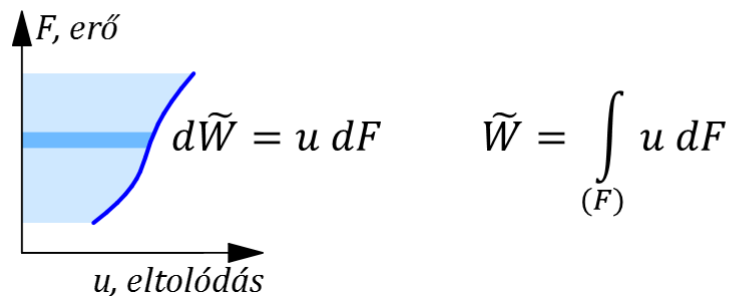


Tartók statikája I

Virtuális erőrendszerek, virtuális kiegészítő munka fogalma, a virtuális erők tétele.

Dr. Hortobágyi Zsolt

A kiegészítő munka fogalma

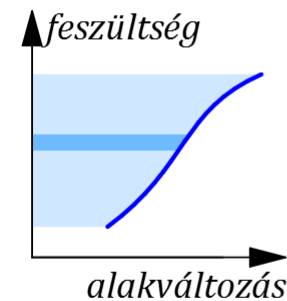


Elemi kiegészítő munka: az elmozdulásnak az irányába eső elemi erőn végzett munkája
Teljes kiegészítő munka: az elemi kiegészítő munkák összege, erő szerinti integrálja

$$\tilde{W} = \tilde{W}_{\text{külső}} + \tilde{W}_{\text{belső}}$$

A belső kiegészítő munka

Belső kiegészítő munka: az alakváltozásoknak a feszültségeken végzett munkája



$$\tilde{W}_{\text{belső}} = - \int_{(V)} \left(\int_{(\sigma)} \varepsilon^T d\sigma \right) dV$$

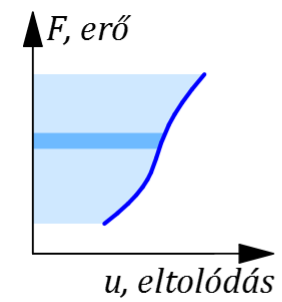
A külső kiegészítő munka

Külső kiegészítő munka: az elmozdulások erőkön, nyomatékokon végzett munkája

f: az összes külső koncentrált erő és nyomaték komponensei

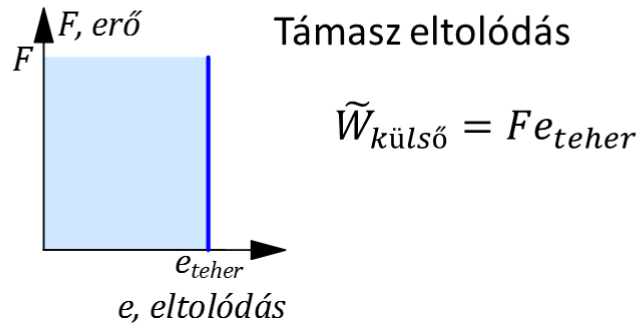
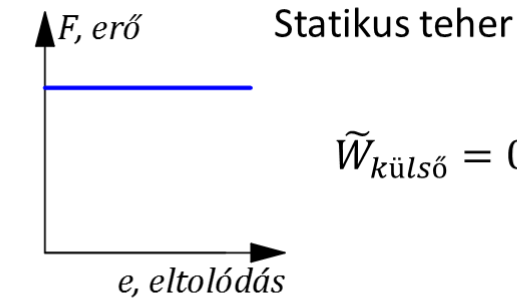
q: az összes külső felületi teher komponensei

e: az **f** támadáspontjainak elmozdulásai



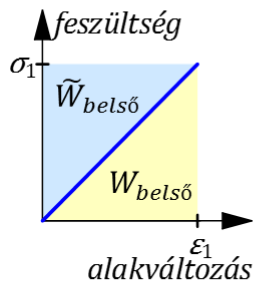
$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\text{külső}} = & \int_{(f)} \mathbf{e}^T d\mathbf{f} + \int_{(S)} \left(\int_{(q)} \mathbf{u}^T d\mathbf{q} \right) dS + \\ & + \int_{(V)} \left(\int_{(g)} \mathbf{u}^T d\mathbf{g} \right) dV \end{aligned}$$

