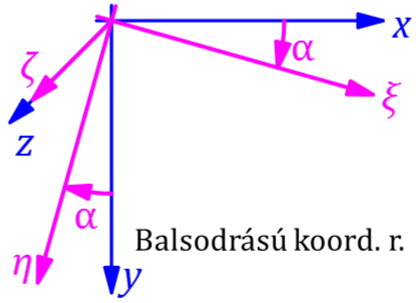
Elmozdulás ismeretlenek



Elmozdulás ismeretlenek



Koordinátatranszformáció



globális koordinátarendszer: *x,y,z*

lokális koordinátarendszer: *ξ,η,ζ*

lokális -> globális

$$\mathbf{a}^{xyz} = \mathbf{T}\,\mathbf{a}^{\xi\eta\zeta}$$

T: Transzformációs (forgató) mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(x,\xi) & \cos(x,\eta) & \cos(x,\zeta) \\ \cos(y,\xi) & \cos(y,\eta) & \cos(y,\zeta) \\ \cos(z,\xi) & \cos(z,\eta) & \cos(z,\zeta) \end{bmatrix}$$

globális -> lokális

$$\mathbf{a}^{\xi\eta\zeta} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{a}^{xyz} = \mathbf{T}^{T}\,\mathbf{a}^{xyz}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(x,\xi) & \cos(x,\eta) & 0 \\ \cos(y,\xi) & \cos(y,\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{T}$$

T: Ortogonális mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\propto) & -\sin(\propto) & 0 \\ \sin(\propto) & \cos(\propto) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

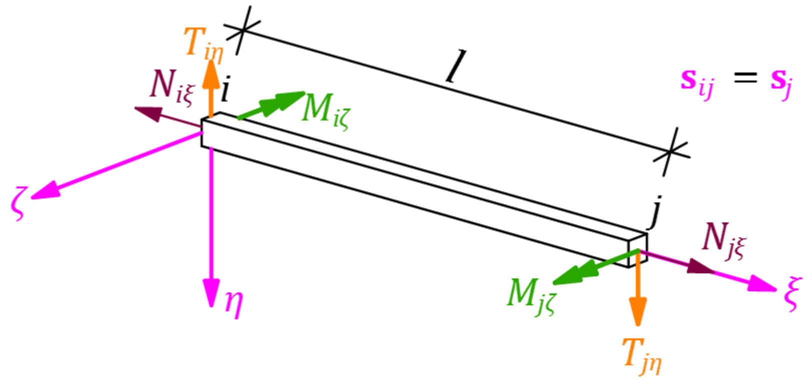
Alapváltozók

Elmozdulás vektor: $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ v_{iy} \\ \varphi_{iz} \end{bmatrix}$

Csomóponti terhek: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_i \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ W_{iz} \end{bmatrix}$

Rúdigénybevételek: $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \\ \mathbf{s}_r \end{bmatrix}$ $\qquad \mathbf{s}_{ij} = \begin{bmatrix} N_{j\xi} \\ T_{j\eta} \\ M_{j\zeta} \end{bmatrix}$

Igénybevételek átvitele

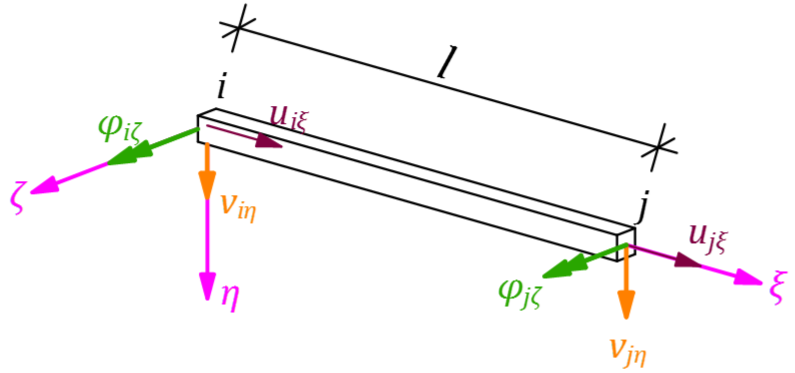


$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} N_{j\xi} \\ T_{j\eta} \\ M_{j\zeta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} N_{i\xi} \\ T_{i\eta} \\ M_{i\zeta} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} N_{j\xi} \\ T_{j\eta} \\ M_{j\zeta} + l\,T_{j\eta} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{j\xi} \\ T_{j\eta} \\ M_{j\zeta} \end{bmatrix} = -\mathbf{B}_{ij}\ \mathbf{s}_j$$

$\mathbf{B}_{ij}$: átviteli mátrix

Elmozdulások átvitele

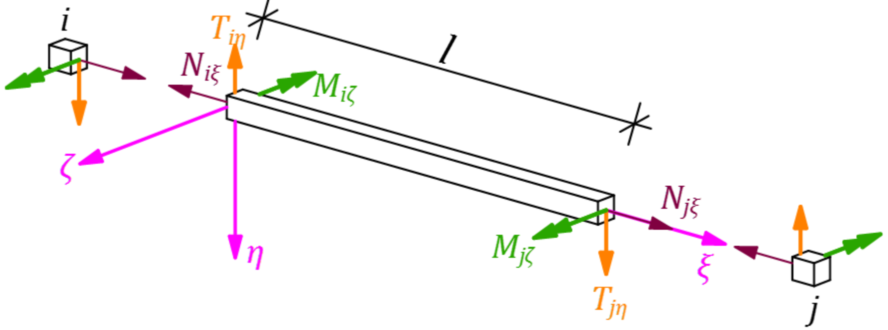


$$\mathbf{v}_j = \begin{bmatrix} u_{j\xi} \\ v_{j\eta} \\ \varphi_{j\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i\xi} \\ v_{i\eta} + l\,\varphi_{i\zeta} \\ \varphi_{i\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i\xi} \\ v_{i\eta} \\ \varphi_{i\zeta} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{ij}^T\ \mathbf{v}_i$$

