2. gyakorlat

Kiegyenlítő számítások MSc 2018/19

Áttekintés

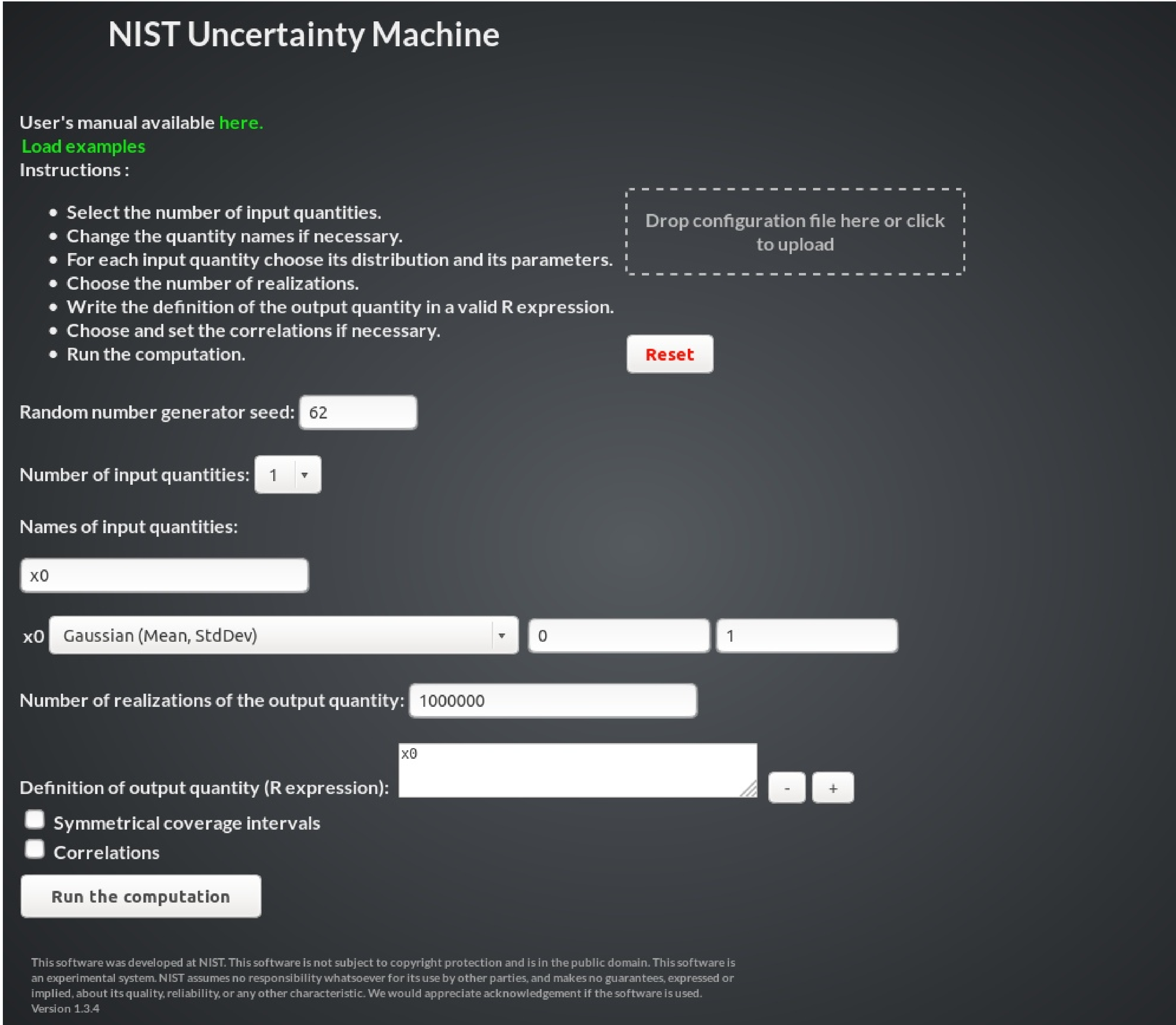
- Mérési bizonytalanság számítására szolgáló programok
  - NIST Uncertainty Machine
  - számpéldák
- Rendellenes hibaterjedés
  - számpélda

Mérési bizonytalanság számítására szolgáló programok

- GUM Workbench (Metrodata GmbH)
- GUM_MC (Jean-Marie Biansan, GPL)
- Uncertainty Machine (NIST, public domain)
- GUMsim (QuoData GmbH)
- DataMelt (http://jwork.org/dmelt)
- Uncertainty Calculator (John Denker)
- OpenTurns (LGPL, http://www.openturns.org/)

NIST Uncertainty Machine

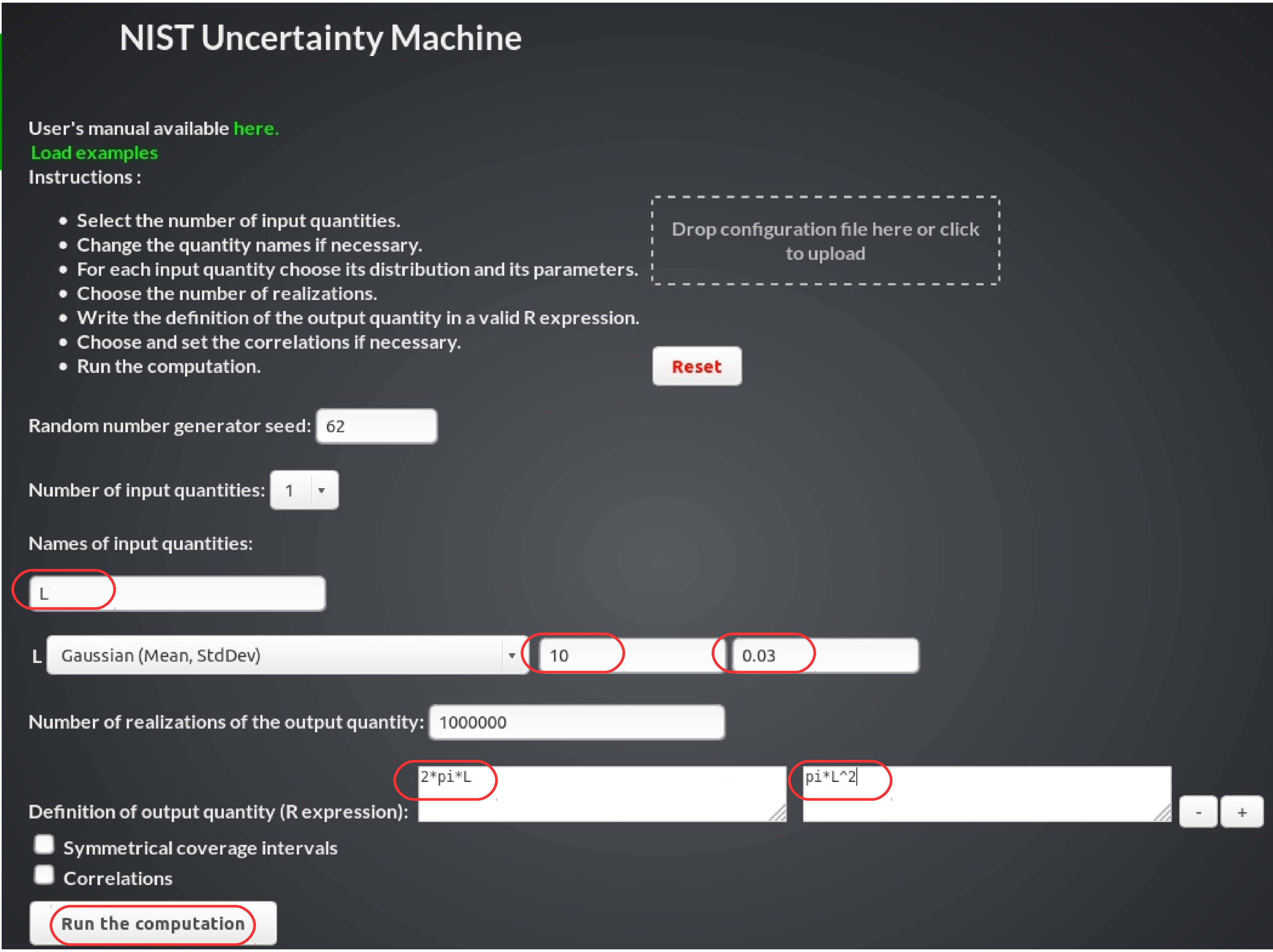
- Web-es felület, R nyelvű programok, offline telepítés lehetséges (https://uncertainty.nist.gov/)
  - bemeneti mennyiségek megadása
    - szám, elnevezés, eloszlás (, korreláció)
  - Monte Carlo minták száma
  - Kimeneti mennyiség(ek) képletének megadása (R programnyelven)
  - számítás végrehajtása


