Németh Róbert: Tartók dinamikája

óravázlat

1. A tárgy célja

A kötelező és ajánlott előtanulmányokból kiolvashatóan e tárgy hallgatói már otthonosan mozognak a statika és szilárdságtan fogalmai, feladatai között, és építőmérnöki tanulmányaikban is túljutottak már a tartók statikájának vizsgálati módszerein. Utóbbi keretében találkoztak a határozatlan tartók számítására szolgáló erőmódszerrel, és az elmozdulásmódszerrel is, így feltételezzük, hogy egy bármilyen teher hatására tetszőleges alakváltozást szenvedő tartó keresztmetszeti igénybevételeit, és a keresztmetszet pontjaiban ébredő feszültségeket ki tudja számítani. Az ezt megalapozó tárgyaknak közös vonása volt, hogy a terheket statikusnak, vagy kvázi-statikusnak tételeztük fel, így mindig csak egyensúlyi egyenletekkel kellett dolgozni. Az egyensúlyi helyzet osztályozására vezettük be a stabilitás fogalmát, és azt mondtuk, hogy stabil egyensúlyi helyzetben a szerkezetet bármilyen módon kis mértékben kitérítve az visszafelé kezd el mozogni.

A dinamikai vizsgálatok során a célunk az, hogy a szerkezet dinamikus hatásra kialakuló elmozdulásait határozzuk meg, hiszen az elmozdulások ismeretében az alakváltozásokat, igénybevételeket, feszültségeket már a szokott módon számíthatjuk. A dinamikus hatásokat két csoportra oszthatjuk:

- A stabil egyensúlyi helyzetből kitérített szerkezet a kitérítés után nincsen egyensúlyban, ezért Newton második törvénye alapján gyorsulása lesz, ami miatt idővel sebessége lesz, mellyel az egyensúlyi helyzet felé halad. Abban a pillanatban, amikor eléri az egyensúlyi helyzetet, tipikusan még lesz valamilyen sebessége, ezért tovább mozog, immár az egyensúlyi helyzettől távolodva, de a sebessége csökken, míg végül egy pillanatra megáll. A megállás pillanatában azonban nincs egyensúlyban, ezért ismételten elkezd gyorsulni, majd sebessége lesz, és újra áthalad az egyensúlyi helyzeten, mielőtt megáll, s.í.t. A kitérített, majd magára hagyott szerkezetnek az oda-vissza mozgását *szabadrezgés*nek nevezzük.
- Amennyiben a szerkezetre időfüggő teher hat, akkor a terhek változása miatt a korábbi pillanatban egyensúlyi helyzetben levő szerkezet esetleg már nem lesz egyensúlyban. Emiatt gyorsulása les, amiből sebesség és elmozdulás származik. Ez az időfüggő elmozdulás az időfüggő erő hatására jön létre, az így kialakuló mozgást *gerjesztett rezgés*nek nevezzük.

A fentiek szerint rezgőmozgást végző szerkezet viselkedésében még egy lényeges hatás van, amit elsősorban a szabadrezgés során könnyű megfigyelni: a kitérített szerkezet maximális kitérése az egymást követő oda-vissza mozgások során fokozatosan csökken, míg végül eltűnik. Ezt a jelenséget *csillapítás*nak nevezzük, és az oka egy olyan *csillapítóerő*, amely mindig az éppen aktuális sebesség irányával ellentétesen mutat (állandó, vagy sebességfüggő nagysággal). Ilyen csillapítóerő származhat súrlódásból, illetve közegellenállásból. Attól függően, hogy ezt a hatást figyelembe vesszük, vagy elhanyagoljuk, beszélhetünk *csillapított* és *csillapítatlan rezgés*ről.

1.1. Szabadságfok

Egy szerkezet általában valamilyen folytonos tartományát foglalja el a térnek. Ennek a tartománynak valamennyi pontjának az elmozdulásait függvényszerűen felírhatnánk. Ezek a függvények a szerkezet tartományán belül folytonosan változnának, ha ezeket a függvényeket akarnánk meghatározni, úgy a kontinuum elmozdulásfüggvényeit kellene meghatároznunk. A mérnöki gyakorlatban általában nincsen szükség az összes pont elmozdulására, helyette megelégszünk egy olyan modellel, amelyben néhány kitüntetett pont elmozdulását ismerjük, majd a szerkezet többi részének viselkedésére ezekből az elmozdulásokból következtetünk. Azokat a skalár elmozdulásokat, amelyek a szerkezet elmozdulásait az általunk modellezett helyzetben meghatározzák, a modell *szabadságfok*ainak nevezzük. A modellre a szabadságfokok számával hivatkozunk, beszélhetünk egy szabadságfokú, két szabadságfokú stb. modellről. A kezelés szempontjából meg fogjuk különböztetni az *egyszabadságfokú* és a *többszabadságfokú* modelleket.

2. Egyszabadságfokú szerkezetek rezgései

Az egyszabadságfokú szerkezetek egy egyszerűsített modellre vezetjük vissza. Ez egy tömegpontból áll, amit egy rugóval és egy csillapító elemmel rögzítünk a falhoz. A modell szabadságfoka a tömegpont eltolódása az egyensúlyi helyzethez képest. A rugó jelképezi a szerkezetből származó rugalmas visszatérítő erőt, míg a csillapító elem a csillapítást. A modell folytonos szerkezetből való származtatásakor az alábbiak szerint járhatunk el.

A *tömeg* (m) esetén az egyik lehetőség, hogy a szabadságfok helyén egy olyan, nagy tömegű test található (például egy gép), amelyhez képest a szerkezet tömege elhanyagolható. Ilyenkor a modell tömege a szabadságfokra jutó tömeg. Ha a folytonos szerkezet tömege nem elhanyagolható, akkor annak teljes tömege helyett csak egy helyettesítő tömeget kell figyelembe venni. A *helyettesítő tömeg* számításánál figyelembe vesszük, hogy a megtámasztások közelében levő pontok elmozdulásai és gyorsulásai kisebbek. Egy kéttámaszú tartó közepére helyezett szabadságfok esetén a szabadságfoktól jobbra és balra levő szakaszok tömegeinek felét-felét rendre a szakaszok végpontjaiba áthelyezve a teljes tömeg két negyede a támaszok fölé kerül (és így nem mozog) két negyede pedig a szabadságfok fölé kerül, azaz a helyettesítő tömeg a teljes tömeg fele. (A szakaszokra bontás és a tömeg szakaszonkénti felezése helyett mechanikailag pontosabb modellel a teljes tömeg 17/35-öd része adódik a helyettesítő tömegre.) Egy konzol esetén a befogás környezetében még kisebb eltolódások keletkeznek, ezért a konzol végére koncentrált szabadságfok esetén a helyettesítő tömeg a konzol tömegének csupán egyharmada.

A rugót a merevségével jellemezzük, azaz azzal a függvénnyel, amelyik megadja, hogy adott kitérés esetén mekkora visszatérítő erő adódik át a szabadsági fokra. Lineárisan rugalmas szerkezetek esetén lineáris rugóval jellemezhető mindez, így az elmozdulás és az erő között lineáris kapcsolat áll fenn, az arányossági tényező a *rugómerevség* (k). Folytonos szerkezeten a *helyettesítő rugómerevség* számítása jelentés alapján történhet: a szabadságfokra az ismeretlen k nagyságú erőt működtetjük és abból kifejezzük a reakciókat, igénybevételeket, és végül a szabadsági fok elmozdulását. A rugómerevség definíciója alapján ennek a kifejezésnek (melyben a rugómerevséget egy skalárral szorozzuk) az értéke egységnyi (dimenziótlan), mely egyenletet felírva és a rugómerevségre megoldva kapjuk az eredményt. Fenti eljárás hátránya, hogy a számítás során végig kell vinnünk az ismeretlen k paramétert. Ezt elkerülhetjük, ha a helyettesítő rugómerevséget a reciproka és annak jelentése alapján számoljuk. Ez a mennyiség a rugó *hajlékonysága*, vagy *engedékenysége*, jele f, és azt fejezi ki, hogy egy, a szabadságfokra ható egységnyi erő hatására mekkora lesz a szabadságfok elmozdulása. A számítása a mechanikából már ismert módon történik, felhívjuk azonban a figyelmet, hogy mivel csak egyetlen pont elmozdulását kell számítani, ezért célszerű lehet a virtuális erők tételét alkalmazni, ahol ráadásul a virtuális erőrendszert a szabadságfokra ható egységerő határozza meg, ami ugyanaz az erőrendszer, mint amiből az elmozdulást számoljuk. A hajlékonyság ismeretében a rugómerevséget a reciprokkal képezzük, azaz $k=1/f$. *Sorba*, illetve *párhuzamosan* kapcsolt rugók esetén rendre az erők, illetve az elmozdulások lesznek azonosak az egyes rugókban, míg az erőket, illetve az elmozdulásokat összegezhetjük, így ilyenkor a helyettesítő rugónak rendre a hajlékonyságát, illetve a merevségét kaphatjuk meg az alkotó rugók hajlékonyságának, illetve merevségének összegzésével.

A *csillapítást* e tárgy keretében csak sebességgel arányos csillapításként fogjuk kezelni. Ennek egyszerű modellje egy viszkózus folyadékkal teli henger, melyben egy dugattyú mozog, a dugattyú által kifejtett erő mindig a mozgással ellenkező irányú lesz, nagysága a sebességgel arányos, az arányossági tényezőt a c értékkel jelöljük. Megemlítjük, hogy egy másik tipikus csillapítás a *súrlódás*ból származik. A mozgó testre ható súrlódási erő nagysága azonban állandó, iránya pedig a mozgás irányával ellentétes.

2.1. A rezgés differenciálegyenlete

A mozgás egyenletét egy tetszőleges pillanatban elkülönített tömegpontra írhatjuk fel. A testre ható erők iránya az őket meghatározó mennyiség előjelétől függ, mindegyiket pozitív feltételezéssel vesszük fel. Newton második törvénye szerint:

$$q(t) - f_r(t) - f_{cs}(t) = m \cdot a(t)$$

ahol $q(t)$ az m tömegű testre ható gerjesztőerő, $f_r(t)$ a rugóról a testre átadódó erő, $f_{cs}(t)$ a csillapító elemből a testre adódó erő, $a(t)$ a test gyorsulása. A rugó lineáris, a megnyúlása $x(t)$, így $f_r(t) = k \cdot x(t)$. A csillapító elem is lineáris, a megnyúlás sebessége $\dot{x}(t)$, így $f_{cs}(t) = c \cdot \dot{x}(t)$. A függvény fölötti ponttal az idő szerinti deriválást jelezzük. A test gyorsulása az elmozdulás idő szerinti második deriváltja, azaz $a(t) = \ddot{x}(t)$. Fentieket behelyettesítve a mozgásegyenletbe és az ismeretlen függvényeket egy oldalra rendezve kapjuk a mozgás differenciálegyenletét:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = q(t) .$$

Ez tehát az általános erővel gerjesztett csillapított egyszabadságfokú szerkezet rezgésének differenciálegyenlete. A differenciálegyenlet *közönséges*, *másodrendű*, *lineáris*, *állandó együtthatójú*, *inhomogén*. (Tessék végiggondolni, melyik jelzőt mivel érdemelte ki.)