Egy rúd egyensúlyi egyenlete

$\boxed{\mathbf{q}_{i,ij} = +\mathbf{T}_{ij}\mathbf{B}_{ij}\ \mathbf{s}_{ij}}$

$\mathbf{q}_{i,ij} = +\mathbf{B}_{ij}\ \mathbf{s}_{ij}$ $\qquad \mathbf{s}_i = -\mathbf{B}_{ij}\ \mathbf{s}_{ij}$

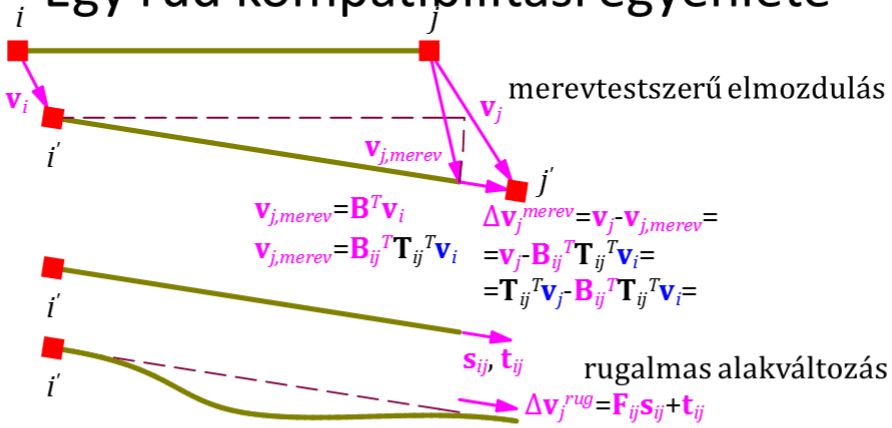


$\mathbf{s}_j = \mathbf{s}_{ij}$ $\qquad \mathbf{q}_{j,ij} = -\mathbf{s}_{ij}$

i. csp. egyensúlya: $\mathbf{T}_{ij}\ \mathbf{B}_{ij}\ \mathbf{s}_{ij}\ +\ \mathbf{q}_i\ = \mathbf{0}$ $\qquad \boxed{\mathbf{q}_{j,ij} = -\mathbf{T}_{ij}\ \mathbf{s}_{ij}}$

j. csp. egyensúlya: $-\mathbf{T}_{ij}\ \mathbf{s}_{ij}\ +\ \mathbf{q}_j\ = \mathbf{0}$

Egy rúd kompatibilitási egyenlete



$\mathbf{v}_{j,merev}=\mathbf{B}^T\mathbf{v}_i$

$\mathbf{v}_{j,merev}=\mathbf{B}_{ij}^T\mathbf{T}_{ij}^T\mathbf{v}_i$

$\Delta\mathbf{v}_j^{merev}=\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_{j,merev}=$
$=\mathbf{v}_j-\mathbf{B}_{ij}^T\mathbf{T}_{ij}^T\mathbf{v}_i=$
$=\mathbf{T}_{ij}^T\mathbf{v}_j-\mathbf{B}_{ij}^T\mathbf{T}_{ij}^T\mathbf{v}_i=$

kinematikai teher: $\mathbf{t}_{ij}=\begin{bmatrix}\Delta u_\xi\\ \Delta v_\eta\\ \Delta\varphi_\zeta\end{bmatrix}$

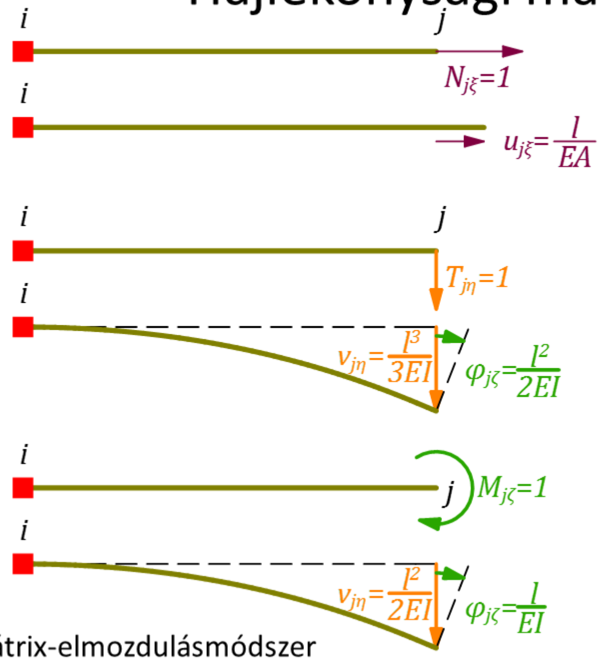
hajlékonysági mátrix: $\mathbf{F}_{ij}$

$\Delta\mathbf{v}_j^{merev}=\Delta\mathbf{v}_j^{rug}$

$\mathbf{T}_{ij}^T\mathbf{v}_j-\mathbf{B}_{ij}^T\mathbf{T}_{ij}^T\mathbf{v}_i=\mathbf{F}_{ij}\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{t}_{ij}$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{ij}^T\mathbf{T}_{ij}^T & -\mathbf{T}_{ij}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_i\\ \mathbf{v}_j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{ij}\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{t}_{ij}\end{bmatrix}=0}$$

