SEGÉDLET AZ

ÉPÍTŐMÉRNÖKI ÁBRÁZOLÁS

TANTÁRGYHOZ

II. RÉSZ

2014.

Bevezetés

2011-ben az Építőmérnöki ábrázolás tantárgy előadási és gyakorlati tananyaga bővítésre került. Jelen jegyzet a 2006-ban Nika Endre, Dr. H. Baráti Ilona és Patonai Dénes által írt jegyzet anyagára épül, annak kiegészítése.
Néhány témakör, mint a méretes feladatok köre, az axonometrikus és perspektív ábrázolás több feladattal, szerkesztési módszerek részletezésével kiegészült. Új témakört jelent az árnyékszerkesztés és a torzfelületek tárgyalása.
A feladatok szerkesztésmenetének jobb követhetősége érdekében a kiinduló adatokat zöld, a szerkesztő vonalakat szürke, a feladat eredményét fekete színnel jelöltük.
Célunk, hogy a hallgatók a térszemlélete tovább fejlődjön, későbbi hallgatói és mérnöki tevékenységüket biztos geometriai alapokra helyezhessék.

2014. május   Dr. V. Horn Valéria

Tartalom

7. Árnyékszerkesztés

1. kép

Az árnyékszerkesztés tananyagban történő tárgyalását a következők indokolják:

- A tárgyakról alkotott kép szemléletességét fokozza, ha a felületek megvilágítottsága – árnyékoltsága megjeleníthető.
- A mérnöki gyakorlatban meg kell tervezni a terek természetes megvilágítását. Nyári melegben árnyékolók alkalmazásával lehet védeni a belső tereket a túlmelegedéstől.
  Az árnyékolók sokszor fényterelőkként is alkalmazhatók, ezáltal a belső tereket direkt napsugárzás nem éri, de a jó diffúz megvilágítás biztosítható. Ezek megalkotása mérnöki feladat.

Meg kell jegyezni, hogy az alkalmazásra kerülő árnyékszerkesztés a valóság egyszerűsítésén alapszik, hiszen a tónusbeli különbségeket, a reflex fényeket, illetve a levegő hatását nem adja vissza.

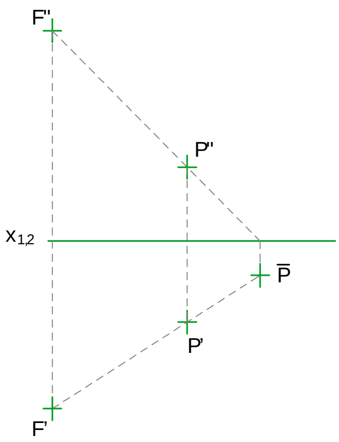
A fényforrás a végesben vagy a végtelenben lehet, az előbbi esetben *centrális megvilágítás*ról, az utóbbinál *párhuzamos (paralel) megvilágítás*ról beszélünk.
A fényforrás irányából nézve a felületek megvilágítottak, *önárnyékos*ak, illetve *vetettárnyékos*ak lehetnek, ez utóbbi esetben a felületre egy alakzat vet árnyékot. Ha ezt az alakzatot a fényforrás irányából elmozdítjuk, akkor a felület megvilágítottá válik.
A megvilágított és önárnyékos részt az *önárnyékhatár* választja el. Ahol a vetettárnyék jön létre, az az *árnyékfelfogó* sík vagy felület.
Az árnyékszerkesztés az Építőmérnöki ábrázolás I. jegyzet 3. fejezetében tárgyalt metszési feladatokon alapszik.

Térelemek árnyéka

A következőkben néhány térelem árnyékát szerkesztjük meg.

7.1 Pont árnyéka centrális megvilágításban

Az 1. ábrán adott egy pontszerű *F* fényforrás és egy *P* pont. Keressük a pontnak a képsíkra, mint árnyékfelfogó síkra vetett árnyékát.



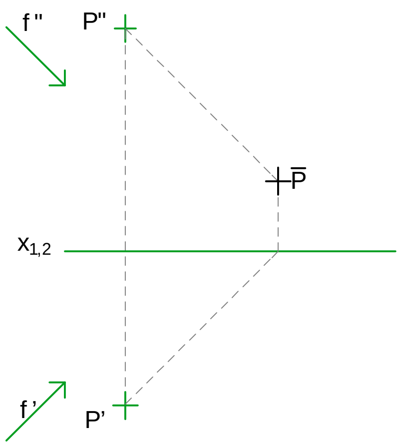
1. ábra

A *P* pont árnyéka nem más, mint az *F*-ből induló, *P* ponton keresztül felvett fénysugárnak a képsíkban lévő nyompontja ($\overline{P}$). A fényforrás és a pont helyzete meghatározza, hogy az árnyék melyik képsíkon keletkezik.

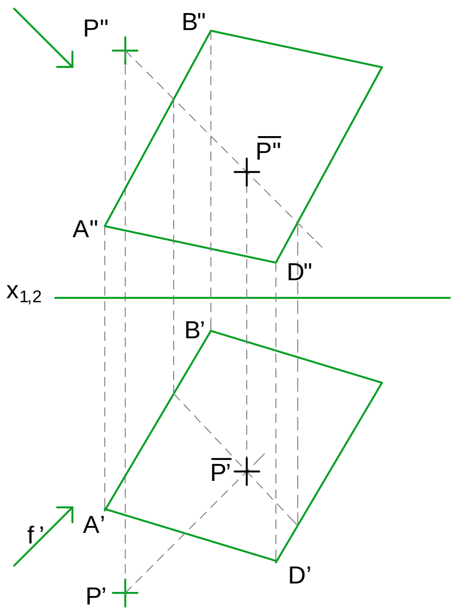
A továbbiakban párhuzamos (paralel) megvilágítással foglalkozunk. Párhuzamos megvilágításnál legtöbbször balról jobbra tartó, ún. *konvencionális fénysugarat* alkalmazunk, amelynek képei az $x_{1,2}$ tengellyel 45°-ot zárnak be.

7.2 **Pont árnyéka** (2. ábra)

A *P* ponton átmenő konvencionális fénysugár a *K2* képsíkot, mint árnyékfelfogó síkot éri el. Itt jön létre a *P* pont árnyéka, $\overline{P}$.



2. ábra



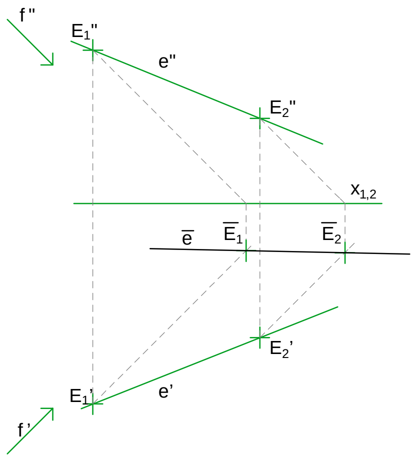
3. ábra

7.3 **Pont árnyéka általános síkon** (3. ábra)

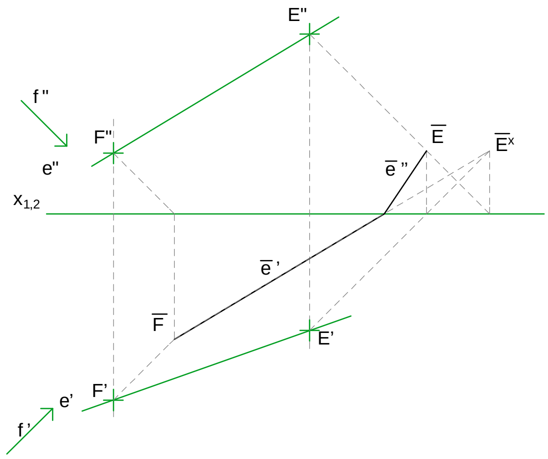
A *P* ponton keresztül felvett fénysugárnak a síkkal alkotott döféspontja lesz a pont árnyéka. (A fénysugáron keresztül felveszünk egy vetítősíkot, képezzük a két sík metszésvonalát, a metszésvonal és fénysugár közös pontja képezi a pont árnyékát.) Mivel általános síkon – és nem az egyik képsíkon – keletkezett az árnyék, ezért első és második képen is ábrázoljuk.

7.4 **Egyenes árnyéka** (4. ábra)

Az egyenes pontjaira ültetett fénysugarak fénysíkot alkotnak. E fénysíknak a képsíkkal alkotott metszésvonala lesz az egyenes képsíkra vetett árnyéka.
A feladat visszavezethető két pont árnyékának megszerkesztésére. Az egyenesen kijelölünk két pontot (E_1 és E_2), és megszerkesztjük árnyékukat, melyeket összekötünk.



4. ábra

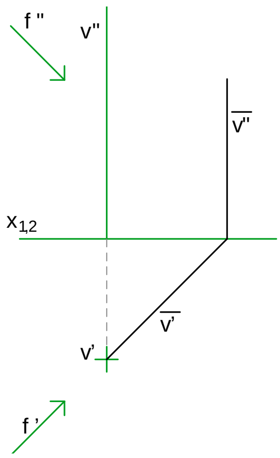


5. ábra

7.5 **Egyenes árnyéka két képsíkon** (5. ábra)

Az egyenes jelölt *E* és *F* pontjának árnyéka más-más képsíkon jön létre konvencionális fénysugár mellett. Az *E* pont árnyékát úgy szerkesztjük meg, hogy gondolatban eltávolítjuk a *K2* képsíkot, és képezzük az *E* pont *K1* képsíkon létrejövő árnyékát ($\overline{E}^{x}$). E képzetes árnyékpontot összekötjük $\overline{F}$ árnyékponttal. Megkapjuk azt a pontot, ahol az *e* egyenes árnyéka megtörik, majd összekötjük *E* pont *K2* képsíkra vetett árnyékával.

7.6 **Vetítőegyenes árnyéka** (6. ábra)

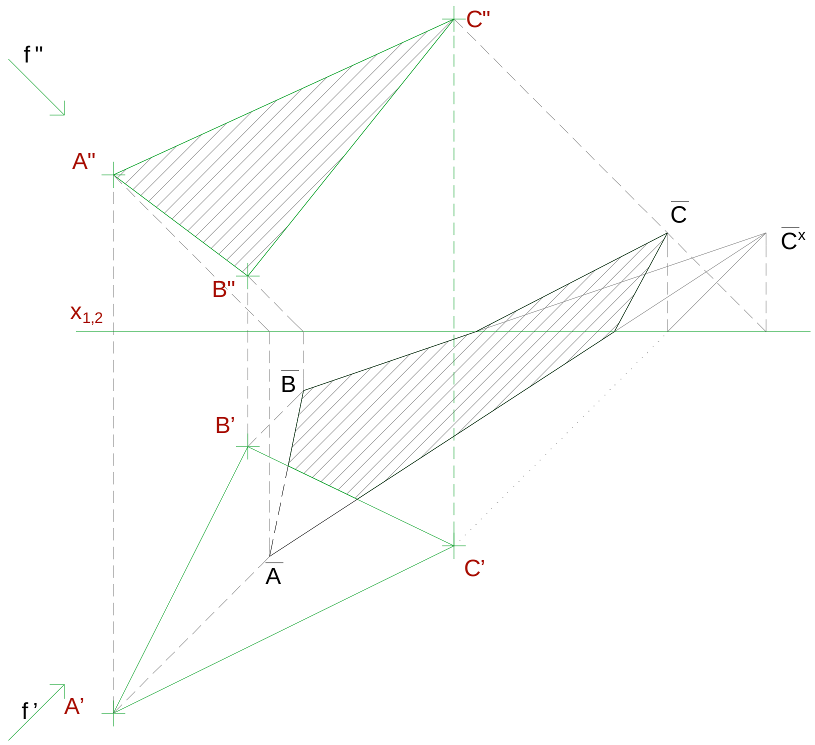


6. ábra

Vetítőegyenes árnyéka nem más, mint az egyenesre ültetett fénysík két nyomvonala. Itt első vetítőegyenesen első vetítősík megy át. Az árnyék az egyenes nyompontjából indul. Az árnyék első képe fénysugárirányú.
Meg kell jegyeznünk, hogy párhuzamos egyenesek árnyékai az árnyékfelfogó síkon párhuzamosak lesznek, továbbá egy egyenesnek párhuzamos síkokra vetett árnyéka is párhuzamos marad. Pl. gondoljunk egy lépcsőkorlát lépcsőfokokra vetett árnyékára.

7.7 **Síkpoligon árnyéka** (7. ábra)

Adott egy háromszög két képével. Megszerkesztjük a három csúcspont árnyékát konvencionális fénysugárral. *A* és *B* pont árnyéka a *K1*, míg *C* pont árnyéka a *K2* képsíkon keletkezik, azaz árnyéktörés keletkezik. *AC* és *BC* oldalak árnyékának megállapításához megszerkesztjük *C* pont *K1*-re vetett árnyékát, $\overline{C}^x$ -t. Ezt összekötve $\overline{A}$ és $\overline{B}$ árnyékpontokkal, megkapjuk a *K2*-beli töréspontokat. A háromszög egyik képe önárnyékos lesz, hiszen feszített síkot ábrázoltunk. Szemlélet alapján megállapítható, hogy a második kép az önárnyékos.

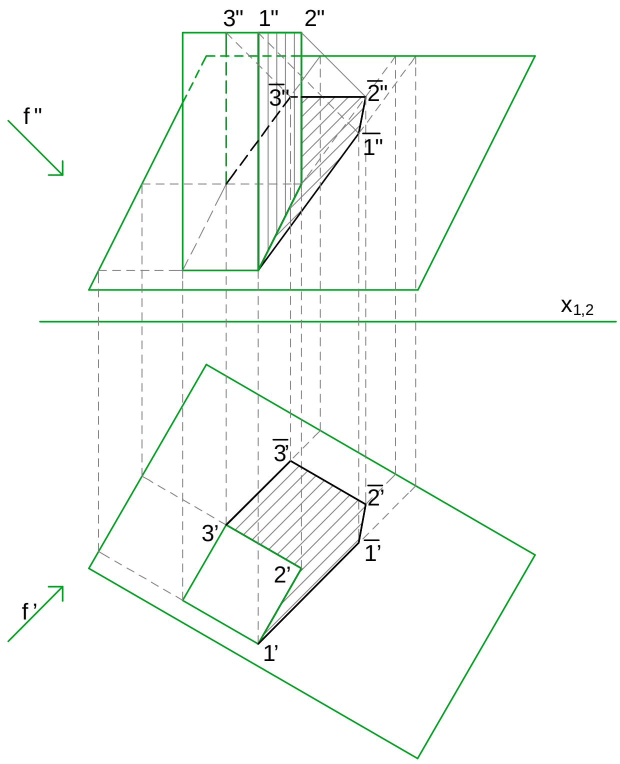


7. ábra

7.8 **Síklapú test árnyéka** (8. ábra)

Adott egy ferde tetősík, amelyen négyzetes kéményt vezettek át. A kémény két oldala párhuzamos az ereszéllel, kettő rá merőleges. A kéményélek tetősíkkal alkotott döfésponjait első fővonalak segítségével kapjuk.
A fénysugár iránya alapján meg kell határozni, mely élek vetnek árnyékot a tetőre. A fénysugár itt is konvencionális irányú. Megállapítható, hogy az *1* pontba futó függőleges él, az *1-2* és *2-3* él, továbbá a *3* pontba futó függőleges él lesz árnyékvető él, ezek árnyékát szerkesztjük. Az *1, 2* és *3* pontokba futó függőleges élek vetítőhelyzetűek.

(Itt is egy-egy élre vetítősíkot ültetünk, és képezzük a vetítősík és tetősík metszésvonalát, majd a metszésvonal és fénysugár közös pontjával, döféspontjával meghatározzuk az árnyékpontokat.)



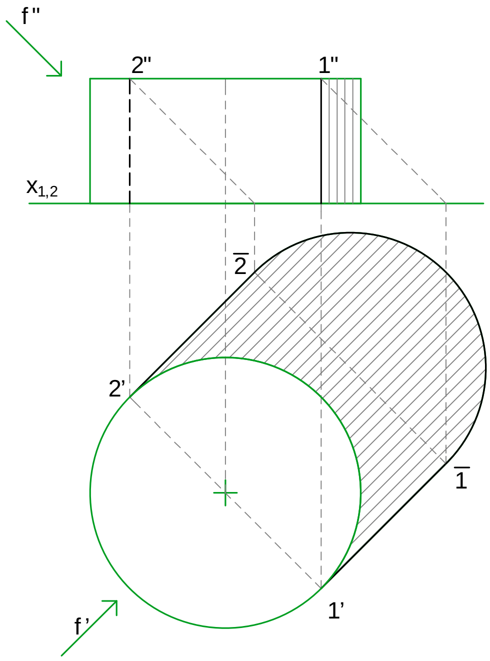
8. ábra

Görbefelületű testek árnyéka

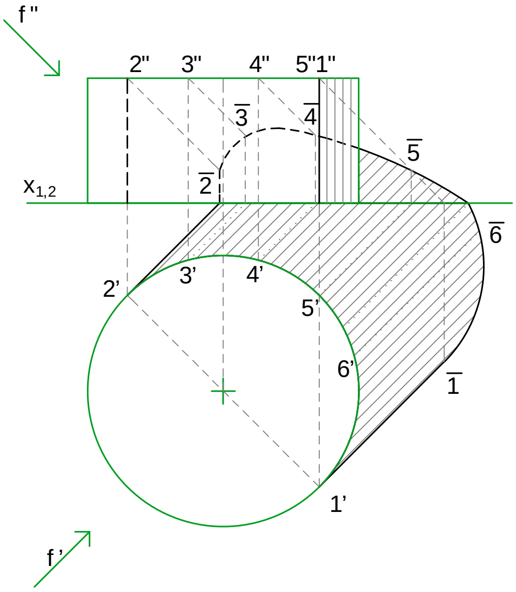
Görbefelület síkra vetett árnyékát a görbére ültetett fényhengernek a síkkal alkotott metszete adja. Görbefelületnek egy görbefelületre vetett árnyéka az árnyékvető görbefelület kontúrjára ültetett fényhengernek az árnyékfelfogó görbe felülettel alkotott áthatása lesz.
A továbbiakban három forgástest síkra vetett árnyékát szerkesztjük meg.