Ha nincsen csillapítás, akkor a csillapításnak megfelelő tag kimarad a fenti egyenletből (mintha $c = 0$ -t helyettesítenénk be), azaz

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = q(t)$$

lesz az általános erővel gerjesztett csillapítatlan szerkezet mozgásának differenciálegyenlete (a korábbi jelzőkön kívül ez *hiányos* is lesz).

Ha nincs gerjesztés, akkor az annak megfelelő tag marad ki (a $q = 0$ behelyettesítéssel), azaz a csillapított rendszer szabadrezgésének differenciálegyenlete

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

lesz. (A kiindulásihoz képest ez egy homogén egyenlet, nem inhomogén.)

Végül ha sem csillapítás, sem gerjesztés nincs, akkor a csillapítatlan szabadrezgés differenciálegyenletét kapjuk:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 .$$

(Ez egyidejűleg homogén és hiányos.)

2.2. Csillapítatlan szabadrezgés megoldása

Keressük az $m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$ differenciálegyenlet *általános megoldás*át, illetve bizonyos *kezdeti feltételeket kielégítő megoldás*át. (Az $x(t)=0$ ún. *triviális* megoldás nem érdekel minket, mert ahhoz nem tartozik mozgás, és a kezdeti feltételeket sem biztos, hogy ki lehet vele elégíteni.)

Az általános megoldás a differenciálegyenletekből tanult módon kapható egy exponenciális függvény feltételezésével. A kapott két képzetes számból képzett megoldásnak az Euler-formulával történő átalakítása után a megoldás *harmonikus függvény*ként írható fel:

$$x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)\ ,$$

ahol $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ a szerkezet sajátkörfrekvenciája, mértékegysége rad/s.

Az *A* és *B* paramétereket a kezdeti feltételek függvényében határozhatjuk meg. Ha az egyszerűség kedvéért a $t=0$ pillanatban írjuk elő az x_0 elmozdulást és v_0 kezdeti sebességet, akkor a két feltétel $x(0)=x_0$ és $\dot{x}(0)=v_0$ lesz. Az általános megoldás függvényét és annak első deriváltját ($\dot{x}(t)=-\omega_0 A\sin(\omega_0 t)+\omega_0 B\cos(\omega_0 t)$) behelyettesítjük a kezdeti feltételekbe, így a paraméterekre két egyenletet kapunk:

$$x_0=A\cdot 1+B\cdot 0 \text{ és } v_0=-\omega_0\cdot A\cdot 0+\omega_0\cdot B\cdot 1$$

aminek a megoldása az $A=x_0$ és $B=\frac{v_0}{\omega_0}$ lesz. Ezeket felhasználva az általános megoldásban az $x(0)=x_0$ és $\dot{x}(0)=v_0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\ .$$

A test mozgásának ismeretében a rugóban ébredő, vagy a rugalmas szerkezetre átadódó erőt is meg tudjuk határozni az $f_r(t)=k\,x(t)$ feltételből. Az általános megoldás esetén ez:

$$f_r(t)=k\cdot A\cos(\omega_0 t)+k\cdot B\sin(\omega_0 t)\ .$$

Ennek az erőnek minket elsősorban a maximuma érdekel. Könnyű belátni, hogy ez a feladat az $x(t)$ függvény maximumának a keresésére vezetődik vissza. Ennek egyik lehetséges útja, ha a szélsőérték matematikai jelentéséből indulunk ki, és az első derivált zérushelyét keressük. Az $\dot{x}(t)=-\omega_0 A\sin(\omega_0 t)+\omega_0 B\cos(\omega_0 t)=0$ feltételből akkor lesz az elmozdulásnak szélsőértéke, ha $A\sin(\omega_0 t)=B\sin(\omega_0 t)$, azaz $\tan(\omega_0 t)=\frac{A}{B}$. Az így meghatározott *t* időpillanatban kell kiszámítanunk az elmozdulást, ami vagy a legnagyobb, vagy a legkisebb lesz, a kettő csak előjelben tér el egymástól.

Fenti szélsőértékszámítás egyszerűbben elvégezhető, ha a két, azonos frekvenciájú függvény összegét egyetlen harmonikus függvényként írjuk fel:

$$x(t)=C\cos(\omega_0 t-\varphi_0),$$

ahol C a rezgés amplitúdója, φ_0 pedig a kezdeti fázisszöge. Ekkor a legnagyobb kitérés természetesen C abszolútértékével lesz egyenlő, hiszen a harmonikus tag csak egy -1 és +1 közötti értékkel szorozza azt. A fenti függvényt a $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$ trigonometrikus azonossággal átírhatjuk

$$x(t)=C\cos(\varphi_0)\cos(\omega_0 t)+C\sin(\varphi)\sin(\omega_0 t)$$

alakra, amiből kiolvasható, hogy a két felírás akkor azonos, ha $A=C\cos(\varphi_0)$ és $B=C\sin(\varphi_0)$. Ekkor azonban $C^2=A^2+B^2$ adódik, vagyis az általános megoldásból a legnagyobb kitérés $x_{max}=|C|=\sqrt{A^2+B^2}$ lesz. Ennek a felírásnak az az előnye is megvan, hogy a sebesség és a gyorsulás is hasonló alakú lesz:

$$\dot{x}(t)=-\omega_0 C\sin(\omega_0 t-\varphi_0) \text{ és } \ddot{x}(t)=-\omega_0^2 C\cos(\omega_0 t-\varphi_0),$$

amiből a legnagyobb sebesség és gyorsulás is könnyen kiolvasható (rendre $\omega_0 x_{max}$ és $\omega_0^2 x_{max}$).

A sajátkörfrekvencia elnevezésben a kör tag egy körmozgásra utal, akárcsak a sajátkörfrekvencia jelében az omega szimbólum. Ezt utóbbin keresztül tudjuk megmagyarázni: egy, az xy -síkban ω_0 szögsebességgel forgó merev korongon bármely pont egy körmozgást végez, amely körmozgás x-koordinátája megfelel egy harmonikus rezgőmozgásnak. (A pont helyzetét célszerű poláris koordinátarendszerben felírni az idő függvényében, majd abból kifejezni az $x(t)$ -t, így könnyen belátható fenti állítás.) Ennek értelmében a sajátkörfrekvencia fizikai jelentése az egységnyi idő alatt bekövetkező szögelfordulás radiánban.

A körmozgáshoz kapcsolódóan a sajátkörfekvencia mellett két másik, vele azonos tartalmú mennyiséggel jellemezhetjük a rezgést. A *sajátfrekvencia* az egységnyi idő alatt megtett teljes rezgések száma, jele n_0, mértékegysége Hz [Hertz]. A *periódusidő* az egy teljes rezgés megtételéhez szükséges idő, jele T_0, mértékegysége s. A három jellemző között lévő kapcsolat $n_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$, illetve $T_0=\frac{1}{n_0}=\frac{2\pi}{\omega_0}$.

A sajátfrekvencia közelítőleg is meghatározható, ha ismerjük a szabadságfok önsúly hatására bekövetkező elmozdulását. Az önsúly a tömeg és a gravitációs gyorsulás szorzata, így a kérdéses elmozdulás $e_0=\frac{mg}{k}$ lenne, amiből a rugómerevség kifejezhető: $k=\frac{mg}{e_0}$. Ezt felhasználva a sajátkörfrekvencia képletében $\omega_0=\sqrt{\frac{mg/e_0}{m}}=\sqrt{\frac{g}{e_0}}$ adódik, a sajátfrekvenciára pedig $n_0=\frac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{e_0}}$. Ha a távolságokat cm-ben helyettesítjük be, akkor a $g=981\,\text{cm/s}$-t felhasználva $n_0=\frac{4.985}{\sqrt{e_0}}$ adódik. Ezt $n_0\approx\frac{5}{\sqrt{e_0}}$ alakban közelítve a kerekítés miatti hiba $3‰$ nagyságú, ami az egyéb bemeneti paraméterek bizonytalanságánál kisebb így a gyakorlatban megfelelő közelítés lehet, fontos azonban, hogy a képletben az e_0 önsúly miatti elmozdulást centiméterben kell behelyettesíteni.

2.3. Csillapított szabadrezgés megoldása

Keressük az $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$ differenciálegyenlet *általános megoldás*át, illetve bizonyos *kezdeti feltételeket kielégítő megoldás*át. (Az $x(t)=0$ ún. *triviális* megoldás most sem érdekel minket, mert ahhoz nem tartozik mozgás, és a kezdeti feltételeket sem biztos, hogy ki lehet vele elégíteni.)

Az általános megoldás a differenciálegyenletekből tanult módon kapható egy exponenciális függvény feltételezésével. Eredményül a $\lambda^2+2\varrho\lambda+\omega_0^2=0$ másodfokú egyenletet kapjuk, ahol $2\varrho=c/m$ a csillapítás egy fajlagos mérőszáma, ω_0 pedig a csillapítatlan rezgésből ismert $\sqrt{k/m}$. A csillapítás mértékétől függően a másodfokú egyenlet megoldása lehet két valós szám, egy valós szám, vagy két komplex szám. Ezeket külön-külön tekintjük át:

2.3.1. Nagy csillapítás

Nagy csillapításról akkor beszélünk, ha $c>2\sqrt{k\cdot m}$, illetve $\varrho>\omega_0$. Ekkor a két exponenciális kitevő két negatív szám $\lambda_{1,2}=-\varrho\pm\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}$, az elmozdulás pedig két, negatív kitevőjű exponenciális függvény: $x(t)=d_1e^{\lambda_1 t}+d_2e^{\lambda_2 t}$, ahol d_1 és d_2 a kezdeti feltételektől függő két paraméter. A kezdeti értékektől függetlenül a mozgás olyan, hogy a kitérítés és elengedés után a test legfeljebb egyszer áthalad az egyensúlyi helyzeten (ahol $x=0$), majd a túloldali maximális kitérés után aszimptotikusan tart az egyensúlyi helyzet felé. Tényleges oda-vissza mozgás, azaz rezgés nem alakul ki.

2.3.2. Kritikus csillapítás

Kritikus csillapításról akkor beszélünk, ha $c=2\sqrt{k\cdot m}=c_{kr}$, illetve $\varrho=\omega_0=\varrho_{kr}$. Ekkor a megoldás egy kétszeres gyök negatív szám $\lambda=-\varrho$. Az elmozdulás emiatt nem csak az exponenciális függvény lesz, hanem $x(t)=d_1e^{\lambda t}+d_2te^{\lambda t}$ alakú, ahol d_1 és d_2 a kezdeti feltételektől függő két paraméter. A kezdeti értékektől függetlenül a mozgás jellege a nagy csillapításnál tapasztaltakhoz hasonló, tényleges oda-vissza mozgás, azaz rezgés nem alakul ki.

