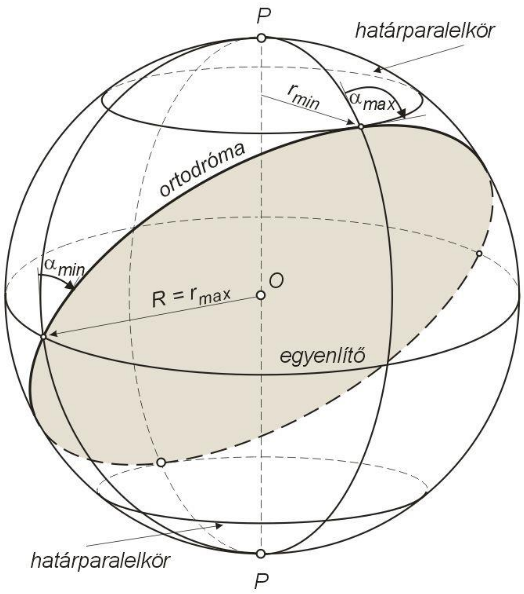
Vetülettan - 2. előadás vázlata

1 Ortodróma általános egyenlete

A geodéziai vonal (ortodróma, legnagyobb gömbi kör, főkörív) – minden forgásfelületen érvényes általános egyenlete:

$$r \sin \alpha = k \ (konstans)$$

ahol *r* a ponton átmenő paralelkör sugara, α pedig a geodéziai vonal azimutja a pontban. (Ez *Clairaut tétele*). Ez az egyenlet leírja az ortodróma azimutjának változását.



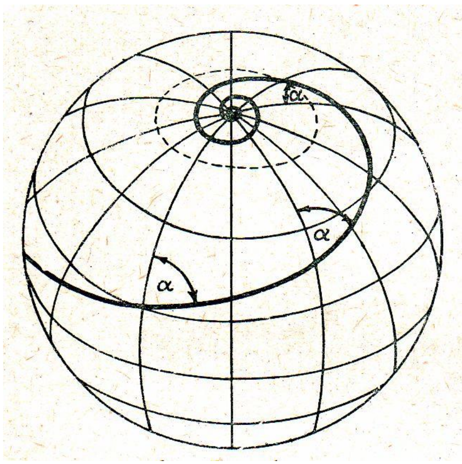
- $r_{max} = R$ (egyenlítő) $\rightarrow$ α_{min} az egyenlítőn van, $\sin \alpha_{min} = k/R$, ebből számítható, hogy mekkora azimut alatt metszi az ortodróma az egyenlítőt.
- A pólus felé haladva a paralelkör sugara (r) csökken, az azimut (α) nő.
- $\alpha_{max} = 90°$ a határparalelkörnél (itt az azimut 90°-ot ér el, a gömbi főkör érinti a ponton átmenő paralelkört, de át már nem metszi)
- A k konstans a határparalelkör sugara, mivel $\sin 90° = 1 \rightarrow r \cdot 1 = k$
- Az ortodróma az egyenlítő és a határparalelkör között mindegyik gömbnegyedben szimmetrikusan halad, amíg vissza nem ér a kezdőpontba.
- A meridiánok is ortodrómák (legnagyobb gömbi körök, síkjuk átmegy az origón), azimutjuk állandó 0° vagy 180°, határparalelköreik a pólusok, mivel $r \cdot \sin 0° = 0$.
- Az egyenlítő is ortodróma (legnagyobb gömbi kör, síkja átmegy az origón), azimutja állandó 90° vagy 270°, határparalelköre önmaga: $k = R \cdot \sin 90° = R$.
- A paralelkör nem ortodróma, nem legnagyobb gömbi kör, síkja nem megy át az origón.

2 Loxodróma

A forgásfelületek másik nevezetes vonala a *loxodróma*. A loxodróma olyan folytonos görbe vonal, amely minden pontjában azonos szöget zár be a meridián irányával, tehát azimutja állandó: $\propto = k \ (konstans)$

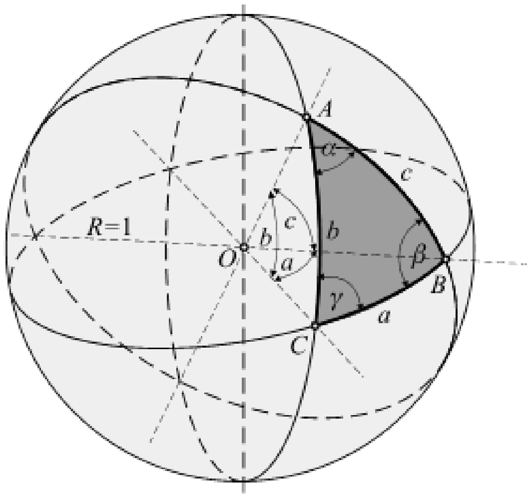
- A meridián loxodróma ($\propto = 0°$), az egyenlítő és a paralelkörök is loxodrómák ($\propto = 90°$).