7.9 Forgáshenger árnyéka (9. ábra)

A henger önárnyékhatár alkotóit fénysugár irányú érintősíkok határozzák meg. E két alkotó és a kettő közé eső félkörív vet árnyékot a *K1* képsíkra. Mivel a fedőkör párhuzamos az árnyékfelfogó síkkal, ezért ennek árnyéka szintén körív lesz. (A körre ültetett fényhenger fedőkörével párhuzamos minden metszete kör marad.)
Ha a henger a *K2* képsíkhoz közelebb áll, akkor árnyéka megtörik. A körív árnyéka a K1-en körív, a K2 képsíkon ellipszis lesz, ezt szemlétei a 10. ábra.



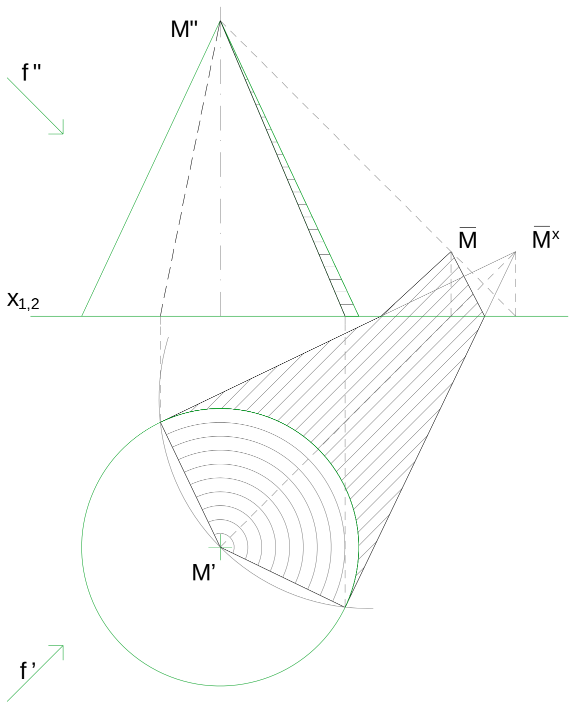
9. ábra



10 ábra

7.10 **Forgáskúp árnyéka** (11. ábra)

A képsíkon álló egyenes körkúp vetett árnyékát az önárnyékhatár alkotók adják. Az önárnyékhatár alkotókat a kúppalástot érintő két fénysík jelöli ki. E két fénysík metszésvonala

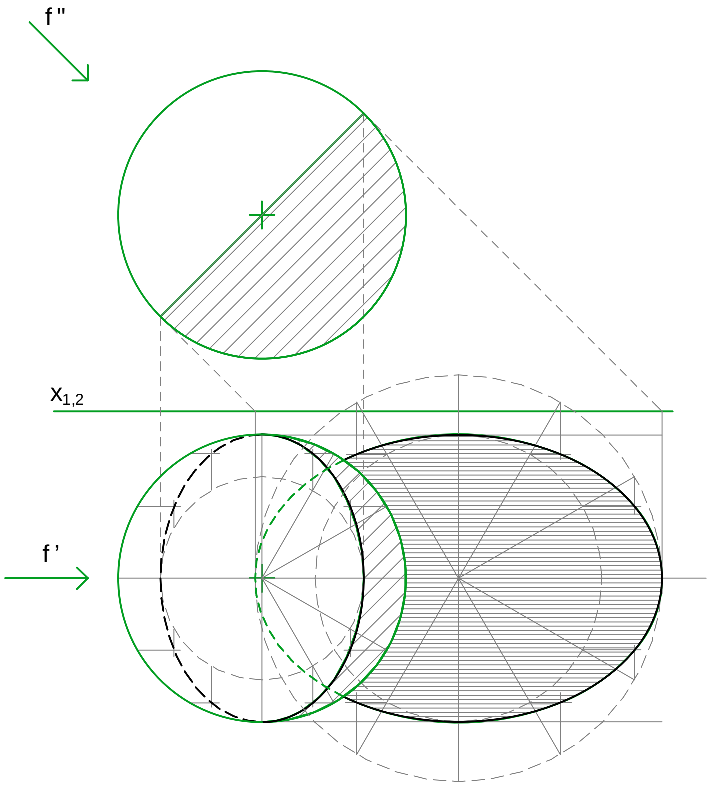


11. ábra

átmegy a kúp csúcspontján, valamint a csúcspont vetettárnyékán. Így elsőként keressük meg a kúp *M* csúcsának árnyékát. Az vetettárnyék a *K2* képsíkon megtörik, a csúcsponton átmenő fénysugár a *K1* képsíkot $\overline{M}^{x}$ pontban metszi. Innen Thalész-kör segítségével megszerkesztjük az érintő fénysíkok első nyomvonalát, vagyis az árnyékválasztó élek vetettárnyékát. Az érintési pontok kijelölik az önárnyékhatár alkotóit.

7.11 **Gömb árnyéka** (12. ábra)

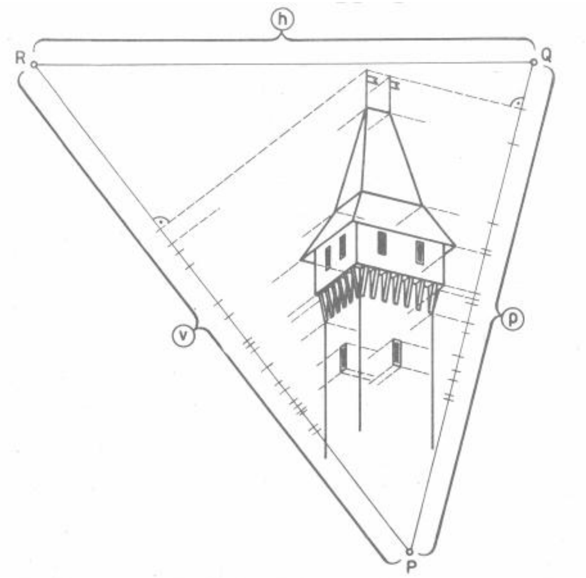
A fénysugárra merőleges főkör adja a gömb önárnyékhatárát. A fénysugár itt második főegyenes helyzetű. Az első képen az önárnyék főköre ellipszisnek látszik. A *K1*-re vetett árnyék szintén ellipszis lesz, hiszen ez a gömb fénysugárra merőleges főkörére illesztett fényhengernek a képsíkkal alkotott metszete. A vetett árnyék ellipszis kistengelye a gömb átmérője. (Az ellipszist Rytz-módszerrel szerkesztettük – lásd példatár.)



12. ábra

Irodalom:
Kólya Dániel: Ábrázoló geometria példatár, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994
Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1957

8. Ortogonális axonometria

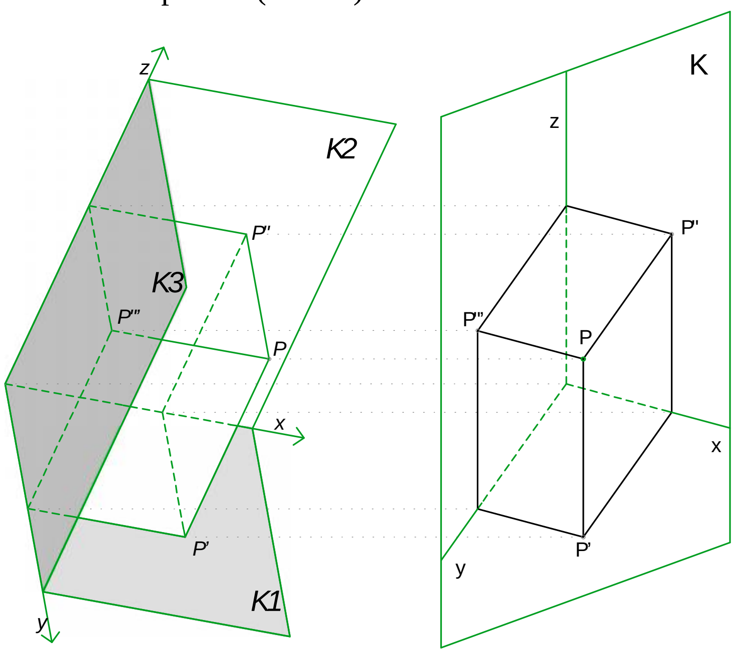


2. kép

Az Építőmérnöki ábrázolás I. rész 6.2 fejezete foglalkozott a párhuzamos ferde vetítésű (ún. klinogonális) axonometriával. Most a párhuzamos merőleges vetítéssel szerkeszthető, ún. ortogonális axonometria szerkesztését ismerjük meg.

Az axonometrikus ábrázolással szemléletes, képies képet tudunk alkotni. A mérnöki gyakorlat főként szerkezeti részletek bemutatásánál alkalmazza az ortogonális axonometriát.
Az axonometrikus ábrázolás éppúgy alkalmas a testek síkmetszési, áthatási stb. feladatainak megoldására, mint a két képsíkos ábrázolás mód. Jelen esetben csak testek ábrázolásával foglalkozunk, hiszen tárgyunk az ábrázoló geometria alapjainak bemutatására szorítkozik.

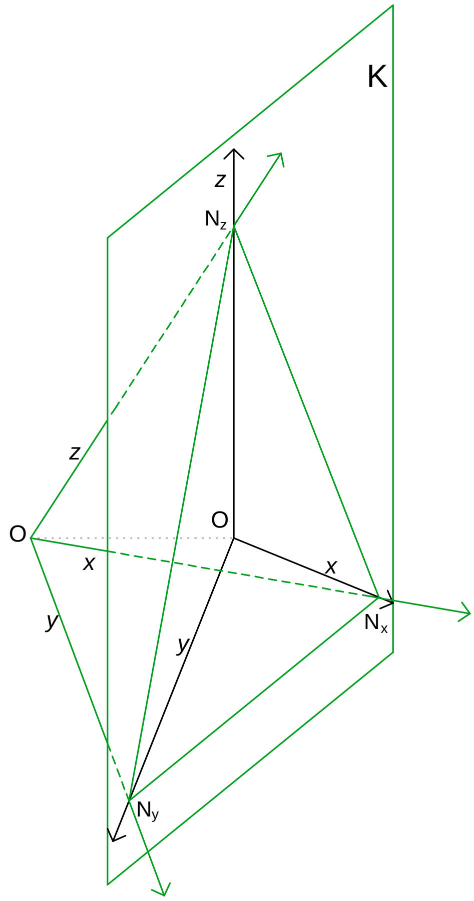
Az ortogonális axonometria valójában egy képsíkos ábrázolás, hiszen a tetszőleges helyzetű derékszögű koordinátarendszert és az abban elhelyezett térelem pontjait merőlegesen vetítjük a függőleges axonometrikus képsíkra. (1. ábra)



1. ábra

Tétel bizonyítja, hogy közös kezdőpontból kiinduló három félegyenes, amelyek közül legalább kettő egymással tompaszöget zár be, mindig meghatároz egy derékszögű koordinátarendszert.

Az *xy*, *xz* és *yz* koordinátasíkok axonometrikus képsíkkal alkotott metszésvonalai (nyomvonalai) háromszöget alkotnak, ez az ún. nyomháromszög. A nyomháromszög csúcspontjai a koordinátatengelyek axonometrikus nyompontjai: N_x, N_y és N_z. (2. ábra)
A *z* tengely merőleges az *xy* síkra, így a merőleges vetítés következtében a tengely képe is merőleges lesz az *xy* sík nyomvonalára. Az axonometrikus képsíkkal párhuzamos *xy* síkbeli egyenesek is merőlegesek a *z* tengelyre, és ezen egyenesek képei is merőlegesek a *z* tengely képére. Ugyanez igaz az *xz* és *yz* síkok axonometrikus képsíkkal párhuzamos egyenesek és a rájuk merőleges tengelyek képeire is.



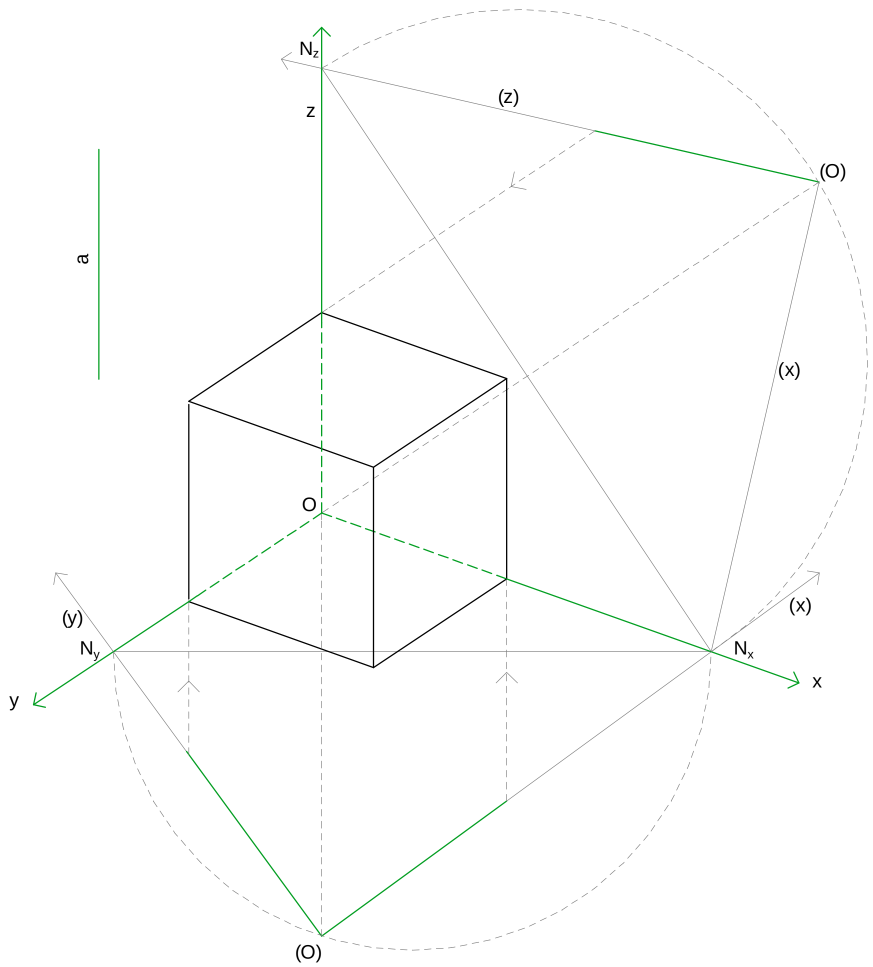
2. ábra

Hasonlóképp az *x* és *y* tengelyek képe is merőleges a nyomháromszög megfelelő oldalára. Felismerhető, hogy a nyomháromszög magasságvonalai azonosak a tengelyek képeivel.
A koordinátatengelyek helyzete meghatározza a tengelyirányú rövidüléseket. A rövidülések a koordinátasíkok képsíkba forgatásával állapíthatók meg, ezek meghatározását a következő feladaton mutatjuk be.

8.1 Síklapú test ábrázolása (3. ábra)

Egy kocka ortogonális axonometrikus képét szerkesztjük meg. Adott az axonometrikus tengelykereszt, valamint a kocka *a* élhossza. A kockát úgy helyezzük el, hogy egyik csúcspontja a tengelykeresztbe, az origóba kerül.