2.3.3. Kis csillapítás

Kis csillapításról akkor beszélünk, ha $c<2\sqrt{k\cdot m}$, azaz $c<c_{kr}$, illetve $\varrho<\varrho_{kr}$. Az ilyen csillapítást szokás a kritikus csillapítás hányadában is megadni a 0 és 1 közötti ξ csillapítási hányaddal: $c=\xi c_{kr}$ (és ekkor $\varrho=\xi\omega_0$). Ilyenkor a megoldás két komplex kitevőjű és komplex szorzójú exponenciális függvény valós összege. Az exponenciális függvények kitevőit valós és képzetes részre bontva némi átalakítás után a *kis csillapítású rendszer szabadrezgésének általános megoldása*:

$$x(t)=e^{-\varrho t}\left(A\cos(\omega_0^* t)+B\sin(\omega_0^* t)\right)=e^{-\xi\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_0^* t)+B\sin(\omega_0^* t)\right),$$

ahol A és B a kezdeti értékektől függő paraméterek, ω_0^* pedig a csillapított sajátkörfrekvencia. Utóbbit kifejezhetjük a csillapítatlan sajátkörfrekvencia és a csillapítás különböző mérőszámai segítségével: $\omega_0^*=\sqrt{\omega_0^2-\varrho^2}=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$.

A megoldás általános alakja tehát egy negatív kitevőjű (az időben exponenciálisan lecsengő) és egy harmonikus függvény szorzata. Utóbbi amplitúdója nem változik, így a *kitérések maximumait* az idő során az exponenciális lecsengés *fokozatosan csökkenti*. A harmonikus függvényrész csillapított sajátkörfrekvenciájából származtathatjuk a csillapított sajátfrekvenciát $n_0^*=\omega_0^*/(2\pi)$ és a csillapított rezgés periódusidejét $T_0^*=2\pi/\omega_0^*$. Látható, hogy $\omega_0^*<\omega_0$, így $T_0^*>T_0$, azaz a *csillapított rezgés periódusideje nagyobb*, mint a csillapítatlan rezgésé lenne.

Nézzük meg két olyan kitérés hányadosát, amelyek egymáshoz képest T_0^* időkülönbséggel alakulnak ki. Az egy csillapított periódusidőnyi különbség miatt a harmonikus függvényrészek azonos helyzetben lesznek, így a hányados egyszerűsíthető:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}=\frac{e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)}{e^{-\varrho(t+T_0^*)}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^*(t+T_0^*)\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^*(t+T_0^*)\right)\right)}=\frac{e^{-\varrho t}}{e^{-\varrho t}\cdot e^{-\varrho T_0^*}}=\frac{1}{e^{-\varrho T_0^*}}=e^{\varrho T_0^*}.$$

Mint látszik, a hányados értéke független a kiválasztott t idő értékétől, csak a csillapított rendszer jellemzőit tartalmazza, így alkalmas a csillapítás jellemzésére. A gyakorlatban e hányadosnak a természetes alapú logaritmusát használjuk, ami a kitevővel egyezik meg:

$$\vartheta=\ln\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}=\varrho T_0^*=\xi\omega_0\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

A csillapítás fenti ϑ mérőszámát *logaritmikus dekrementum*nak nevezzük. Gyakorlati jelentősége, hogy a szerkezet kitérítése, majd elengedése után a kialakuló rezgésben az egymás követő kitérési maximumokból (amik viszonylag könnyen mérhetők) a teljes szerkezet helyettesítő csillapítására következtethetünk.

Építőmérnöki szerkezetekben használt anyagok esetén ráadásul a csillapítás gyakran csak az anyag belső súrlódásából származik, külön csillapító elemet nem építenek be. Ilyenkor az ún. szerkezeti csillapítás ξ értéke 0,1 nagyságrendű. Ekkora csillapítás esetén a logaritmikus dekrementum képletében a $\sqrt{1-\xi^2}$ tag 1-gyel közelíthető, így ilyenkor $\vartheta \approx 2\pi\xi$.

2.4. Harmonikus erővel gerjesztett rendszer rezgése

2.4.1. A harmonikus gerjesztés eredete

Amennyiben valamilyen gép állandó ω szögsebességgel forgó mozgást végez, úgy az a célszerű, ha a forgó tömeg tömegközéppontja a forgás tengelyére esik. Ha nem így történik, akkor a tömegközéppont egy körpályán mozog, így egy állandó nagyságú, a körmozgás közepe felé mutató gyorsulása kell legyen. A gyorsulás azzal jár, hogy a forgó testre ható erők eredőjének is egy ilyen erőnek kell lennie. Ez az erő az alátámasztó szerkezetről adódik át a gépre, a hatás-ellenhatás törvénye alapján pedig a szerkezetre egy állandó nagyságú, de körbe forgó irányú erő hat. Ennek a körbe forgó erőnek a szabadságfok irányú vetülete a körmozgás miatt egy harmonikus függvény szerint változik, amit egy amplitúdó és egy harmonikus tag szorzataként állítunk elő $q(t)=q_0\cos(\omega t)$ alakban.

2.4.2. Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése

Keressük az $m\ddot{x}(t)+kx(t)=q_0\cos(\omega t)$ differenciálegyenlet *általános megoldás*át. Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása mindig az egyenlet egy partikuláris megoldása és a kiegészítő egyenlet általános megoldásának az összegeként állítható elő: $x(t)=x_g(t)+x_{hom}(t)$.

A kiegészítő egyenletet úgy kapjuk, ha az egyenlet jobb oldalára nullát írunk. Ezzel a homogén differenciálegyenletet kapjuk vissza, melynek a szabadrezgésből már ismerjük az általános megoldását, azaz $x_{hom}(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása tartalmazza a gerjesztésre adott választ, ez az oka az első tag *g* indexének. A partikuláris megoldást a gerjesztéssel azonos időfüggő alakban keressük: $x_g(t)=x_{g0}\cos(\omega t)$. Ezt és ennek második deriváltját behelyettesítve a differenciálegyenletbe annak minden *t* pillanatban teljesülnie kell, ezért egyszerűsíthetünk $\cos(\omega t)$ -vel: $x_{g0}(k-\omega^2 m)=q_0$, amiből az amplitúdó általában kifejezhető: $x_{g0}=\frac{q_0}{k-\omega^2 m}$.

A nevezőből szokás még kiemelni a *k* rugómerevséget, majd az *m/k* hányadost kifejezni a sajátkörfrekvencia segítségével. Így a partikuláris megoldás alakja:

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

A fenti függvény három tag szorzata: a q_0/k hányados azt adja meg, hogy a gerjesztés amplitúdóját statikusan alkalmazva mekkora x_{st} *statikus elmozdulás* keletkezik a rugóban. Az időfüggő $\cos(\omega t)$ tag azonos a gerjesztőerő időfüggésével (ha azt szinuszos, vagy fázisszöget tartalmazó alakban adnánk meg, úgy a válasz időfüggése is annak megfelelően változna). A középső szorzótényező a dinamikus hatást fejezi ki, értékét a gerjesztés frekvenciájának és a sajátfrekvenciának az aránya határozza meg. Kis gerjesztőfrekvencia $(\omega<\omega_0)$ mellett egy egynél nagyobb (pozitív) szám lesz az eredmény: a kialakuló rezgés amplitúdója ennyiszerese lesz a statikus elmozdulásnak, az elmozdulás azonos előjelű lesz a gerjesztéssel, azaz a test a gerjesztéssel *azonos fázis*ban rezeg. Nagy gerjesztőfrekvencia $(\omega>\omega_0)$ mellett az eredmény egy negatív szám lesz, azaz az elmozdulás ellenkező előjelű lesz, mint a gerjesztés, a test a gerjesztéssel *ellenfázis*ban rezeg, és kellően nagy $(\omega>\sqrt{2}\omega_0)$ gerjesztőerő-frekvencia esetén az amplitúdó mindig kisebb lesz, mint a statikus elmozdulás.
Fenti gondolatmenet alól kivételt képez, ha $\omega=\omega_0$. Ekkor a $k-\omega^2 m$ taggal nem oszthatunk, hiszen az nulla lenne, ezért a partikuláris megoldást $x_g(t)=x_{g0}t\cos(\omega t)$ alakban kellene keresnünk. Ez a függvény viszont egyre nagyobb, minden határon túl növekvő amplitúdójú rezgéseket ír le. Ezt a jelenséget *rezonanciá*nak nevezzük és lehetőleg kerüljük, hiszen a végtelenbe tartó elmozdulásokhoz végtelenbe tartó igénybevételek tartoznának, ami a valóságban persze nem következik be, mert már előbb tönkremegy a szerkezet.
A teljes megoldás alakja:

$$x(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)+A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t),$$

ahol *A* és *B* a kezdeti értékek függvényében meghatározandó paraméterek (most tipikusan nem x_0 és v_0/ω_0. Figyeljük meg, hogy a gerjesztésből származó tag harmonikus függvényében a gerjesztőerő körfrekvenciája szerepel, míg a szabadrezgésből származó tagok harmonikus függvényeiben a sajátkörfrekvencia szerepel.
Bár csillapítatlan rendszerről beszélünk, a fenti megoldásra tekinthetünk úgy, hogy a kezdeti feltételek miatti tagok valamilyen zavar, vagy csillapító hatás következtében hosszútávon nem játszanak jelentős szerepet a szerkezet mozgásában. Ha kellően sok ideig várunk, akkor már csak a partikuláris megoldást látjuk, ami miatt ezt a rezgésrészt *állandósult rezgésrész*nek is nevezzük, azaz:

$$x_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

Ha csak az állandósult rezgésrészt nézzük, akkor annak elegendő csak az amplitúdójával foglalkoznunk, hiszen úgyis tudjuk, hogy annak az értéknek a +1 és -1-szeresét is felveszi a függvény. Emiatt nem foglalkozunk a harmonikus taggal és a dinamikus hatást kifejező tagnak is csak az abszolútértékére lesz szükségünk. Ezt az abszolútértéket μ -vel jelöljük és rezonanciatényezőnek nevezzük. Az állandósult rezgésrész amplitúdója tehát:

$$x_á=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}=x_{st}\cdot\mu$$

Fentiek természetesen csak hosszan tartó harmonikus gerjesztés esetére igazak, bár a gerjesztésből származó hatás fő karakterisztikájára lokálisan már ennyiből is következtethetünk. Ha például egy szivattyút nagy frekvencián kívánunk üzemeltetni, hogy a rezonanciatényező alacsony legyen, akkor meg kell birkóznunk azzal a feladattal, hogy a szivattyú indításakor és leállításakor egy ideig a rezonancia közeli állapotban forog a motor. Ha ez az időtartam sokáig tart, akkor van idő a nagy amplitúdók kialakulására, amire a szerkezetet kell méretezni. Ha viszont gyorsan indítjuk be, illetve állítjuk le a gépet, akkor a hirtelen meginduló, illetve megálló víztömeg csőrendszerre gyakorolt hatásával kell számolnunk.