NIST Uncertainty Machine
User's manual available here.
Load examples
Instructions :
Select the number of input quantities.
Change the quantity names if necessary.
For each input quantity choose its distribution and its parameters.
Choose the number of realizations.
Write the definition of the output quantity in a valid R expression.
Choose and set the correlations if necessary.
Run the computation.
Drop configuration file here or click to upload
Reset
Random number generator seed: 62
Number of input quantities: 1
Names of input quantities:
x0
x0 Gaussian (Mean, StdDev) 0 1
Number of realizations of the output quantity: 1000000
x0
Definition of output quantity (R expression):
- +
Symmetrical coverage intervals
Correlations
Run the computation
This software was developed at NIST. This software is not subject to copyright protection and is in the public domain. This software is an experimental system. NIST assumes no responsibility whatsoever for its use by other parties, and makes no guarantees, expressed or implied, about its quality, reliability, or any other characteristic. We would appreciate acknowledgement if the software is used.
Version 1.3.4

1. példa

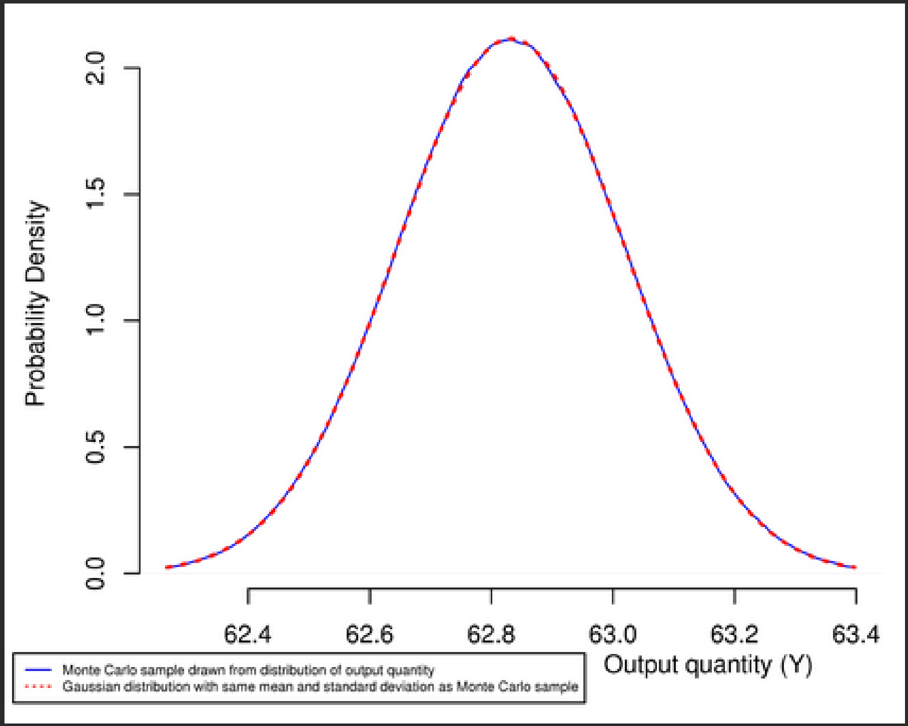
- Detrekői 4.8 példa:

  Határozzuk meg a kör kerületének és területének a középhibáját, feltételezve, hogy a sugárra végzett mérés $L = 10{,}000\ \mathrm{m}$ eredménye és a mérés $\mu = 0{,}03\ \mathrm{m}$ középhibája ismert


NIST Uncertainty Machine
User's manual available here.
Load examples
Instructions :
Select the number of input quantities.
Change the quantity names if necessary.
For each input quantity choose its distribution and its parameters.
Choose the number of realizations.
Write the definition of the output quantity in a valid R expression.
Choose and set the correlations if necessary.
Run the computation.
Drop configuration file here or click to upload
Reset
Random number generator seed: 62
Number of input quantities: 1
Names of input quantities:
L
L Gaussian (Mean, StdDev) 10 0.03
Number of realizations of the output quantity: 1000000
Definition of output quantity (R expression): 2*pi*L pi*L^2
-
+
Symmetrical coverage intervals
Correlations
Run the computation

Output 1 | Output 2

```
===== RESULTS ==============================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 1000000

ave      = 62.832
sd       = 0.189
median   = 62.832
mad      = 0.19

Coverage intervals

99% (   62.35,    63.32)        k =      2.6
95% (  62.463,   63.202)        k =        2
90% (  62.522,   63.142)        k =      1.6
68% (  62.644,   63.021)        k =        1

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
L                      100         100
Residual                NA           0

-------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

        y  = 62.832
      u(y) = 0.188

             SensitivityCoeffs Percent.u2
L                          6.3        100
Correlations                NA          0
============================================
```



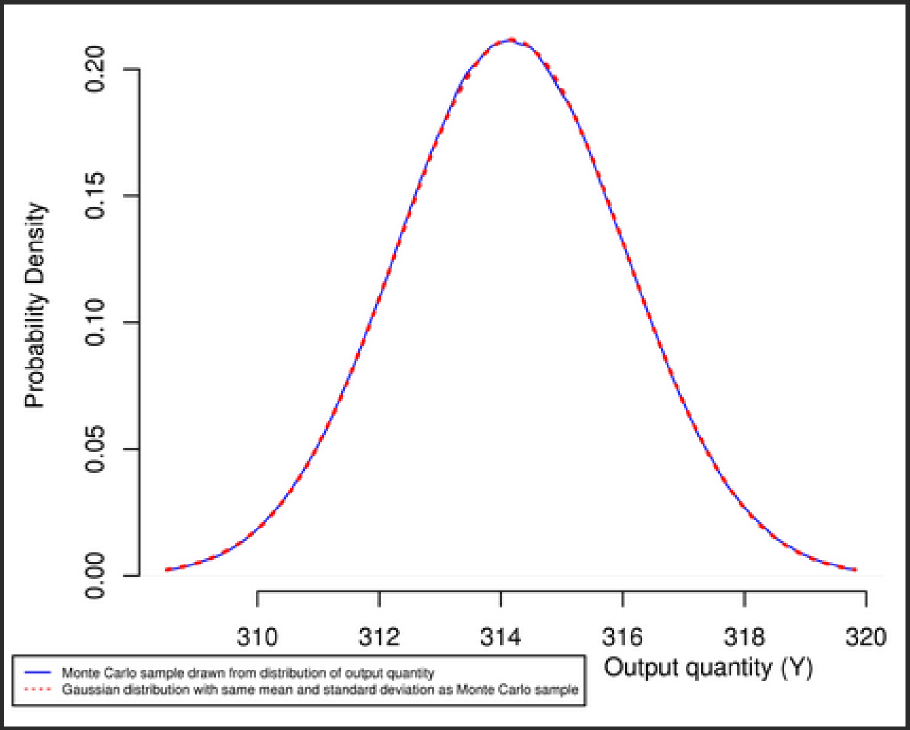
Download JPEG file with plot shown on this page

Detrekői 4.8 példa eredmények

kerület középhibája: 0.188 m

Output 1 | Output 2

```
===== RESULTS ================================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 1000000

ave      = 314.16
sd       = 1.89
median   = 314.16
mad      = 1.9

Coverage intervals

99% (    309.3,       319)        k =      2.6
95% (    310.5,     317.9)        k =        2
90% (    311.1,     317.3)        k =      1.6
68% (   312.28,    316.05)        k =        1

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
L                      100         100
Residual                NA           0

--------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

        y   = 314.16
      u(y)  = 1.88

             SensitivityCoeffs Percent.u2
L                           63        100
Correlations                NA          0
============================================
```