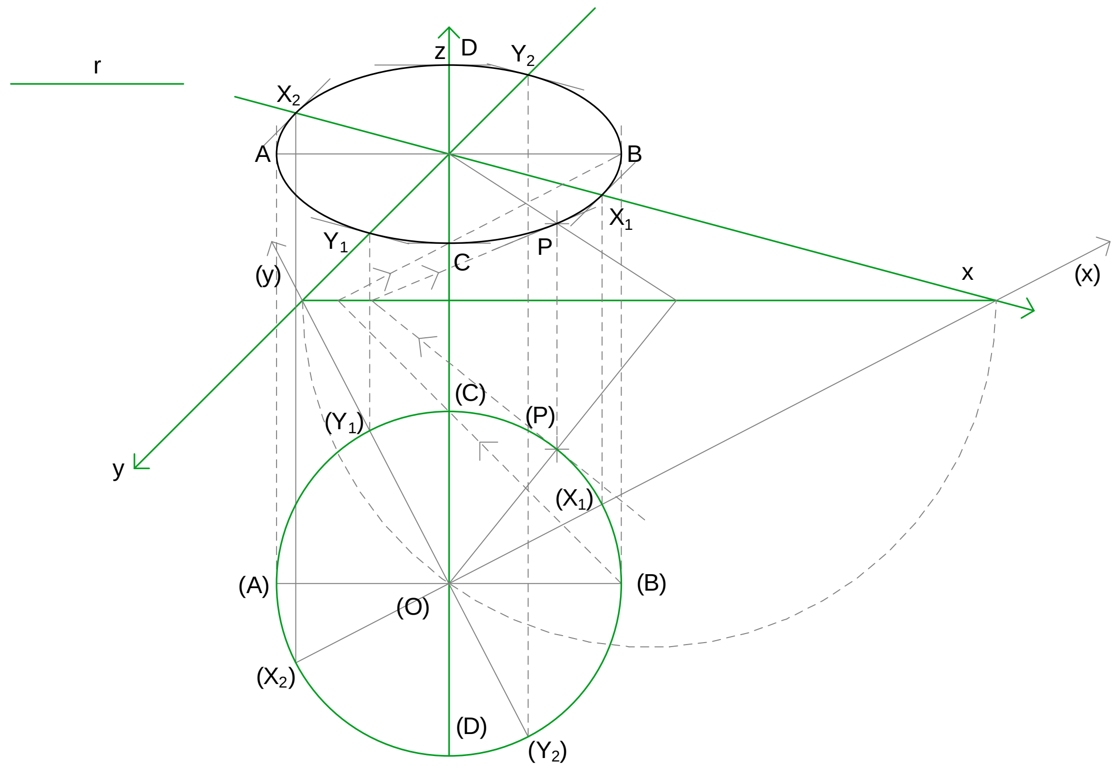
Az *xy* síkot nyomvonala körül az axonometrikus képsíkba forgatjuk, hiszen leforgatásban eredeti méretével ábrázolható a kocka alaplapja.
Az N_xN_y távolságra, mint átmérőre Thalész-kört emelünk, amelyen az *O* merőleges rendezője kijelöli *(O)* pontot, *(x)* és *(y)* tengelyeket. A leforgatott tengelyekre felmért élhosszak merőleges visszavetítésével megkapjuk az *x* és *y* irányú rövidüléseket.
Hasonlóképp szerkeszthető a *z* tengelybeli rövidülés. Az ábrán az *xz* sík képsíkba forgatása látható. Itt már nincs szükség az *x* irányú rövidülés megszerkesztésére, hiszen ezt az *xy* sík leforgatásakor meghatároztuk.
Természetesen azonos eredményt kapunk, ha az *yz* sík képsíkba forgatását végeztük volna el.



3. ábra

8.2 **Kör ábrázolása** (4. ábra)

Adott az axonometrikus tengelykereszt, továbbá a kör sugara. A kört az *xy* síkba helyezzük, középpontja az origóba kerül.
A kör képe ellipszis lesz. Az előbbiek szerint az *xy* síkot a képsíkba forgatjuk, és megrajzoljuk a leforgatott kört. A kör képének nagyátmérője (*A* és *B* pont) merőleges vetítéssel kitűzhető, hiszen itt a képsíkkal párhuzamos átmérőről van szó. Az átmérő végpontjaiban az érintők vetítősugár irányúak.

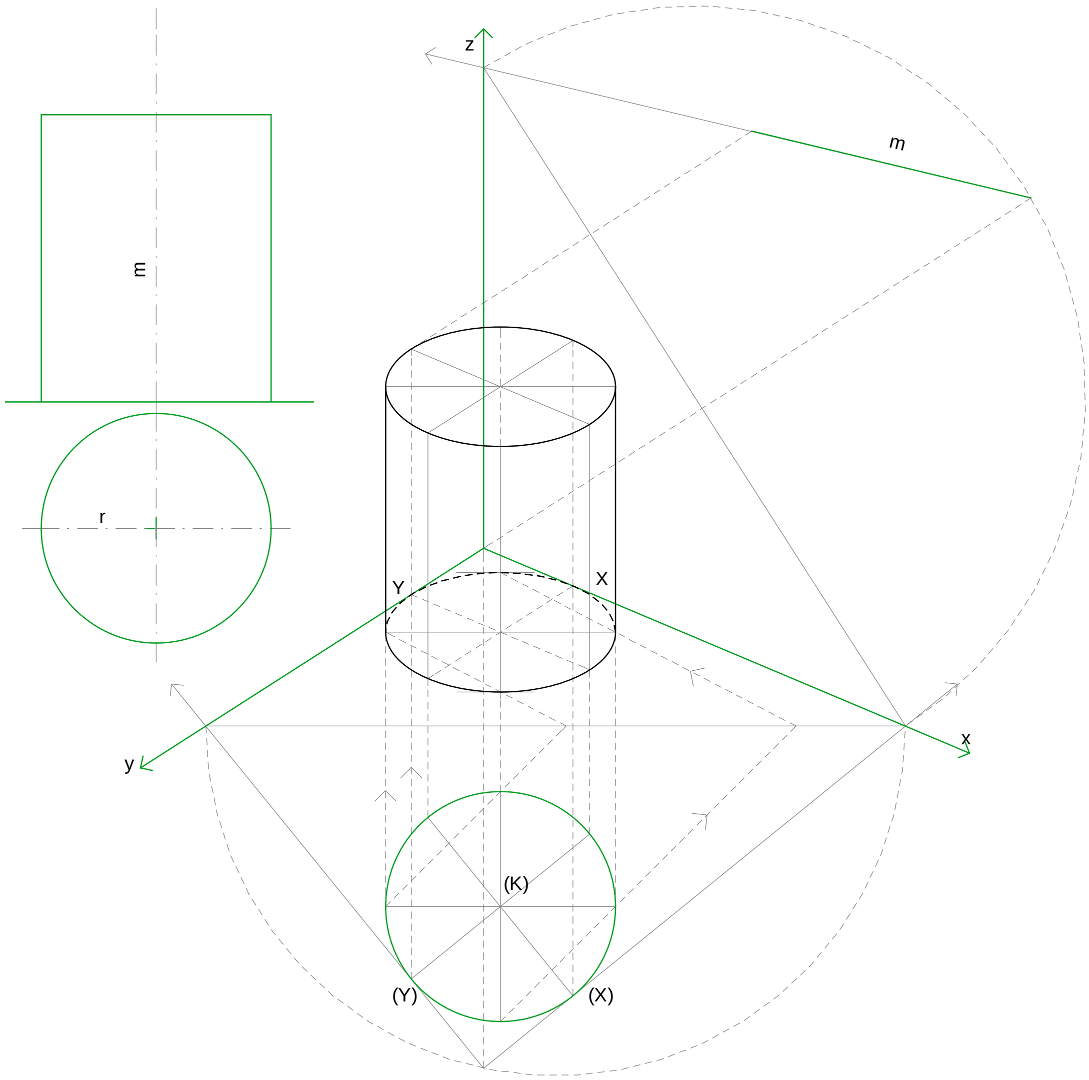


4. ábra

Hasonlóképp merőleges vetítéssel előállíthatók a koordináta tengelyeken lévő átmérők (X_1, X_2 és Y_1, Y_2). Az X_1, X_2 pontokban az érintők a y tengellyel párhuzamosak, míg az Y_1, Y_2 pontokban *x* tengellyel párhuzamosak. A koordináta-tengelyeken lévő átmérőpárt *konjugált átmérők*nek hívjuk.
További ellipszis pontokat a már meglévők segítségével szerkeszthetünk. Pl. *P* pontot úgy kapjuk, hogy *(O)(P)* meghosszabbításával kijelöljük az *xy* sík nyomvonalán a visszaforgatáskor helyben maradó pontot, amelyet *O*-val összekötöttünk. A merőleges rendező ezen kijelöli a *P* axonometrikus képét. Hasonlóképp járunk el a ponthoz tartozó érintő szerkesztésekor is. A *C* és *D* kistengely végpontokat ugyanúgy szerkesztjük, itt a *C* ponthoz *B*-t használtuk fel. A kistengely végpontjában az érintő képsíkkal párhuzamos, azaz vízszintes lesz.

8.3 **Forgáshenger ábrázolása** (5. ábra)

Adott az axonometrikus tengelykereszt, a körhenger sugara és magassága. A henger alapkörével az *xy* síkon áll, és érinti az *x* és *y* koordinátatengelyt.
A feladat az előzőek alapján egyszerűen megoldható. Elsőként az *xy* sík képsíkba forgatásával megrajzoljuk a koordináta tengelyeket érintő kör leforgatottját, majd megszerkesztjük az alapkör axonometrikus képét.
Ezután a henger magasságának rövidülését kell megállapítanunk. Ezt az *xz* sík képsíkba forgatásának segítségével, a *z* tengely leforgatottjára mért henger alkotóhosszának visszavetítésével nyerjük. Ezt az alkotóhosszat *X* vagy *Y* pontnál, illetve az összes szerkesztett ellipszispontnál felmérjük, és képezzük a henger fedőkörét. A test ábrázolásakor a láthatóságról nem szabad megfeledkezni.

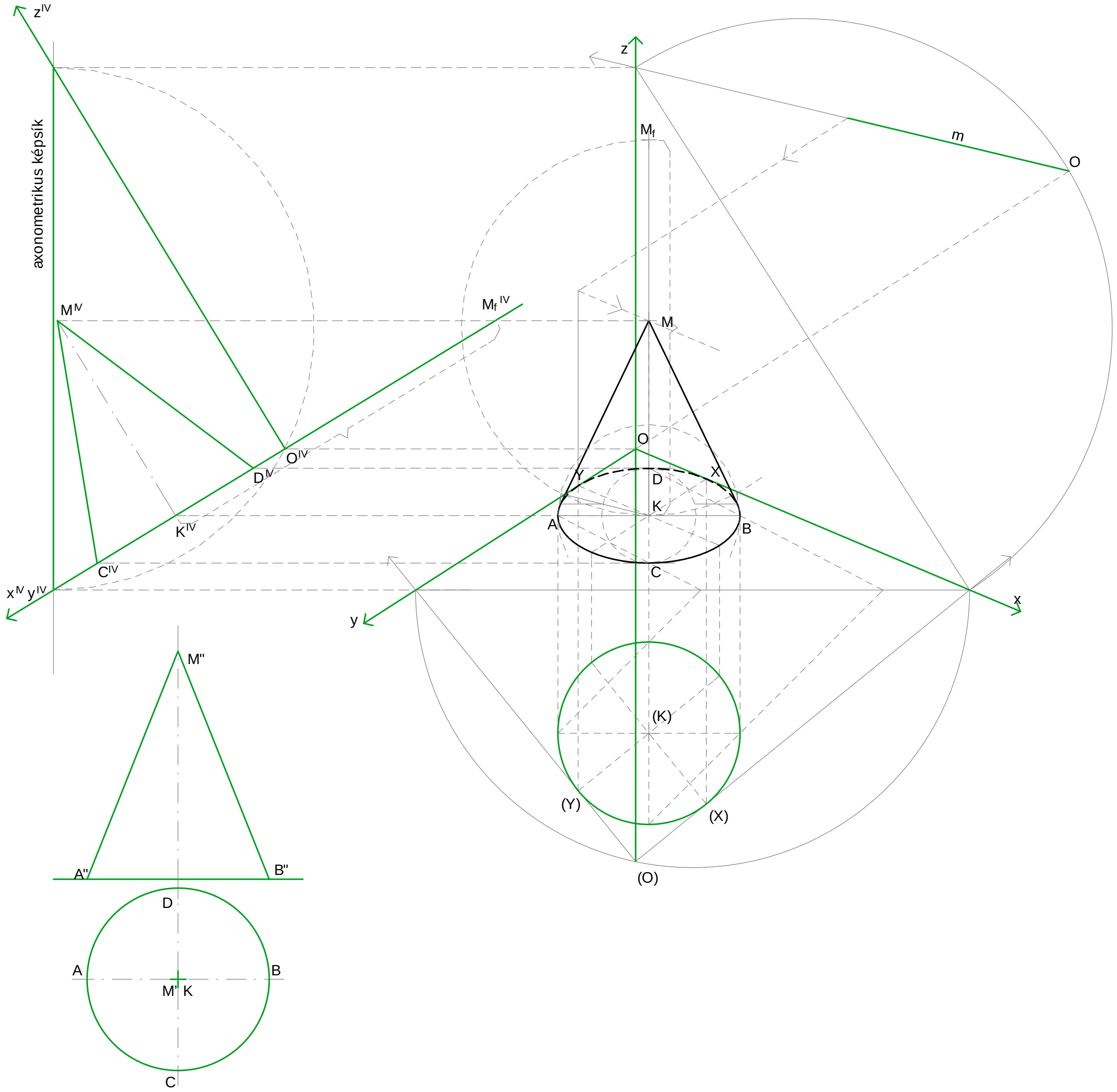


5. ábra

8.4 **Egyenes körkúp ábrázolása** (6. ábra)

Adott az axonometrikus tengelykereszt, a körkúp sugara és magassága. A kúp alapkörével az *xy* síkon áll, és érinti az *x* és *y* koordinátatengelyt.
A feladat nagyon hasonló az előbbihez, ezért a kúp alapkörének és magasságának megszerkesztését nem részletezzük. Viszont a kúp kontúralkotójának megszerkesztése magyarázatot igényel. A továbbiak belátásához segédszerkesztést végzünk, amelyhez negyedik képet készítünk. Itt az axonometrikus képsíkot és az *xy* síkot élben látjuk. A kúp

kontúralkotójának megállapításához felhasználjuk a kúp *M* csúcspontjának az *xy* síkban lévő M_f fedőpontját. E negyedik kép azt mutatja, hogy az M_f fedőpontból az alapkörhöz szerkesztett érintők határozzák meg a keresett kontúralkotókat.



6. ábra

A IV. képen mérhető a kúp *K* középpontjának és csúcspont fedőpontjának távolsága $[K^{IV}M_f^{IV}]$.

Visszatérve az ortogonális axonometrikus képre *K* pontban a képsíkkal párhuzamosan beforgatjuk az alapkört és *KM* rendezőjére felmérjük negyedik képen meghatározott kúpközéppont és fedőpont – $K^{IV}M_f^{IV}$ – közötti távolságot. Erre Thalész-kört állítva kijelölhetők a beforgatott alapkörön az érintési pontok. A két érintési pontból Rytz-szerkesztéssel ellipszispontokat visszaszerkesztve megkapjuk a kontúralkotókat.

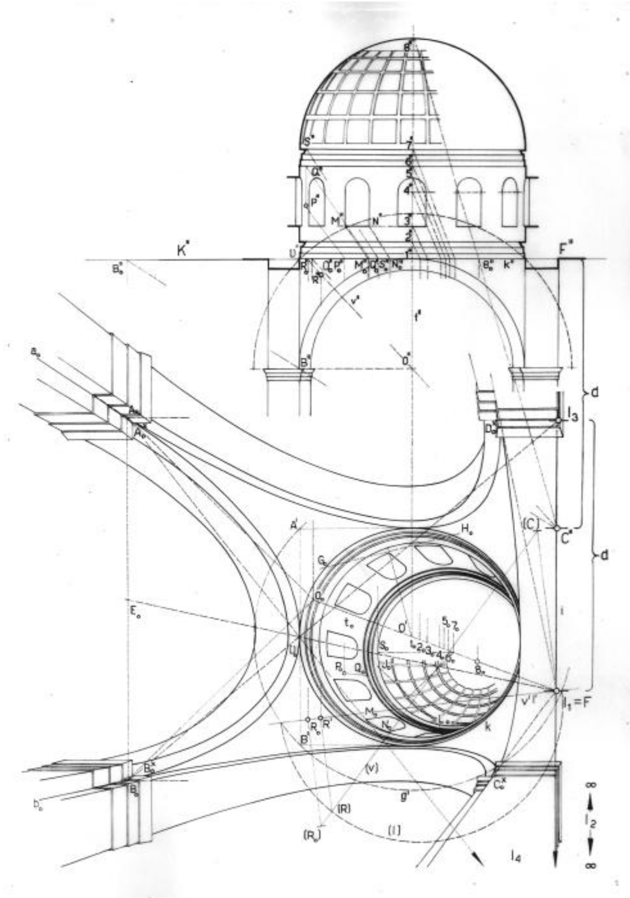
Irodalom:

Horn Antal: Síklapú testek és görbe felületek ábrázolása axonometriában és perspektívában vetítősugár-vetületekkel, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979

Vermes Imre: Geometria – Útmutató és példatár építőmérnök hallgatók számára, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1995

Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1957

9. Perspektíva

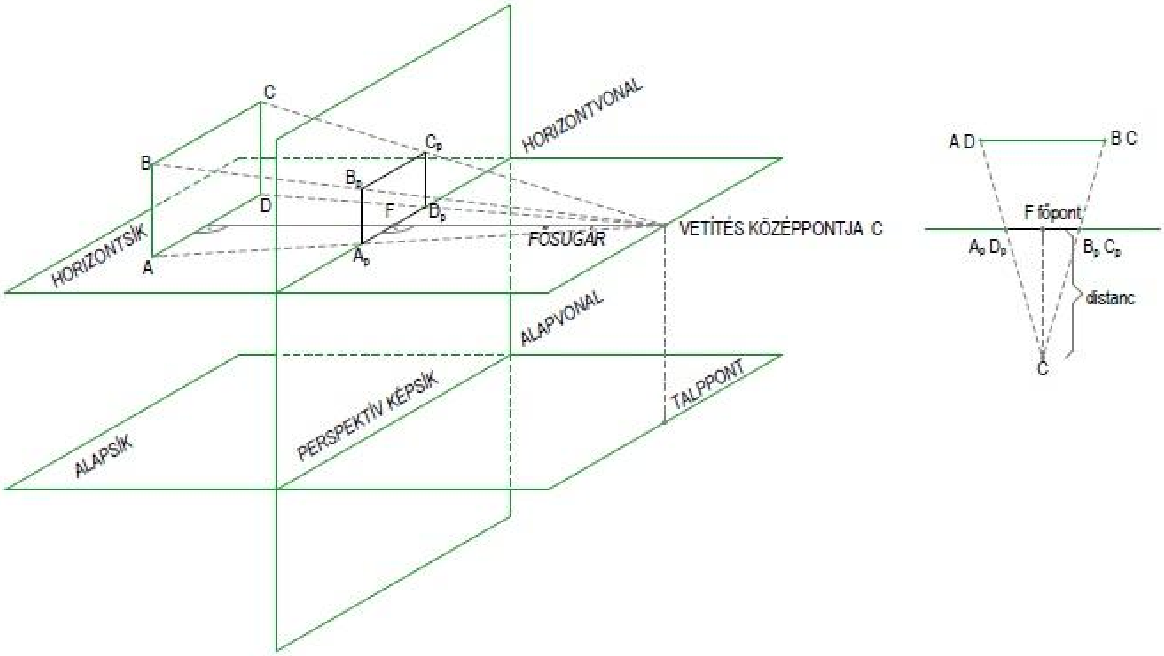


3. kép

A perspektíva – távlattan – témakörét az Építőmérnöki ábrázolás II. jegyzet 13. fejezete érintette. Most részletesebben foglalkozunk e témával.
A perspektív ábrázolás centrális vetítéssel jön létre. (A szó a latin perspicere szóból származik, jelentése a valamin keresztül szemlélni, átlátni.)
A perspektívában szerkesztett rajz sokban hasonlít a szem képalkotásához, de eltérések is vannak. Ilyen például, hogy egy középponton keresztül vetítünk.
A képalkotás a legtöbbször függőleges képsíkon történik, melynek helyzete fix. Szemünk viszont mozog, a kép a recehártya gömbfelületén keletkezik, ez a kép valódi, fordított állású, mely az agyban válik egyenes állásúvá. A szem 60°-os látókúpba kerülő tárgyakról alkot éles képet.
A dűlt képsíkú perspektíva szerkesztése nem része az ábrázoló geometria alapjainak.

A perspektív rendszer elemei (1. ábra)

A vetítés középpontja [*C*], melyet nézőpontnak, szempontnak is neveznek, a horizontsíkban helyezkedik el. A kép a perspektív képsíkon [*KS*] keletkezik. A perspektív képsík és a horizontsík metszésvonala a *h* horizontvonal, a perspektív képsík és az alapsík metszésvonala az *a* alapvonal. A tárgyak, melyekről képet alkotunk, többnyire az alapsíkon vagy avval párhuzamos síkon állnak. A vetítés középpontjának merőleges vetülete az alapsíkon a *T* talppont. A vetítés középpontjából kiinduló vetítősugarak közül a perspektív képsíkra merőleges vetítősugár a fősugár. A fősugár döféspontját a perspektív képsíkon főpontnak nevezzük [*F*]. A főpont és vetítés középpontja közötti *d* távolsággal megrajzolt kör a distanckör. A főpont és a distanckör határozza meg a vetítés rendszerét.

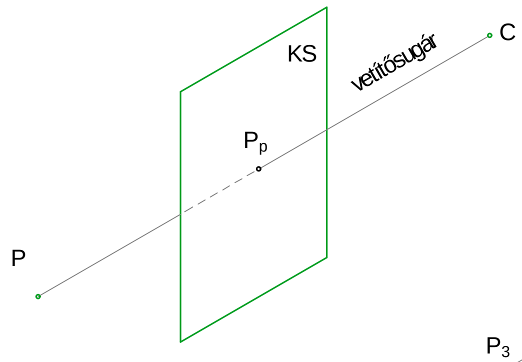


1. ábra

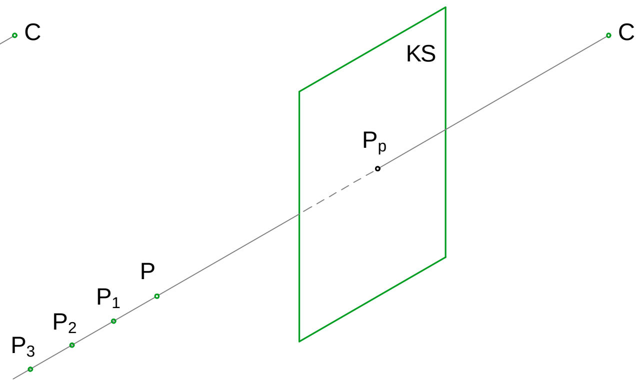
A következőkben néhány térelem perspektív – távlati – képének szerkesztését tekintjük át.

9.1 **Pont perspektív képe** (2. ábra)

A vetítés középpontját és a *P* pontot összekötő vetítősugár metszi a perspektív képsíkot, ez lesz a pont perspektív képe.



2. ábra

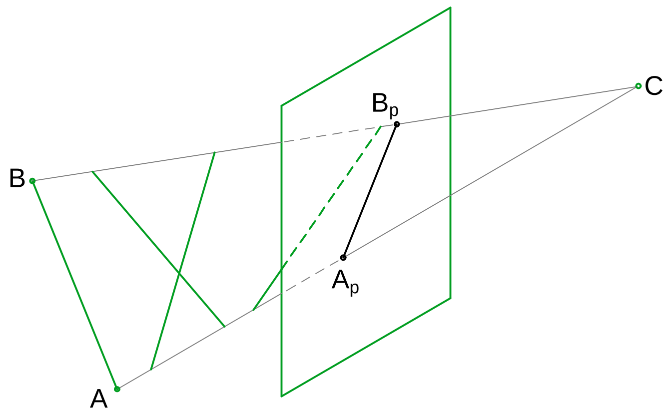


3. ábra

Ez a kép nemcsak a *P* pont, hanem mindazon pontok perspektív képe, amelyek e ponttal fedésbe kerülnek, azaz a vetítősugár irányú egyenes pontjai. (3. ábra)

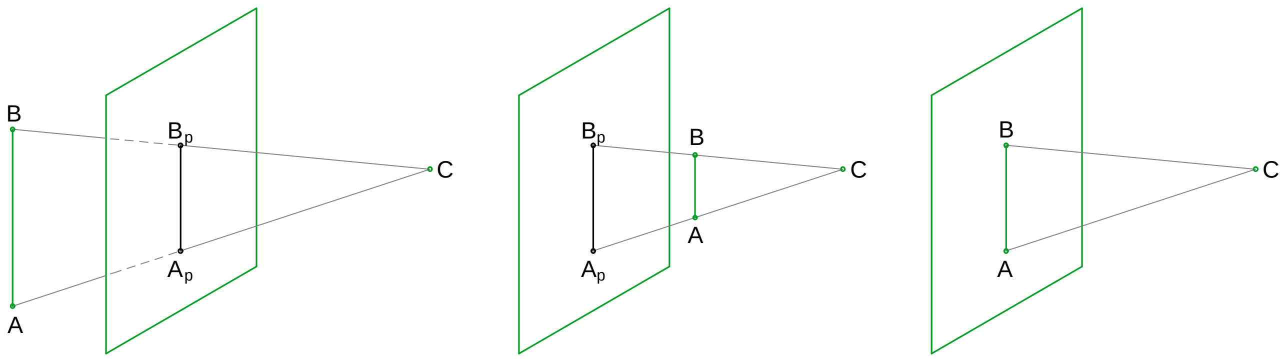
9.2 **Egyenes szakasz perspektív képe** (4. ábra)

A szakasz távlati képe a szakasz végpontjainak perspektív képével szerkeszthető meg. $A_P B_P$ nemcsak az *AB* szakasz képe, hanem mindazon szakaszoké is, amelyek az *ABC* pontokkal meghatározott síkban fekszenek.



4. ábra

9.3 Térelem és perspektív kép viszonya (5. ábra)



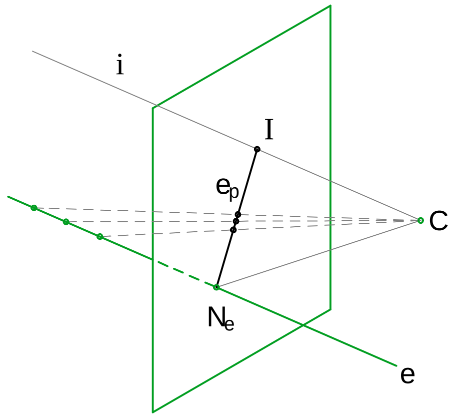
5. ábra

A képsík és a térelem helyzetét egy függőleges szakasz ábrázolásával mutatjuk be.
– ha a térelem a képsík mögött van, ekkor a kép kisebb, mint a térelem,
– ha a térelem a képsík előtt áll, ekkor a kép nagyobb, mint a térelem,
– ha a térelem a képsíkban van, ekkor a kép megegyezik az ábrázolandó tárggyal.
Megállapíthatjuk, hogy a képsíkkal párhuzamos szakasz képe párhuzamos marad. Meg kell említeni még két lehetséges esetet. Amikor a térelem a vetítés középpontját tartalmazó függőleges síkban van, akkor a kép a végtelenbe kerül. Továbbá, ha a tárgy a vetítés középpontja mögött van, akkor virtuális kép jön létre. E két utóbbi eset példáinkban nem fordul elő.

9.4 Egyenes távlati képe (6. ábra)

Ahhoz, hogy egy egyenes perspektív képét meghatározzuk, annak két pontját kell megszerkesztenünk. Az egyik pont mindenképp az egyenes perspektív képsíkbeli pontja, nyompontja [N_e].
A másik pont kijelöléséhez a következőket érdemes végig gondolni:
belátható, hogy az *e* egyenes más-más pontját összekötő vetítősugarak nyompontjai megadják az *e* egyenes és a *C* vetítési középpont által meghatározott síknak a perspektív képsíkkal alkotott metszésvonalát. Az egyenes végtelen távoli pontját a vetítési középponttal összekötő *i* vetítősugár, mely az *e* egyenessel párhuzamos, az *I* pontban metszi a képsíkot. Ez a pont az *e*

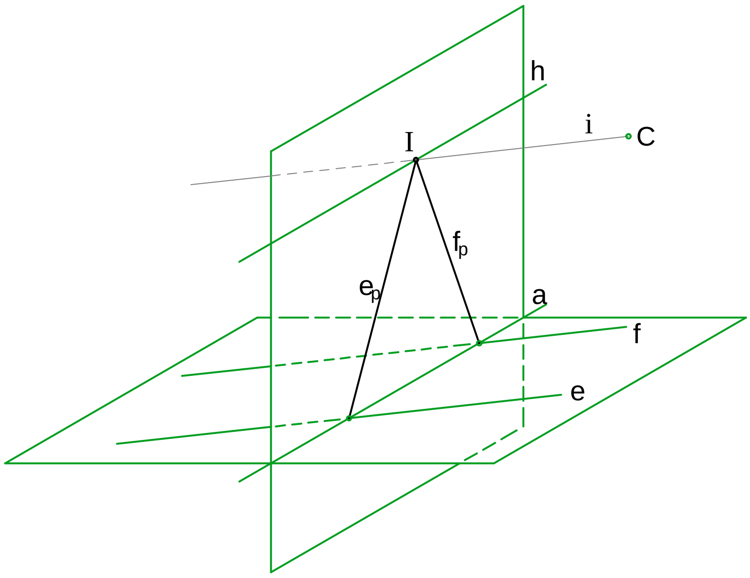
egyenes iránypontja. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az *e* egyenes vetítősíkja tartalmazza az *i* egyenest is, így annak a képsíkkal alkotott nyompontja rajta van az egyenes perspektív képén. Ezek alapján kimondható, hogy egy egyenes perspektív képét a nyompontja és iránypontja egyértelműen meghatározza.



6. ábra

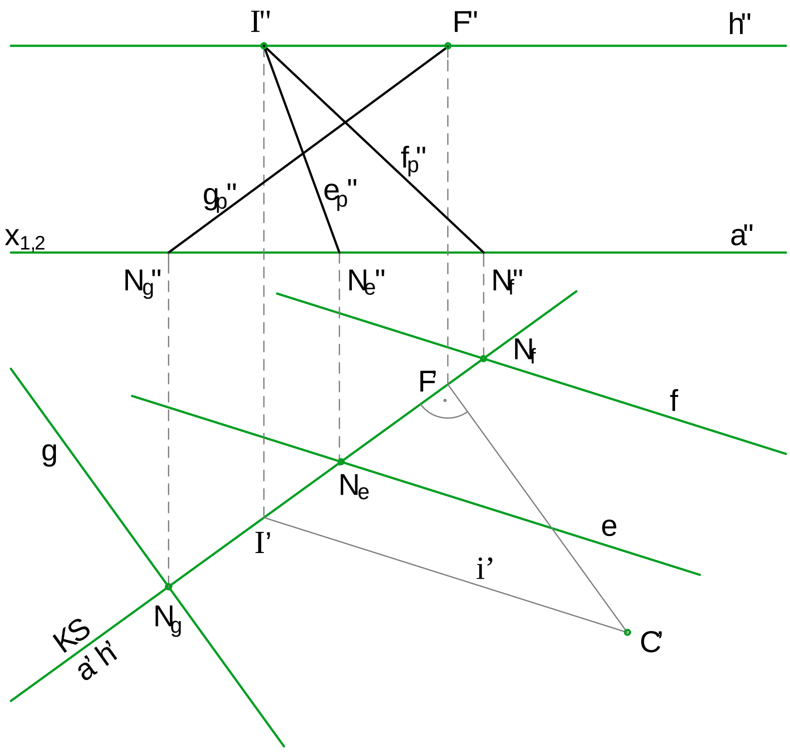
9.5 **Párhuzamos egyenesek távlati képe** (7. ábra)

Az alapsíkban lévő *e* és *f* egyenesek a képsíkot N_e és N_f nyompontokban metszik. A velük párhuzamos *i* vetítősugár a képsíkot *I* pontban metszi.



7. ábra

Mindkét egyenesnek azonos az iránypontja. Felismerhetjük azt is, hogy az alapsíkban levő egyenesekkel párhuzamos, tetszőleges síkbeli egyenes iránypontja is *I* pont lesz.
I az *e* és *f* egyenesek, valamint minden velük párhuzamos, tetszőleges síkban lévő egyenes iránypontja lesz. Az egyenesek képei a horizontsík *I* pontjában metszik egymást.
Az előbbieket most érdemes végigkövetni Monge-féle két képsíkos ábrázolásban. (8. ábra)

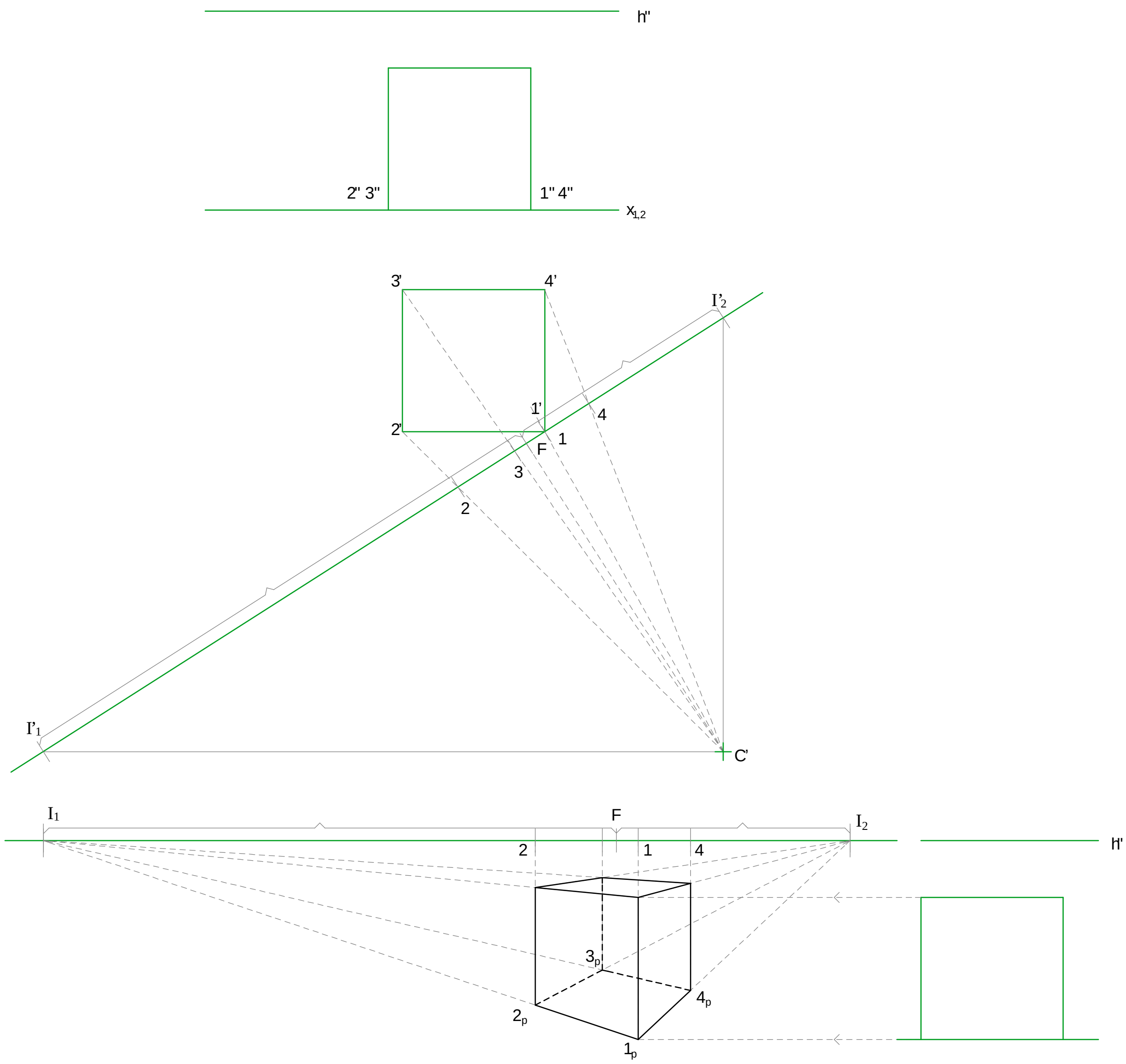


8. ábra

Első képen láthatók az első képsíkban lévő *e* és *f* párhuzamos egyenesek, a vetítés középpontja [*C'*], ezen a ponton keresztülhaladó *i'* vetítősugár, mely a perspektív képsíkot [*KS*] *I'* pontban metszi. Meghatározzuk az egyenesek perspektív képét a második képen, így $I''N_e'' \equiv e_p''$ és $I''N_f'' \equiv f_p''$.
Az ábrán látható a perspektívképsíkra merőleges *g* egyenes is, amely szintén az első képsíkban van. A vetítési középponton keresztül felvett, *g*-vel párhuzamos fősugár, melynek metszéspontja a képsíkon az *F* főpont lesz. Megállapítható, hogy képsíkra merőleges egyenes iránypontja a főpont, itt $N_g''F'' \equiv g_p''$.
E bevezető feladatok után néhány test távlati képének szerkesztésmenetét mutatjuk be.