- Más irányban a loxodróma olyan csavarvonal, amely aszimptotikusan közeledik a pólushoz.
- Tengeri hajózásban van jelentősége, régebben általában loxodrómán hajóztak, mert így csak állandó azimutot kellett tartani.
- Hosszú úton a loxodróma jóval hosszabb lehet az ortodrómánál, viszont az ortdróma azimutja pontról pontra változik, ezért nehéz követni. Ilyenkor az ortodrómát szakaszokra bontották, és a szakaszokon belül loxodrómával helyettesítették. A repülésben is hasonló gyakorlatot követtek.



3 GÖMBHÁROMSZÖG, GÖMBI SZÖGFELESLEG

- A gömbháromszög mindegyik oldalának egy-egy *főkörív* felel meg. Csúcsai ezek metszéspontjai.
- A gömbháromszög *a, b, c* oldalán az origót a csúcsokkal összekötő három félegyenes által páronként bezárt szöget értjük.
- Az *a, b, c* oldalakkal szemközti szögek a gömbháromszög szögei: α, β, γ.
- Mind az oldalakat, mind a szögeket *szögértékben* fejezzük ki.



A *gömbháromszög szögeinek összege* mindig nagyobb 180°-nál:

$$180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°$$

- Az $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180°$ különbséget a gömbháromszög ***gömbi szögfeleslegének*** nevezzük.
- Az ε számítható a gömbháromszög területéből is: $\varepsilon = \frac{F}{R^2}\rho$

ahol F a gömbháromszög területe, R a gömb sugara, ρ pedig az analitikus szögegységnek megfelelő fok- vagy másodperc-érték ($\rho° = \frac{180°}{\pi}$, $\rho'' = \frac{180}{\pi}3600'' = 206\,264{,}806\,2471''$.)

- A teljes gömb gömbi szögfeleslege: $\varepsilon = \frac{F}{R^2} = \frac{4R^2\pi}{R^2} = 4\pi = 720°$.

- Ha ismerjük a gömbháromszög két oldalát és a közbezárt szöget:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\sin\gamma}{1+\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\cos\gamma}.$$

- A gömbháromszög 3 oldalának ismeretében:

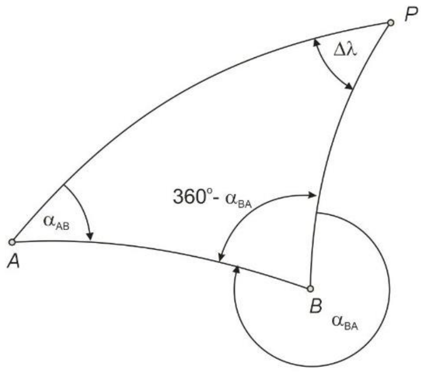
$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}}, \text{ ahol } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

- Magyarország egész területére: $\varepsilon = 7'52''$
- Gömbi kétszög esetében: $\varepsilon = 90° + 90° + \Delta\lambda - 180° = \Delta\lambda$
- Félgömb szögfeleslege: 2π

4 VALÓDI GÖMBI MERIDIÁN KONVERGENCIA

Ellenazimut meghatározása: Két pontot összekötő ortodrómának a két pontnál jelentkező azimutja – a meridiánok pólus felé konvergálása miatt – általában nem 180°-kal különbözik egymástól, hanem 180° + γ -val, ahol γ a két pont között fellépő ***valódi gömbi meridiánkonvergencia***.