Hajlékonysági mátrix



$$\mathbf{F}_{ij}=\begin{bmatrix}\frac{l}{EA} & & \\ & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI}\\ & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI}\end{bmatrix}$$

$\Delta\mathbf{v}_j^{rug}=\mathbf{F}_{ij}\mathbf{s}_{ij}$

Egy rúd állapotegyenlete

Egyensúlyi egyenletek:

$$\mathbf{T}_{ij}\,\mathbf{B}_{ij}\,\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{q}_i=\mathbf{0}$$
$$-\mathbf{T}_{ij}\,\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{q}_j=\mathbf{0}$$

Kompatibilitási egyenlet:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{ij}^T\mathbf{T}_{ij}^T & -\mathbf{T}_{ij}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_i\\ \mathbf{v}_j\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{F}_{ij}\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{t}_{ij}\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij}\mathbf{B}_{ij}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{ij}\\ \mathbf{B}_{ij}^T\mathbf{T}_{ij}^T & -\mathbf{T}_{ij}^T & \mathbf{F}_{ij}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_i\\ \mathbf{v}_j\\ \mathbf{s}_{ij}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{q}_i\\ \mathbf{q}_j\\ \mathbf{t}_{ij}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\quad\begin{matrix}i.\ \text{csp. egyensúlya}\\ j.\ \text{csp. egyensúlya}\\ \text{kompatibilitási egy.}\end{matrix}$$

egyensúlyi egyenletrendszer: $\mathbf{G}_e\,\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{q}=\mathbf{0}$

kompatibilitási egyenletrendszer: $\mathbf{G}_e^T\mathbf{v}+\mathbf{F}_{ij}\,\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{t}_{ij}=\mathbf{0}$

egy rúd egyensúlyi (geometriai) mátrixa: $\mathbf{G}_e=\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{ij}\mathbf{B}_{ij}\\ -\mathbf{T}_{ij}\end{bmatrix}$

Egy rúd állapotegyenlete

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij}\mathbf{B}_{ij}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{ij}\\ \mathbf{B}_{ij}^T\mathbf{T}_{ij}^T & -\mathbf{T}_{ij}^T & \mathbf{F}_{ij}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_i\\ \mathbf{v}_j\\ \mathbf{s}_{ij}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{q}_i\\ \mathbf{q}_j\\ \mathbf{t}_{ij}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\quad\begin{matrix}i.\ \text{csp. egyensúlya}\\ j.\ \text{csp. egyensúlya}\\ \text{kompatibilitási egy.}\end{matrix}$$

egyensúlyi egyenletrendszer: $\mathbf{G}_e\,\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{q}=\mathbf{0}$

kompatibilitási egyenletrendszer: $\mathbf{G}_e^T\mathbf{v}+\mathbf{F}_{ij}\,\mathbf{s}_{ij}+\mathbf{t}_{ij}=\mathbf{0}$

egy rúd egyensúlyi (geometriai) mátrixa: $\mathbf{G}_e=\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{ij}\mathbf{B}_{ij}\\ -\mathbf{T}_{ij}\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\underset{(6)\times(6)}{\mathbf{0}} & \underset{(6)\times(3)}{\mathbf{G}_e}\\ \underset{(3)\times(6)}{\mathbf{G}_e^T} & \underset{(3)\times(3)}{\mathbf{F}_{ij}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{(6)}{\mathbf{v}}\\ \underset{(3)}{\mathbf{s}_{ij}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\underset{(6)}{\mathbf{q}}\\ \underset{(3)}{\mathbf{t}_{ij}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{(6)}{\mathbf{0}}\\ \underset{(3)}{\mathbf{0}}\end{bmatrix}$$

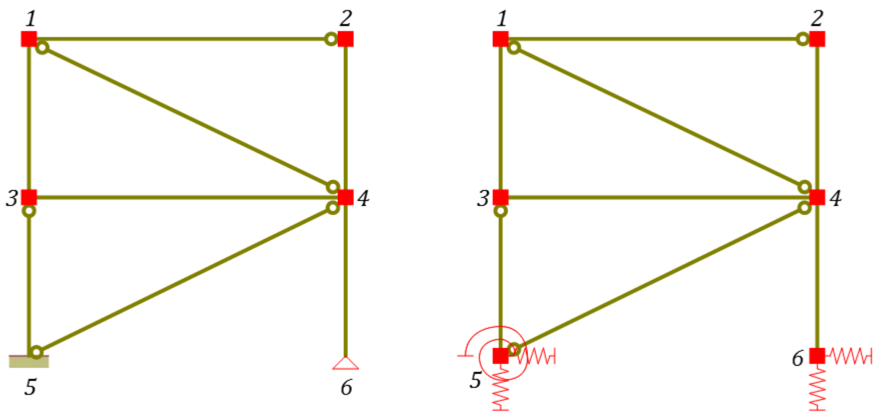
Teljes szerkezet állapotegyenlete

$$\begin{bmatrix} \underset{(3n)\text{x}(3n)}{\mathbf{C}} & \underset{(3n)\text{x}(3r)}{\mathbf{G}} \\ \underset{(3r)\text{x}(3n)}{\mathbf{G}^T} & \underset{(3r)\text{x}(3r)}{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{v}} \\ \underset{(3r)}{\mathbf{s}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{q}} \\ \underset{(3r)}{\mathbf{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{0}} \\ \underset{(3r)}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}$$

C: a „rugós” modell esetén a támaszrugókat tartalmazza negatív előjellel,
G: egyensúlyi (geometriai) mátrix,
F: hajlékonysági mátrix,
v: csomóponti elmozdulások vektora,
s: rúdvégi igénybevételek vektora,
q: csomóponti terhek vektora,
t: rudak kinematikai tehervektora.