A külső kiegészítő munka



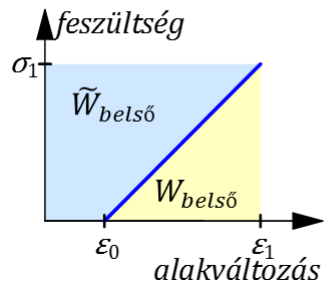
5

A belső munka és kiegészítő munka lineárisan rugalmas anyag esetén



$$W_{belső} = - \int_{(V)} \frac{1}{2} E \varepsilon_1^2 dV$$

$$\tilde{W}_{belső} = - \int_{(V)} \frac{1}{2} \frac{1}{E} \sigma_1^2 dV$$



$$W_{belső} = - \int_{(V)} \frac{1}{2} E (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 dV$$

$$\tilde{W}_{belső} = - \int_{(V)} \left[\sigma_1 \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \frac{1}{E} \sigma_1^2 \right] dV$$

6

A virtuális erőrendszer

A virtuális erőrendszer:

Egy általunk tetszőlegesen felvett, differenciálisan kicsiny, egyensúlyi erőrendszer.

$$\delta \mathbf{f}, \delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{g}, \delta \boldsymbol{\sigma}$$

A virtuális erő-feszültség rendszer tulajdonságai:

- általunk választott, így semmi köze a szerkezetre ható tényleges terhekhez
- önmagában egyensúlyban legyen
pl. a tényleges erőrendszer is ilyen

7

A virtuális kiegészítő munka $\delta \tilde{W}$

A virtuális kiegészítő munka:

A tényleges elmozdulásrendszernek egy virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája.

$$\delta \tilde{W} = \delta \tilde{W}_{k\ddot{u}ls\ddot{o}} + \delta \tilde{W}_{belső}$$

IDEGEN MUNKA!

$$\delta \tilde{W}_{k\ddot{u}ls\ddot{o}} = \mathbf{e}^T \delta \mathbf{f} + \int_{(S)} \mathbf{u}^T \delta \mathbf{q} dS + \int_{(V)} \mathbf{u}^T \delta \mathbf{g} dV$$

$$\delta \tilde{W}_{belső} = - \int_{(V)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV$$

8

A virtuális kiegészítő munka - rácsrúdra

A virtuális belső kiegészítő munka ($\delta\tilde{W}_{belső} = -\int_{(V)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV$) rácsrudak esetén:

- x : a hossz tengely; y és z : keresztmetszeti főirányok

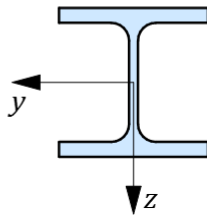
$$\begin{aligned} \delta\tilde{W}_{belső} &= -\int_{(V)} \varepsilon_x(x, y, z) \delta\sigma_x(x, y, z) dV = \\ &= -\int_{(l)} \varepsilon_x(x) \delta\sigma_x(x) A dx = -\int_{(l)} \varepsilon_x(x) \frac{\delta S(x)}{A} A dx = \\ &= -\delta S \int_{(l)} \varepsilon_x(x) dx = -\Delta l \delta S \end{aligned}$$

9

A virtuális kiegészítő munka - gerendára

A virtuális belső kiegészítő munka ($\delta\tilde{W}_{belső} = -\int_{(V)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV$) gerendák esetén:

- x : a hossz tengely; y és z : keresztmetszeti főirányok
- ha csavarás is van: körszimmetrikus keresztmetszet y
- a nyírás hatását elhanyagoljuk



$$\begin{aligned} \delta\tilde{W}_{belső} &= \\ &= -\int_{(l)} \varepsilon_x(x) \delta N_x(x) dx - \int_{(l)} \kappa_y(x) \delta M_y(x) dx - \\ &\quad - \int_{(l)} \kappa_z(x) \delta M_z(x) dx - \int_{(l)} \kappa_x(x) \delta M_{csav}(x) dx \end{aligned}$$

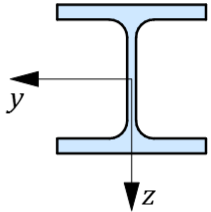
Síkban:
$$\delta\tilde{W}_{belső} = -\int_{(l)} \varepsilon_x(x) \delta N_x(x) dx - \int_{(l)} \kappa_y(x) \delta M_y(x) dx$$

10

A virtuális kiegészítő munka - gerendára

A virtuális belső kiegészítő munka ($\delta\tilde{W}_{belső} = -\int_{(V)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta\boldsymbol{\sigma} dV$) gerendák esetén:

- x : a hossz tengely; y és z : keresztmetszeti főirányok
- ha csavarás is van: körszimmetrikus keresztmetszet y
- a nyírás hatását elhanyagoljuk



Síkban:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{W}_{belső} &= -\int_{(l)} \varepsilon_x(x) \delta N_x(x) dx - \int_{(l)} \kappa_y(x) \delta M_y(x) dx = \\ &= -\int_{(l)} \frac{N(x)}{EA} \delta N_x(x) dx - \int_{(l)} \frac{M_y(x)}{EI_y} \delta M_y(x) dx \end{aligned}$$

11

A virtuális erők tétele

Egy elmozdulásrendszer **akkor és csak akkor** geometriailag lehetséges, ha **bármely** virtuális erőrendszeren végzett **kiegészítő munkája zérus**.

- a vizsgált elmozdulásrendszer kompatibilitásának **szükséges és elégséges** feltétele
- ha csak egy virtuális erőrendszerre mutattuk ki, hogy $\delta\tilde{W} = 0$:
még csak egy **szükséges** feltételt vizsgáltunk;
- **elégséges** feltétel: minden virtuális erőrendszerre $\delta\tilde{W} = 0$
- a szerkezet **anyaga**: mindegy! [idegen munka]

12

A virtuális erők tétele

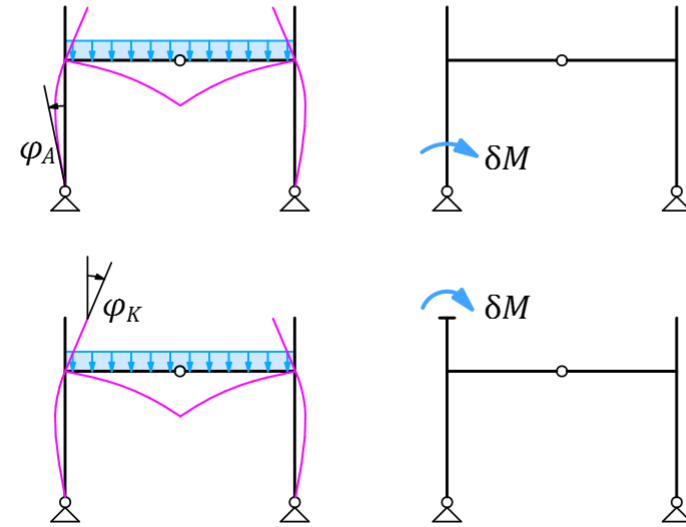
Alkalmazása:

- pl. elméleti alap más módszerekhez
- pl. statikailag határozott tartók elmozdulásainak számítása:
 - adott: a szerkezet és a terhek; keressük: egy konkrét elmozdulást
 - választunk egy virtuális erőrendszert: a virtuális „teher”: a keresett elmozduláson végezzen munkát