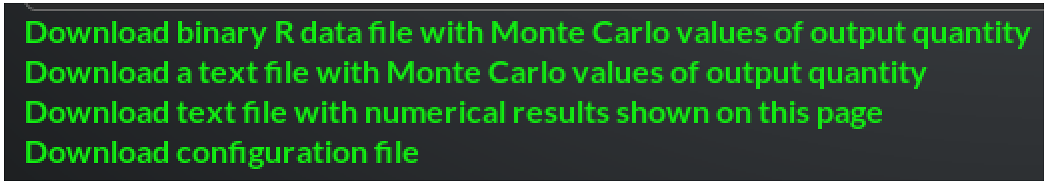


Download JPEG file with plot shown on this page

Detrekői 4.8 példa eredmények

terület középhibája: 1.885 m

További lehetőségek

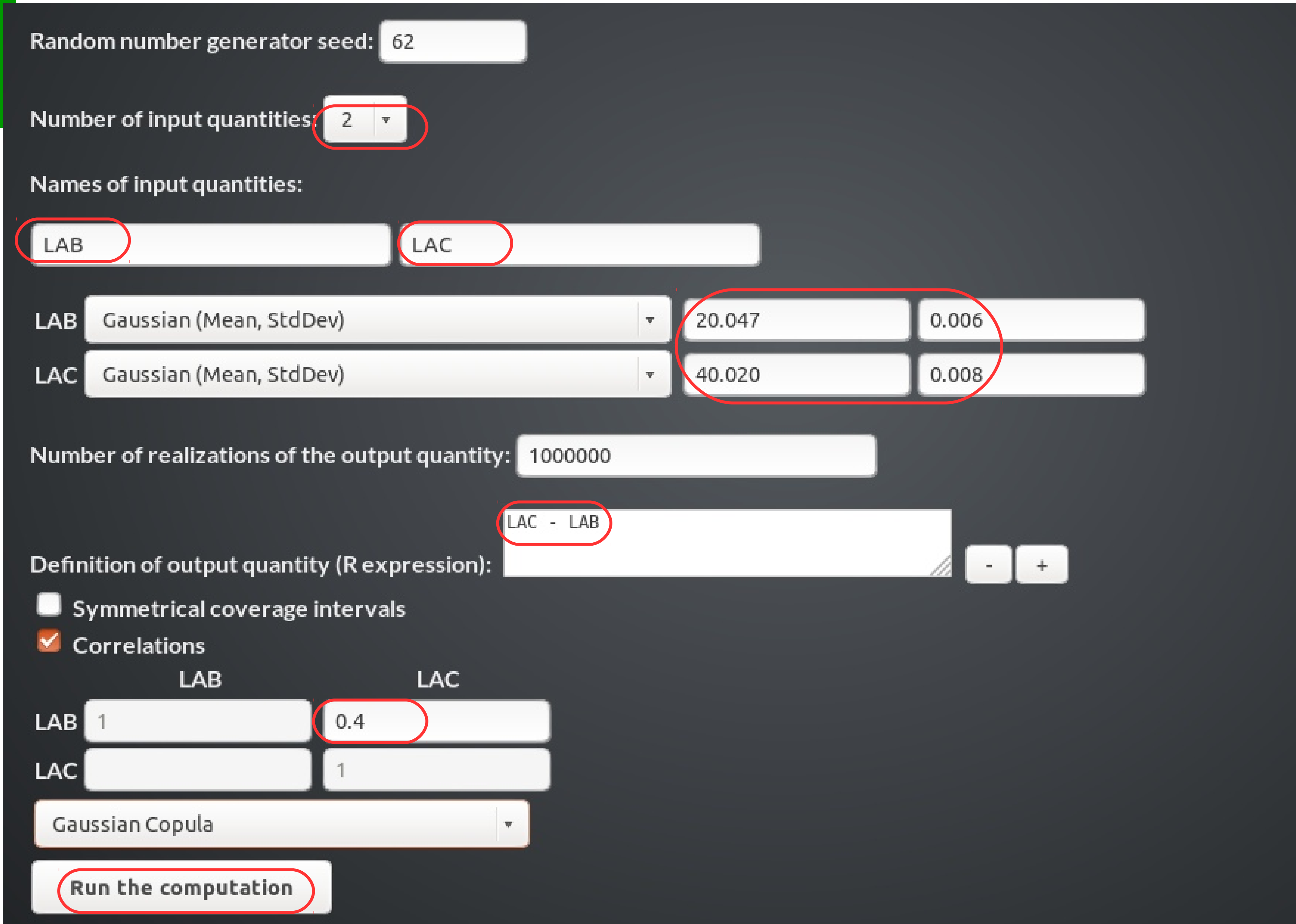


- Eredmények letölthetők kép formájában és szöveges fájlként (`results.txt`)
- Beállítás fájl letölthető és a példa újra futtatható (`config.um`)

2. példa

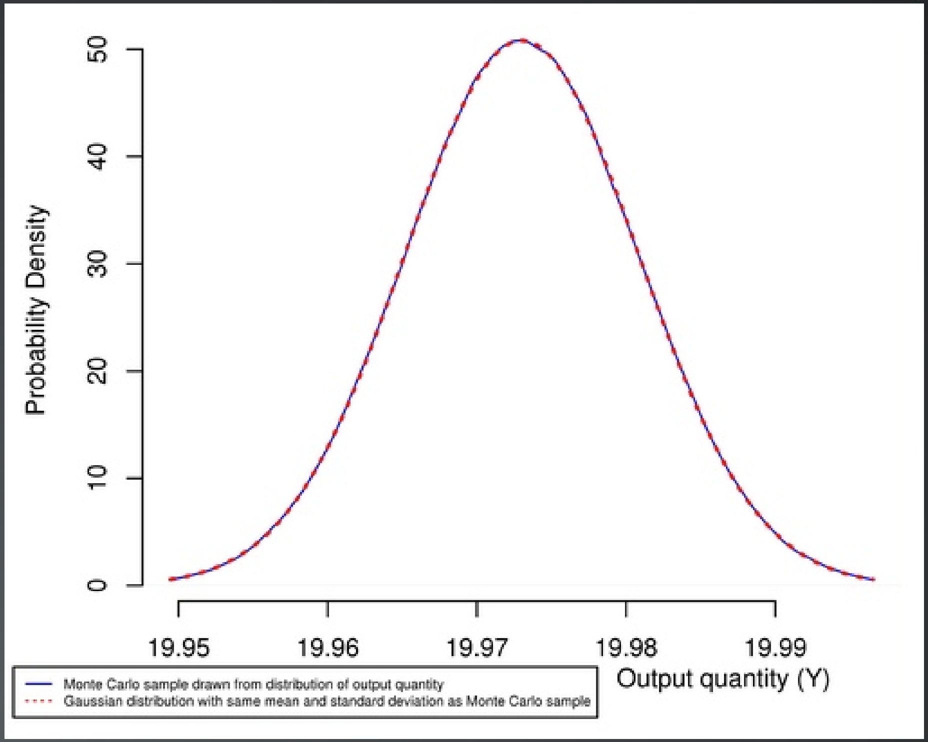
- Detrekői 4.9 példa:

  Határozzuk meg valamely egyenesen egy A pontból kiindulva acélszalaggal folyamatosan mért B és C pontok távolságának a középhibáját. A mérési eredmények: $L_{AB} = 20{,}047\ \mathrm{m}$, $L_{AC} = 40{,}020\ \mathrm{m}$. A mérési eredményeket a $\mu_{AB} = 6\ \mathrm{mm}$ és a $\mu_{AC} = 8\ \mathrm{mm}$ középhibák jellemzik. A két mérés kapcsolatát az $r_{BC} = 0{,}4$ korrelációs együtthatóval adjuk meg.


Random number generator seed: 62
Number of input quantities: 2
Names of input quantities:
LAB
LAC
LAB Gaussian (Mean, StdDev) 20.047 0.006
LAC Gaussian (Mean, StdDev) 40.020 0.008
Number of realizations of the output quantity: 1000000
Definition of output quantity (R expression):
LAC - LAB
-
+
Symmetrical coverage intervals
Correlations
LAB
LAC
LAB 1 0.4
LAC 1
Gaussian Copula
Run the computation

NIST Uncertainty Machine

```
===== RESULTS ==============================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 1000000

ave     = 19.973
sd      = 0.00785
median  = 19.973
mad     = 0.0078

Coverage intervals

99% (  19.953,   19.993)        k =      2.5
95% (  19.958,   19.988)        k =      1.9
90% ( 19.9601,  19.9859)        k =      1.6
68% ( 19.9652,  19.9809)        k =        1

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
LAB                  12.67       12.67
LAC                  87.33       87.33
Residual                NA        0.00

--------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

         y  = 19.973
      u(y) = 0.00785

             SensitivityCoeffs Percent.u2
LAB                         -1         58
LAC                          1        100
Correlations                NA        -62
============================================
```



Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity
Download a text file with Monte Carlo values of output quantity
Download text file with numerical results shown on this page
Download JPEG file with plot shown on this page
Download configuration file