Csomópontok száma: n
Rudak száma: r

Mintapélda



Csomópontok száma: n=6
Rudak száma: r=8

Egyensúlyi egyenletrendszer

$$\underset{18\text{x}18}{\mathbf{C}}\ \underset{18}{\mathbf{v}} + \underset{18\text{x}24}{\mathbf{G}}\ \underset{24}{\mathbf{s}} + \underset{18}{\mathbf{q}} = \underset{18}{\mathbf{0}}$$

$$\mathbf{C}_5 = \begin{bmatrix} -\rho_x & & \\ & -\rho_y & \\ & & -\rho_\varphi \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_6 = \begin{bmatrix} -\rho_x & & \\ & -\rho_y & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

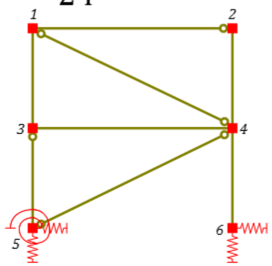
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \\ & & & \mathbf{0} & & \\ & & & & \mathbf{C}_5 & \\ & & & & & \mathbf{C}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{T}_{13}\mathbf{B}_{13} & \mathbf{T}_{14}\mathbf{B}_{14} & & & & & \\ -\mathbf{T}_{12} & & & \mathbf{T}_{24}\mathbf{B}_{24} & & & & \\ & -\mathbf{T}_{13} & & & \mathbf{T}_{34}\mathbf{B}_{34} & \mathbf{T}_{35}\mathbf{B}_{35} & & \\ & & -\mathbf{T}_{14} & -\mathbf{T}_{24} & -\mathbf{T}_{34} & & \mathbf{T}_{45}\mathbf{B}_{45} & \mathbf{T}_{46}\mathbf{B}_{46} \\ & & & & & -\mathbf{T}_{35} & -\mathbf{T}_{45} & \\ & & & & & & & -\mathbf{T}_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{14} \\ \mathbf{s}_{24} \\ \mathbf{s}_{34} \\ \mathbf{s}_{35} \\ \mathbf{s}_{45} \\ \mathbf{s}_{46} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Kompatibilitási egyenletrendszer

$$\underset{24\text{x}18}{\mathbf{G}^T}\ \underset{18}{\mathbf{v}} + \underset{24\text{x}24}{\mathbf{F}}\ \underset{24}{\mathbf{s}} + \underset{24}{\mathbf{t}} = \underset{24}{\mathbf{0}}$$

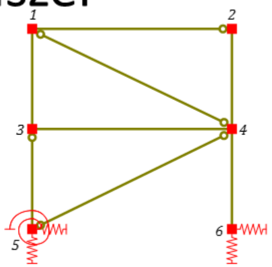
$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{12}^T\mathbf{T}_{12}^T & -\mathbf{T}_{12}^T & & & & \\ \mathbf{B}_{13}^T\mathbf{T}_{13}^T & & -\mathbf{T}_{13}^T & & & \\ \mathbf{B}_{14}^T\mathbf{T}_{14}^T & & & -\mathbf{T}_{14}^T & & \\ & \mathbf{B}_{24}^T\mathbf{T}_{24}^T & & -\mathbf{T}_{24}^T & & \\ & & \mathbf{B}_{34}^T\mathbf{T}_{34}^T & -\mathbf{T}_{34}^T & & \\ & & \mathbf{B}_{35}^T\mathbf{T}_{35}^T & & -\mathbf{T}_{35}^T & \\ & & & \mathbf{B}_{45}^T\mathbf{T}_{45}^T & -\mathbf{T}_{45}^T & \\ & & & \mathbf{B}_{46}^T\mathbf{T}_{46}^T & & -\mathbf{T}_{46}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix} +$$



$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{12} & & & & & & & \\ & \mathbf{F}_{13} & & & & & & \\ & & \mathbf{F}_{14} & & & & & \\ & & & \mathbf{F}_{24} & & & & \\ & & & & \mathbf{F}_{34} & & & \\ & & & & & \mathbf{F}_{35} & & \\ & & & & & & \mathbf{F}_{45} & \\ & & & & & & & \mathbf{F}_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{14} \\ \mathbf{s}_{24} \\ \mathbf{s}_{34} \\ \mathbf{s}_{35} \\ \mathbf{s}_{45} \\ \mathbf{s}_{46} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{13} \\ \mathbf{t}_{14} \\ \mathbf{t}_{24} \\ \mathbf{t}_{34} \\ \mathbf{t}_{35} \\ \mathbf{t}_{45} \\ \mathbf{t}_{46} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