Ha a rezonanciához közeli állapotban vagyunk, akkor egy további jelenséget figyelhetünk meg (a teljes megoldást, tehát a tranziens részt is figyelembe véve). Ha a kezdeti feltételek miatt a sajátrezgésből származó tag is jelen van, úgy a két, közel azonos frekvenciájú harmonikus rezgés összegeként előállított elmozdulásfüggvény átírható két olyan harmonikus függvény szorzatává, ahol az egyik tagot az átlagos frekvencia jellemzi, a másikat pedig a különbségek által meghatározott alacsony frekvencia. Az eredmény tehát egy lassan változó határok között gyorsan változó hullám, időnként kis, majd nagy amplitúdóval. E jelenség neve *lebegés*.

2.4.3. Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rendszer rezgése

Keressük az $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k\,x(t)=q_0\cos(\omega t)$ differenciálegyenlet *általános megoldás*át. Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása mindig az egyenlet egy partikuláris megoldása és a kiegészítő egyenlet általános megoldásának az összegeként állítható elő: $x(t)=x_g(t)+x_{hom}(t)$.

A kiegészítő egyenletet úgy kapjuk, ha az egyenlet jobb oldalára nullát írunk. Ezzel a homogén differenciálegyenletet kapjuk vissza, melynek a szabadrezgésből már ismerjük az általános megoldását, azaz $x_{hom}(t)=e^{-\varrho t}\left(A\cos(\omega_0^* t)+B\sin(\omega_0^* t)\right)$.

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása tartalmazza a gerjesztésre adott választ, ez az oka az első tag g indexének. A partikuláris megoldást a gerjesztéshez hasonló időfüggő alakban keressük, de egy φ_0 fázisszöget is figyelembe veszünk (ennyivel késik a rendszer válasza a gerjesztéshez képest): $x_g(t)=x_{g0}\cos(\omega t-\varphi_0)$. A feltételezett megoldást, annak első és második deriváltjait a differenciálegyenletbe beírva és a trigonometrikus függvények különbségekre vonatkozó azonosságait felhasználva az egyenlet átírható egy $\sin(\omega t)$-től és egy $\cos(\omega t)$-től függő tag összegévé. Mivel az összegnek minden pillanatban nullát kell adnia, ezért a harmonikus függvények szorzótényezői két feltételt fejeznek ki x_{g0}-ra és φ_0-ra. Az egyikből a fáziskésés fejezhető ki: $\tan\varphi_0=\frac{c\omega}{k-m\cdot\omega^2}$, a másikból pedig a válasz amplitúdója: $x_{g0}=\frac{q_0}{\sqrt{(k-m\cdot\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$. A csillapítást a kritikus csillapítás hányadában kifejezve a partikuláris megoldás most is egy statikus eltolódás, egy időfüggő harmonikus tag és egy rezonanciatényező szorzataként adódik:

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega t-\operatorname{atan}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Fenti függvény egyben az állandósult rezgésrész. Ebben a felírásban a fázisszög tartalmazza az azonos, illetve az ellenfázishoz képesti eltérést, ezért a középső tényező lehet mindig pozitív. A teljes megoldáshoz a fentihez még hozzá kell adni a szabadrezgésből származó tagot:

$$x(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega t-\operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)+e^{-\xi\omega_0 t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$$

Az $x_{áll}(t)=x_g(t)$ állandósult rezgésrész amplitúdója most is $x_á=x_{st}\cdot\mu$, ahol $x_{st}=q_0/k$ a statikus eltolódás a gerjesztés amplitúdójából, míg a rezonanciatényező a csillapítás miatt:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Vizsgáljuk meg a csillapítás hatását a fenti rezonanciatényezőre. A csillapítás nélküli $(\xi=0)$ esethez képest bármilyen kicsiny csillapítás növelni fogja a nevezőt, tehát csökkenteni fogja a rezonanciatényezőt. Ez a hatás leginkább a rezonancia $(\text{emlékeztetőül: } \omega=\omega_0)$ környezetében jelentős, ott akár a végtelen nagyságú tényezőből is véges nagyságú lesz. A rezonanciatényező maximuma egy $\omega<\omega_0$ gerjesztőerő-körfrekvenciánál lép fel, de ha $\xi\ll 1$, akkor ez közelítőleg megegyezik az $\omega=\omega_0$ rezonanciához tartozó értékkel, amiből: $\mu_{max}\approx 1/(2\xi)$.

Megemlítjük még az *ideális csillapítás* fogalmát. Ez az a legkisebb csillapítás, amelynél a rezonanciatényező értéke sehol nem éri el az 1-et, értéke annál mindig kisebb. A rezonanciatényező analízise alapján ez $\xi=\sqrt{1/2}$, illetve $c=\sqrt{2\cdot k\cdot m}$ nagyságú csillapításnál következik be.

2.5. Egyéb gerjesztések

2.5.1. Szuperpozíció

A vizsgálatainkat lineárisan rugalmas szerkezeten végezzük, ahol érvényes a szuperpozíció elve. Ez azt jelenti, hogy ha egy $q_1(t)$ teherre a szerkezet válasza $x_{g1}(t)$ és egy $q_2(t)$ teherre pedig $x_{g2}(t)$, akkor a $q_1(t)+q_2(t)$ teherre $x_{g1}(t)+x_{g2}(t)$ lesz a válasz.

Ha például két harmonikus gerjesztőerő hatására felírjuk a mozgásegyenletet

$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=q_{10}\cos(\omega_1 t)+q_{20}\cos(\omega_2 t)$$

alakban (az egyszerűség kedvéért egy csillapítatlan rendszerre, hogy kiférjünk egy sorba), akkor a megoldás teljes alakja:

$$x(t)=\frac{q_{10}}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_1 t)+\frac{q_{20}}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_2 t)+A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$

melynek *A* és *B* paraméterével kell kielégíteni a kezdeti feltételeket.

Egy ilyen típusú gerjesztés esetén a maximális elmozdulás, és így a maximális rugóerő számítása részben paraméterfüggő. A biztonság javára történő becslésként elmondható, hogy ha az összes harmonikus függvény egyszerre veszi fel azt a szélsőértékét, amelyiknél az egyes tagok előjele azonos lesz, úgy az

$$x_{max}=\left|\frac{q_{10}}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}\right|+\left|\frac{q_{20}}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}}\right|+|A|+|B|$$

formulát használhatjuk. Bizonyos ω_1 és ω_2 értékek mellett azonban ez lehet, hogy soha nem érhető el.

2.5.2. Periodikus gerjesztés, Fourier-analízis,

Ha a $q(t)$ gerjesztés periodikus, azaz létezik olyan $T>0$, hogy $q(t+T)=q(t)$ minden t-re, akkor a legkisebb ilyen *T*-t a gerjesztés periódusának nevezzük, és T_1 -gyel jelöljük. Ekkor a gerjesztőerő Fourier-sorba fejtve felírható harmonikus függvények összegeként:

$$q(t)=a_0+\sum_j \left(a_j\cos(j\omega_1 t)+b_j\sin(j\omega_1 t)\right), \text{ ahol } \omega_1=\frac{2\pi}{T_1} \text{ és}$$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} q(t)\,\mathrm{d}t\ ,\ a_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1}\cos(j\omega_1 t)q(t)\,\mathrm{d}t\ ,\ b_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1}\sin(j\omega_1 t)q(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

A rendszer válaszából az állandósult rezgésrészt az előző pont tapasztalatai alapján írhatjuk fel:

$$x_g(t)=\frac{a_0}{k}+\sum_j\left(\frac{a_j}{k}\frac{1}{1-\frac{j^2\omega_1^2}{\omega_0^2}}\cos(j\omega_1 t)+\frac{b_j}{k}\frac{1}{1-\frac{j^2\omega_1^2}{\omega_0^2}}\sin(j\omega_1 t)\right)$$

Mint látszik, mindegyik tag szorzódik egy neki megfelelő rezonanciatényezővel, mely azonban kellően nagy *j* esetén már mindenképpen csökkenni fog. A maximumot most a függvényből a nekünk szükséges pontosságig meghatározhatjuk, vagy az együtthatók alapján egy becslést adhatunk, mint korábban.
Az általános gerjesztés egyik lehetséges kezelési módja, hogy végtelen hosszú periódusú periodikus gerjesztésként tekintünk rá, így az alapfrekvencia elemien kicsinnyé válik, az a_j, b_j együtthatók számítása egy-egy végtelen integrál számításává alakul, melynél a szingularitások elkerülése érdekében az $a(\omega), b(\omega)$ számításakor nem osztunk a T_1 -gyel, viszont a válasz összegzését pedig egy ω szerinti integrállá alakítjuk.

2.5.3. Általános gerjesztés

Az előbbi gondolatmenetnél talán egyszerűbb eljárás, ha a $q(t)$ általános teherfüggvényt elemi $\mathrm{d}\tau$ időtartamig működő erőkre, és az azok által átadott elemi impulzusokra bontjuk.

Egy, a τ pillanatban ható ilyen impulzus hatására a test sebessége $d v=\frac{q(\tau)\mathrm{d}\tau}{m}$ mértékben megnövekszik. Ebből a növekményből egy szabadrezgés kezdődik a $t>\tau$ időtartamban. Az emiatt létrejövő elmozdulásnövekmény:

$$\mathrm{d}x(t)=e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\left(\frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0^*}\mathrm{d}t\right)\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right).$$

Egy *t* időpillanatig az azt megelőző τ pillanatok impulzusainak hatását kell összegezni, így kapjuk a Duhamel-integrált:

$$x(t)=\int_0^t \frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0^*}e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

Fentiek természetesen csillapított esetre érvényesek, csillapítatlan szerkezet esetén a $\xi=0$ és

$\omega_0^* = \omega_0$ kifejezések nyomán egyszerűsödik a képlet:

$$x(t) = \int_0^t \frac{q(\tau)}{m \cdot \omega_0} \cdot \sin\left(\omega_0 (t-\tau)\right) \mathrm{d}\tau$$

2.6. Támaszrezgés, válaszspektrumok

Amennyiben a támasz is mozog, úgy a rugó megnyúlása (a rugalmas szerkezet alakváltozása) nem egyezik meg a szabadságfok eltolódásával. Emiatt ilyen esetekben az alakváltozás mérésére bevezetjük az $u(t)$ függvényt. A támasz mozgását a $z(t)$ függvénnyel írjuk le úgy, hogy a merevtest-szerű mozgás esetén (amikor nincsen alakváltozás) a támasz mozgása azonos (előjelű) legyen a tömegpont mozgásával. A három mennyiség természetesen nem független egymástól: $x(t)=z(t)+u(t)$, illetve $u(t)=x(t)-z(t)$. Az elmozdulás és az alakváltozás különbségét a mozgásegyenletben is figyelembe kell venni, a két függvénnyel az általános eset differenciálegyenlete $m\ddot{x}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=q(t)$ alakú lesz. A $q(t)$ teher hatását az eddig látott módon kell kezelnünk, a csillapítás jellemzően csak kis változást eredményez, ezért a továbbiakban a csillapítatlan, külső erővel nem terhelt szerkezetet vizsgáljuk, azaz az $m\ddot{x}(t)+ku(t)=0$ egyenletet. A vizsgálatot két részre kell bontanunk attól függően, hogy elsődlegesen az elmozduláshoz, vagy az alakváltozáshoz kapcsolódó mennyiségekre van szükségünk.