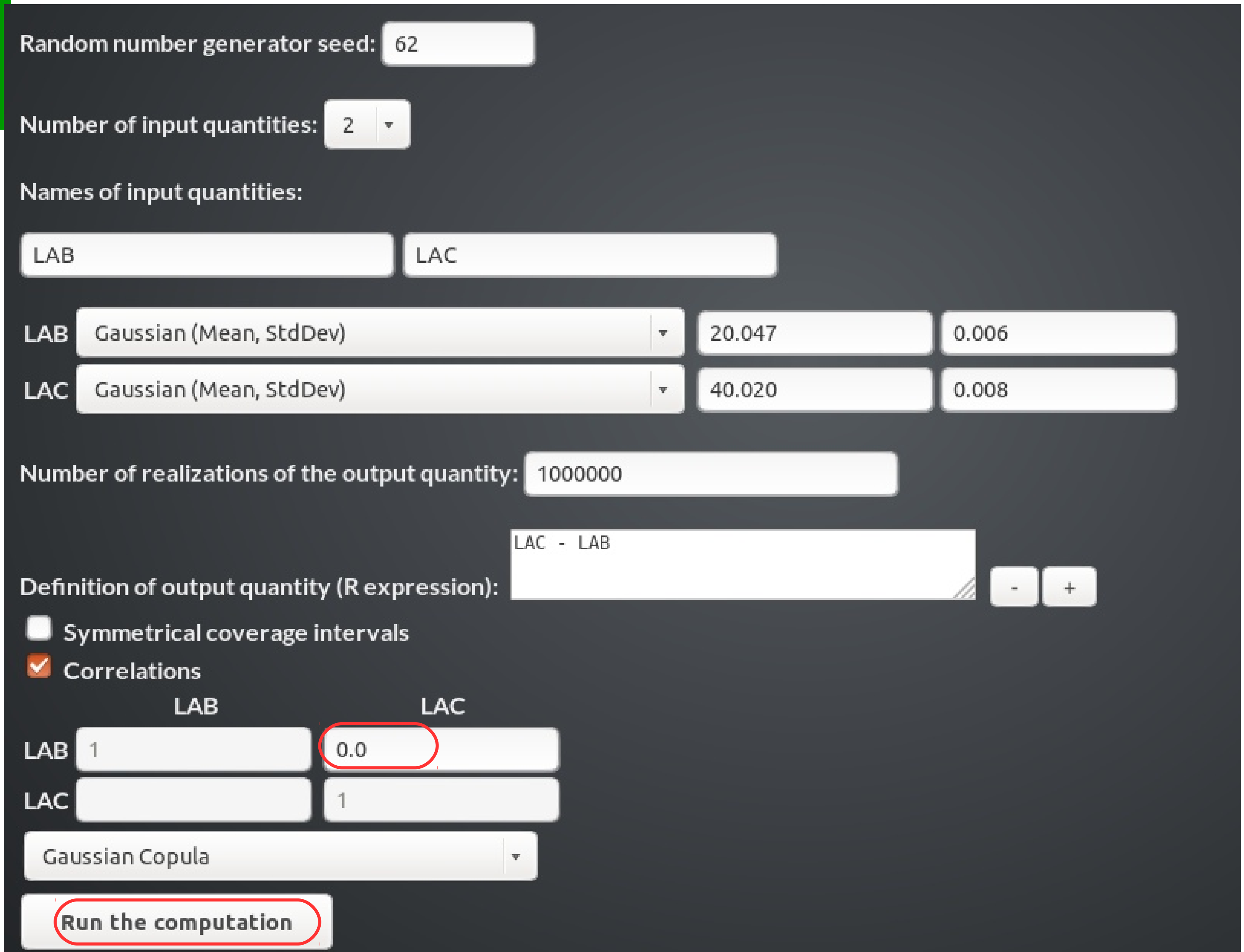
Detrekői 4.9 példa eredmények

BC távolság középhibája: 7.8 mm

2. példa, korreláció nélkül

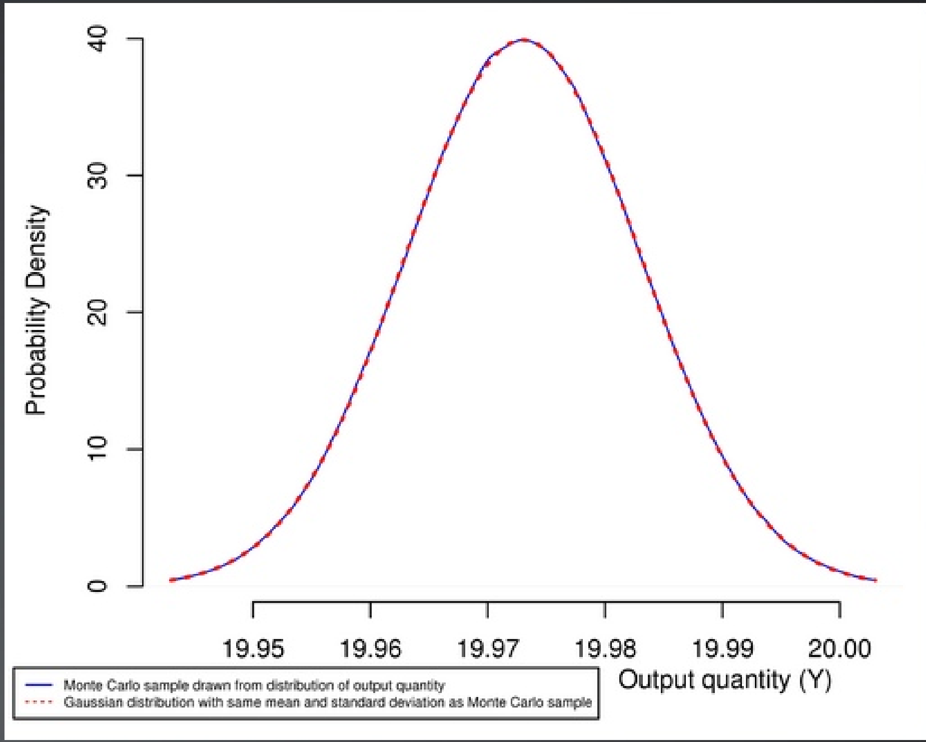
- Detrekői 4.9 példa:

  Határozzuk meg valamely egyenesen egy A pontból kiindulva acélszalaggal folyamatosan mért B és C pontok távolságának a középhibáját. A mérési eredmények: $L_{AB} = 20{,}047 \text{ m}$, $L_{AC} = 40{,}020 \text{ m}$. A mérési eredményeket a $\mu_{AB} = 6 \text{ mm}$ és a $\mu_{AC} = 8 \text{ mm}$ középhibák jellemzik. *A két mérés kapcsolatát ne vegyük figyelembe*.


Random number generator seed:
62
Number of input quantities:
2
Names of input quantities:
LAB
LAC
LAB
Gaussian (Mean, StdDev)
20.047
0.006
LAC
Gaussian (Mean, StdDev)
40.020
0.008
Number of realizations of the output quantity:
1000000
Definition of output quantity (R expression):
LAC - LAB
-
+
Symmetrical coverage intervals
Correlations
LAB
LAC
LAB
1
0.0
LAC
1
Gaussian Copula
Run the computation

NIST Uncertainty Machine

```
===== RESULTS ================================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 1000000

ave     = 19.973
sd      = 0.01
median  = 19.973
mad     = 0.01

Coverage intervals

99% (  19.947,   19.999)       k =      2.6
95% (  19.953,   19.993)       k =        2
90% (  19.957,   19.989)       k =      1.6
68% (  19.963,   19.983)       k =        1

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
LAB                  35.94       35.94
LAC                  64.06       64.06
Residual                NA        0.00

--------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

         y  = 19.973
       u(y) = 0.01

              SensitivityCoeffs Percent.u2
LAB                          -1         36
LAC                           1         64
Correlations                 NA          0
============================================
```



Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity
Download a text file with Monte Carlo values of output quantity
Download text file with numerical results shown on this page
Download JPEG file with plot shown on this page
Download configuration file

Detrekői 4.9 példa eredmények

BC távolság középhibája: 10.0 mm

3. példa

- Detrekői 4.13 példa:

  Ismert koordinátájú A pontból giroteodolittal és távmérővel mérést végeznek az ismeretlen koordinátájú P pont meghatározására. A giroteodolittal mért azimut értéke: $L_\alpha = 30°42'06''$, a távmérővel mért távolságé pedig $L_t = 310{,}410$ m . Az azimutot a $\mu_\alpha = 12''$, a távolságmérést a $\mu_t = 0.01$ m középhiba jellemzi. A két mérés függetlennek tekinthető. Határozzuk meg a P pont A ponthoz viszonyított koordinátáit és azok kovarianciamátrixát

Random number generator seed: 62

Number of input quantities: 2

Names of input quantities:

Lt La

Lt	Gaussian (Mean, StdDev)	310.410	0.01
La	Gaussian (Mean, StdDev)	30.70166667	0.003333333

Number of realizations of the output quantity: 500000

Definition of output quantity (R expression):

```
Lt*cos(La*pi/180)
```

```
Lt*sin(La*pi/180)
```