9.6 Síklapú test távlati képe

A következőkben egy kocka távlati képét szerkesztjük meg. (9. ábra)
Az első képsíkon álló kockát két képével adtuk meg, továbbá rögzítettük a perspektív képsík nyomvonalát az első képsíkon és a vetítés *C* középpontját. A perspektív képsík tartalmazza a kocka *1* jelű pontjából induló függőleges élet, itt az él eredeti nagyságában látszik.
Először meg kell keresni a párhuzamos élek iránypontjait. A vetítés középpontján keresztül párhuzamost húzunk a kocka alapéleivel, ezek kimetszik a horizontsíkban az I_1 és I_2 iránypontokat. A két iránypont közötti távolságot az *F* főpont osztja ketté. A kocka alapsíkban lévő *2, 3, 4* csúcspontjait összekötve a vetítés középpontjával, ezen vetítősugarak nyompontokat adnak a perspektív képsíkban.

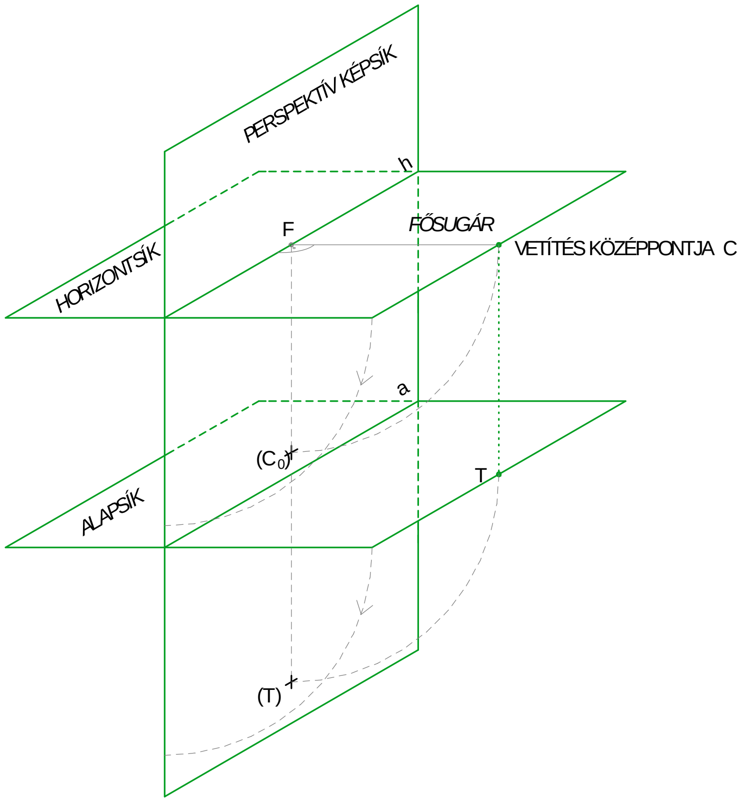


9. ábra

Következő lépésnél a távlati kép horizontvonalán rögzítjük az eddigieket: az iránypontok között a főponttal kettéosztott távolságot, továbbá az *1* pontot és a további három csúcsponton átmenő vetítősugarak nyompontjainak helyét. Természetesen itt már a horizontvonal vízszintes egyenes lesz. A távlati kép mellett rögzítjük a horizontvonalhoz rendezve a kocka elölnézetét, és az *1* pont függőleges rendezőjére átvetítjük a horizontvonaltól mért távolságot.
Ezután az *1* pontot mindkét irányponttal összekötjük, ezeket a horizontvonalon rögzített *2* és *4* perspektív pontokhoz tartozó függőleges rendezők elmetszik, és megadják e két pont perspektív képét. E két pontból induló alapélek megfelelő irányponttal való összekötése kijelöli a negyedik csúcspont képét. Így létrejön a perspektív alaprajz.
Következő lépésben a kocka fedőlapját szerkesztjük meg az *1* pontban lévő függőleges él segítségével. A magassági méret átvetíthető a képsíkban lévő élre, hiszen – mint képsíkban lévő él – eredeti méretben látható. Ez megadja a fedőlap egyik csúcspontját. E pontot is összekötjük az iránypontokkal, a megszerkesztett pontok függőleges rendezői kimetszik a további csúcspontokat.

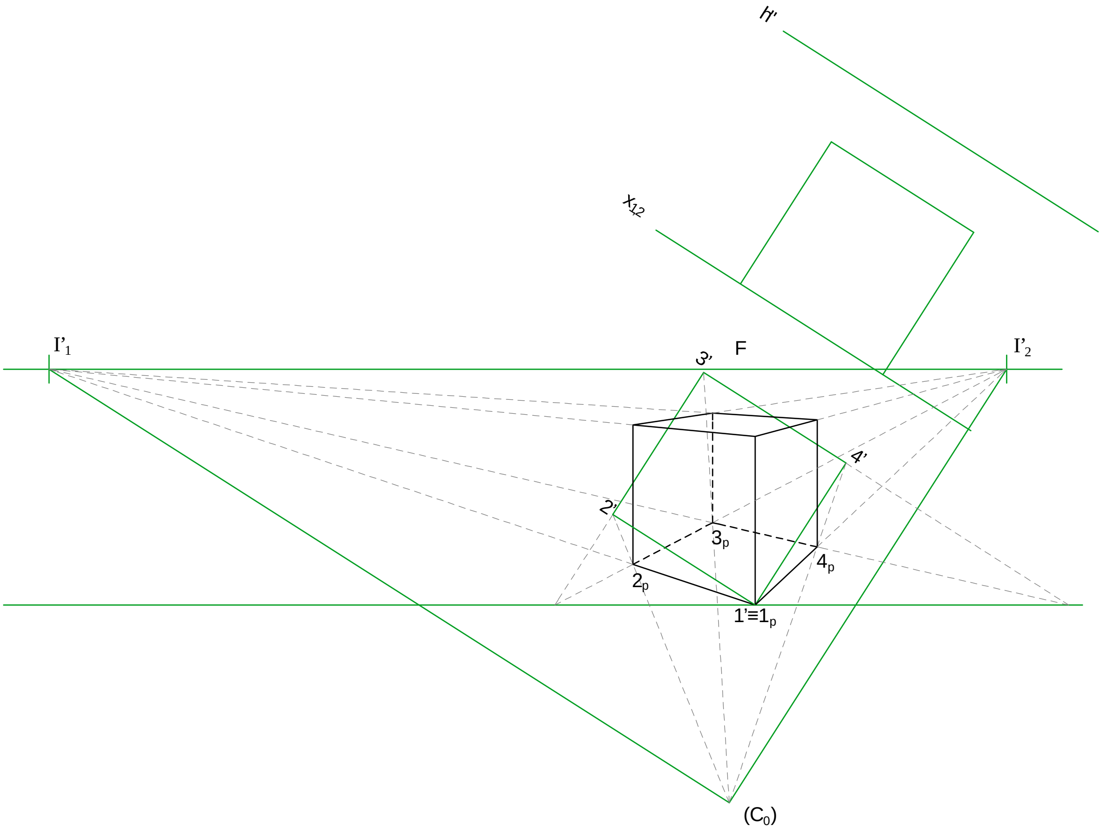
Most egy igen egyszerű alakzat szerkesztését mutattuk be. Ha bonyolultabb test távlati képét kell ábrázolni, akkor sokkal több nyompontot kell átmásolni az első képről a távlati kép horizontvonalára, amely nagy gondosságot igényel.

Bemutatunk egy másik szerkesztésmenetet, amely a következőkön alapszik: (10. ábra)
A perspektív képsíkba forgatjuk az alapvonal körül az alapsíkot úgy, hogy a perpektív képsík előtti rész az alapvonal alá kerüljön. Hasonlóképp a horizontsíkot a horizontvonal körül forgatjuk be a képsíkba. A beforgatott alapsíkon, mint a felülnézeti vetületén, ábrázoljuk az alakzat első képét.



10. ábra

Hogy lássuk a két szerkesztés azonos eredményre vezet, az előző feladaton szemléltetjük a szerkesztést. (11. ábra)

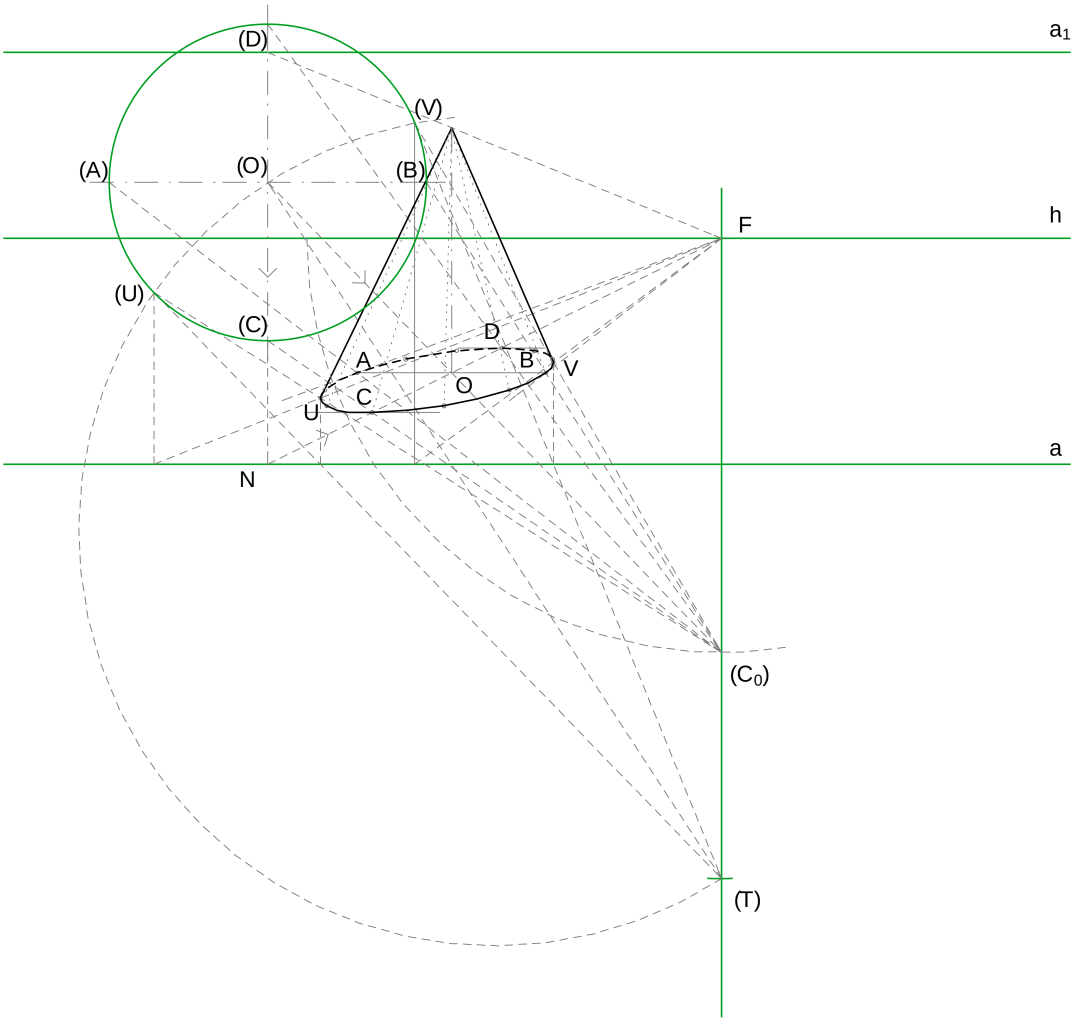


11. ábra

Ezen szerkesztésnél a kocka két képét rögtön a vízszintes horizont- és alapvonallal megadott távlati képén rögzítjük.
A kocka helyzete megegyezik az előzővel. A perspektív képsíkba be kell forgatnunk a horizontsíkot és a vetítés középpontját, ez lesz (C_0). Mivel rögzítettük, hogy az *1* pont a perspektív képsíkban van, ez kijelöli az alapvonal helyét. Az iránypontok kitűzése azonos az előbbiekkel. A kocka alapéleit meghosszabbítva kijelöljük az élek perspektív képsíkbeli nyompontját. Itt csak a *23* és *34* élek nyompontját keressük meg, hiszen a másik két él nyompontja maga az *1* pont. A *23* él nyompontját az I_2 iránypontal, a *34* él nyompontját az I_1 iránypontal kötjük össze. Ezen egyeneseken lesz az adott él perspektív képe. Az alaprajzi pontokhoz húzott vetítősugarak metszik ki a pontok perspektív képét.
A szerkesztés helyességét bizonyítja, ha a vetítés középpontjának leforgatottja, a perspektív alaprajzi pont és az alaprajzi pont egy egyenesen helyezkedik el [Pl. $(C_0)2_p2'$].
Azt is megállapíthatjuk, hogy az egyik iránypont is elegendő a szerkesztéshez, hiszen a két párhuzamos alapél adott iránypontba tartó egyenesén a vetítősugár, amely a vetítés középpontját az alaprajzi pontokkal összeköti, kimetszi a keresett pontok képét.
A további lépések azonosak az előbbi szerkesztésnél ismertetettel. Tehát a perspektív képsíkban kijelölhető a fedőlap *1* pont feletti csúcspontja, melynek segítségével a további csúcspontok is megszerkeszthetők.
Ha a test a perspektív képsík előtt vagy mögött áll, akkor a test egyik élét az alapvonalig meghosszabbítjuk és felhasználjuk a képsíkbeli pontot, hasonlóképp a képsíkban felmért a magassági méreteket visszavetítve jutunk a megfelelő magasságokhoz.