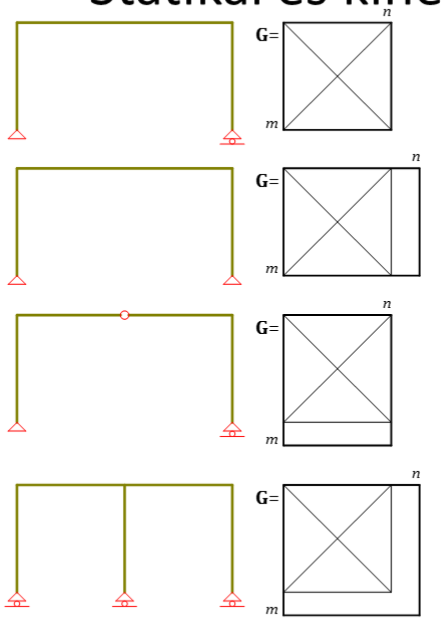
Állapot egyenletrendszer

$$
\begin{bmatrix} \underset{(3n)\text{x}(3n)}{\mathbf{C}} & \underset{(3n)\text{x}(3r)}{\mathbf{G}} \\ \underset{(3r)\text{x}(3n)}{\mathbf{G}^T} & \underset{(3r)\text{x}(3r)}{\mathbf{F}} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{v}} \\ \underset{(3r)}{\mathbf{s}} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{q}} \\ \underset{(3r)}{\mathbf{t}} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{0}} \\ \underset{(3r)}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}
$$



$$
\left[\begin{array}{cccccc|cccccccc}
\mathbf{0} & & & & & & \mathbf{T}_{12}\mathbf{B}_{12} & \mathbf{T}_{13}\mathbf{B}_{13} & \mathbf{T}_{14}\mathbf{B}_{14} & & & & & \\
 & \mathbf{0} & & & & & -\mathbf{T}_{12} & & & \mathbf{T}_{24}\mathbf{B}_{24} & & & & \\
 & & \mathbf{0} & & & & & -\mathbf{T}_{13} & & & \mathbf{T}_{34}\mathbf{B}_{34} & \mathbf{T}_{35}\mathbf{B}_{35} & & \\
 & & & \mathbf{0} & & & & & -\mathbf{T}_{14} & -\mathbf{T}_{24} & -\mathbf{T}_{34} & & \mathbf{T}_{45}\mathbf{B}_{45} & \mathbf{T}_{46}\mathbf{B}_{46} \\
 & & & & \mathbf{C}_5 & & & & & & & -\mathbf{T}_{35} & -\mathbf{T}_{45} & \\
 & & & & & \mathbf{C}_6 & & & & & & & & -\mathbf{T}_{46} \\
\mathbf{B}_{12}^T\mathbf{T}_{12}^T & -\mathbf{T}_{12}^T & & & & & \mathbf{F}_{12} & & & & & & & \\
\mathbf{B}_{13}^T\mathbf{T}_{13}^T & & -\mathbf{T}_{13}^T & & & & & \mathbf{F}_{13} & & & & & & \\
\mathbf{B}_{14}^T\mathbf{T}_{14}^T & & & -\mathbf{T}_{14}^T & & & & & \mathbf{F}_{14} & & & & & \\
 & \mathbf{B}_{24}^T\mathbf{T}_{24}^T & & -\mathbf{T}_{24}^T & & & & & & \mathbf{F}_{24} & & & & \\
 & & \mathbf{B}_{34}^T\mathbf{T}_{34}^T & -\mathbf{T}_{34}^T & & & & & & & \mathbf{F}_{34} & & & \\
 & & \mathbf{B}_{35}^T\mathbf{T}_{35}^T & & -\mathbf{T}_{35}^T & & & & & & & \mathbf{F}_{35} & & \\
 & & & \mathbf{B}_{45}^T\mathbf{T}_{45}^T & -\mathbf{T}_{45}^T & & & & & & & & \mathbf{F}_{45} & \\
 & & & \mathbf{B}_{46}^T\mathbf{T}_{46}^T & & -\mathbf{T}_{46}^T & & & & & & & & \mathbf{F}_{46}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \\ \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{14} \\ \mathbf{s}_{24} \\ \mathbf{s}_{34} \\ \mathbf{s}_{35} \\ \mathbf{s}_{45} \\ \mathbf{s}_{46} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_6 \\ \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{13} \\ \mathbf{t}_{14} \\ \mathbf{t}_{24} \\ \mathbf{t}_{34} \\ \mathbf{t}_{35} \\ \mathbf{t}_{45} \\ \mathbf{t}_{46} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}
$$

Statikai és kinematikai minősítés



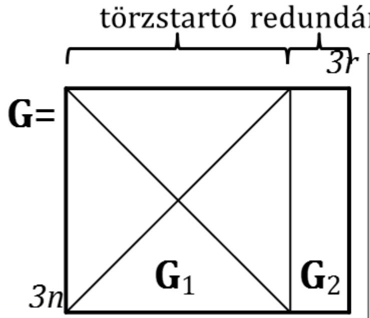
m=ρ(G)=n **I. osztály**
Statikailag és kinematikailag határozott

m=ρ(G)<n **II. osztály**
Statikailag határozatlan és kinematikailag túlhatározott

m>ρ(G)=n **III. osztály**
Statikailag túlhatározott és kinematikailag határozatlan

m>ρ(G)<n **IV. osztály**
Statikailag határozatlan és kinematikailag túlhatározott valamint statikailag túlhatározott és kinematikailag határozatlan.
Tehertől függ!