- +

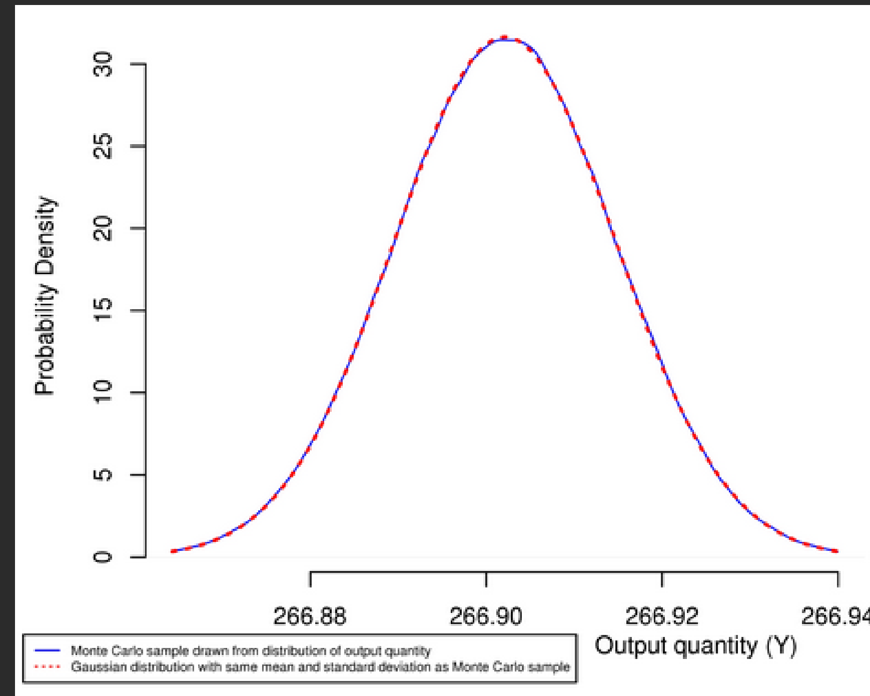
Symmetrical coverage intervals

Correlations

Run the computation

Output 1 Output 2

```
===== RESULTS ============================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave     = 266.9021
sd      = 0.013
median  = 266.902
mad     = 0.013

Coverage intervals

99% (  266.87,  266.935)       k =      2.6
95% ( 266.877,  266.927)       k =        2
90% ( 266.881,  266.923)       k =      1.7
68% (  266.89,  266.915)       k =     0.99

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
Lt                   46.62       46.62
La                   53.38       53.38
Residual                NA        0.00

--------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

        y  = 266.9021
      u(y) = 0.013

             SensitivityCoeffs Percent.u2
Lt                        0.86         47
La                       -2.80         53
Correlations                NA          0
============================================
```



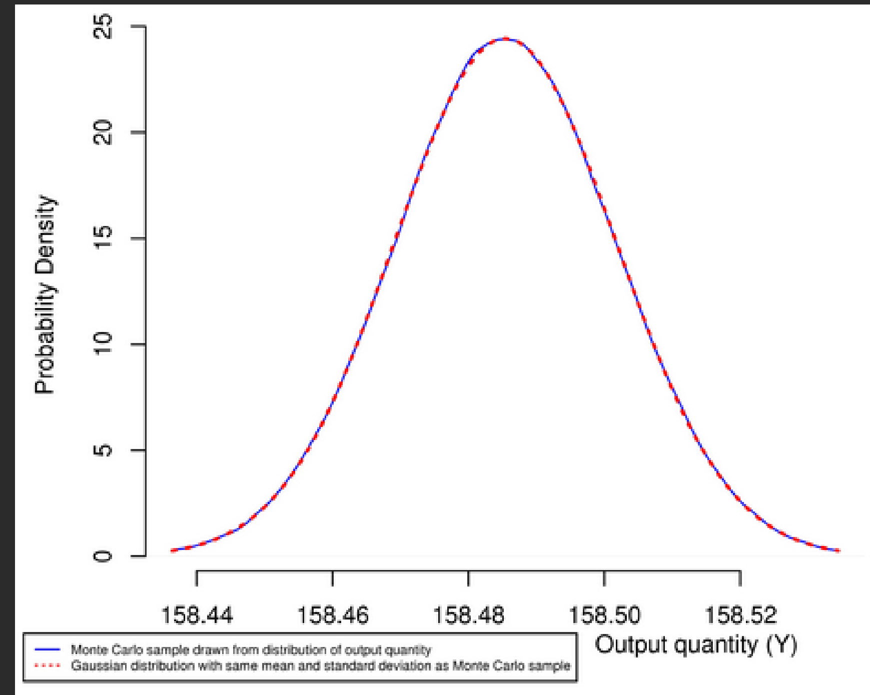
Download JPEG file with plot shown on this page

Detrekői 4.13 példa eredmények

X koordináta középhibája: 0.013 m

Output 1 Output 2

```
===== RESULTS ===============================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave     = 158.485
sd      = 0.016
median  = 158.485
mad     = 0.016

Coverage intervals

99% ( 158.443,  158.528)       k =      2.6
95% ( 158.453,  158.517)       k =        2
90% ( 158.459,  158.512)       k =      1.6
68% ( 158.469,  158.502)       k =        1

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
Lt                    9.79        9.79
La                   90.21       90.21
Residual                NA        0.00

--------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

        y   = 158.485
      u(y) = 0.016

             SensitivityCoeffs Percent.u2
Lt                        0.51        9.8
La                        4.70       90.0
Correlations                NA        0.0
============================================
```



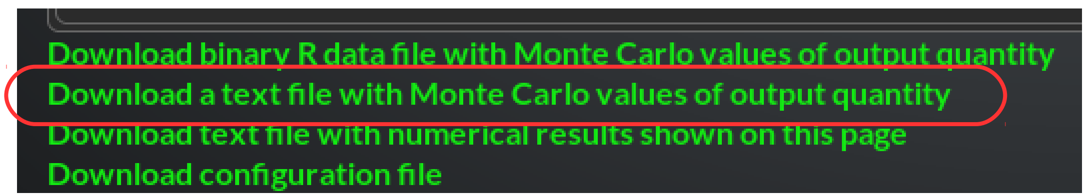
Download JPEG file with plot shown on this page

Detrekői 4.13 példa eredmények

Y koordináta középhibája: 0.016 m

3. példa – kovariancia mátrix

- A NIST Uncertainty Machine nem számítja ki a kovariancia mátrixot
- A Monte Carlo számítás eredményei viszont letölthetők (`values.txt`) és ezekből a számítás elvégezhető




```
"y1" "y2"
266.896465773678 158.510627930491
266.901775051475 158.49156616866
266.90907895783 158.444060010151
266.883259174918 158.518634359747
266.928823328455 158.484721799438
266.88425496917 158.516710228299
266.929457687034 158.457267899579
266.877322252119 158.503631394655
266.904873642514 158.482674759476
...
```

Kovariancia mátrix számítása

- Python program

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np

data = np.loadtxt('values.txt', skiprows=1)
nd = data.shape[0]
nv = data.shape[1]
covmx = np.cov(data.T)
v = ['x','y']

print("Kovariancia mátrix Monte Carlo szimulációval")
print(" adatok száma: {:d}".format(nd))
print("kovariancia mátrix")
for i in range(nv):
    for j in range(nv):
        print("{0:2s}{1:2s}: {2:8.4e}".format(v[i],v[j],covmx[i,j]))
```

Kovariancia mátrix számítása

- számítási eredmények