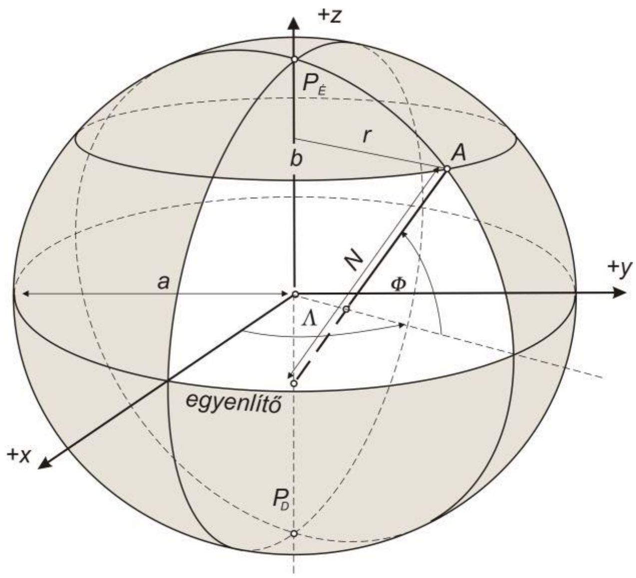
- $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180° + \gamma$
- γ poláris gömbháromszögből számítható!
- Levezetés: $\alpha_{AB} + 360° - \alpha_{BA} + \Delta\lambda = 180° + \varepsilon$
  átrendezve: $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180° + \Delta\lambda - \varepsilon$
- tehát a valódi gömbi meridiánkonvergencia:
  $\gamma = \Delta\lambda - \varepsilon.$



5 ELLIPSZOID ALAPFOGALMAI

5.1 FORGÁSI ELLIPSZOID MÉRETE ÉS ALAKJA

Ha az ellipszist a kistengelye körül körbe forgatjuk, akkor az forgási ellipszoidot kapunk. Az ellipszoid meghatározásához **két adat szükséges**, amelyek egyikének méret meghatározónak kell lennie.



Az ellipszoid méretére és alakjára az alábbi adatok jellemzők:

- fél nagytengely: a,
- fél kistengely: b,
- lapultság: $f = \dfrac{a-b}{a}$,
- első numerikus excentricitás: $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$,
- második numerikus excentricitás: $\varepsilon' = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{b^2}}$,

Köztük lévő összefüggések:

$$\varepsilon'^2 = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon'^2}{1+\varepsilon'^2},$$

$$\left(1-\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon'^2\right)=1,$$

$$f = 1-\sqrt{1-\varepsilon^2}, \qquad \varepsilon^2 = 2f - f^2$$

Ellipszoidi számításokban gyakran előfordulnak a következő jelölések is:

$$c = \frac{a^2}{b}, \qquad \eta^2 = \varepsilon'^2 \cos^2 \Phi, \qquad V = \sqrt{1+\eta^2}.$$

6 EGYÉB ELLIPSZOIDI FOGALMAK

- Kezdőmeridiánok: Ma a Greenwich-i az általános, régen használták a fiktív Ferroi meridiánt. (A fiktív ferroi meridiánt kereken 20°-kal nyugatra vették fel a párizsi meridiántól. A greenwichi meridiántól ez mintegy 17° 40′-cel esik nyugatra.)
- Ortodróma: geodéziai vonal, $r \sin\alpha = k$, $r_{max} = a$. Az ellipszoidon az ortodróma általában nem zárt görbe. Kivétel a kör alakú egyenlítő és az ellipszis alakú meridián.
- Loxodróma: ua. mint a gömbnél, állandó α azimut
- Ellipszoidi meridián konvergencia (γ): Ua., mint a gömbnél $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180° + \Delta\lambda - \varepsilon = \alpha_{AB} \pm 180° + \gamma$

- Ellipszoidi szögfelesleg (ε_e): Ua., mint a gömbnél: $\varepsilon_e = (\alpha + \beta + \gamma) - 180°$
- Meridián irányú görbületi sugár: $M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}}$ (Az ellipszoid meridiánjának görbületi sugara)
- Harántgörbületi sugár: $N = \frac{a}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \Phi)^{\frac{1}{2}}}$ (A meridián síkjára merőleges kelet-nyugati főirányban a metszési görbe sugara. M és N a paralelkör minden pontjában azonos.)
- Simulógömb sugara: $R = \sqrt{M \cdot N}$ (Közepessugarú v. Gauss gömb)
- Paralelkör sugara: $r = N \cdot \cos \Phi$

7 KOORDINÁTA RENDSZEREK AZ ELLIPSZOIDON

7.1 FÖLDRAJZI KOORDINÁTA RENDSZER

Az ellipszoidi földrajzi szélesség (Φ), földrajzi hosszúság (Λ) és az azimut definíciója megegyezik a gömbre adottakkal, csak az ellipszoidnál nagy betűkkel jelöljük. A felületi pont normálisa azonban csak az egyenlítőn és a pólusokban megy át az ellipszoid középpontján.