Erőmódszer származtatása



$$
\begin{bmatrix} \underset{(3n)\text{x}(3n)}{\mathbf{C}} & \underset{(3n)\text{x}(3n)}{\mathbf{G}_1} & \underset{(3n)\text{x}(3r\text{-}3n)}{\mathbf{G}_2} \\ \underset{(3n)\text{x}(3n)}{\mathbf{G}_1^T} & \underset{(3n)\text{x}(3n)}{\mathbf{F}_1} & \\ \underset{(3r\text{-}3n)\text{x}(3n)}{\mathbf{G}_2^T} & & \underset{(3r\text{-}3n)\text{x}(3r\text{-}3n)}{\mathbf{F}_2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{v}} \\ \underset{(3n)}{\mathbf{s}_1} \\ \underset{(3r\text{-}3n)}{\mathbf{s}_2} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{q}} \\ \underset{(3n)}{\mathbf{t}_1} \\ \underset{(3r\text{-}3n)}{\mathbf{t}_2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \underset{(3n)}{\mathbf{0}} \\ \underset{(3n)}{\mathbf{0}} \\ \underset{(3r\text{-}3n)}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}
$$

$\mathbf{G}=[\mathbf{G}_1 \;\; \mathbf{G}_2]$ $\quad\det(\mathbf{G}_1)\neq 0$

Egyensúlyi egyenlet: $\mathbf{C}\,\mathbf{v}+\mathbf{G}_1\,\mathbf{s}_1+\mathbf{G}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{q}=\mathbf{0}$

Kompatibilitási egyenlet a törzstartó rúdjain: $\mathbf{G}_1^T\,\mathbf{v}+\mathbf{F}_1\,\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1=\mathbf{0}$

Kompatibilitási egyenlet a redundáns rudakra: $\mathbf{G}_2^T\,\mathbf{v}+\mathbf{F}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{t}_2=\mathbf{0}$

$\mathbf{s}_1$: törzstartó rúdjainak belső erői

$\mathbf{s}_2$: redundáns belső erők

Erőmódszer származtatása

$\mathbf{C}\,\mathbf{v}+\mathbf{G}_1\,\mathbf{s}_1+\mathbf{G}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{q}=\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{s}_1=-\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{C}\,\mathbf{v}+\mathbf{G}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{q})$

$\mathbf{G}_1^T\,\mathbf{v}+\mathbf{F}_1\,\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1=\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{G}_1^T\,\mathbf{v}-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{C}\,\mathbf{v}+\mathbf{G}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{q})+\mathbf{t}_1=\mathbf{0} \rightarrow$
$\rightarrow \mathbf{G}_1^T\,\mathbf{v}-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{C}\,\mathbf{v}-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{G}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{q})+\mathbf{t}_1=\mathbf{0} \rightarrow$
$\rightarrow (\mathbf{G}_1^T-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{C})\,\mathbf{v}-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{G}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{q})+\mathbf{t}_1=\mathbf{0} \rightarrow$
$\rightarrow \mathbf{v}=(\mathbf{G}_1^T-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{G}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{q})-\mathbf{t}_1)$

$\mathbf{G}_2^T\,\mathbf{v}+\mathbf{F}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{t}_2=\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{G}_2^T\,(\mathbf{G}_1^T-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{G}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{q})-\mathbf{t}_1)+$
$+\mathbf{F}_2\,\mathbf{s}_2+\mathbf{t}_2=\mathbf{0} \rightarrow$

$$(\mathbf{G}_2^T\,(\mathbf{G}_1^T-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{G}_2)+\mathbf{F}_2)\,\mathbf{s}_2+$$
$$+\mathbf{G}_2^T\,(\mathbf{G}_1^T-\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{F}_1\,\mathbf{G}_1^{-1}\,\mathbf{q}-\mathbf{t}_1)+\mathbf{t}_2=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{s}_2+\mathbf{a}_0=\mathbf{0}$$

Elmozdulásmódszer származtatása

$\mathbf{G}^T\mathbf{v}+\mathbf{F}\,\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{0} \;->\; \mathbf{s}=-\mathbf{F}^{-1}\,(\mathbf{G}^T\,\mathbf{v}+\mathbf{t})$

$\mathbf{C}\,\mathbf{v}+\mathbf{G}\,\mathbf{s}+\mathbf{q}=\mathbf{0} \;->\; \mathbf{C}\,\mathbf{v}-\mathbf{G}\,\mathbf{F}^{-1}\,(\mathbf{G}^T\,\mathbf{v}+\mathbf{t})+\mathbf{q}=\mathbf{0} \;->$

$->\; (\mathbf{C}-\mathbf{G}\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{G}^T)\,\mathbf{v}-\mathbf{G}\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{t}+\mathbf{q}=\mathbf{0} \;->$

$$\underbrace{(\mathbf{G}\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{G}^T-\mathbf{C})}_{\mathbf{K}}\,\mathbf{v}=\underbrace{\mathbf{q}-\mathbf{G}\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{t}}_{\mathbf{q}_{red}}$$

$\mathbf{K}\,\mathbf{v}=\mathbf{q}_{red}$ (gépi számítás)

$\mathbf{A}\,\mathbf{x}+\mathbf{a}_0=\mathbf{0}$ (kézi számítás)

$\mathbf{K}=-\,\mathbf{A} \quad \mathbf{v}=\mathbf{x} \quad \mathbf{q}_{red}=\mathbf{a}_0$