```
python corr.py
Kovariancia mátrix Monte Carlo szimulációval
 adatok száma: 500000
kovariancia mátrix
x x : 1.5909e-04
x y : -9.9308e-05
y x : -9.9308e-05
y y : 2.6703e-04
```

Detrekői eredmények

Az $\mathbf{F}^*_{YL}$ és az $\mathbf{M}_{LL}$ mátrixokat a (4.67) összefüggésbe helyettesítve megkapjuk a koordináták $\mathbf{M}_{YY}$ kovarianciamátrixát:

$$\mathbf{M}_{YY} = \mathbf{F}^*_{YL}\mathbf{M}_{LL}\mathbf{F}_{YL} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}8598 & -158{,}486 \\ 0{,}5106 & 266{,}902 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}01^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12}{\varrho''}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8598 & 0{,}5106 \\ -158{,}486 & 266{,}902 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}589 \cdot 10^{-4} & -0{,}993 \cdot 10^{-4} \\ -0{,}993 \cdot 10^{-4} & 2{,}671 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} [\mathrm{m}^2].$$

Rendellenes hibaterjedés

- *Pontatlanabb mérések adhatnak-e pontosabb eredményeket?*

Rendellenes hibaterjedés

- *Pontatlanabb mérések adhatnak-e pontosabb eredményeket?*
- Igen!
  A bemeneti mennyiség bizonytalansága nő, mégis a számított mennyiség bizonytalansága csökken!
- számpélda P. Pernot et al. (2015) cikke alapján

Hibaterjedés: eredő bizonytalanság meghatározása

- A mérendő mennyiséget az egyes összetevők alapján számítással határozzuk meg. Az összetevők bizonytalanságai alapján a mérendő mennyiség eredő bizonytalanságát a standard bizonytalanságok terjedési törvényének segítségével határozzuk meg (hibaterjedés)
- Az X_i bemeneti mennyiségek (összetevők) és az Y mérendő, vagy kimeneti mennyiség kapcsolatát megadó függvény a fizikai törvényszerűségek alapján ismert:

$$Y = f\left(X_{1,} X_{2,} \dots, X_N\right)$$

- A mérési folyamat során az X_i bemeneti mennyiségek x_i becslőit határozzuk meg. A becslők értékét a függvénybe helyettesítve megkapjuk a kimeneti mennyiség y becslőjét:

$$y = f\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_N\right)$$

- A becsült kimeneti mennyiség standard bizonytalansága (négyzete):

$$u_e^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

- A kifejezés a standard bizonytalanságok terjedési törvénye, amelyben az $u(x_i, x_j)$ a becslők becsült kovarianciája, a $\partial f / \partial x_i$ számok az érzékenységi együtthatók

Ez a törvény azonos a geodéziában jól ismert hibaterjedés törvényével

Nem lineáris függvény hibaterjedése

- n független valószínűségi változó függvénye

$$Y = f\left(X_{1,} X_{2,} \dots , X_{n}\right)$$

- variancia összetevők lineáris esetben (összegük 1)

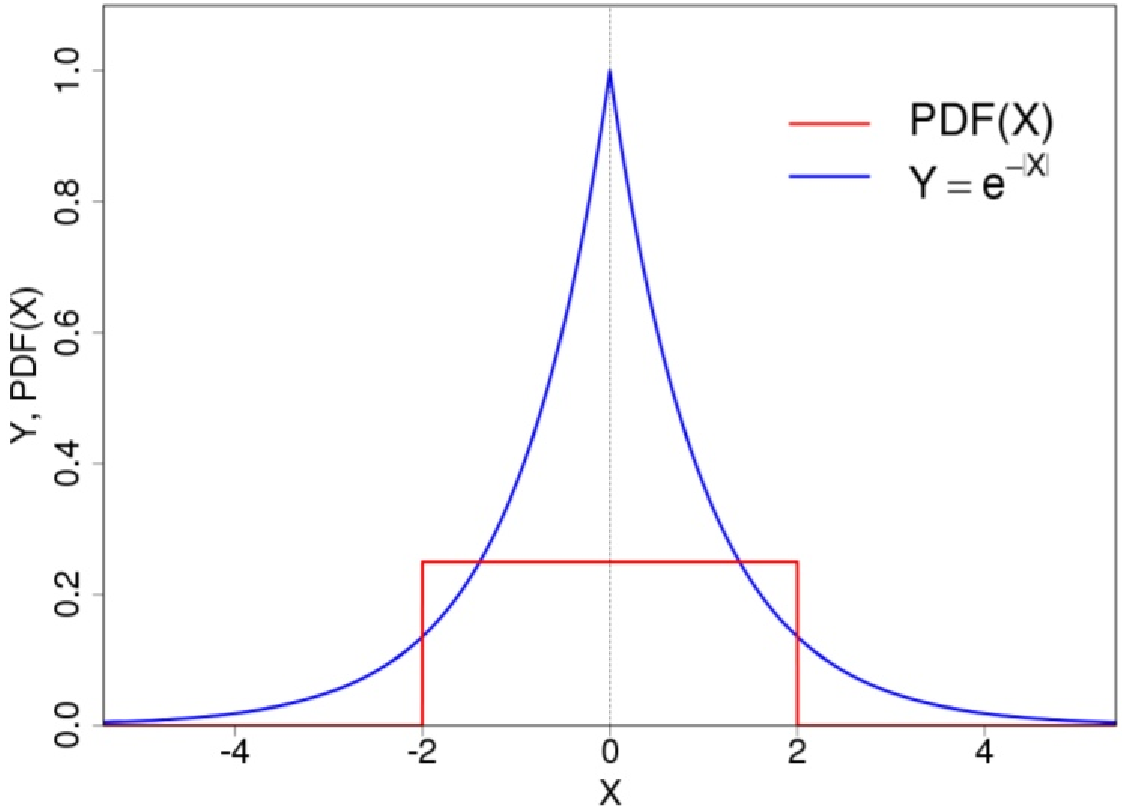
$$G_{X_i} = \frac{1}{u_Y^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2$$

- variancia összetevők (*variancia gradiensek*) nem lineáris esetben (összegük nem 1 és negatívak is lehetnek!)

$$G_{X_i} = \frac{E\left[\left(Y - u_Y\right) \frac{\partial Y}{\partial X_i} \left(X_i - u_{X_i}\right)\right]}{u_Y^2}$$

Számpélda

- Bemeneti X mennyiség egyenletes eloszlású a $[-a, a]$ intervallumban (pl. a kvantálási zaj ilyen)
- A mérési függvény $Y = \exp(-|X|)$
- Monte Carlo szimuláció



Analitikus variancia gradiensek

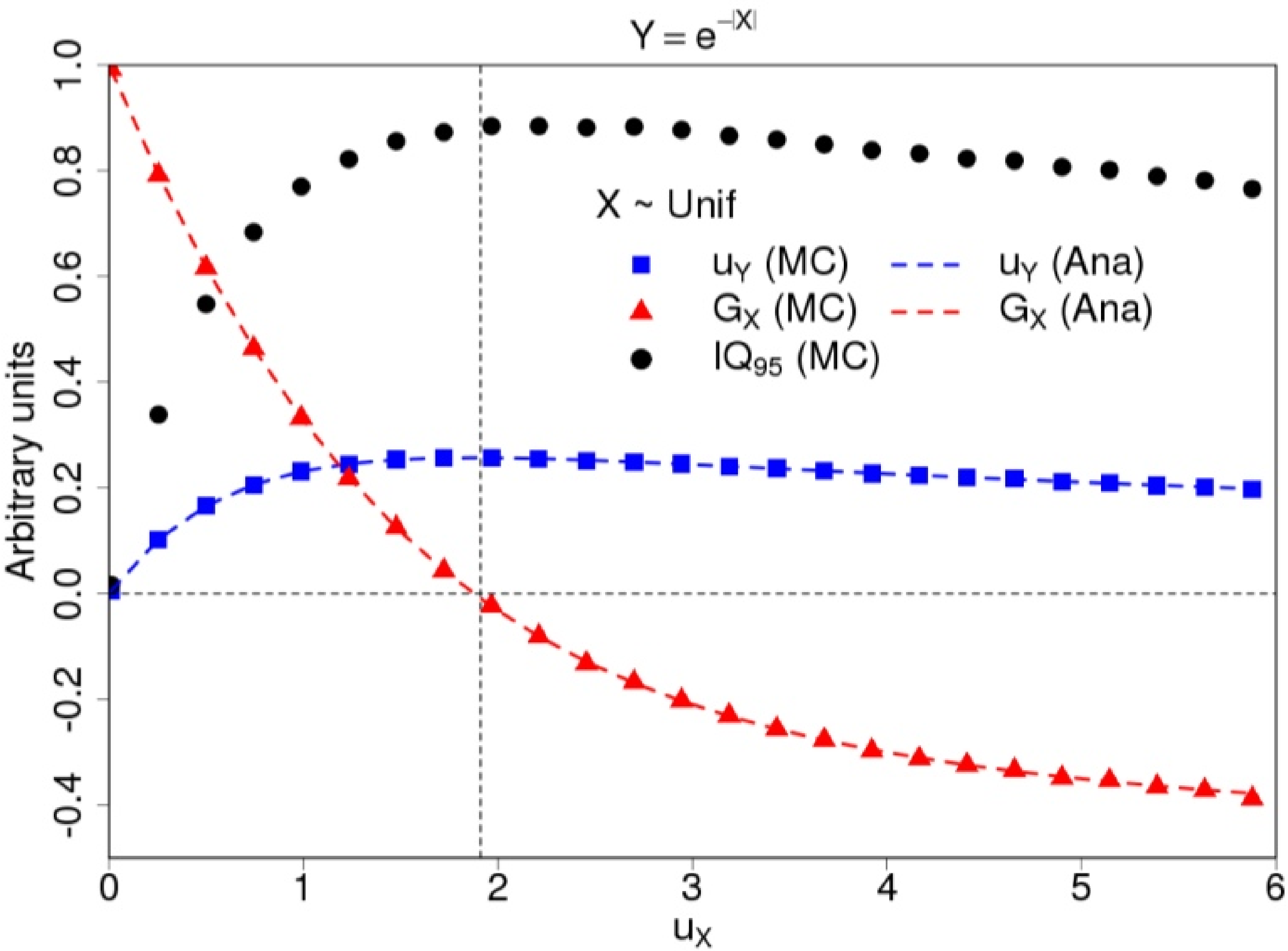
- Pernot et al. cikkében analitikus képletek találhatók:

$$\bar{y} = \frac{1 - e^{-a}}{a} \tag{6}$$

$$u_Y^2 = \frac{1 - e^{-2a}}{2a} - \bar{y}^2 \tag{7}$$

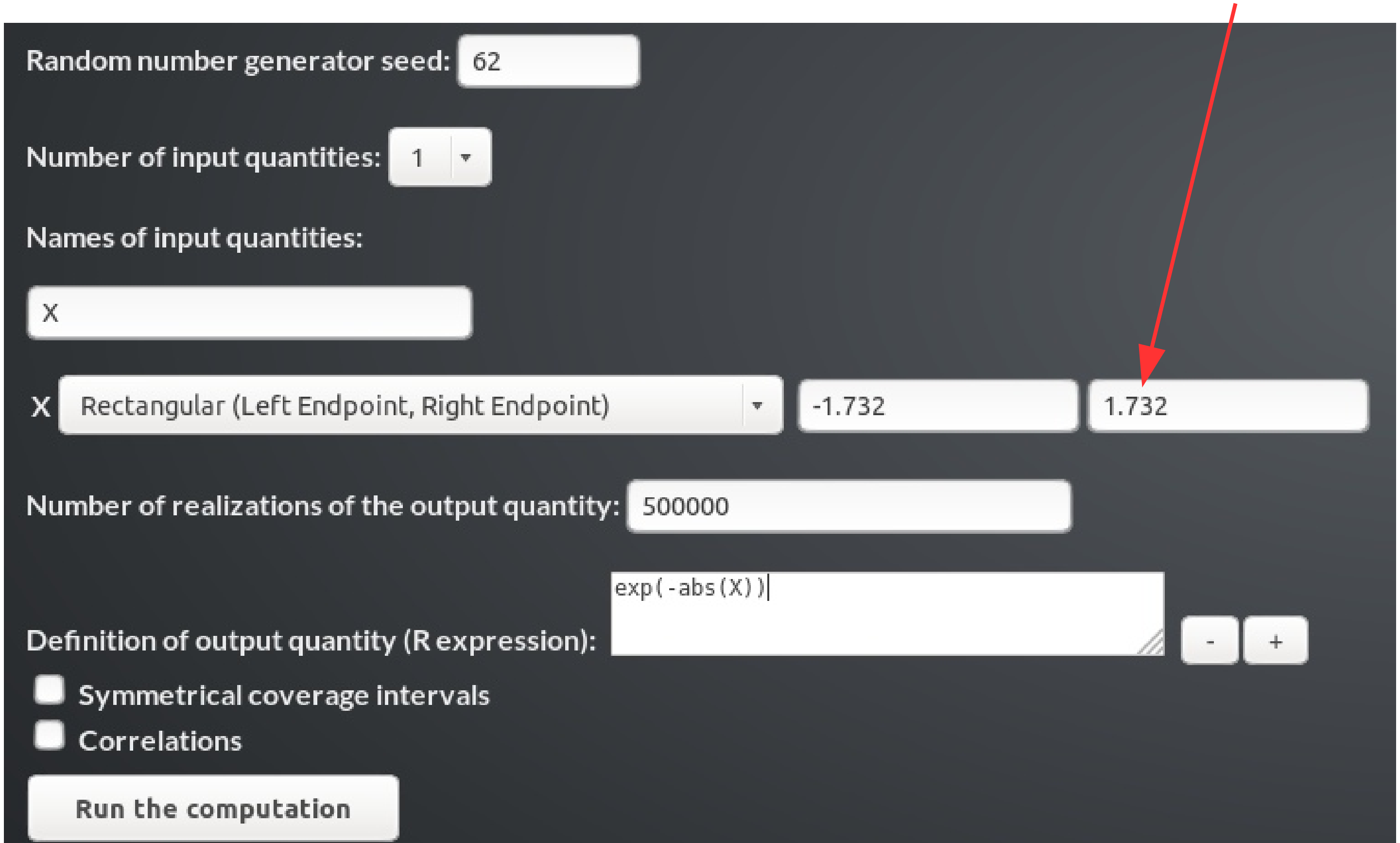
$$G_X = \frac{1}{2au_Y^2} \times \left[\frac{2a + 1}{2} e^{-2a} - 2\bar{y} \left((a + 1)e^{-a} - 1 \right) - \frac{1}{2} \right] \tag{8}$$

Kimeneti érték bizonytalansága



NIST Uncertainty Machine

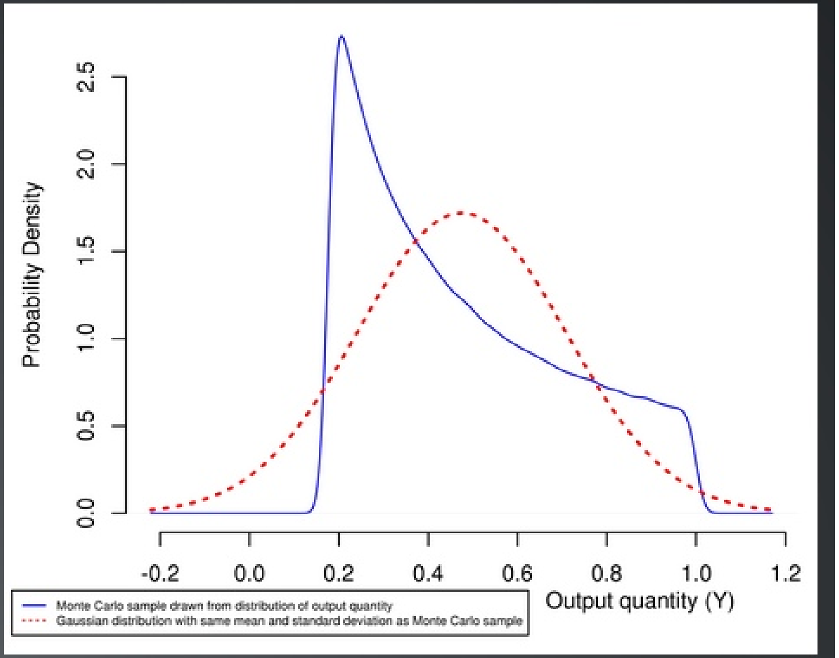
- Az a fél szélességű egyenletes eloszláshoz tartozó mérési bizonytalanság: $u_X = \frac{a}{\sqrt{3}}$



Eredmények

NIST Uncertainty Machine