9.7 **Forgáskúp ábrázolása** (12. ábra)

Megadtuk a perspektív rendszer *F* főpontját és a vetítés középpontjának leforgatottját, (C_0)-t, valamint az alapsíkon álló egyenes körkúp alapkörének beforgatott képét. A kúp magassága azonos az *a* alapvonal és a_1 közötti távolsággal.
Elsőként az alapkör képsíkkal párhuzamos *AB* és arra merőleges *CD* átmérőjét szerkesztjük meg. A *CD* átmérő fősugár irányú, mivel merőleges a képsíkra. *(CD)* meghosszabbítása az alapvonalon kijelöli az *N* nyompontot, melyet összekötünk az *F* főponttal. Az alapkör (*COD)*

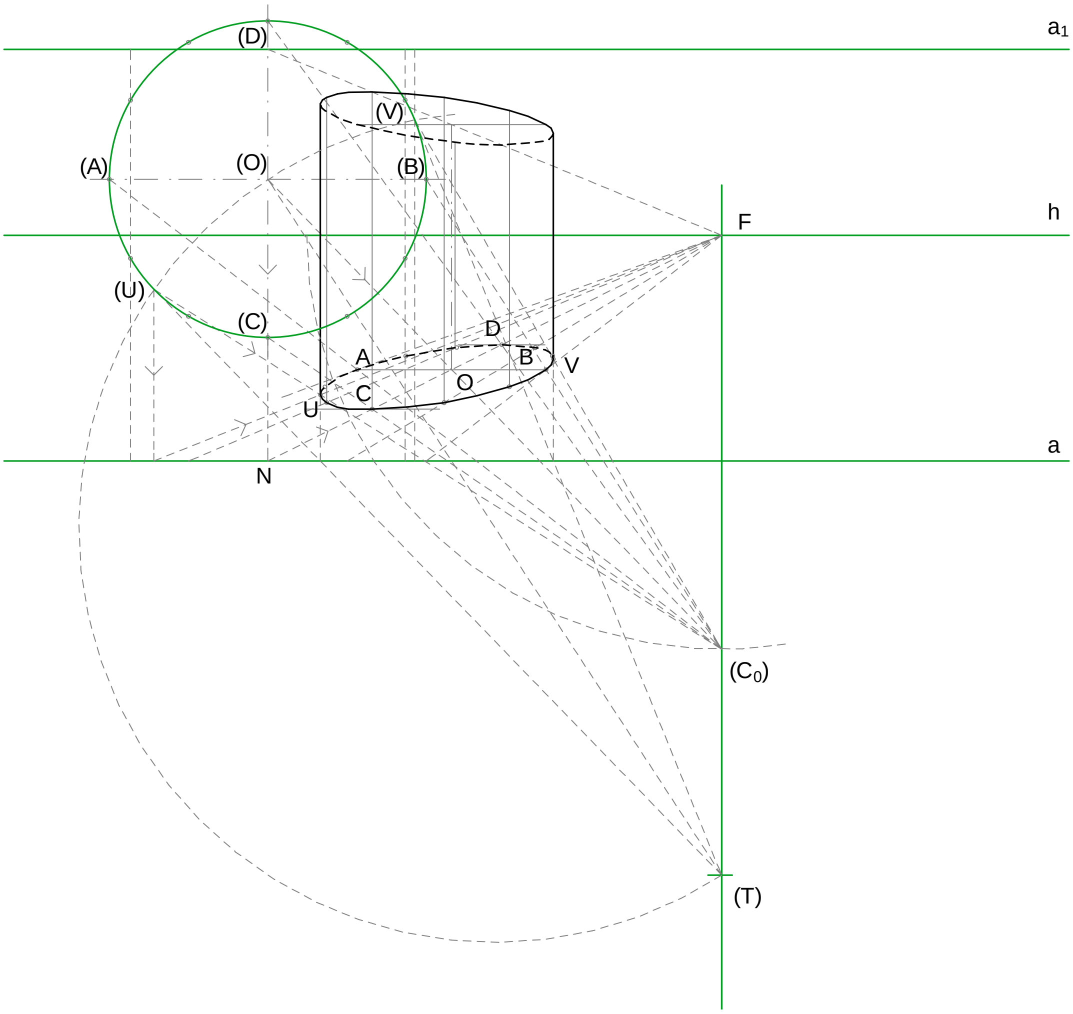


12. ábra

pontjait összekötjük a (C_0)-lal, ezek a vetítősugarak kimetszik a három pont perspektív képét. (A szerkesztésen az áttekinthetőség miatt elhagytuk a perspektív pont *p* indexét). A *C* és *D* pontokban az érintők képsíkkal párhuzamos vízszintesek lesznek. Az *O* ponton keresztül felvesszük az alapvonallal párhuzamos rendezőt. *(A)* és *(B)* pontot összekötjük (C_0)-lal, e vetítősugarak metszik a képsíkkal párhuzamos átmérőt, itt lesznek az *A* és *B* perspektív képpontok. E két pontban az érintők vetítősugár irányúak.
A kontúralkotók meghatározásához érintőket kell szerkesztenünk. Mivel a kúp az alapsíkon áll, ezért az alapsíkbeli *T* talppontból kell érintőt szerkeszteni Thalész-kör segítségével. A két érintési pont *(U)* és *(V)*. Megkeressük e pontokon keresztül *(C)(D)*-vel párhuzamos szelők alapvonalon lévő nyompontjait, amelyet a főponttal kötünk össze. Ezek metszik az (UC_0) és (VC_0) vetítősugarakat. A metszéspontok megadják a kontúrpontok perspektív képét, a vetítősugarak pedig az érintőket.

További pontokat kapunk, ha a beforgatott alapkör tetszőleges pontján keresztül képsíkra merőleges szelőt állítunk. A szelő nyompontját összekötjük a főponttal, majd a beforgatott alapköri pontot összekötjük a (C_0)-lel. A metszéspont megadja keresett pont perspektív képét.
Az aa_1 távolsággal határoztuk meg a kúp magasságát. A *CD* átmérőhöz tartozó nyompontban felmérhető a kúp magassága, ezt összekötve a főponttal a kúp középpontjában állított függőleges rendező kimetszi a kúp csúcspontját, amelyet az alapkör kontúrpontjaival kötünk össze.

9.8 **Forgáshenger ábrázolása** (13. ábra)

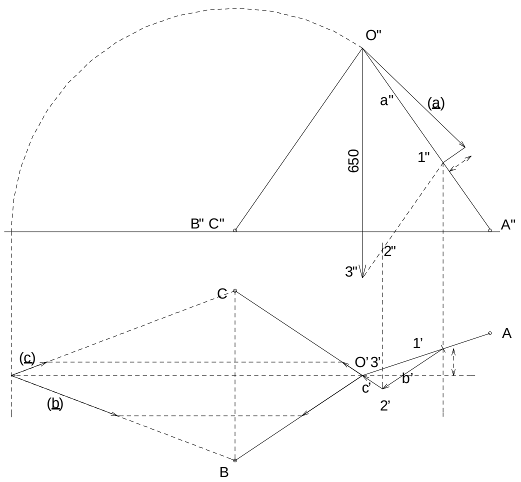


13. ábra

A forgáshenger perspektív képét azonos módon szerkesztjük, mint a forgáskúpét. A fedőkörhöz a megszerkesztett alapköri pontokat használjuk fel. A képsíkra merőleges húrok nyompontjainál rendelkezésre áll az aa_1 eredeti alkotómagasság, minden egyes nyompontot összekötünk a főponttal. A megszerkesztett alaprajzi pont függőleges rendezője kimetszi az adott pontban az alkotóhosszat.

Irodalom:
Bardon Alfréd: Gyakorlati távlattan, Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1954
Horn Antal: Síklapú testek és görbe felületek ábrázolása axonometriában és perspektívában vetítősugár-vetületekkel, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979
Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, Budapest 1957

10. Méretes feladatok



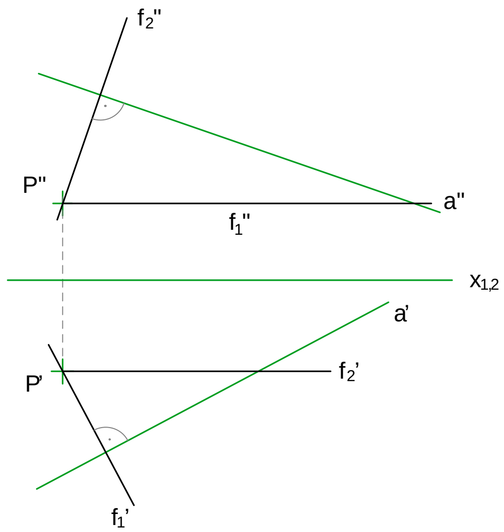
4. kép

Az Építőmérnöki ábrázolás I. tananyaga a 2.2 fejezetben a méretes szerkesztések azon feladataiból adott rövid válogatást, amely a térelemek valós nagyságának szerkesztését tárgyalta. Most a méretes szerkesztések szögfeladatai közül kívánunk néhányat bemutatni.

10.1 Merőleges sík állítása adott térelemre

10.1a Egyenesre merőleges sík állítása (1. ábra)

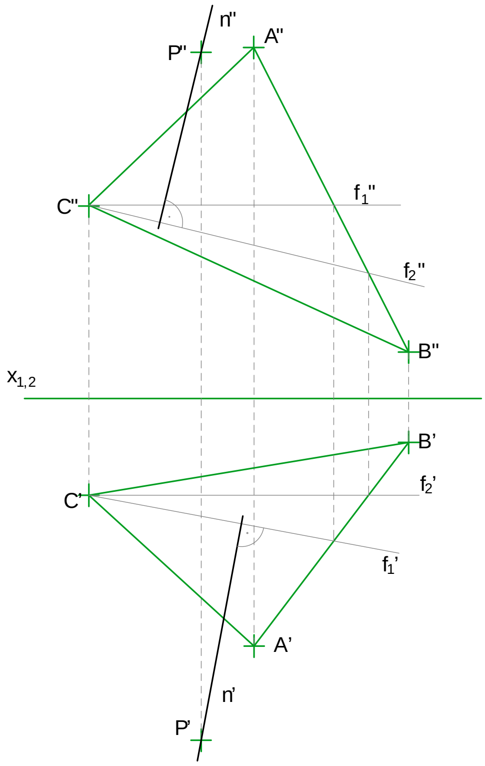
Adott egy *a* egyenes és rajta kívül egy *P* pont két vetületével. A feladat a ponton keresztül az egyenesre merőleges sík megszerkesztése.
A merőlegesség akkor teljesül, ha az a keresett sík nyomvonala, fővonala merőleges az adott egyenesre. Példánkban a sík első fővonalának első képe az egyenes első képére lesz merőleges – $f_1' \perp a'$ –, és a sík második fővonalának második képe az egyenes második képére merőleges – $f_2'' \perp a''$.



1. ábra

10.1b Síkra merőleges egyenes állítása (2. ábra)

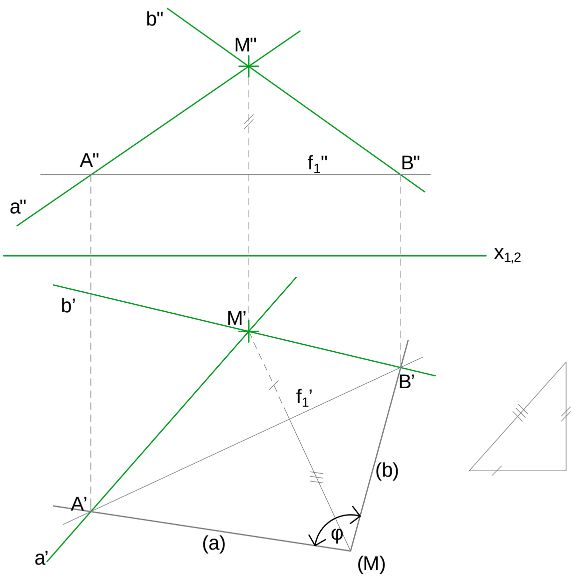
Adott az *ABC* sík és nem e síkban fekvő *P* pont, a ponton keresztül állítunk merőlegest a síkra. Az *ABC* sík első és második fővonalát megszerkesztve egyszerűen felvehető a *P* ponton keresztül az az egyenes, amelynek első képe merőleges a f_1'-re és második képe merőleges az f_2"-re. Ez az egyenes a sík *P* pontbeli *normálisa*. Természetesen a sík bármely pontjában állítható normális.



2. ábra

10.2 Metsző egyenes pár hajlásszöge (3. ábra)

A metsző egyenes pár által meghatározott síkot nyomvonala körül a képsíkba vagy fővonala körül képsíkkal párhuzamos síkba forgatjuk. Jelen feladatnál az adott sík első fővonal körül forgatjuk az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe az *a* és *b* egyenest.

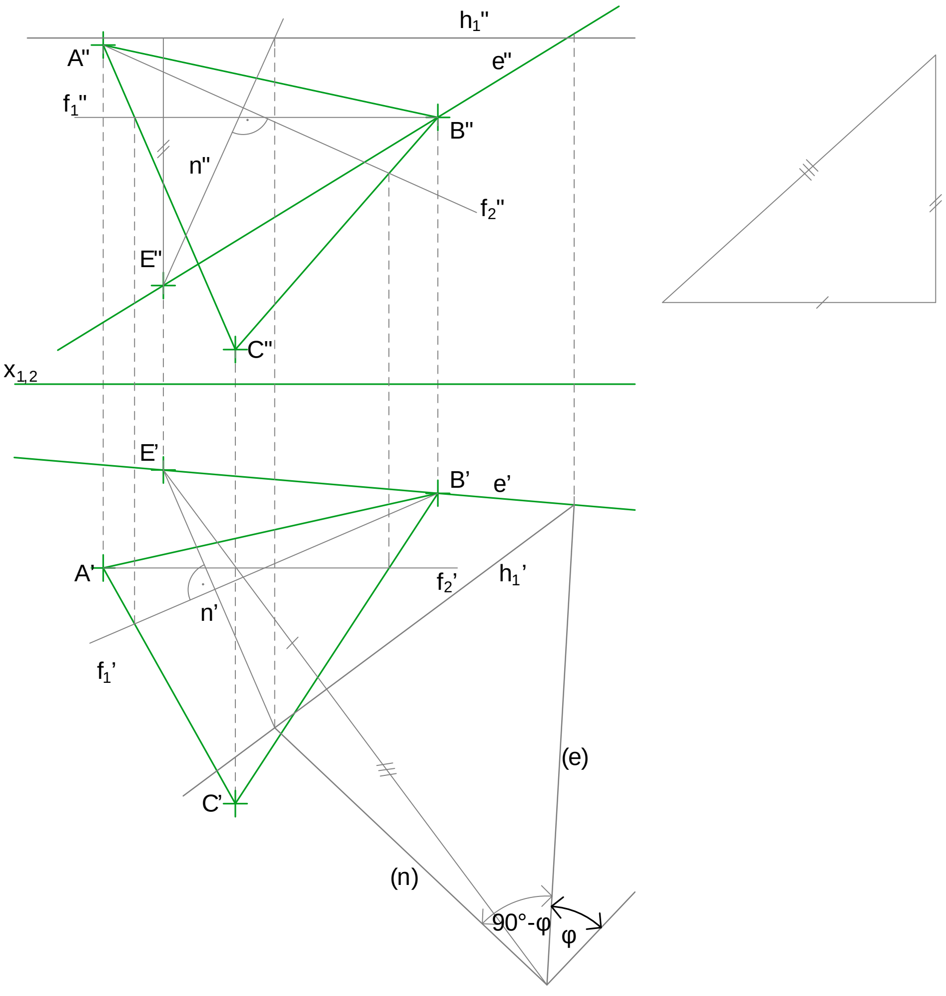


3. ábra

Az *M* pont távolságát a forgatás tengelyétől – f_1’-től – különbségi háromszög (lásd Építőmérnöki ábrázolás I. 2.2.1 pontja) segítségével határoztuk meg.

10.3 **Sík és egyenes hajlásszöge** (4. ábra)

Az *ABC* sík és az *e* egyenes közös pontja a *B* csúcspont.
Elsőként az egyenes tetszőleges *E* pontjában meghatározzuk a sík normálisát a fővonalak segítségével. Ezután az egyenes és a sík normálisa által bezárt szög valódi nagyságát szerkesztjük meg, mivel e szög pótszöge azonos az egyenes és sík által bezárt szöggel.
Az egyenes és a sík normálisa által bezárt szög nagyságának megállapításához szükségünk lesz az általuk meghatározott sík – *[e, n]* – első fővonalára, azaz *h*-ra, h’ körül az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk *e*-t és *n*-et. Az általuk bezárt szög pótszögét megszerkesztve megállapítható a sík és az egyenes hajlásszöge.

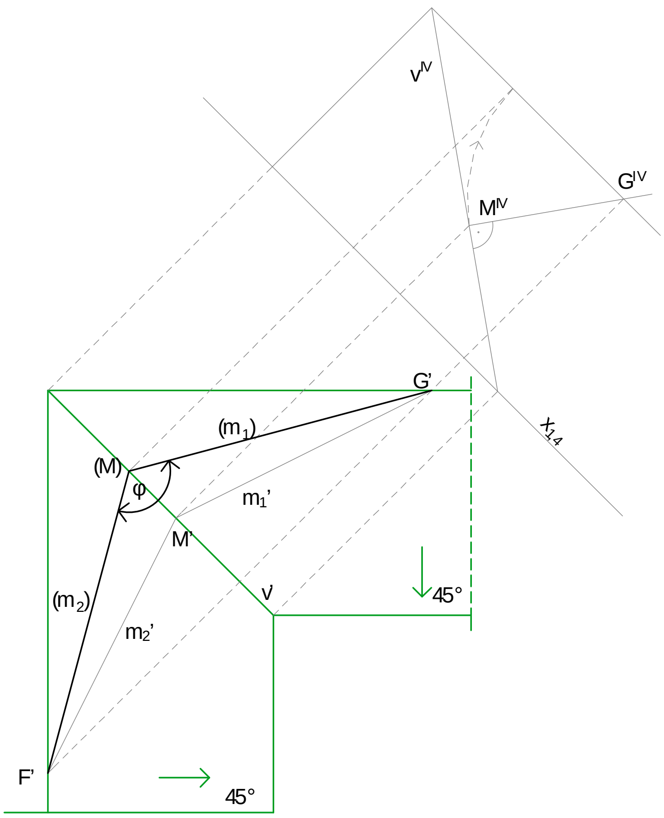


4. ábra

10.4 **Két sík hajlásszöge** (5. ábra)

A fedélidom-szerkesztésnél a tetőfelületek valós nagyságát – élhosszak, szögek – állapítottuk meg. Most a tetősíkok által bezárt szöget kívánjuk megszerkeszteni. E feladatnak a tetők vápa- és élgerinc-kialakításában van jelentősége.

