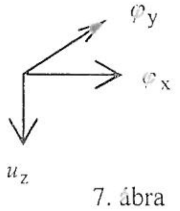
1.2. A tartórács mátrixegyenletei

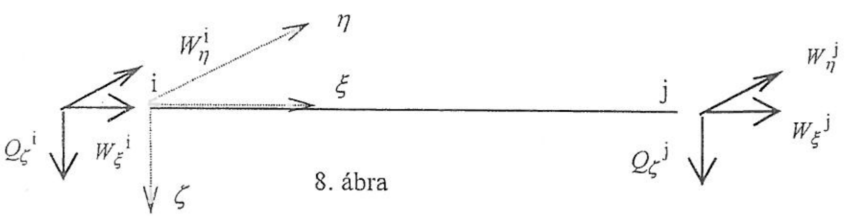
A tartórácsnál az egyes csomópontoknak a 7. ábrán látható három elmozdulás komponensük van. Ezek a globális koordinátarendszerben a síkra merőleges eltolódás u_z, és az x, valamint az y tengelynek megfelelő vektorú csomópont elfordulások φ_x és φ_y. A három elmozduláskomponenst az l-edik. csomópontnál az $\underline{x}_l$ vektorba gyűjthetjük.



7. ábra

$$\underline{v}_l = \begin{bmatrix} u_z^{\,l} \\ \varphi_x^{\,l} \\ \varphi_y^{\,l} \end{bmatrix} \qquad 1.1$$

A rúdvégi erők a saját koordinátarendszerben a Q_ζ nyíróerő, a tengely irányú vektorral bíró W_ξ csavarónyomaték és a W_η hajlítónyomaték.



8. ábra

$$\underline{q}_i = \begin{bmatrix} Q_\zeta^{\,i} \\ W_\xi^{\,i} \\ W_\eta^{\,i} \end{bmatrix} \qquad 1.2$$

A különböző irányú elmozdulásokhoz tartozó rúdvégi erőket korábbi tanulmányaink alapján adjuk meg.

$Q_\zeta^{\,i}$	=	$\frac{12EI_h}{l^3}$		$-\frac{6EI_h}{l^2}$	$-\frac{12EI_h}{l^3}$		$-\frac{6EI_h}{l^2}$	×	$u_\zeta^{\,i}$
$W_\xi^{\,i}$			$\frac{GI_{cs}}{l}$			$-\frac{GI_{cs}}{l}$			$\varphi_\xi^{\,i}$
$W_\eta^{\,i}$		$-\frac{6EI_h}{l^2}$		$\frac{4EI_h}{l}$	$\frac{6EI_h}{l^2}$		$\frac{2EI_h}{l}$		$\varphi_\eta^{\,i}$
$Q_\zeta^{\,j}$		$-\frac{12EI_h}{l^3}$		$\frac{6EI_h}{l^2}$	$\frac{12EI_h}{l^3}$		$\frac{6EI_h}{l^2}$		$u_\zeta^{\,j}$
$W_\xi^{\,j}$			$-\frac{GI_{cs}}{l}$			$\frac{GI_{cs}}{l}$			$\varphi_\xi^{\,j}$
$W_\eta^{\,j}$		$-\frac{6EI_h}{l^2}$		$\frac{2EI_h}{l}$	$\frac{6EI_h}{l^2}$		$\frac{4EI_h}{l}$		$\varphi_\eta^{\,j}$

I. Táblázat. A tartórács állandó keresztmetszetű rúdjának elemi merevségi mátrixa, saját koordinátarendszerben

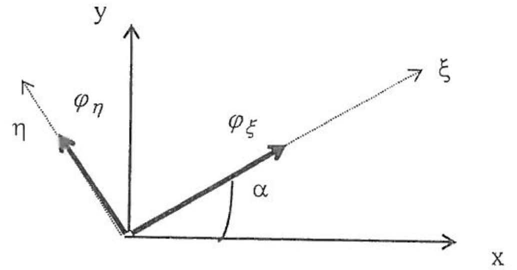
A rúdvégi erőket tartalmazó 6*6-os méretű mátrix az un. elemi merevségi mátrix. Az elemi merevségi mátrix blokkokra particionálva mint hipermátrix is felírható. Az r-edik jelű rúd elemi merevségi mátrixa ez esetben:

$$\underline{\underline{K}}_{r} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{K}}^{r}_{ii} & \underline{\underline{K}}^{r}_{ij} \\ \hline \underline{\underline{K}}^{r}_{ji} & \underline{\underline{K}}^{r}_{jj} \end{array}\right] \qquad 1.3$$

Az elemi merevségi mátrix ij blokkja jelenti a j-edik rúdvég egységnyi mozgásaiból az i-edik rúdvégen ébredő erőket.