Elemi merevségi mátrix

$$\mathbf{K}_e=\begin{bmatrix}\mathbf{T}\mathbf{B}\\ -\mathbf{T}\end{bmatrix}\mathbf{F}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{B}^T\mathbf{T}^T & -\mathbf{T}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{T} & \\ & \mathbf{T}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ -\mathbf{E}\end{bmatrix}\mathbf{F}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{B}^T & -\mathbf{E}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\mathbf{T}^T & \\ & \mathbf{T}^T\end{bmatrix}=$$

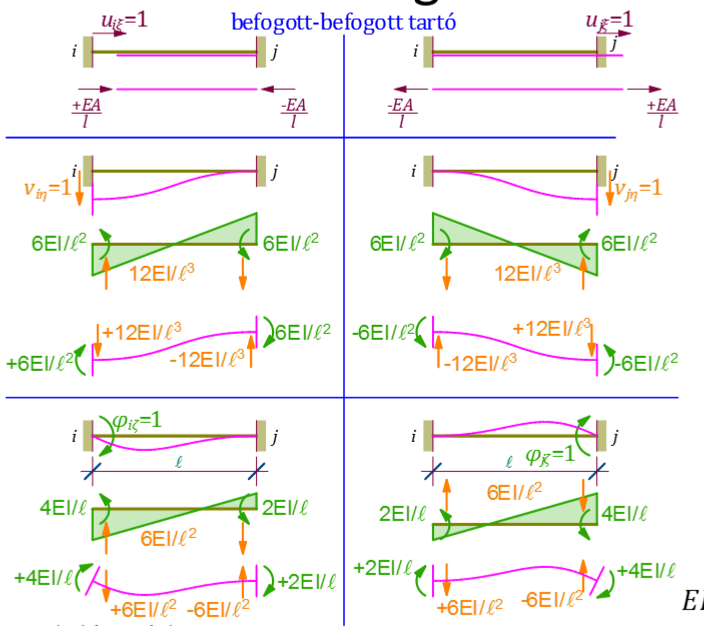
$$\mathbf{K}_e=\begin{bmatrix}\mathbf{T} & \\ & \mathbf{T}\end{bmatrix}\mathbf{K}_e\begin{bmatrix}\mathbf{T}^T & \\ & \mathbf{T}^T\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_e=\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ -\mathbf{E}\end{bmatrix}\mathbf{F}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{B}^T & -\mathbf{E}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&L&1\\-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{L}{EA}&0&0\\0&\frac{L^3}{3\cdot EI}&\frac{L^2}{2\cdot EI}\\0&\frac{L^2}{2\cdot EI}&\frac{L}{EI}\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0&0\\0&1&L&0&-1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}+\frac{EA}{l}&0&0&-\frac{EA}{l}&0&0\\0&+\frac{12EI}{l^3}&+\frac{6EI}{l^2}&0&-\frac{12EI}{l^3}&+\frac{6EI}{l^2}\\0&+\frac{6EI}{l^2}&+\frac{4EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^2}&+\frac{2EI}{l}\\-\frac{EA}{l}&0&0&+\frac{EA}{l}&0&0\\0&-\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}&0&+\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}\\0&+\frac{6EI}{l^2}&+\frac{2EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^2}&+\frac{4EI}{l}\end{bmatrix}$$

Elemi merevségi mátrix

$$\mathbf{K}_e^{b\text{-}b}=\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix}u_{i\xi}=1 & v_{i\eta}=1 & \varphi_{i\zeta}=1 & u_{j\xi}=1 & v_{j\eta}=1 & \varphi_{j\zeta}=1\end{matrix}\\
\begin{matrix}F_{i\xi}\\F_{i\eta}\\M_{i\zeta}\\F_{j\xi}\\F_{j\eta}\\M_{j\zeta}\end{matrix} & \begin{bmatrix}+\frac{EA}{l}&0&0&-\frac{EA}{l}&0&0\\0&+\frac{12EI}{l^3}&+\frac{6EI}{l^2}&0&-\frac{12EI}{l^3}&+\frac{6EI}{l^2}\\0&+\frac{6EI}{l^2}&+\frac{4EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^2}&+\frac{2EI}{l}\\-\frac{EA}{l}&0&0&+\frac{EA}{l}&0&0\\0&-\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}&0&+\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}\\0&+\frac{6EI}{l^2}&+\frac{2EI}{l}&0&-\frac{6EI}{l^2}&+\frac{4EI}{l}\end{bmatrix}
\end{array}$$

Elemi merevségi mátrix



$EI=EI_\zeta$

Elemi merevségi mátrix

$$\mathbf{K}_{e,ij}^{b-cs}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
+\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & +\frac{3EI}{l^3} & +\frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0\\
0 & +\frac{3EI}{l^2} & +\frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0\\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & +\frac{3EI}{l^3} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

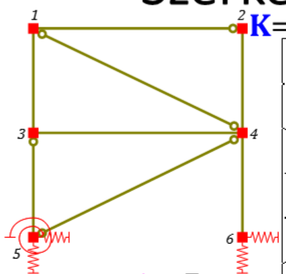
Elemi merevségi mátrix

$$\mathbf{K}_{e,ij}^{cs-b}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
+\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & +\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & +\frac{3EI}{l^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & +\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2}\\
0 & +\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & +\frac{3EI}{l}
\end{array}\right]$$

Elemi merevségi mátrix

$$\mathbf{K}_{e,ij}^{cs-cs}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
+\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Szerkezet merevségi mátrixa