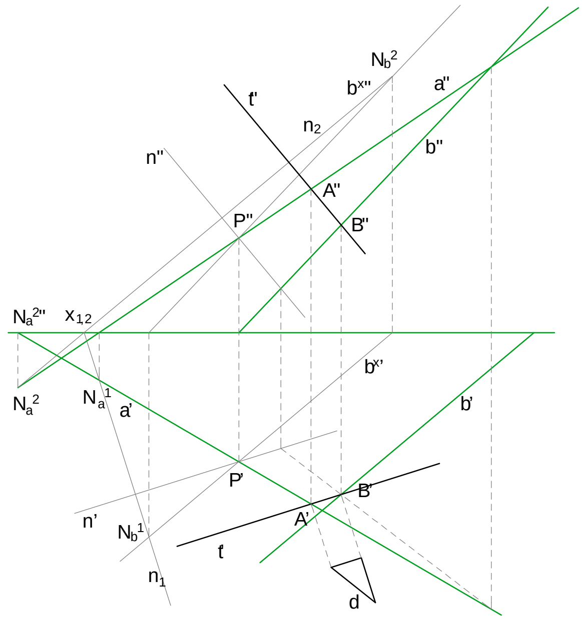
Adott két azonos hajlásszögű, egymásra merőleges nyomvonalú tetősík. A két sík metszésvonalával – v vápával – párhuzamosan IV. képet készítünk. (A 45º-os hajlásszög miatt nincs szükség második képre.) Merőleges síkot állítunk v-re, amely metszi a két tetősíkot m_1 és m_2 metszésvonalakban, természetesen metszi a gerincvonalakat is (a síkok első fővonalait) az F és G pontokban. A két metszésvonalat FG körül az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatva megkapjuk m_1 és m_2 által bezárt szöget, azaz a két sík hajlásszögét.
A feladat megoldása teljesen hasonló, ha élgerincben találkozó síkok hajlásszögét szeretnénk megállapítani.



5. ábra

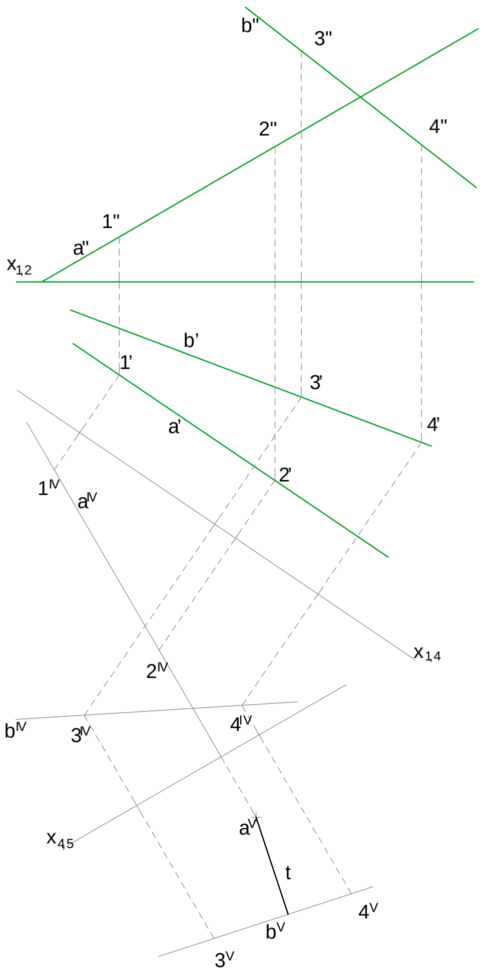
10.5 **Kitérő egyenesek távolsága** (6. ábra)

Adott két kitérő helyzetű egyenes, *a* és *b*. Keressük az egyenesek közötti legkisebb távolságot oly módon, hogy az egyik egyenes tetszőleges *P* pontjában a másik egyenessel párhuzamost állítunk. (Itt az *a* egyenes *P* pontjában vettük fel b^x egyenest.)
Megszerkesztjük [a, b^x] sík n_1 és n_2 nyomvonalát, majd *P* pontban e sík *n* normálisát. A sík normálisa *b* egyenesre is merőleges.
Képezzük a *b* egyenesnek az [*a*,*n*] síkbeli *B* döféspontját. A *B* pontban a normálissal párhuzamos *t* egyenest állítunk. Az *a* és *t* egyenesek közös pontja A lesz. *A* és *B* a két egyenes távolsága. Ez a két egyenes *normál transzverzálisa*. (Több egyenest vagy görbe vonalat metsző egyenest hívunk transzverzálisnak.)



6. ábra

A két egyenes távolsága másképpen is szerkeszthető.



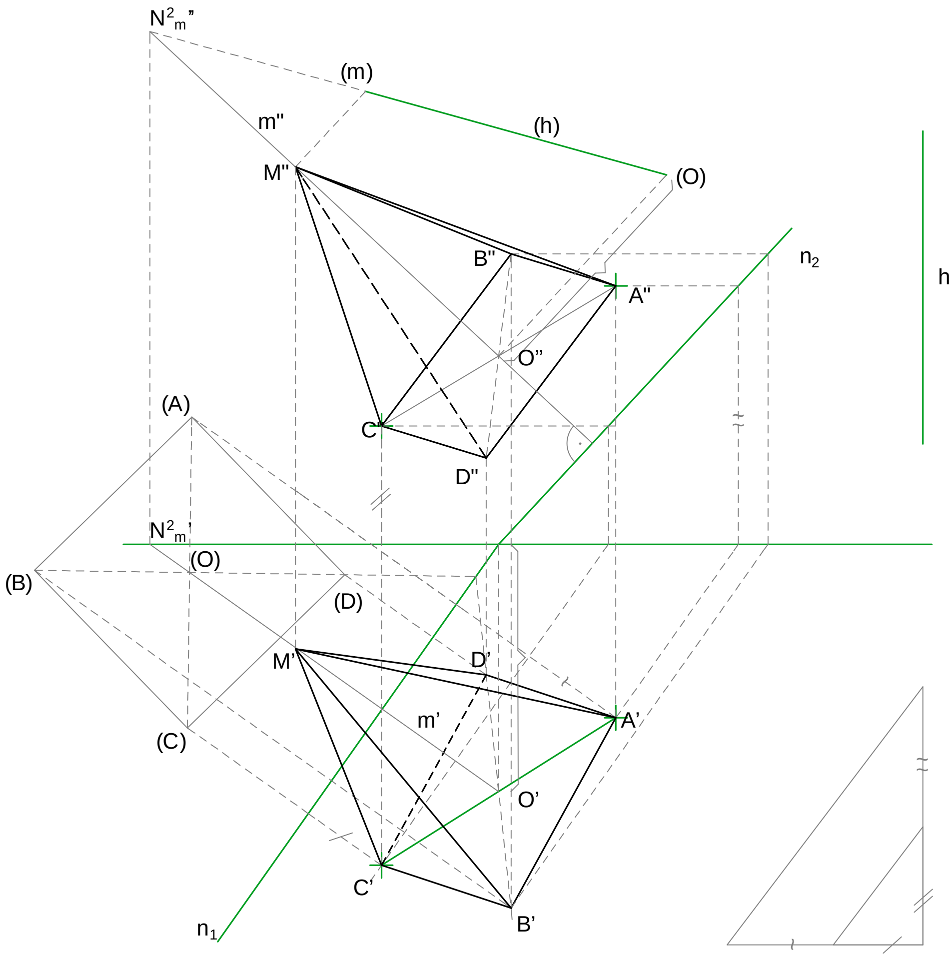
7. ábra

A két egyenes távolsága egyszerű transzformációval, több lépésben is meghatározható. Az *a* egyenest V. képen ponttá transzformálva, adódik a *b* egyenestől mért *t* távolság. (7. ábra)

A méretes feladatok nagy csoportja testek ábrázolásával foglalkozik, ahol is a megadott távolságokkal, szögekkel kell megszerkeszteni testeket, ezek legtöbbször szabályos testek.
A megoldás felismeréséhez célravezető szabadkézi vázlatot is készíteni.
A megoldás kulcsa az, hogy képsíkkal párhuzamos helyzetben megszerkesztjük a megadott adatokkal a test egy oldalát – pl. alaplapját, oldallapját –, és ezt állítjuk vissza két képével. A leforgatott kép és a vetületek szoros kapcsolatban vannak egymással. Minden pontot merőleges visszaforgatással nyerünk. Mindig található olyan pont, amely a forgatás tengelyén helyben marad. Ez a geometriai vonatkozás a leforgatott kép és a vetület között a *merőleges affinitás*.
A következőben erre nézünk egy példát.

10.6 Síklapú test ábrázolása (8. ábra)

Adott egy sík nyomvonalaival, továbbá *A* és *C* pontok első képe, valamint *h* magasság. Olyan négyzet alapú gúlát szerkesztünk, amelynek *A* és *C* pontjai a síkban fekvő alaplap átlóját adják, és a gúla magassága *h*.

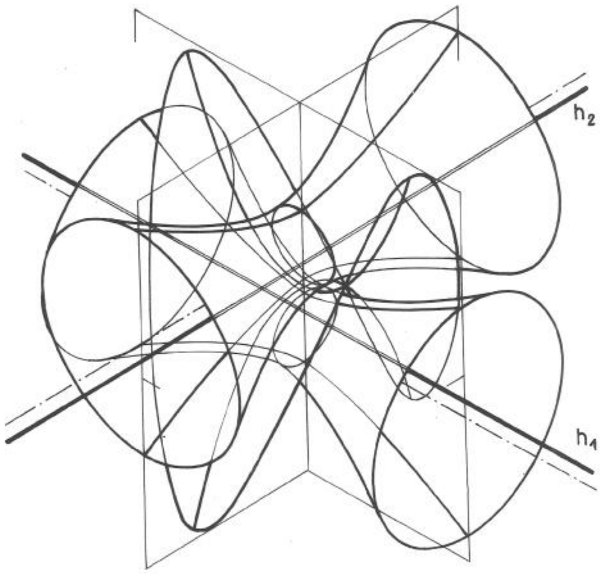


8. ábra

Elsőként *A* és *C* pontok második képét szerkesztjük meg első fővonalak segítségével. Különbségi háromszög szerkesztéssel *A* és *C* pontokat n_1 körül a képsíkba forgatjuk. Megszerkesztjük az átló *O* felezőpont, valamint a *B* és *D* pontok leforgatott képét. A *B* és *D* pontok visszaállításánál az átló meghosszabbításának, a forgatás tengelyvonalán helyben maradó pontját használjuk fel. A gúla alaplap B és D csúcspontjainak második képe fővonallal és átlóval szerkeszthető.
A gúla *O* pontjában állított, a nyomvonalra merőleges *m* egyenes tartalmazza az *M* csúcspontot. Az *m* egyenest II. képsíkba forgatjuk az *O* pont és második nyompont (N^2_m) segítségével. A leforgatott egyenesre felmérhető a gúla magassága. Ezt vetítjük vissza a második, majd első képre.
Végül feltüntetjük a láthatóságot.

Irodalom:
Bársony István: Műszaki ábrázoló geometria, SZEGA BOOKS, Pécs, 2008
Bardon Alfréd - Lőrinc Pál: Ábrázoló geometriai példatár, Tankönyvkiadó, Budapest, 1963
Vermes Imre: Geometria – Útmutató és példatár építőmérnök hallgatók számára, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1995

11. Sajátos görbefelületek



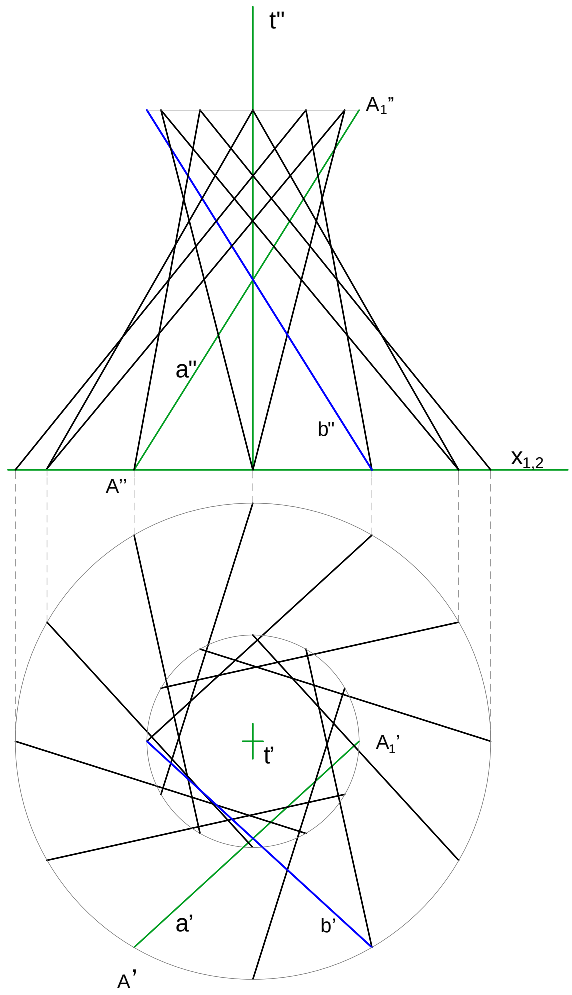
5. kép

A felületek valamely síkgörbe mozgatásával állíthatók elő. A felületek a mozgatott görbe alakja vagy a mozgatásmódja szerint csoportosíthatók.
Ha a felület valamely síkgörbe tengely körüli megforgatásával jön létre, akkor *forgásfelület* keletkezik. A felület forgástengelyre merőleges minden metszete kör lesz, a tengelyen átmenő síkmetszet neve a *meridiángörbe*.
Amikor a síkgörbe a tengely irányában egyenletesen változó – pl. emelkedő – mozgást ír le, akkor *csavarfelület*ről beszélünk.
Ha a leíró görbe önmagával párhuzamosan egy tetszőleges síkgörbén – pályagörbén – mozog, akkor *transzlációs felület* képződik.
Eddig forgásfelületekkel foglalkoztunk. A kört átmérője körül megforgatva kapjuk a gömböt.
A kúpot valamely síkgörbén, mint vezérgörbén mozgó egyenessel nyerjük úgy, hogy illeszkedett egy pontra. Leggyakrabban körkúppal foglalkozunk, amelyet egy tengelyen átmenő egyenes megforgatásával állítunk elő.
Hengerfelület úgy jön létre, hogy egy egyenes önmagával párhuzamosan egy vezérgörbén mozog. Legegyszerűbb esetben a vezérgörbe kör, és egyenes körhengert kapunk.
Amikor egy kört a saját síkjában lévő, de az átmérőjétől eltérő tengely körül forgatunk, akkor körgyűrű, azaz tórusz felület keletkezik.
A gömb, a forgáskúp, a forgáshenger másodrendű felület, mivel síkmetszeteik másodrendű görbék, azaz kúpszeletek (lásd Építőmérnöki ábrázolás I. rész 4.2.1 fejezet). Egyszerűbben fogalmazva a felületet metsző egyenes döféspontjainak száma megadja a felület rendszámát. Így pl. a tórusz negyedrendű felület.
A kúpszeletek tengely körüli forgatásával nyerhető az ellipszoid, egy- és kétköpenyű hiperboloid, valamint a paraboloid.
Míg a henger és a kúp felülete kifejthető, vagyis síkba kiteríthető, addig a gömb, az ellipszoid, egy- és kétköpenyű hiperboloid, a paraboloid és a tórusz nem.

A továbbiakban néhány speciális felületet tekintünk át. Ezek egyenes mozgatásával hozhatók létre, de felületük nem kifejthető, azaz *torzfelület*ek.
Az alábbi torzfelületeknek az építőmérnöki gyakorlatban kiemelt jelentőségük van.

11.1 **Egyköpenyű hiperboloid** (1. ábra)

Az *a* szakaszt a *t* tengely körül megforgatjuk, a szakasz minden pontja kört ír le. A szakasz két végpontja, *A* és A_1 által leírt nyomkör és fedőkör látható az első képen. A *t* tengelyhez legközelebbi pont a torokkört írja le. A szakaszt 12 pozícióban ábrázoltuk.