Egy adott elmozdulás vektor globális rendszerbeli összetevői a saját rendszerben ismert komponensek segítségével is felírhatók

$$u_z = u_\zeta$$
$$\varphi_x = \varphi_\xi \cos\alpha - \varphi_\eta \sin\alpha$$
$$\varphi_y = \varphi_\xi \sin\alpha + \varphi_\eta \cos\alpha$$



Bevezetve a c = cos α és az s = sin α rövidítéseket a két koordinátarendszerbeli komponensek közötti mátrix összefüggés:

$$\begin{bmatrix} u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & -s \\ & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\zeta \\ \varphi_\xi \\ \varphi_\eta \end{bmatrix}. \qquad 1.4$$

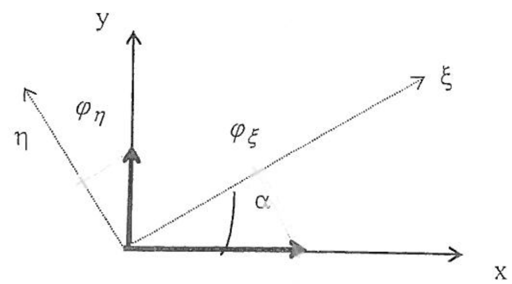
Az r. sorszámú rúdnál tehát:

$$\underline{v}^{x}_{r} = \underline{\underline{T}}_{r}\, \underline{v}^{\xi}_{r}\,, \qquad 1.5$$

ahol a $\underline{\underline{T}}_{r}$ a rúdhoz tartozó transzformáló mátrix.

A fenti elemzések elvégezhetők arra az esetre is, ha egy adott elmozdulás vektor komponensei a globális rendszerben ismertek. Vizsgáljuk meg hogyan írhatók fel ekkor a lokális rendszerbeli összetevők.

$$u_\xi = u_z$$
$$\varphi_\eta = -\varphi_x \sin\alpha + \varphi_y \cos\alpha$$
$$\varphi_\xi = \varphi_x \cos\alpha + \varphi_y \cdot \sin\alpha$$



Az összefüggést mátrix alakban felírva:

$$\begin{bmatrix} u_\xi \\ \varphi_\xi \\ \varphi_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & s \\ & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} . \qquad 1.6$$

$$\underline{v}_r^{\xi} = \underline{\underline{T}}_r^{T} \underline{v}_r^{x} . \qquad 1.7$$

A kapott kifejezésben a $\underline{\underline{T}}_r^{T}$ mátrix az r-edik sorszámú rúd transzformáló mátrixának a transzponáltja.

A fenti transzformáló mátrixok segítségével a kereteknél látott módon számítható a globális rendszerbeli elemi merevségi mátrix, valamint a rúdon lévő teherből a csomóponti erők vektora.

Írjuk fel az ij rúdnál a saját koordinátarendszerben az elemvégi elmozdulások és erők közötti összefüggést:

$$\begin{bmatrix} \underline{q}_i^{\xi} \\ \underline{q}_j^{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^{\xi} & \underline{\underline{K}}_{ij}^{\xi} \\ \underline{\underline{K}}_{ji}^{\xi} & \underline{\underline{K}}_{jj}^{\xi} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{v}_i^{\xi} \\ \underline{v}_j^{\xi} \end{bmatrix} \qquad 1.8$$

Az elmozdulás vektorok felírhatók a globális koordinátarendszerbeli alakkal is:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_i^{\xi} \\ \underline{v}_j^{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}^{T} \underline{v}_i^{x} \\ \underline{\underline{T}}^{T} \underline{v}_j^{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}^{T} & \\ & \underline{\underline{T}}^{T} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{v}_i^{x} \\ \underline{v}_j^{x} \end{bmatrix} \qquad 1.9$$

fentiekben a $\underline{\underline{T}}^{T}$ mátrixnál nem jelöltük az r indexet, nyilván az ij rúdhoz tartozó mátrixról van szó. Az 1.8-as összefüggésben szereplő két blokkból álló tehervektor szorozható balról egy olyan hiperdiagonál mátrixszal, amelynek blokkjai a transzformáló mátrixok. Eredményül egy globális rendszerbeli tehervektort kapunk.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{T}} & \\ & \underline{\underline{T}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{q}_i^{\xi} \\ \underline{q}_j^{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}\ \underline{q}_i^{\xi} \\ \underline{\underline{T}}\ \underline{q}_j^{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{q}_i^{x} \\ \underline{q}_j^{x} \end{bmatrix}$$