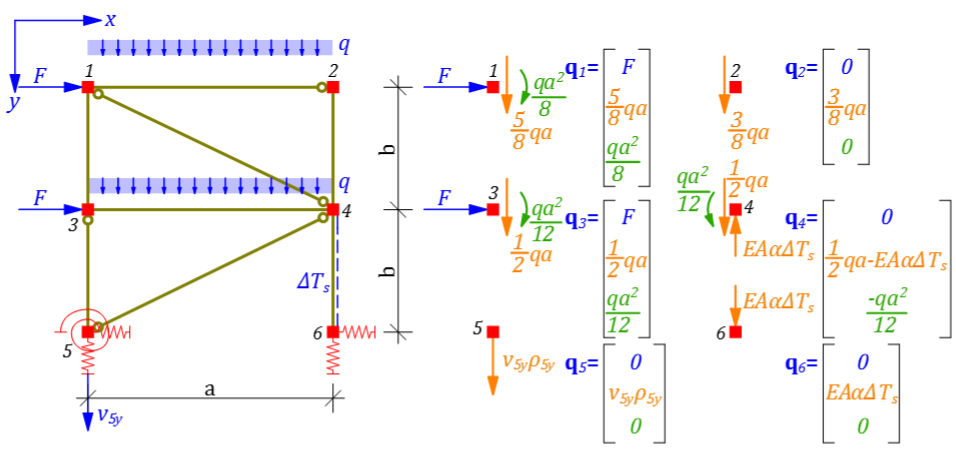
$$\mathbf{K}_e=(\mathbf{G}\ \mathbf{F}^{-1}\ \mathbf{G}^T-\mathbf{C})$$

$$\mathbf{K}_{ij}=\left[\begin{array}{c|c}
\mathbf{K}_{i\text{-}j}^{ii} & \mathbf{K}_{i\text{-}j}^{ij}\\
\hline
\mathbf{K}_{i\text{-}j}^{ji} & \mathbf{K}_{i\text{-}j}^{jj}
\end{array}\right]$$

$$\mathbf{C}_5=\left[\begin{array}{c|c|c}
+\rho_x & & \\
\hline
 & +\rho_y & \\
\hline
 & & +\rho_\varphi
\end{array}\right]\qquad
\mathbf{C}_6=\left[\begin{array}{c|c|c}
+\rho_x & & \\
\hline
 & +\rho_y & \\
\hline
 & & 0
\end{array}\right]$$

$$\mathbf{K}=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\mathbf{K}_{1\text{-}2}^{11}+\mathbf{K}_{1\text{-}3}^{11}+\mathbf{K}_{1\text{-}4}^{11} & \mathbf{K}_{1\text{-}2}^{12} & \mathbf{K}_{1\text{-}3}^{13} & \mathbf{K}_{1\text{-}4}^{14} & & \\
\hline
\mathbf{K}_{1\text{-}2}^{21} & \mathbf{K}_{1\text{-}2}^{22}+\mathbf{K}_{2\text{-}4}^{22} & & \mathbf{K}_{2\text{-}4}^{24} & & \\
\hline
\mathbf{K}_{1\text{-}3}^{31} & & \mathbf{K}_{1\text{-}3}^{33}+\mathbf{K}_{3\text{-}4}^{33}+\mathbf{K}_{3\text{-}5}^{33} & \mathbf{K}_{3\text{-}4}^{34} & \mathbf{K}_{3\text{-}5}^{35} & \\
\hline
\mathbf{K}_{1\text{-}4}^{41} & \mathbf{K}_{2\text{-}4}^{42} & \mathbf{K}_{3\text{-}4}^{43} & \mathbf{K}_{1\text{-}4}^{44}+\mathbf{K}_{2\text{-}4}^{44}+\mathbf{K}_{3\text{-}4}^{44}+\mathbf{K}_{4\text{-}5}^{44}+\mathbf{K}_{4\text{-}6}^{44} & \mathbf{K}_{4\text{-}5}^{45} & \mathbf{K}_{4\text{-}6}^{46}\\
\hline
 & & \mathbf{K}_{3\text{-}5}^{53} & \mathbf{K}_{4\text{-}5}^{54} & \mathbf{K}_{3\text{-}5}^{55}+\mathbf{K}_{4\text{-}5}^{55}+\mathbf{C}_5 & \\
\hline
 & & & \mathbf{K}_{4\text{-}6}^{64} & & \mathbf{K}_{4\text{-}6}^{66}+\mathbf{C}_6
\end{array}\right]$$

Szerkezet redukált tehervektora



Egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} & & \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & & \mathbf{K}_{24} & & \\ \mathbf{K}_{31} & & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} & \mathbf{K}_{35} & \\ \mathbf{K}_{14} & \mathbf{K}_{24} & \mathbf{K}_{34} & \mathbf{K}_{44} & \mathbf{K}_{45} & \mathbf{K}_{46} \\ & & \mathbf{K}_{53} & \mathbf{K}_{54} & \mathbf{K}_{55} & \\ & & & \mathbf{K}_{64} & & \mathbf{K}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \\ \mathbf{q}_6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_{ij} = -\mathbf{q}_{ij}^{\ j} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^{\ ji} & \mathbf{K}_{ij}^{\ jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ij}^{\ T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ij}^{\ T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix}$$

VÉGE

Köszönöm a figyelmet!

Összeállította: Dr. Hortobágyi Zsolt
BME Tartószerkezetek Mechanikája TSZ