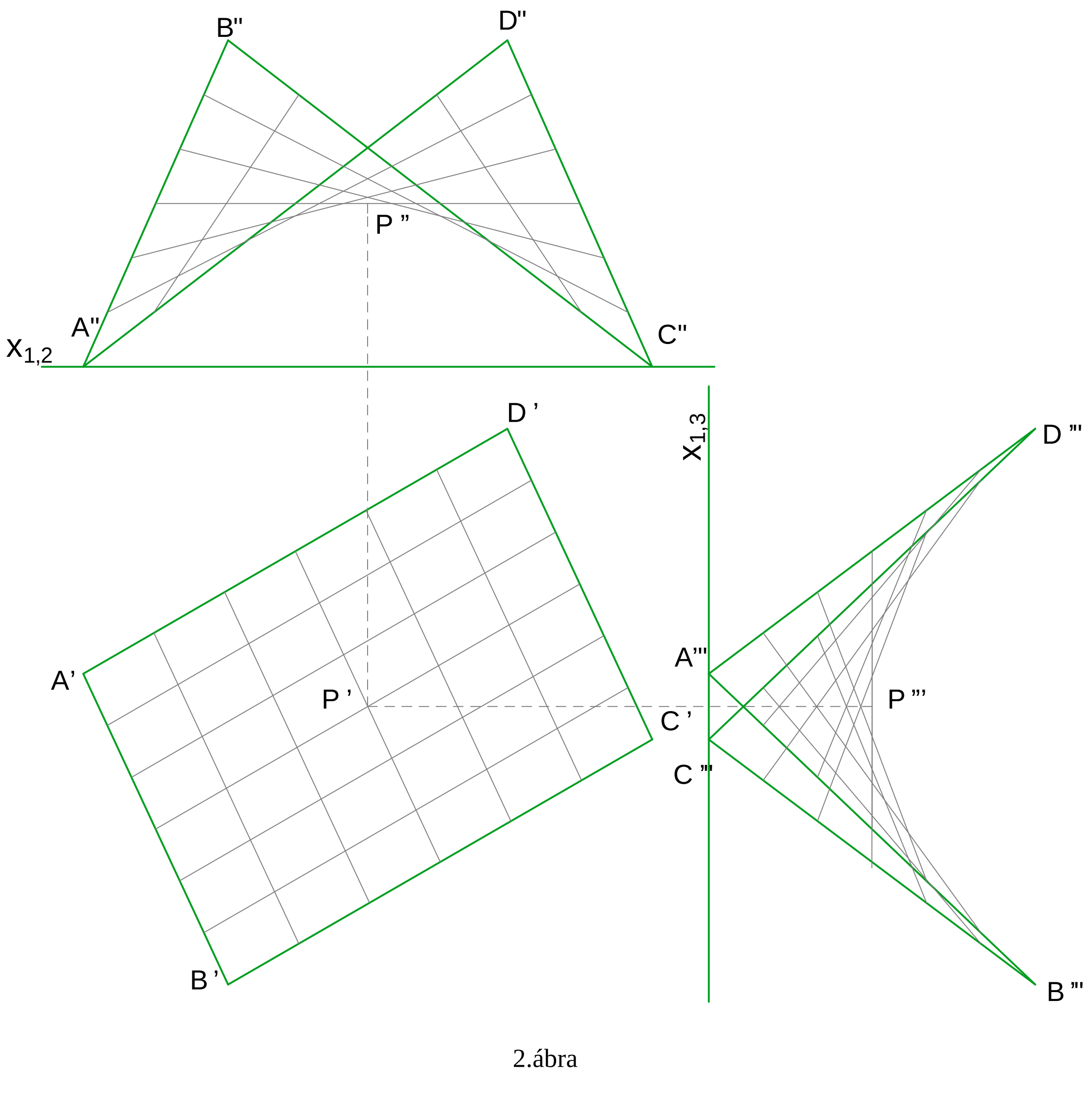


1. ábra

Ezen alkotósereg minden eleme egymáshoz képest kitérő helyzetű. A felületre illeszthető egy másik, *b* irányú alkotósereg is, amely metszi az előbbi alkotósereget, (azaz *transzverzális*a). A *t* tengely a hiperboloid képzetes tengelye, mivel a felületnek nincs egyetlen közös pontja sem e tengellyel. A *t* tengelyen keresztül felvett 1. vetítősík megadja a hiperboloid kontúrpontjait.
Ha a *t* tengely torokköri pontjában az egyik alkotóseregbeli alkotóval párhuzamost veszünk és azt megforgatjuk, akkor az kúpfelületet ír le. E kúpfelület így mindkét alkotósereggel párhuzamos alkotókat tartalmaz. Ez a hiperboloid aszimptotikus kúpja.
A forgásfelület egy tetszőleges pontjában állított érintősík két egymást metsző egyenest metsz ki, melyek közül az egyik az *a*, másik a *b* alkotósereghez tartozik. A hiperboloid további síkmetszetei kör, ellipszis, hiperbola és parabola.
Megjegyzendő, hogy a kétköpenyű hiperboloid az ún. valós tengely – amelyet metsz a hiperbola – körüli forgatással jön létre. A kétköpenyű hiperboloidnak nincs olyan síkmetszete, amely egyenes alkotót metsz, csak kör, ellipszis, hiperbola és parabola metszettel rendelkezik.

11.2 **Hiperbolikus paraboloid** (2. ábra)

Adott egy torznégyszög, melynek két pontja – *A* és *C* – az I. képsíkban van. A szemközt lévő AB és CD, valamint AD és BC oldalakat egy-egy alkotópárnak tekintjük, ezek egy-egy első vetítősíkkal párhuzamosak, ezek a felület iránysíkjai. A felület kétirányú alkotóseregéből megrajzoltunk néhányat egyenletes osztásközzel.
Az azonos seregbeli alkotók egymáshoz képest kitérő helyzetűek, és a másik seregbeli összes alkotót metszik.
Ha a felületet függőleges metszősík metszi, akkor a metszetvonal parabola lesz, más általános síkkal alkotott metszésvonala viszont hiperbola. Ha a metszősík az egyik iránysíkkal párhuzamos, akkor a metszetvonal egyetlen egyenes lesz.
Tekintsük a felület *P* pontját, e ponton keresztül két felületi görbe húzható meg, a II. képen a parabolaív lefelé, a III. képen felfelé nyílik. Ha e *P* pontban a két görbéhez egy-egy érintőt szerkesztünk, akkor az érintők által meghatározott vízszintes sík a felületet alulról és felülről is érinti, azaz az érintősík a felület egy része alatt, illetve egy része fölött halad. E pontot *duplapont*nak nevezzük. A *P* pontbeli érintősík két egyenesben metszi a felületet. A kúpszelet-síkmetszet „elfajul" metsző egyenes párrá.
A hiperbolikus paraboloid bármely pontjához húzott érintősík a felületet két egyenesben metszi, amelyek a két különböző alkotóseregből valók.

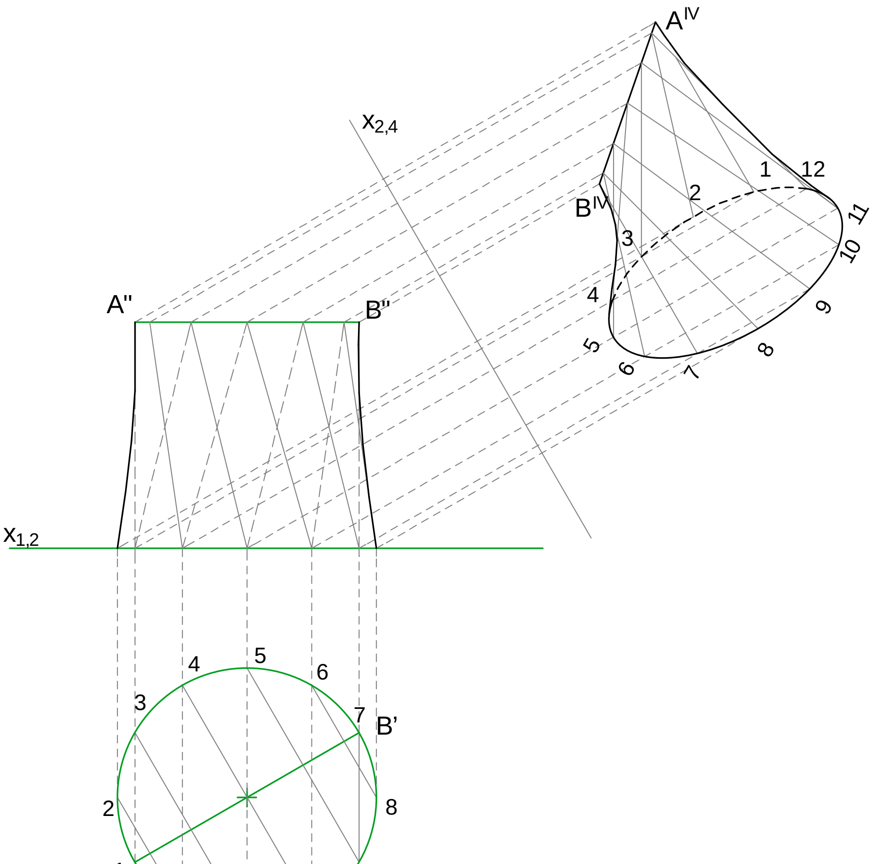


2.ábra

Ha mozgásmód szerint vizsgáljuk a hiperbolikus paraboloidot, akkor a felület egy parabolaíven egy vele ellentétes irányban nyíló, de párhuzamos tengelyű parabolának adott síkkal párhuzamos mozgatásával állítható elő.

11.3 **Körkonoid** (3. ábra)

Ha egy egyenest egy vezérgörbén egy adott iránysíkkal párhuzamosan vezetünk végig, akkor konoid felületet ír le az egyenes.
Feladatunkban megadtuk a K1 képsíkon fekvő kört és az *AB* vízszintes szakaszt. A vezérgörbe a kör, amelyet 12 részre osztottunk. A vezérgörbe síkjával párhuzamos *AB* szakaszra illeszkednek az alkotók, amelyek *AB*-re merőlegesek.

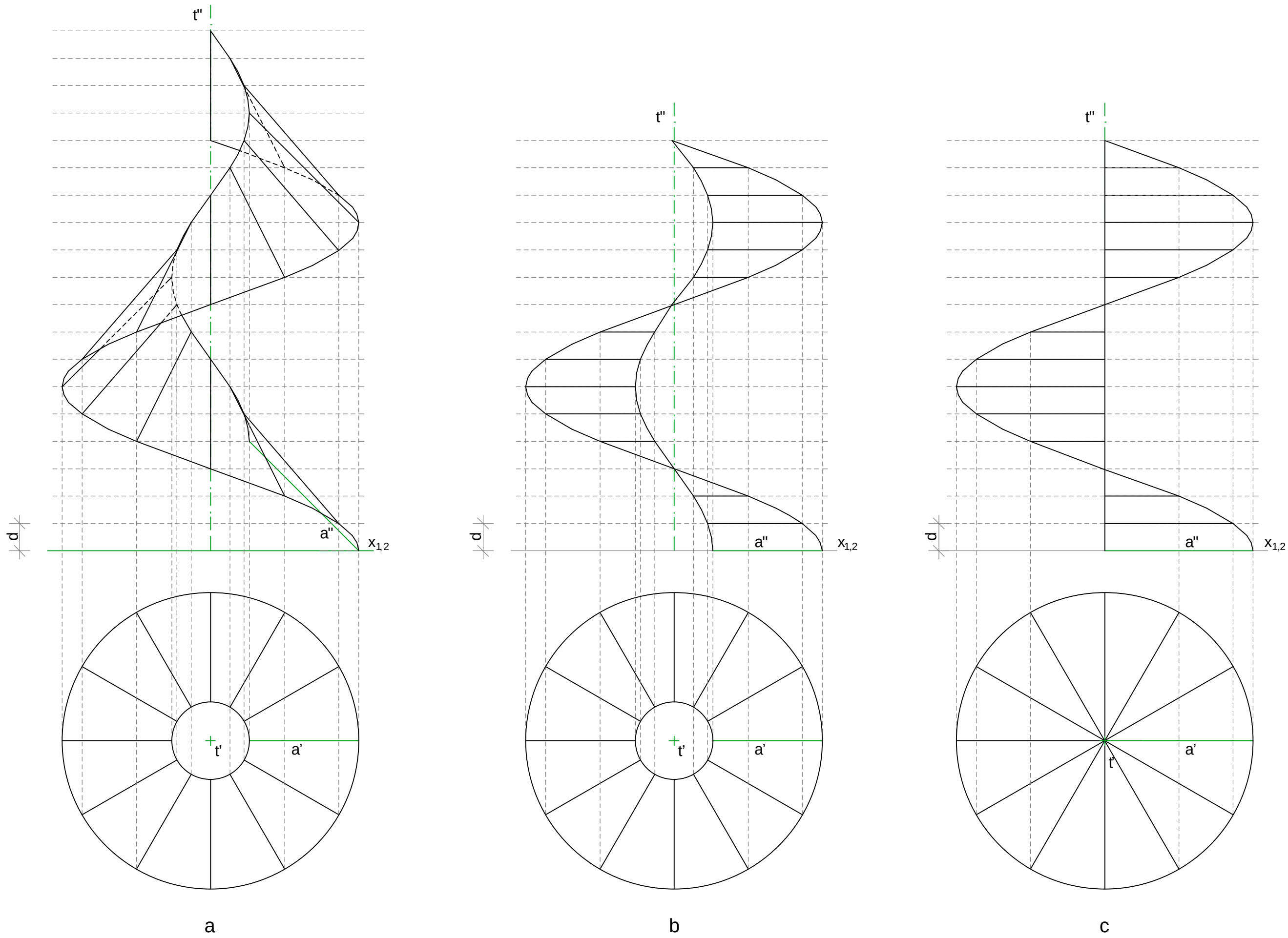


3. ábra

Az egyköpenyű hiperboloid, a hiperbolikus paraboloid és a konoid felületét egyenes alkotók írják le éppúgy, mint a hengert és a kúpot. E felületeket *vonalfelület*nek nevezzük. Viszont a hiperboloid, a hiperbolikus paraboloid és a konoid alkotóinak minden pontjában az érintősík más és más lesz, felülete nem kifejthető.
Megjegyzendő, hogy a kifejthető felületeknél egy alkotó minden pontjában az érintősík azonos.

11.4 **Torzcsavarfelület** (4. ábra)

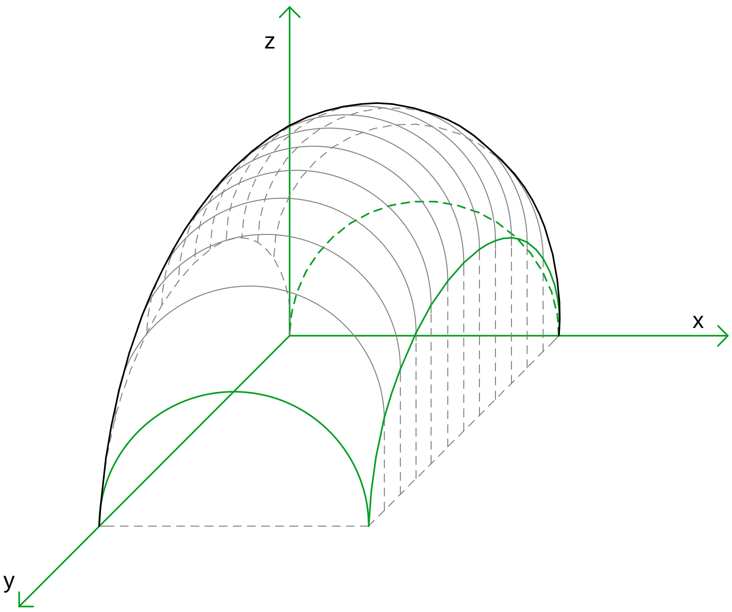
Adott *t* tengely körül végez csavarmozgást az *a* szakasz, azaz a szakasz elfordulása során adott szöget zár be a tengellyel, és egyenletesen emelkedik.
Az első képen az *a* szakasz 12 pozícióját ábrázoltuk. A 30º-os elfordulásnál az emelkedés mértéke *d*, a menetmagasság 12*d* lesz. Második képen a csavarfelületet másfél menetmagassággal mutatjuk.
Látható, hogy a felület alkotói egymáshoz képest kitérő helyzetűek.
A csavarfelületnél az emelkedés és az elfordulás viszony meghatározza a menetmagasságat.
Három torzcsavarfelületet mutatunk meg. Az elsőnél az alkotók 45º-ot zárnak be a képsíkkal, és nem érintik a t tengelyt. Ezt élesmenetű torzcsavarfelületnek nevezzük.
A középsőnél az alkotó merőleges a tengelyre, és itt sincs az alkotóknak közös pontja a tengellyel. A harmadiknál az alkotók érinti a tengelyt és arra merőlegesek. Ez utóbbi felületet zárt menetű, míg az előbbi kettőt nyitott menetű torzcsavarfelületnek nevezzük. Természetesen létezik élesmenetű zárt torzcsavarfelület is.



4. ábra

11.5 **Transzlációs felület** (5. ábra)

Kavalier axonometriában ábrázoltunk egy félkörívet. A leíró görbét – a félkörívet – önmagával párhuzamosan egy ellipszis pályagörbén mozgatunk. Az ív 12 pontjában ábrázoltuk a félkörívet. Megállapítható az, ha a pályagörbe mozog önmagával párhuzamosan a leírógörbén, akkor is ugyanazt a felületet kapjuk. Ha a görbe egy pontját tekintjük, akkor e mozgópontban az érintősíkok mindig párhuzamosak maradnak.



5. ábra

A transzlációs felület leíró és pályagörbéi másodrendű görbék.
A transzlációs felületekkel nagy fesztávolságokat hidalhatók át. Az ipari létesítményeknél kiemelkedő jelentősége van a torzfelületeknek.

Irodalom:

Strommer Gyula: Geometria, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1988
Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1957