```
===== RESULTS ==============================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave     = 0.47
sd      = 0.23
median  = 0.42
mad     = 0.25

Coverage intervals

99% (   0.179,    0.991)       k =      1.8
95% (   0.185,    0.957)       k =      1.7
90% (   0.193,    0.917)       k =      1.6
68% (    0.23,     0.76)       k =      1.1

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
X                      100           0
Residual                NA         100

-------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

        y  = 1
      u(y) = 0
```

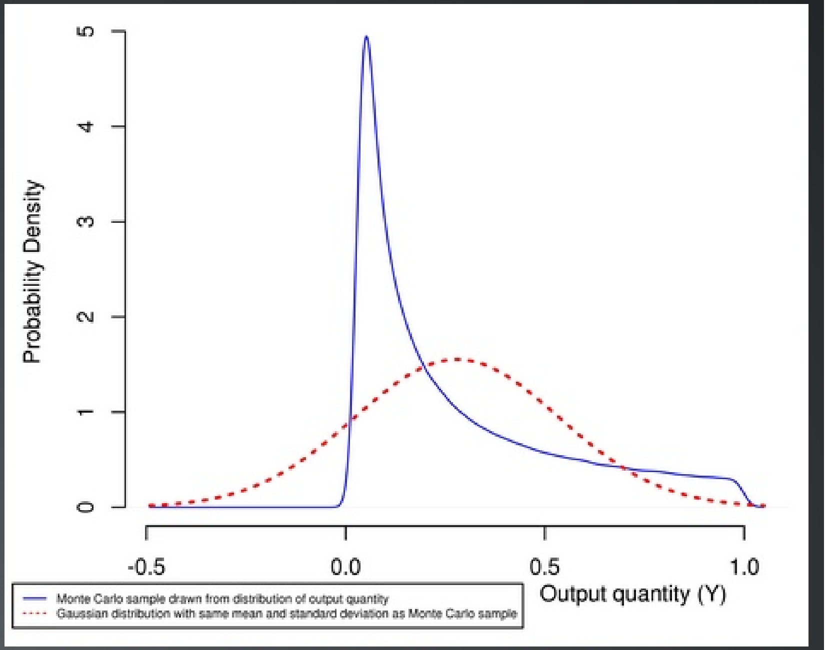


Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity
Download a text file with Monte Carlo values of output quantity
Download text file with numerical results shown on this page
Download JPEG file with plot shown on this page
Download configuration file

Eredmények ($2u_x$)

NIST Uncertainty Machine

```
===== RESULTS ==============================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave     = 0.28
sd      = 0.26
median  = 0.18
mad     = 0.18

Coverage intervals

99% (  0.0319,    0.982)       k =      1.8
95% (   0.034,     0.92)       k =      1.7
90% (   0.037,     0.84)       k =      1.6
68% (   0.054,     0.58)       k =        1

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
X                      100           0
Residual                NA         100