13

A virtuális teher felvétele

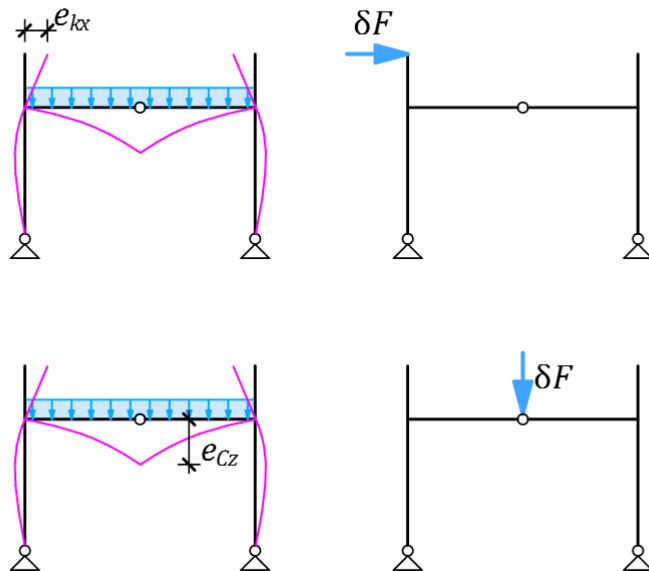
A keresett elmozdulás A választott virtuális teher



15

A virtuális teher felvétele

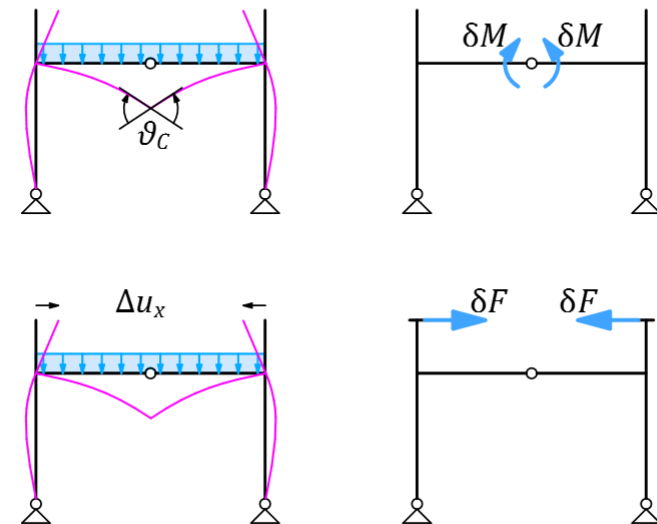
A keresett elmozdulás A választott virtuális teher



14

A virtuális teher felvétele

A keresett elmozdulás A választott virtuális teher



16

A virtuális erők tétele

$$\delta\tilde{W} = \delta\tilde{W}_{k\ddot{u}ls\ddot{o}} + \delta\tilde{W}_{bels\ddot{o}} = 0$$

$$\delta\tilde{W}_{k\ddot{u}ls\ddot{o}} = -\delta\tilde{W}_{bels\ddot{o}}$$

$\delta\tilde{W}_{k\ddot{u}ls\ddot{o}}$: A virtuális k\ddot{u}ls\ddot{o} er\ddot{o}k munkája a t\ddot{e}nyleges hatásokból \ddot{e}bred\ddot{o} elmozdul\ddot{a}srendszeren