Ha az 1.8-es képletbe behelyettesítjük az 1.9-es összefüggést és az egyenletet balról szorozzuk transzformáló mátrixokat tartalmazó hiperdiagonállal:

$$\begin{bmatrix} \underline{q}_i^x \\ \underline{q}_j^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}} & \\ & \underline{\underline{T}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^{\xi} & \underline{\underline{K}}_{ij}^{\xi} \\ \underline{\underline{K}}_{ji}^{\xi} & \underline{\underline{K}}_{jj}^{\xi} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}^T & \\ & \underline{\underline{T}}^T \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{v}_i^x \\ \underline{v}_j^x \end{bmatrix}$$

A felírt kifejezésben lévő hármas mátrixszorzat a globális rendszerbeli rúdvégi elmozdulások és erők között ad meg összefüggést. Az eredményül adódó mátrix tehát a globális elemi merevségi mátrix lesz:

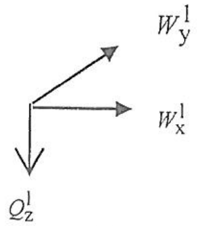
$$\underline{\underline{K}}_r^x = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^x & \underline{\underline{K}}_{ij}^x \\ \underline{\underline{K}}_{ji}^x & \underline{\underline{K}}_{jj}^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{K}}_{ii}^{\xi}\,\underline{\underline{T}}^T & \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{K}}_{ij}^{\xi}\,\underline{\underline{T}}^T \\ \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{K}}_{ji}^{\xi}\,\underline{\underline{T}}^T & \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{K}}_{jj}^{\xi}\,\underline{\underline{T}}^T \end{bmatrix} \qquad 1.10$$

Látható, hogy a globális merevségi mátrix blokkjait a lokális merevségi mátrix blokkjaiból a transzformáló mátrixok segítségével kapjuk meg. Ezek után már tudjuk "kompilálni" a szerkezet merevségi mátrixát.

A megtámasztások figyelembevételének egyik módja, amikor a mereven megfogott csomópontot kihagyjuk a vizsgálatból. Ha a csomópont rugalmasan megtámasztott ezt nem tehetjük, hiszen a megtámasztott csomópont is elmozdul, így annak mozgásából is keletkeznek igénybevételek a szerkezeten. Sok esetben a mereven megtámasztott szerkezetet is, mint nagy merevségű rugókkal megtámasztott szerkezetet vizsgáljuk, így elég egy eljárásra programot készíteni.

A rugalmasan megtámasztott csomópont esetén a csomópont elmozdulásának következtében a megtámasztó rugók megnyúlnak, vagy összenyomódnak. A csomópontra ható erő az elmozdulással ellentétes, nagysága pedig az elmozdulás szorozva az irányába eső rugó merevségével. Amint láttuk, a merevségi mátrixban a csomóponti erők ellentettei jelennek meg, így az egyensúlyi egyenletben az egységnyi elmozdulásból keletkező rugóerő (aminek nagysága megegyezik a rugómerevséggel) előjele az egyenletbe való beíráskor pozitív lesz. Egy adott irányú elmozdulásból az adott irányba keletkező erő a merevségi mátrix főátlójában jelenik meg, vagyis az elemi merevségi mátrixokból kompilált szerkezet merevségi mátrix főátlójába a rugalmas megtámasztás irányához tartozó elemhez hozzá kell adni a rugó merevséget.

A mátrix-elmozdulásmódszer alkalmazásához tartozó $\underline{\underline{K}}\,\underline{v} = \underline{q}$ egyenlet jobboldalán lévő tehervektor az egyes csomópontoknál lévő csomóponti terheket tartalmazza, abban a koordináta rendszerben, amelyben a csomóponti egyensúlyi egyenleteket felírtuk. Az egyes csomópontoknál a síkbeli szerkezetnél a 9. ábrán látható három erő komponenssel számolunk. Legyen z tengely irányú erő Q_z^l, az x tengely irányú vektorral rendelkező erőpár W_x^l, míg az y tengely irányú vektorral rendelkező erőpár W_y^l. A három erőkomponenst az l-edik csomópontnál a $\underline{q}_l$ vektorba gyűjthetjük.