2.6.1. A szabadságfok mozgásának differenciálegyenlete támaszrezgés esetén

Ha a szabadságfok globális elmozdulását, vagy az abból származó sebességet, illetve gyorsulást kell számítanunk (mert például egy rezgésre érzékeny műszert fognak elhelyezni, ami csak megfelelő körülmények között mér pontosan), akkor az alakváltozást kell kifejeznünk a támasz elmozdulásával és az abszolút elmozdulással. A mozgás egyenletébe való behelyettesítés és átrendezés után:

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=kz(t)$$

adódik, vagyis a támaszrezgés ilyenkor egy olyan gerjesztett rezgésként kezelhető, ahol a gerjesztőerőt a $q(t)=kz(t)$ függvény írja le.

Ha például a támasz a $z(t)=z_0\cos(\omega t)$ harmonikus függvény szerint rezeg, akkor a harmonikus gerjesztőerő $q(t)=q_0\cos(\omega t)$ lesz, a $q_0=kz_0$ amplitúdóval. A szerkezet válaszából az állandósult rezgésrész:

$$x_{áll}(t)=\frac{kz_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)=z_0\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

A szabadságfok rezgésének állandósult rezgésrésze tehát egy olyan harmonikus rezgés lesz, melynek amplitúdója a támaszrezgés amplitúdójának $\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ -szorosa. (Igen, ez ugyanaz a szorzótényező, mint aminek az abszolútértéke a rezonanciatényező volt.) A szabadrezgésnél tanultak alapján a legnagyobb sebesség, illetve legnagyobb gyorsulás értéke rendre

$v_{max}=z_0\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}\omega$, illetve $a_{max}=z_0\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}\omega^2$ lesz.

2.6.2. Az alakváltozások mozgásának differenciálegyenlete támaszrezgés esetén

Ha a rugó megnyúlását, alakváltozását, vagy az abból származó igénybevételt kell számítanunk (mert például teherbírásra akarjuk méretezni a szerkezetet), akkor az elmozdulás második deriváltját kell kifejeznünk a támasz elmozdulásának és az alakváltozásnak a második deriváltjával. A mozgás egyenletébe való behelyettesítés és átrendezés után:

$$m\ddot{u}(t)+k\,u(t)=-m\ddot{z}(t)$$

adódik, vagyis a támaszrezgés ilyenkor egy olyan gerjesztett rezgésként kezelhető, ahol a gerjesztőerőt a $q(t)=-m\ddot{z}(t)$ függvény írja le.

Ha például a támasz a $z(t)=z_0\cos(\omega t)$ harmonikus függvény szerint rezeg, akkor a támasz gyorsulása $\ddot{z}(t)=-z_0\omega^2\cos(\omega t)$, így a harmonikus gerjesztőerő $q(t)=q_0\cos(\omega t)$ lesz, a $q_0=m z_0\omega^2$ amplitúdóval. A szerkezet válaszából az állandósult rezgésrész:

$$u_{áll}(t)=\frac{m z_0\omega^2}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)=z_0\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

Az alakváltozások rezgésének állandósult rezgésrésze tehát egy olyan harmonikus rezgés lesz, melynek amplitúdója a támaszrezgés amplitúdójának $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ -szorosa. (Ez a tényező nullától tart először a végtelenbe, majd a végtelentől a -1-hez: lassú gerjesztés esetén elhanyagolható az inerciális hatás, míg gyors gerjesztés esetén a tömegnek nincs ideje a mozgásra, mert mire elindulna egyik irányba, a támasz már a másik irányba mozog.)

A rugóban ébredő erő maximumát az állandósult rezgés amplitúdójából számolhatjuk:

$$f_r^{max}=k z_0\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$$

2.6.3. *Válaszspektrumok, földrengésvizsgálat*

Válaszspektrumot tetszőleges időfüggő teherre elő lehetne állítani és használni, mi itt az alapelveket a földrengésvizsgálat esetére mutatjuk be.

Tekintsünk adottnak egy $z(t)$ függvényt, ami a földrengés miatti támaszelmozdulást adja meg. Ezt az előző pontban látott módon gerjesztésként kezelhetjük, majd a mozgásegyenletet megoldhatjuk valamilyen időlépéses eljárással, vagy a már korábban látott Duhamel-integrállal. Utóbbit csillapítatlan esetre felírva az alakváltozások függvénye:

$$u(t)=\int_0^t \frac{-m\ddot{z}(\tau)}{m\cdot\omega_0}\cdot\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau=\int_0^t \frac{-\ddot{z}(\tau)}{\omega_0}\cdot\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau$$

A fenti $u(t)$ függvény idő szerinti deriváltjai rendre az alakváltozás sebességének és gyorsulásának függvénye. (A támaszrezgés előjele általában nem előre meghatározott, ezért az integrálásban szereplő negatív előjelnek a gyakorlatban nincsen jelentősége. A szerkezet válaszát abszolút nagysággal vizsgáljuk, majd az összegzésnél egy $\pm$ előjellel biztosítjuk, hogy mindkét irányban előfordulhat a szélsőérték.)

Vezessük be a *pszeudogyorsulás* fogalmát az alábbi definícióval: $a^p(t)=\omega_0^2 u(t)$. Ennek a mennyiségnek ugyan m/s² a mértékegysége, mégsem azonos az idő szerinti második deriválttal, nem tényleges gyorsulás (azért pszeudo).

Az alakváltozásból az idő függvényében meghatározhatjuk azt a statikus erőt, amely minden pillanatban ugyanakkora alakváltozásokat, igénybevételeket hozna létre az eredeti szerkezeten:

$$f_r(t)=k\,u(t)=k\int_0^t \frac{-\ddot{z}(\tau)}{\omega_0}\cdot\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau$$

Ezt a helyettesítő statikus erőt kifejezhetjük a pszeudogyorsulással is:

$$f_r(t)=\frac{k\,a^p(t)}{\omega_0^2}=m\,a^p(t)\ .$$

Itt látszik a pszeudogyorsulás használatának értelme, haszna: az erőt egy, a Newton-törvények óta megszokott tömegszer-gyorsulás-szerű képlettel számíthatjuk.

A legnagyobb igénybevétel akkor lép fel, amikor az elmozdulás a legnagyobb, azaz $f_r^{max}=k u^{max}$, ahol u^{max} az $\int_0^t \frac{-\ddot{z}(\tau)}{\omega_0}\cdot\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau$ integrál szélsőértéke. Ez a szélsőérték természetesen ugyanakkor lép fel, amikor a pszeudogyorsulás szélsőértéke, azaz írható $f_r^{max}=m a^{p,max}$ alakban is.

Fenti gondolatmenet alapján megállapíthatjuk, hogy különböző tömegű, merevségű, de azonos sajátkörfrekvenciájú szerkezetek maximális igénybevételeinek számításához rendre a pszeudogyorsulás $a^{p,max}=max\left\{\left|\int_0^t \ddot{z}(\tau)\omega_0\cdot\sin(\omega_0(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\right|\right\}$ szerinti maximumát kell meghatározni. Egy adott $z(t)$ támaszrezgés esetén ez az integrál csak a sajátkörfrekvenciától függ, így annak függvényében is megadható. Ezt a függvényt a *támaszrezgés válaszspektrumá*nak nevezzük (az igazán precíz megnevezés utalna arra is, hogy ez a támaszrezgés pszeudogyorsulás válaszspektruma, hiszen a többi mennyiség sajátkörfrekvenciafüggő maximumait is meg lehetne adni hasonló elvek alapján.). A gyakorlatban a válaszspektrumot szokás a sajátkörfrekvencia helyett a $T_0=2\pi/\omega_0$ periódusidő függvényében megadni (az *S* alsó indexe a pszeudogyorsulásra utal):

$$S_{pa}(T_0)=max\left\{\left|\int_0^t \ddot{z}(\tau)\omega_0\cdot\sin(\omega_0(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau\right|\right\}$$

Csillapított szerkezet esetén az integrálkifejezést, annak maximumát, így természetesen a válaszspektrumot is befolyásolná a csillapítás mértéke, ezért az ezt is figyelembe vevő jelölés az $S_{pa}(\xi,T_0)$.

Tervezési célra a szabványok előírnak egy, a történeti földrengésadatokból számított válaszspektrumok statisztikai elemzése alapján meghatározott válaszspektrumot, melyben különböző további, itt nem részletezett hatást kell figyelembe venni. Egy ilyen $S_d(\xi T_0)$ tervezési válaszspektrum használata nem tér el a fentitől: a csillapítás és a sajátkörfrekvencia függvényében leolvasott pszeudogyorsulás értékét beszorozzuk a tömeggel, így kapjuk meg azt a statikus erőt, amely a legnagyobb alakváltozásokat, igénybevételeket hozza létrehozza.

3. Többszabadságfokú rendszerek mechanikai rezgései

3.1. A mozgás mátrix-differenciálegyenlete

Többszabadságfokú rendszerek esetén a szerkezet mozgását nem egyetlen skalárfüggvénnyel adjuk meg, hanem a szabadságfokok elmozdulásainak skalárfüggvényeivel. A továbbiakban a szabadságfokok számát jelöljük *N*-nel, míg a szabadságfokok elmozdulásait az $x_j(t)$ függvényekkel, ahol $j=1,\ldots,N$ (itt az *x* arra utal, hogy ezek az ismeretleneink, de nem csak *x*-tengely irányú eltolódások lehetnek). Az egyszerűbb kezelhetőség érdekében a szabadsági fokok elmozdulásait az $\boldsymbol{x}(t)$ vektorba gyűjtjük[1], ennek első, illetve második deriváltja a sebességek vektora $(\dot{\boldsymbol{x}}(t))$, illetve a gyorsulások vektora $(\ddot{\boldsymbol{x}}(t))$. Egy vektor deriváltja az elemek deriváltjaiból képzett vektor, azaz:

1 Nyomtatásban a kisbetűvel írt vektorokat **félkövér (bold)** szedéssel különböztetjük meg a skalár mennyiségektől, míg kézírásban egyszeres aláhúzással jelezzük, hogy vektort írtunk.

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_N(t) \end{bmatrix}, \qquad \ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_N(t) \end{bmatrix}.$$

A mozgásegyenletet szabadságfokonként úgy írhatjuk fel, hogy az egyes szabadságfokokhoz tartozó tömegek és gyorsulások szorzatát tesszük egyenlővé az adott szabadságfokra ható külső és belső erők összegével. Az egyes szabadsági fokokhoz tartozó tömegeket egy $N \times N$ -es diagonálmátrix főátlójába gyűjtjük, amit *tömegmátrix*nak nevezünk és $\boldsymbol{M}$ -mel jelölünk[2]. Így az $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ szorzat eredményeként kapott *N*-elemű vektor az egyes szabadságfokok tömegének és gyorsulásának a szorzatát adja:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_N(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_1\ddot{x}_1(t) \\ m_2\ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ m_N\ddot{x}_N(t) \end{bmatrix}$$

Az egyszabadságfokú szerkezeteknél megmutattuk, hogy folytonos szerkezet diszkrét közelítése esetén a szabadságfokonkénti tömeget közelítően tudjuk meghatározni, nnek elveiről a későbbiekben mutatunk példát.