Ellipszoidi földrajzi szélesség: Φ az a szög, amelyet a ponton átmenő normális az egyenlítő síkjával bezár,Φ: $\pm 0 - 90°$, É-ra pozitív, D-re negatív.

Ellipszoidi földrajzi hosszúság: Λ a ponton átmenő meridián és a választott kezdőmeridián által bezárt szög, Λ: $\pm 0 - 180°$, K-re pozitív, nyugatra negatív.

Pólustávolság: földrajzi szélesség pótszöge $\mathrm{B} = 90° - \Phi$.

7.2 FELÜLETI DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA RENDSZER

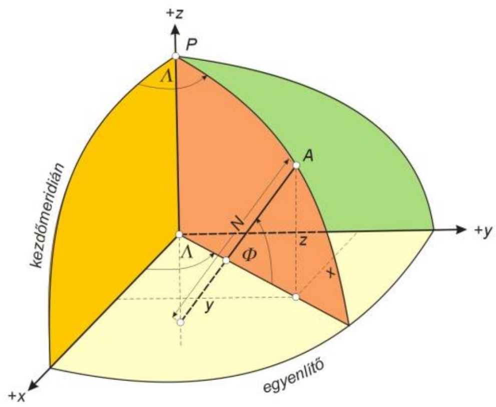
Ua., mint a Gömbi felületi derékszögű koordináta rendszer. Nevezik felületi ortogonális rendszernek is. Az ellipszoidi Soldner-féle koordináta-rendszer esetében ellipszoidi geodéziai vonalat bocsátunk merőlegesen a kezdőmeridiánra. A két vonal metszéspontja az A pont kezdőmeridiánon levő talppontja (T). Az A pont Soldner-féle koordinátái:

x = a kezdőmeridián K és T közötti ívdarabjának hossza,

y = az A és T közötti geodéziai vonaldarab hossza.

A földrajzi (Φ, Λ) és a Soldner-féle (x, y) koordináták között átszámítások végezhetők.

7.3 TÉRBELI DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER



- z tengely: az ellipszoid kistengelye
- x tengely: az egyenlítő és a kezdőmeridián síkjának metszésvonala
- y tengely: az egyenlítő síkjában az kezdőmeridián síkjára merőlegesen a középponton keresztül

Valamely A felületi pont paraméteres egyenletei $\underline{A(x,y,z) \rightarrow A(\Phi,\Lambda)}$:

$$x = N\cos\Phi\cos\Lambda \qquad (1)$$
$$y = N\cos\Phi\sin\Lambda \qquad (2)$$
$$z = \frac{b^2}{a^2}N\sin\Phi = N\,(1-\varepsilon^2)\sin\Phi \qquad (3)$$

Visszafelé az inverz képletek levezetése: $\underline{A(\Phi,\Lambda) \rightarrow A(x,y,z)}$

A síkkoordináták ismeretében a földrajzi hosszúság egyszerűen számítható: $\tan\Lambda = \frac{y}{x}$

A földrajzi szélesség inverz képletének levezetéséhez:

$$x^2 + y^2 = N^2\cos^2\Phi \qquad (1)^2+(2)^2$$

$$\frac{a^4}{b^4}z^2 = N^2\sin^2\Phi \qquad (3)^2$$

A két egyenlet összeadása után meghatározható N, amit szükséges ismerni Φ kiszámításához:

$$x^2 + y^2 + \frac{a^4}{b^4}z^2 = N^2.$$

Majd az (1) és (2) egyenletekből: $\cos\Phi = \frac{x}{N\cos\Lambda}$ vagy $\cos\Phi = \frac{y}{N\sin\Lambda}$.

A Φ (3)-ból is meghatározható: $\sin\Phi = \frac{a^2 z}{b^2 N}$.

8 NÉHÁNY FÖLDI ELLIPSZOID ADATA

név	a [m]	f (lapultság)	
Bessel (1841)	6 377 397	1/299.15	
Hayford (1910)	6 378 388	1/297	*1. nemzetközi ellipszoid
Kraszovszkij (1940)	6 378 245	1/298.3	
IUGG/1967 (v. GRS-67)	6 378 160	1/298.247	*2. nemzetközi ellipszoid
WGS-84 (1984)	6 378 137	1/298.257	