9. ábra

$$\underline{q}_l = \begin{bmatrix} Q_z^{\,l} \\ W_x^{\,l} \\ W_y^{\,l} \end{bmatrix} \qquad 1.11$$

Ha a szerkezet csak csomópontokon terhelt, akkor az egyes csomópontokhoz tartozó erőket a szerkezet csomópontszámának megfelelő blokkokkal rendelkező $\underline{q}$ vektorba gyűjtve egyszerűen előáll a tehervektor.

Ha a szerkezet rúdjain is van teher, akkor a Tartók Statikájában tanult módon járhatunk el. Állandó keresztmetszetű, két végén befogott rudaknál a gyakorlatban előforduló tehertípusoknál a kézikönyvekben kész képletek vannak a rúdvégi erőkre (a két végén befogott tartó reakcióerőire). Ezen rúdvégi erők ellentetteit kell a csatlakozó csomópontoknál további csomóponti erőként figyelembe venni.

A reakcióerők viszonylag egyszerűen számíthatók abban az esetben, ha ismerjük a rúdvégi egységnyi elmozdulásokból a terheletlen tartón keletkező elmozdulások függvényeit. Az alkalmazandó eljárást a Végeselemek tárgyban megismertük.

Ha a rudakon hőmérsékletváltozás is van, abból is keletkeznek a két végén befogott tartón reakcióerők és így csomóponti erők is. Ezek számítása is a korábban tanult módon történhet.

A Tartók Statikájában láttunk példát a támaszsüllyedés figyelembevételére is. Ha egy csomópont megsüllyed, akkor az oda csatlakozó rudak rúdvégei is elmozdulnak. Ha a l-edik csomópontnál lévő támaszmozgást a globális rendszerben adjuk meg, akkor a csatlakozó rudak rúdvégi elmozdulásai a saját koordinátarendszerben az 1.7 alatt bemutatott módon számíthatók. Ezt követően az adott rúd saját koordinátarendszerbeli elemi merevségi mátrixát felhasználva előállíthatók a támaszmozgáshoz tartozó rúdvégi erők. Ezek ellentetteit a globális rendszerbe transzformálva megkapjuk a támaszmozgáshoz tartozó csomóponti erőket is.

Ha a csomópont rugóval megtámasztott, akkor a csomóponti erők között megjelenik az elmozduláshoz tartozó rugóerő is, mint a rugómerevség és az elmozdulás szorzata. Ha a $\underline{\underline{K}}\underline{v} = \underline{q}$ egyenletben mind a merevségi mátrixot, mind a tehervektort előállítottuk. akkor az egyenletrendszert megoldva, megkapjuk a szerkezet csomópontjainak elmozdulását a globális rendszerben.

Az elmozdulások ismeretében számíthatók az egyes rudak igénybevételei. Elsőként az adott rúd kezdő és végponti elmozdulásait gyűjtjük ki, és ezeket transzformáljuk a saját koordinátarendszerbe. Az elmozdulásokhoz tartozó végponti erők ezek után:

$$\left[\underline{q}_j^{\xi}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{K}}_{ji}^{\xi} & \underline{\underline{K}}_{jj}^{\xi} \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c} \underline{v}_i^{\xi} \\ \hline \underline{v}_j^{\xi} \end{array}\right]$$

Ha a rúdon volt teher, akkor az elmozdulásokból számított rúdvégi erőkhöz hozzá kell adni azokat a kiegészítő rúdvégi erőket, amelyeket a tehervektor előállításához meghatároztunk. Így elál a végleges végponti erővektor. A rúd végéről elindulva a rúdvégi erőkből és a keresztmetszet valamint a végpont közé eső erőkből számíthatók egy adott keresztmetszet igénybevételei és így az igénybevételi ábrák is.

Ha egy mereven megtámasztott csomópontnál az egyes csatlakozó rudak rúdvégi erőinek ellentetteit vesszük, azokat transzformáljuk a globális rendszerbe és hozzáadjuk a csomópontra ható külső csomóponti erőt, megkapjuk azt az erőrendszert, amivel az adott csomópontra ható reakcióerőknek egyensúlyt kell tartani. Ebből a feltételből a reakció erők számíthatók.

Ha a csomópont rugalmasan megtámasztott volt, akkor a csomóponti elmozdulás ismeretében a reakcióerő az elmozdulás és a rugómerevség szorzataként számítható.