Az egyes szabadságfokokra ható külső erőket $q_j(t)$ -vel jelöljük, ezekből képezzük a szerkezet tehervektorát:

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix}.$$

Az egyes szabadságfokokra ható belső belső erők a szerkezet alakváltozásaiból, azaz a szabadságfokok egymáshoz képesti elmozdulásaiból származik, így azokat egy lineáris leképezéssel állíthatjuk elő. Az ezt létrehozó $N \times N$ -es mátrixot a szerkezet (statikus) *merevségi mátrix*ának nevezzük és $\boldsymbol{K}$ -val jelöljük. A merevségi mátrix egy elemére a sor-oszlop konvencióval hivatkozunk, azaz az *i*-edik sor *j*-edik oszlopában levő elemet k_{ij} -vel jelöljük. Az szabadsági fokokra a szerkezetről átadódó erőket a $-\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)$ vektor adja meg:

$$\boldsymbol{f}_r(t)=-\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & & k_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{r1}(t) \\ f_{r2}(t) \\ \vdots \\ f_{rN}(t) \end{bmatrix}.$$

A fenti használat megmutatja, hogy a merevségi mátrix *j*-edik oszlopában levő elemeket mindig a *j*-edik szabadságfok elmozdulásával ($x_j(t)$ -vel) szorozzuk.

2 Nyomtatásban a nagybetűvel írt mátrixokat **félkövér (bold)** szedéssel különböztetjük meg a skalár mennyiségektől, míg kézírásban kétszeres aláhúzással jelezzük, hogy mátrixot írtunk.

Ezután a *j*-edik szabadságfok mozgásegyenletét a $q_j(t)+f_r(t)=m_j \ddot{x}_j(t)$ alakban írhatjuk fel, de az összes szabadságfokra együttesen megtehetjük $\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{f}_r(t)=\boldsymbol{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)$ alakban, amit behelyettesítés és átrendezés után az alábbi kanonikus alakban is írhatunk:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t) .$$

Ez a csillapítatlan többszabadságfokú szerkezet mozgásának mátrix-differenciálegyenlete, ahol a mátrixformában felírt egyenlet soronként egy-egy szabadságfok mozgásegyenletét írja le. (Csillapítás esetén egy sebességfüggő tag is bekerülne a fenti egyenletbe, ennek formája és kezelése azonban túlmutat e tárgy keretein.)

Az elsődleges feladat általános esetben itt is az $\boldsymbol{x}(t)$ elmozdulásfüggvény meghatározása, hiszen abból tudjuk az alakváltozásokat és igénybevételeket meghatározni. A megoldás most is a tehertől függ. Ha egyik szabadságfokon sincs terhelés, azaz $\boldsymbol{q}(t)=\mathbf{0}$, akkor a szerkezet *szabadrezgés*t végez. Ha a külső erők vektorának valamelyik eleme nemzérus, akkor *gerjesztett rezgés*ről beszélünk. Mielőtt külön-külön végigmegyünk e két feladat megoldási módszerein, tekintsük át a rendszer mátrixainak lehetséges előállítási módszereit.

3.1.1. Diszkrét elemekből álló szerkezet mátrixai

Tömegpontokból és azokat összekötő rugókból álló szerkezet esetén a szabadságfokok az egyes tömegpontok elmozdulásai. Az egyes szabadságfokok tömege az adott tömegpont tömegével egyezik meg. (Előfordulhat, hogy egy tömegpont több, egymástól független irányba is eltolódhat, ilyenkor több szabadságfok is tartozhat ugyanahhoz a tömegponthoz.)

A rugók alakváltozását az egyes szabadságfokok elmozdulásai alapján fel lehet írni, így a rugóerőket is ki lehet fejezni, azaz ilyen modell esetén a szabadságfokonkénti mozgásegyenletek ténylegesen felírhatók, majd azok változók szerinti átrendezése után a merevségi mátrix elemei kiolvashatók.

A merevségi mátrix előállításának egy egyszerűbb módszere a szuperpozíció elvén alapul. Az egyes rugókról a szabadságfokokra átadódó erőket egymástól függetlenül tudjuk meghatározni, így felírhatjuk külön-külön az egyes rugók hatásából származó merevségi mátrixokat, majd azokat összegezhetjük a szerkezet merevségi mátrixába (a gyakorlatban ezt az összegzést közvetlenül a teljes merevségi mátrixon rugónként végezzük és *kompilálás*nak nevezzük). Amennyiben az egyik rugó az *i*-edik és a *j*-edik szabadságfokot köti össze, akkor annak a rugónak a megnyúlása csak két dologtól függ, $x_i(t)$ -től és $x_j(t)$ -től. A rugóerő szintén ettől a két elmozdulástól és a rugómerevségtől függ (utóbbit jelölje k^{i-j}), vagyis független az *i*-től és *j*-től különböző szabadságfokok elmozdulásaitól, ezért <u>ennek a rugónak a hatása nem jelenik meg a merevségi mátrix *i*-től és *j*-től különböző oszlopaiban</u>. A rugóerő a rugó két végén hat, azaz csak az *i*-edik és a *j*-edik szabadságfokra. Ez a rugó tehát nincs közvetlen hatással az *i*-től és *j*-től különböző szabadságfokokra, azaz nem jelenik meg a többi szabadságfok mozgásegyenletében, tehát a merevségi mátrix *i*-től és *j*-től különböző soraiban. A két aláhúzott feltétel együttesen azzal jár, hogy ez a rugó csak a $k_{ii}, k_{ij}, k_{ji}, k_{jj}$ elemekre van hatással. Ha egy k^i rugó az *i*-edik szabadságfokot egy mozdulatlan támaszhoz kapcsolja, úgy a fenti gondolatmenettel arra juthatunk, hogy az a rugó csak a k_i elemre lesz hatással.

A kompilálás során kezdő lépésként egy $N \times N$ -es méretű mátrixot nullákkal töltünk fel, majd rugónként haladva hozzáadjuk azok hatását a fentiek szerint. Az *i*-edik és *j*-edik szabadságfokot összekapcsoló rugó k^{i-j} merevségével megnöveljük a merevségi mátrix főátlójában levő k_{ii} -ben és k_{jj} -ben levő számokat. Amennyiben a két szabadságfok azonos irányú elmozdulást ír le, azaz lehetséges mindkét szabadságfok azonos előjelű elmozdítása a rugó megnyúlása nélkül, úgy a k_{ij} és k_{ji} -ben levő számokhoz $-k^{i-j}$ -t adjuk hozzá (a rugómerevség ellentettjét). Amennyiben a két szabadságfok ellenkező irányú elmozdulást ír le, azaz lehetséges a két szabadságfok ellentétes előjelű elmozdítása a rugó megnyúlása nélkül, úgy a k_{ij} és k_{ji} -ben levő számokhoz k^{i-j} -t adjuk hozzá. A szabadságfokot a támaszhoz kapcsoló rugó esetén csak a szabadságfoknak megfelelő főátlóelemhez kell hozzáadni a rugómerevséget.

A kompilálással előállított merevségi mátrixról az előállítás módja alapján kijelenthetjük, hogy annak szimmetrikusnak kell lennie ($k_{ij} = k_{ji}$). Mivel a merevségi mátrixnak az előállítás módjától függetlennek kell lennie, ezért ezt a tulajdonságot a mozgásegyenletek alapján történő előállításkor ellenőrzési célra használhatjuk. Az előállítási módból azt is észre lehet venni, hogy ha két szabadságfokot nem köt össze rugó, akkor a nekik megfelelő főátlón kívüli helyekre soha nem írunk semmit, azaz azok az eleme nullák maradnak.

3.1.2. Diszkretizált szerkezet mátrixai

Amennyiben folytonos szerkezet mozgását akarjuk több pontjának mozgásával leírni, akkor a folytonosan megoszló tömeget kell a szabadságfokokba redukálni, illetve a szabadságfokok elmozdulása miatt az egyes szabadságfokokra ható erők meghatározni.

A tömegmátrix előállításához azt a közelítést tehetjük, hogy a szabadságfokok által meghatározott tartószakaszok tömegeit a szakaszok végpontjai között osztjuk el fele-fele arányban. Mivel a szakaszok végpontjaiban szabadságfokok vannak, az oda kerülő tömegek összegét a szabadságfok tömegének tekinthetjük.

A merevségi mátrixot *statikus elv*ből vezethetjük le a *jelentése alapján*. Tételezzük fel, hogy egy $\boldsymbol{q}_{st}$ statikus teher hatására a szerkezeten kialakult egy $\boldsymbol{x}_{st}$ elmozdulás, mely mellett a szerkezet egyensúlyban van. Ekkor a gyorsulások zérus nagyságúak, így a mozgás egyenlet egy egyensúlyi egyenletté egyszerűsödik: $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_{st}=\boldsymbol{q}_{st}$.

Amennyiben az $\boldsymbol{x}_{st}$ vektor a *j*-edik egységvektor, úgy a fenti szorzat bal oldalán a szorzás eredménye egy olyan vektor, ami a $\boldsymbol{K}$ mátrix *j*-edik oszlopának elemeit tartalmazza:

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_{st}=\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{k}_j \; .$$

A *j*-edik egységvektornak megfelelő elmozdulásrendszer (amikor tehát a *j*-edik szabadságfok elmozdulása 1, a többi szabadságfok elmozdulása pedig nulla) tehát akkor következik be, ha a tehervektor a merevségi mátrix *j*-edik oszlopával egyezik meg (azaz az *i*-edik szabadságfokra egy k_{ij} erő hat). Ebből mondhatjuk ki a merevségi mátrix oszlopainak jelentését: <u>a merevségi mátrix *j*-edik oszlopa azokat az erőket tartalmazza, melyeket az egyes szabadságfokokra működtetve a kialakuló egyensúlyi helyzetben a *j*-edik szabadságfok elmozdulása egységnyi lesz, az összes többi szabadságfok elmozdulása pedig nulla</u>. Ezt a jelentést úgy használhatjuk fel, hogy egy-egy oszlop *N* ismeretlen elemét a szabadságfokokra működtetve felírjuk az igénybevételeket az *N* paraméter függvényében, majd azokból kifejezzük a szabadsági fokok elmozdulásait (még mindig az *N* paraméter függvényében). Az elmozdulások közül a *j*-ediket egyenlővé tesszük eggyel, a többit pedig nullával, majd megoldjuk az így kapott *N*-változós egyenletrendszert. A kapott számok lesznek a merevségi mátrix *j*-edik oszlopának elemei. (A több paraméter függvényében felírt igénybevételek és abból az elmozdulások számítása csak leírva hangzik ilyen egyszerűnek, a gyakorlatban ez inkább fáj, mint nem, ezért inkább csak az alapelv és a mátrix jelentésének érzékeltetésére mutatjuk be.)