--------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

        y  = 1
      u(y) = 0
```

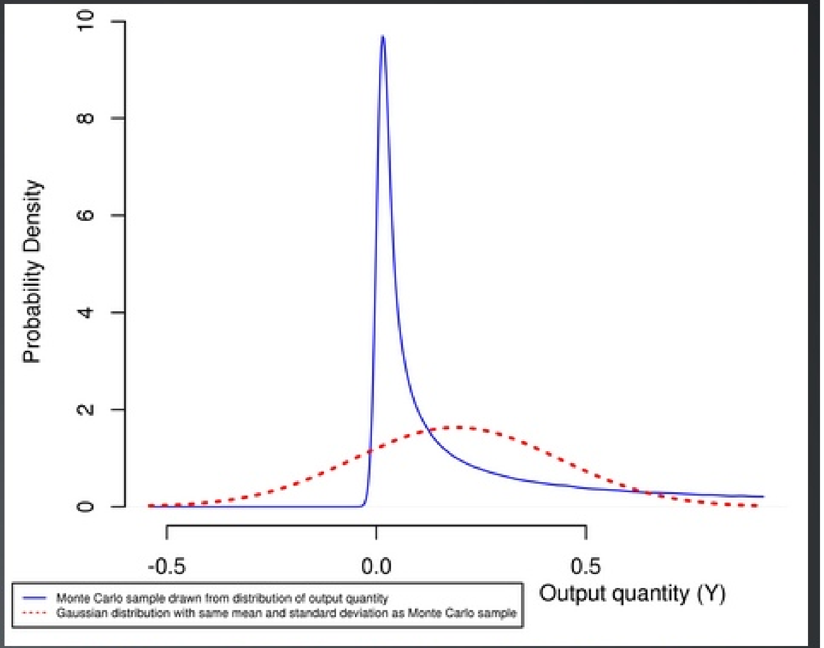


Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity
Download a text file with Monte Carlo values of output quantity
Download text file with numerical results shown on this page
Download JPEG file with plot shown on this page
Download configuration file

Eredmények ($3u_x$)

NIST Uncertainty Machine

```
===== RESULTS ==============================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave     = 0.19
sd      = 0.24
median  = 0.074
mad     = 0.095

Coverage intervals

99% ( 0.00569,    0.974)       k =        2
95% (  0.0063,     0.88)       k =      1.8
90% (  0.0072,     0.77)       k =      1.6
68% (   0.013,     0.44)       k =     0.87

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
X                      100           0
Residual                NA         100

--------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

        y  = 1
      u(y) = 0
```

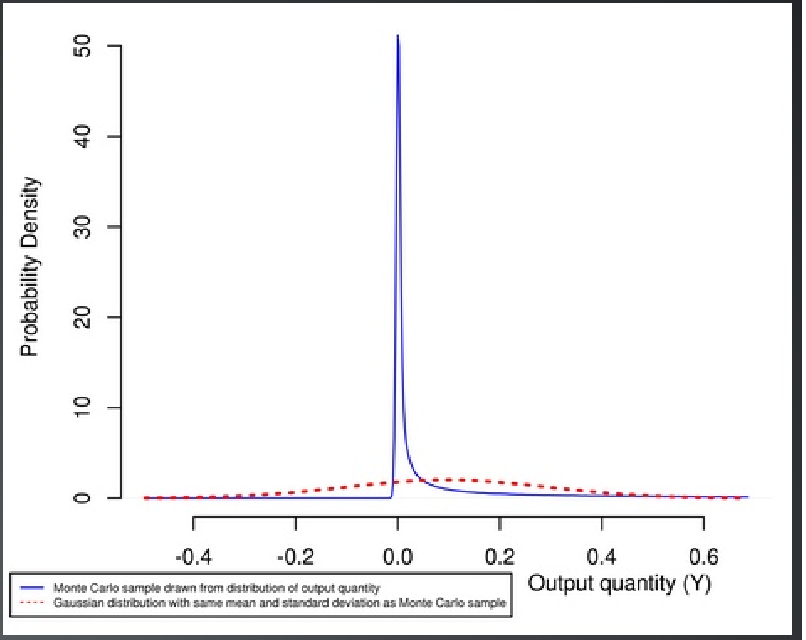


Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity
Download a text file with Monte Carlo values of output quantity
Download text file with numerical results shown on this page
Download JPEG file with plot shown on this page
Download configuration file

Eredmények ($6u_x$)

NIST Uncertainty Machine

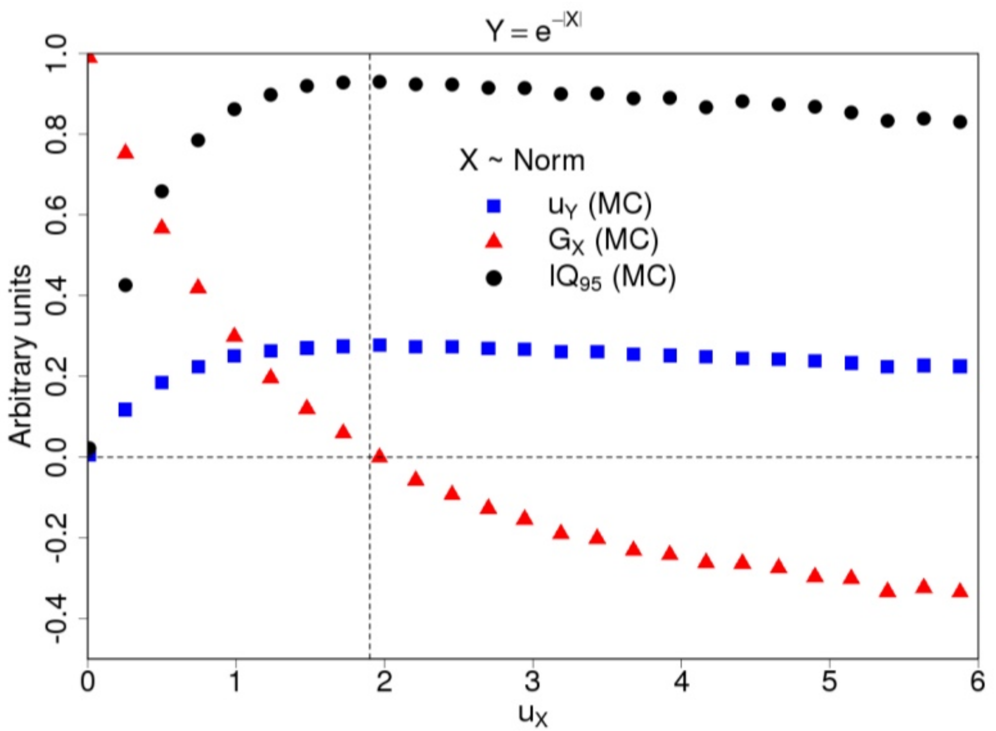
```
===== RESULTS ==============================

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave     = 0.096
sd      = 0.2
median  = 0.005
mad     = 0.008

Coverage intervals

99% ( 3.2e-05,     0.95)       k =      2.4
95% (    4e-05,    0.77)       k =        2
90% ( 5.2e-05,     0.59)       k =      1.5
68% ( 0.00016,     0.19)       k =     0.48

ANOVA (% Contributions)

            w/out Residual w/ Residual
X                      100           0
Residual                NA         100

---------------------------------------------

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

        y  = 1
      u(y) = 0
```



Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity
Download a text file with Monte Carlo values of output quantity
Download text file with numerical results shown on this page
Download JPEG file with plot shown on this page
Download configuration file

Más mérési függvény, más eloszlással

- A mérési függvény $Y = \exp(-X^2)$
  - Hasonló paradox eredményeket kapunk
- Más az X eloszlás függvénye, pl. Gauss
  - Hasonló paradox eredményeket kapunk



Tanulságok

- Negatív variancia gradiensek (csökkenő kimeneti variancia növekvő bemeneti varianciára) sokféle modellben jelentkeznek
- Óvatosan kell bánni a szórással (középhiba) illetve a megbízhatósági intervallumokkal mint a mérési bizonytalanság jellemzőivel
- Fontos megvizsgálni a számított mennyiségek valódi eloszlását is, pl. Monte Carlo eljárással
  - Erre a célra már jó eszközökkel rendelkezünk (pl. NIST Uncertainty Machine)

Hivatkozás

- Pernot P, Désenfant M, Hennebelle F (2015): Model's output variance can increase when input variance decreases: a sensitivity analysis paradox? 17th Int. Congr. of Metrology

17th International Congress of Metrology, 02004 (2015)
DOI: 10.1051/metrology/201502004

Model's output variance can increase when input variance decreases : a sensitivity analysis paradox ?

Pascal Pernot[1,4,a], Michèle Désenfant[2,4], et François Hennebelle[3,4]

[1] *Laboratoire de Chimie Physique, UMR8000 CNRS/Univ. Paris-Sud, Orsay, France*
[2] *Laboratoire National de Métrologie et d'Essais (LNE), 1 rue Gaston Boissier, 75724 Paris Cedex 15, France*
[3] *Laboratoire Electronique, Informatique et Image, UMR6306 CNRS/Université de Bourgogne, Avenue des Plaines de l'Yonne, 89000 Auxerre, France*
[4] *Réseau "Mesures, Modèles et Incertitudes", Mission pour l'Intersciplinarité - CNRS*