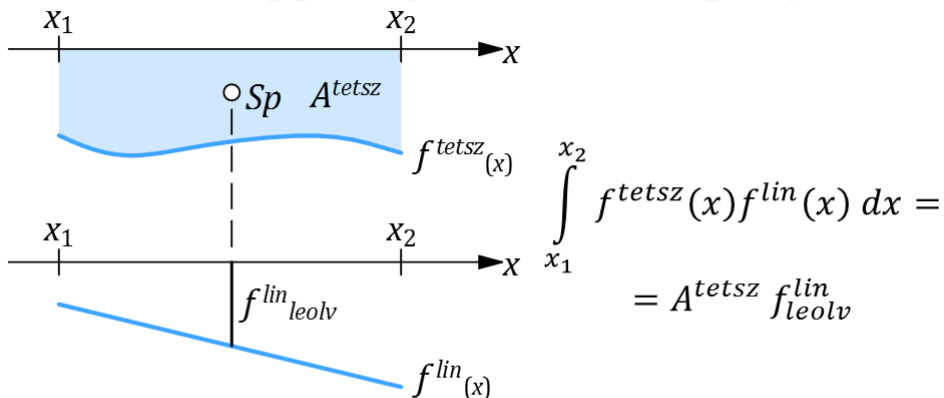
$\delta\tilde{W}_{bels\ddot{o}}$: A virtuális b\ddot{e}ls\ddot{o} er\ddot{o}k (ig\ddot{e}nybevételek) munkája a t\ddot{e}nyleges hatásokból \ddot{e}bred\ddot{o} alakv\ddot{a}ltozásokon

$$-\delta\tilde{W}_{bels\ddot{o}} =$$

$$= + \int_{(x)} \varepsilon_{t\ddot{e}nyl}(x) \delta N(x) dx + \int_{(x)} \kappa_{t\ddot{e}nyl}(x) \delta M(x) dx$$

17

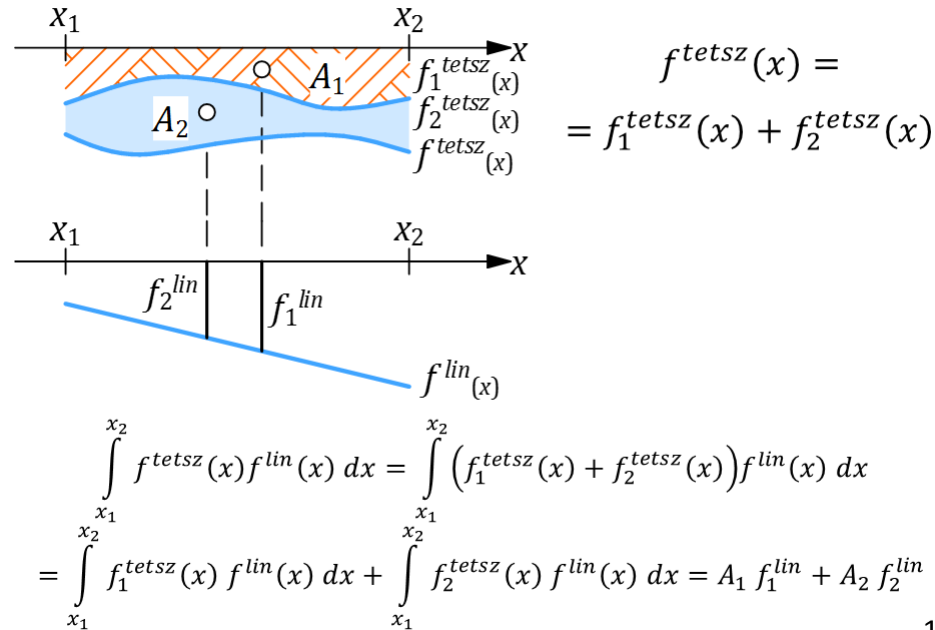
K\ddot{e}t függvény szorzatintegrálja



Az egyik függvény mindenk\ddot{e}pp line\ddot{a}ris legyen v\ddot{e}gig az integr\ddot{a}land\ddot{o} tartom\ddot{a}nyon, a m\ddot{a}sik függvény tetsz\ddot{o}leges.

18

K\ddot{e}t függvény szorzatintegrálja



19

Elmozdulások számítása

Sz\ddot{a}mp\ddot{e}lda

20



VÉGE

Köszönöm a figyelmet!

Összeállította: Dr. Hortobágyi Zsolt
BME Tartószerkezetek Mechanikája TSZ