A fentinél némiképp egyszerűbb megoldás, ha a merevségi mátrixot az ellentettjének a jelentése alapján állítjuk elő (szintén statikus elven) az alábbiak szerint. Építőmérnöki szerkezeteknél a merevségi mátrix általában nem szinguláris, determinánsa nem nulla, létezik az inverze (egy kvadratikus mátrix esetén ez a három ugyanazt jelenti). Ezt az inverz mátrixot *hajlékonysági, vagy engedékenységi mátrix*nak nevezzük és $\boldsymbol{F}$-fel jelöljük. Az inverz kapcsolat miatt $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}^{-1}$ és $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}^{-1}$. Az egyensúlyi helyzethez tartozó mátrixegyenlet mindkét oldalát beszorozva balról az inverzzel a bal oldalon az egységmátrixot kapjuk, a jobb oldalra pedig behelyettesíthetjük a hajlékonysági mátrixot:

$$\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_{st}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{q}_{st} \;\rightarrow\; \boldsymbol{x}_{st}=\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{q}_{st}$$

Amennyiben a $\boldsymbol{q}_{st}$ vektor a *j*-edik egységvektor, úgy a fenti szorzat jobb oldalán a szorzás eredménye egy olyan vektor, ami az $\boldsymbol{F}$ mátrix *j*-edik oszlopának elemeit tartalmazza:

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{q}_{st}=\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{f}_j \; .$$

A *j*-edik egységvektornak megfelelő erőrendszer hatására (amikor tehát a *j*-edik szabadságfokra egységerő hat, a többi pedig terheletlen) egy olyan elmozdulásrendszer alakul ki, ahol az egyes szabadságfokok elmozdulásait a hajlékonysági mátrix *j*-edik oszlopa tartalmazza (azaz az *i*-edik szabadságfok elmozdulása ekkor f_{ij}). Ebből mondhatjuk ki a hajlékonysági mátrix oszlopainak jelentését: <u>a hajlékonysági mátrix *j*-edik oszlopa azokat az elmozdulásokat tartalmazza, melyek az egyes szabadságfokokban kialakulnak ha a *j*-edik szabadságfokra egy egységerő hat, az összes többi szabadságfok pedig terheletlen</u>. Ezt a jelentést úgy használhatjuk fel, hogy rendre egységerőket működtetünk az egyes szabadságfokokra, majd az azok hatására az egyes szabadságfokokban kialakuló elmozdulásokat számoljuk ki. Az elmozdulások számításához célszerű a virtuális erők módszerét alkalmazni: az *i*-edik sorban levő elmozdulások számításához a virtuális erőrendszer célszerűen egy, az i-edik szabadságfokon működtetett virtuális egységerőből és az azt egyensúlyozó virtuális reakciókból áll, ez az erőrendszer azonban formailag azonos az *i*-edik oszlopban szereplő elmozdulások számításához használatos erőrendszerrel. Az előállítás módszeréből következik, hogy a hajlékonysági mátrix szimmetrikus lesz. A teljes mátrix ismeretében annak invertálásával kapható meg a merevségi mátrix: $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}^{-1}$. Mivel a hajlékonysági mátrixról már beláttuk, hogy szimmetrikus lesz, így az inverze, azaz a merevségi mátrix is az lesz.

3.2. Szabadrezgés

3.2.1. Az általánosított sajátértékfeladat

Első lépésben most is a szabadrezgés esetét oldjuk meg, vagyis keressük azt az $\boldsymbol{x}(t)$ függvényt, amely megoldása az $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$ homogén mátrix-differeciálegyenletnek és kielégíti az $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ és $\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{v}_0$ kezdeti feltételeket ($\boldsymbol{x}_0$ és $\boldsymbol{v}_0$ a kezdeti elmozdulások és sebességek vektora). A megoldást most is először általános alakban keressük, majd az abban szereplő paraméterek meghatározását mutatjuk meg.

Az egyszabadságfokú rendszereknél azt tapasztaltuk, hogy a szabadrezgés valamilyen időben harmonikus rezgés. Azt várjuk, hogy ez a többszabadságfokú rendszereknél is így lesz, ezért keressük a megoldást $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{v}\cos(\omega_0 t)$ alakban (a harmonikus függvény lehetne $\sin(\omega_0 t)$ is, vagy e kettő kombinációja, a következő lépéseket nem befolyásolja), azaz egy sajátkörfrekvenciától és időtől függő skalár és egy időfüggetlen, a szabadságfokok elmozdulásainak egymáshoz való arányait megadó vektor szorzataként. A feltételezett megoldás második deriváltja $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=-\omega_0^2\boldsymbol{v}\cos(\omega_0 t)$, ezt behelyettesítve a mátrix-differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy[3]:

$$-\omega_0^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}\cos(\omega_0 t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}\cos(\omega_0 t)=\boldsymbol{0}\ .$$

3 A szorzásoknál mátrix-műveletekről van szó, ezért az összeszorzandó mátrixok, vektorok sorrendje általában nem felcserélhető (rossz esetben akár a szorzás sem lenne elvégezhető), ezért az átrendezésnél csak a skalár szorzót mozgathatjuk a szorzat elejére.

Mivel ennek minden *t*-re teljesülnie kell, ezért a harmonikus taggal egyszerűsíthetünk, a maradék egyenletben pedig a mindkét tagot jobbról szorzó vektort kiemelhetjük:

$$\left(-\omega_0^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\text{ , vagy }\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

A kapott egyenlet egy homogén egyenletrendszer[4], melynek azonban az együtthatómátrixában is van egy ismeretlen, illetve az ismeretlenek vektorában további N darab. Ezt az egyenletrendszert *általánosított sajátértékfeladat*nak nevezzük (a hagyományos sajátértékfeladatban ω_0^2 helyett λ szerepel, a tömegmátrix helyett pedig az egységmátrix).

3.2.2. Az általánosított sajátértékfeladat megoldása, a szabadrezgés általános megoldása

Lineáris algebrából tudjuk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor létezik a triviális $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ -tól különböző megoldása, ha az együtthatómátrix sorai nem függetlenek egymástól, a mátrixnak rangcsökkenése van, szinguláris, determinánsa zérus. Ha a fentiek közül bármelyik teljesül, akkor a többi is, és ha van nemtriviális megoldás, akkor végtelen sok létezik, hiszen ha $\boldsymbol{v}$ kielégíti egy bizonyos ω_0 esetére az egyenletet, akkor $\alpha\boldsymbol{v}$ is kielégíti:

$$\left(-\omega_0^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\right)\alpha\boldsymbol{v}=\alpha\left(-\omega_0^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\ .$$

A megoldás további lépéseit az együtthatómátrix determinánsára vonatkozó feltétellel mutatjuk be. A $\left|-\omega_0^2\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\right|$ determinánst kifejtve ω_0^2 -re egy *N*-edfokú polinomot kapunk. Ha ezt egyenlővé tesszük nullával, akkor ω_0^2 -re egy *N*-ed fokú algebrai egyenletre jutunk, amelynek tipikusan N darab megoldása van. Ez az N darab megoldás építőmérnöki szerkezetek merevségi mátrixa esetén mind pozitív szám, így ezeket növekvő sorba rendezve indexeljük: $\omega_{01}^2\leq\omega_{02}^2\leq\ldots\leq\omega_{0N}^2$. (Az egyenlőségjeleknek többszörös gyökök esetén lenne jelentősége. E tárgy keretében ilyen esettel nem foglalkozunk, ezért a továbbiakban mindenhol feltételezzük, hogy csak egyszeres gyökök vannak.) Az algebrai egyenlet megoldásaiból gyökvonás után kapjuk a szerkezet *sajátkörfrekvenciái*t (itt most már az egyenlőséget nem megengedve):

$$\omega_{01}<\omega_{02}<\ldots<\omega_{0N}\ .$$

Az egyes sajátkörfrekvenciákhoz külön külön rendelhetünk az egyszabadságfokú rendszereknél látott módon sajátfrekvenciát, illetve periódusidőt:

$$n_{01}=\frac{\omega_{01}}{2\pi}<n_{02}=\frac{\omega_{02}}{2\pi}<\ldots<n_{0N}=\frac{\omega_{0N}}{2\pi}\ ,\qquad T_{01}=\frac{2\pi}{\omega_{01}}>T_{02}=\frac{2\pi}{\omega_{02}}>\ldots>T_{0N}=\frac{2\pi}{\omega_{0N}}$$

Egy szerkezet legfontosabb rezgése a legalacsonyabb frekvenciájú, ezt *alapfrekvenciának* nevezzük, az ehhez tartozó (legnagyobb) periódusidőt az *alapperiódus*.

A sajátértékfeladat megoldásának következő lépése minden egyes sajátkörfrekvenciához egy-

4 Homogén differenciálegyenletből homogén egyenletrendszer lett.

egy *sajátvektor* meghatározása. Ez a *j*-edik sajátvektor esetén a

$$\left(-\omega_{0j}^2 \boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{0}$$

homogén egyenlet megoldását igényli. A független egyenletek szám azonban eggyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma (hiszen ω_{0j} pont olyan, hogy ez teljesüljön), ezért a végtelen sok megoldásból egyet kell kiválasztanunk. Kézi számítás esetén ennek az a célszerű módja, hogy először felvesszük a vektor valamelyik elemének értékét (például 1-re), majd a maradék elemeket kiszámoljuk az egyenletrendszerből (egy fölös egyenletünk is lesz, ezt ellenőrzésre tudjuk használni). A további felhasználáshoz azonban célszerű a sajátvektorokat egyértelművé tenni. Ehhez a sajátvektorokat a tömegmátrixra normáljuk, ami azt jelenti, hogy úgy skálázzuk őket, hogy a $\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j=1$. Ha tehát egy kézi számítással kapott sajátvektort $\tilde{\boldsymbol{v}}_j$ -vel jelölünk, akkor a vele párhuzamos, tömegmátrixra normált sajátvektor $\boldsymbol{v}_j=\alpha_j\tilde{\boldsymbol{v}}_j$ lesz, amit a normálás feltételébe beírva: $\alpha_j\tilde{\boldsymbol{v}}_j^T \boldsymbol{M}\alpha_j\tilde{\boldsymbol{v}}_j=\alpha_j^2\tilde{\boldsymbol{v}}_j^T \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{v}}_j=1$ a skálázás értékére a

$$\alpha_j=\frac{1}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{v}}_j^T \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{v}}_j}}$$

adódik. A sajátvektor számítását és a skálázást *valamennyi* sajátértékre *külön-külön* kell elvégezni. Mivel feltételezett alakban a vektort egyértelművé tettük, ezért a ténylegesen kialakuló rezgés nagyságát a harmonikus függvény skalárszorzójával érhetjük el:

$$\boldsymbol{v}_j\left(a_j\cos(\omega_{0j}t)+b_j\sin(\omega_{0j}t)\right).$$

Egy, a fenti függvénnyel leírt rezgés során az elmozdulások egymáshoz képesti aránya állandó, ezért a $\boldsymbol{v}_j$ vektort a *rezgésalak vektorá*nak is nevezzük, ezt a rezgést magát pedig *rezgésmód*nak. A szabadrezgés *általános megoldás*a az egyes rezgésmódok kombinációjaként

állítható elő: $\boldsymbol{x}(t)=\sum_j^N \boldsymbol{v}_j\left(a_j\cos(\omega_{0j}t)+b_j\sin(\omega_{0j}t)\right)$.

3.2.3. Az általánosított sajátértékfeladat sajátvektorai

Mielőtt bemutatjuk az általános megoldásban szereplő paraméterek meghatározásának módját, tekintsük át a sajátértékfeladat megoldásának néhány fontos tulajdonságát.

A homogén lineáris egyenletrendszert felírhatjuk $\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=\omega_{0j}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j$ alakban is. Ebből egyrészt az is látszik, hogy ha ismerjük valamelyik sajátvektort, akkor a fenti egyenletrendszer bármelyik sorába behelyettesítve azt a sajátvektorhoz tartozó sajátkörfrekvenciára kapunk egy egyismeretlenes egyenletet.

Tegyük fel, hogy ismert két különböző sajátkörfrekvencia és a hozzájuk tartozó sajátvektorok. Jelölje *i* és *j* ezt a két megoldást, azaz $i\neq j$, így $\omega_{0i}\neq\omega_{0j}$ valamint $\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i=\omega_{0i}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i$ és

$\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=\omega_{0j}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j$. Szorozzuk be az első egyenletet balról $\boldsymbol{v}_j^T$ -vel és a második egyenletet balról $\boldsymbol{v}_i^T$ -vel, az eredmény: $\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i=\omega_{0i}^2\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i$ és $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=\omega_{0j}^2\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j$.

A merevségi és a tömegmátrix szimmetriája miatt $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i$ és $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i$, így ha kivonjuk egymásból a két egyenletet, akkor a bal oldalon nullát kapunk, a jobb oldalon pedig összevonhatjuk a vektor-mátrix-vektor-szorzatot: $0=(\omega_{0i}^2-\omega_{0j}^2)\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j$.

A zárójelen belüli kifejezés nem lehet nulla, hiszen a sajátkörfrekvenciák eltérőek, vagyis a szorzat csak akkor lehet nulla, ha $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j=0$. (Emlékeztetünk, hogy ez csak $i\neq j$ esetén igaz.)

A sajátvektorok fenti tulajdonságát úgy hívjuk, hogy a *tömegmátrixra ortogonálisak*.

Térjünk vissza a $\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=\omega_{0j}^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j$ egyenlethez. Ha ezt az egyenletet balról beszorozzuk $\boldsymbol{v}_i^T$ -vel, akkor azt kapjuk, hogy . $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=\omega_{0j}^2\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j$ Tömegmátrixra normált sajátvektorok és $i=j$ esetén a jobb oldal vektor-mátrix-vektor-szorzata 1 lesz, így az indexek egyenlőségét kihasználva azt kapjuk, hogy $\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=\omega_{0j}^2$. Amennyiben $i\neq j$, akkor a jobb oldalon a sajátvektorok tömegmátrixra való ortogonalitása miatt nulla áll, így ekkor a sajátvektorok *merevségi mátrixra való ortogonalitás*át fejezi ki a $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=0$ feltétel.

Ha a tömegmátrixra normált sajátvektorokat egy $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{v}_N]$ mátrixba gyűjtjük, akkor a fenti feltételeket az alábbi egyszerű alakban is kifejezhetjük:

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{E} \text{ és } \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}^2,$$

ahol $\boldsymbol{\Omega}$ a spektrálmátrix: egy olyan diagonálmátrix, melynek főátlójában a sajátkörfrekvenciák szerepelnek.

3.2.4. A szabadrezgés általános megoldásának paraméterei

Az $\boldsymbol{x}(t)=\sum_j^N \boldsymbol{v}_j\left(a_j\cos(\omega_{0j}t)+b_j\sin(\omega_{0j}t)\right)$ általános megoldásban szereplő a_j, b_j paramétereket a *kezdeti feltételek*ből állapítjuk meg. Minden szabadságfoknak előírjuk a kezdeti elmozdulását és sebességét, ez összesen éppen a paraméterek $2N$ számával megegyező számú feltétel. Az általános megoldásból kifejezve a sebességek vektorát:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_j^N \boldsymbol{v}_j\left(-a_j\omega_{0j}\sin(\omega_{0j}t)+b_j\omega_{0j}\cos(\omega_{0j}t)\right)$$

és felhasználva azt, hogy a kezdeti feltételeket $t=0$ pillanatban írtuk elő, ez a lépés két, N-ismeretlenes egyenletrendszer megoldását jelenti:

$$\boldsymbol{x}_0=\sum_j^N \boldsymbol{v}_j a_j \text{ és } \boldsymbol{v}_0=\sum_j^N \boldsymbol{v}_j\omega_{0j}b_j.$$

E két egyenletrendszer megoldásának az a célszerű menete, ha beszorozzuk mindkét oldalt

$\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}$ -mel: $\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{x}_0 = \sum_j^N \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{v}_j a_j$ és $\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{v}_0 = \sum_j^N \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{v}_j \omega_{0j} b_j$.

E szorzás hatására a jobb oldali összegzésekben az $i \neq j$ esetekben a sajátvektorok tömegmátrixra való ortogonalitása miatt 0 lesz az összegzendő szorzat értéke, $i = j$ esetben pedig a tömegmátrixra normáltság miatt 1, azaz:

$$\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{x}_0 = a_i \text{ és } \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{v}_0 = \omega_{0i} b_i \,.$$

Az egyenletrendszereket tehát nem kell megoldanunk, a paraméterek skalárkifejezések számításából adódnak. A szabadrezgés kezdeti feltételeket kielégítő megoldása tehát:

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{v}_j \left(\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{x}_0 \cos(\omega_{0j} t) + \frac{\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{v}_0}{\omega_{0j}} \sin(\omega_{0j} t) \right) .$$

A sajátvektorok $\boldsymbol{V}$ mátrixát, valamint a spektrálmátrixot felhasználva a kezdeti feltételek két egyenletrendszerét mátrix-alakban is írhatjuk: $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{V}\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{b}$, ahol $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorok az a_j és b_j paramétereket tartalmazó *N*-elemű vektorok. A mátrixegyenletek megoldása: $\boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{b}$. Ebben a felírásban gondot okozhat a sajátvektorok mátrixának invertálása. Észrevehetjük azonban, hogy a $\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{V}$ szorzatban a $\boldsymbol{V}$ mátrixot egy olyan mátrixszal szorozzuk, hogy az eredmény egy egységmátrix lesz, amely tulajdonságot a mátrix inverzétől követeljük meg, azaz kijelenthető, hogy $\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M}$, vagyis $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{x}_0$ és $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{v}_0$.

(Az inverz tulajdonságából az is következik, hogy $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M} = \boldsymbol{E}$, amiből pedig az, hogy $\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}$, de ezt most még nem használjuk semmire.)

3.3. Gerjesztett rezgések

Többszabadságfokú szerkezet gerjesztését akkor tekinthetjük harmonikusnak, ha valamennyi szabadságfokra egy időben azonos harmonikus függvény szerint változó nagyságú erő hat, azaz a tehervektor például $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t)$ alakban írható (a harmonikus tag most is lehetne bármi más harmonikus függvény), ahol $\boldsymbol{q}_0$ a gerjesztőerők amplitúdóinak vektora. A fenti meghatározásba természetesen belefémek az esetleg terheletlen szabadságfokok, hiszen azok esetében az amplitúdó zérus, amit bármilyen harmonikus függvénnyel szorozva is nullát kapunk, a terheletlen szabadságfokok helyén tehát nulla fog szerepelni a $\boldsymbol{q}_0$ vektorban. Keressük tehát az alábbi inhomogén mátrix-differenciálegyenlet (a harmonikus erővel gerjesztett, csillapítatlan többszabadságfokú rendszer mátrix-differenciálegyenletének) megoldását:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

A megoldás most is egy partikuláris megoldásból és a kiegészítő rendszer általános megoldásából áll. Az egyszabadságfokú rendszereknél szerzett tapasztalataink alapján csak a partikuláris megoldással foglalkozunk, amely a válaszfüggvényből az állandósult rezgésrésszel lesz majd egyenlő.

3.3.1. Direkt megoldás

Direkt megoldás esetén azt várjuk, hogy a szabadságfokok elmozdulásai ugyanolyan harmonikus függvény szerint fognak változni az időben, mint a gerjesztőerő, de különböző amplitúdóval. Az ennek megfelelően feltételezett $x_g(t)=\boldsymbol{x}_{g0}\cos(\omega t)$ elmozdulásvektort (ahol $\boldsymbol{x}_{g0}$ a válasz amplitúdója) és az elmozdulások kétszeri deriválásával kapott $\ddot{\boldsymbol{x}}_g(t)=-\omega^2\boldsymbol{x}_{g0}\cos(\omega t)$ gyorsulásvektort behelyettesíthetjük az egyenletbe, így azt kapjuk, hogy:

$$-\omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{g0}\cos(\omega t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_{g0}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_{g0}\cos(\omega t)\ .$$

Mivel ennek az egyenletnek minden pillanatban teljesülnie kell, ezért $\cos(\omega t)$-vel egyszerűsíthetünk, majd a bal oldalon kiemelve az ismeretlenek vektorát egy inhomogén lineáris egyenlet adódik:

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{x}_{g0}=\boldsymbol{q}_0\ .$$

Ennek az egyenletnek a megoldása során három eset lehetséges:

Ha az *együtthatómátrix determinánsa nem nulla*, azaz a mátrix nem szinguláris, akkor invertálható és az inverzzel az egyenletet balról beszorozva megkapjuk a megoldást:

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\ .$$

A determináns akkor nem nulla, ha a ω nem egyenlő egyik ω_{0j}-vel sem (hiszen a nulla determináns éppen a sajátkorfrekvencia meghatározásához felírandó egyenletet oldaná meg). Ha tehát a gerjesztőerő körfrekvenciája nem esik egybe a szerkezet egyik sajátkörfrekvenciájával sem, akkor az szerkezet válaszából az állandósult rezgésrész:

$$\boldsymbol{x}_{áll}(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)\ .$$

Ha az együtthatómátrix determinánsa nulla, akkor a gerjesztőerő körfrekvenciája meggyezik valamelyik sajátkörfrekvenciával. Legyen ez a *j*-edik sajátkörfrekvencia, azaz $\omega=\omega_{0j}$. A megoldhatóság feltétele az, hogy a $\boldsymbol{q}_0$ vektor ortogonális legyen az együtthatómátrix nullterére. Ha ez teljesül, azaz $\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{q}_0=0$, akkor létezik $\boldsymbol{x}_{g0}$ megoldása az egyenletnek[5]. Ha viszont $\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{q}_0\neq 0$, azaz a tehernek van vetülete a *j*-edik rezgésalakra, akkor azzal az alakkal

5 Egy egyszerű, könnyen elképzelhető példaként ilyen ortogonalitás akkor fordulhat elő, ha egy szimmetrikus szerkezetet egy szimmetrikus rezgésalakhoz tartozó körfrekvenciával gerjesztünk egy ferdén szimmetrikus amplitúdójú gerjesztőerővel.

rezonancia alakul ki végtelenbe tartó amplitúdókkal.

3.3.2. Modálanalízis

Modálanalízis alatt azt értjük, hogy az elmozdulások vektorát a rezgésalakok időfüggő lineáris kombinációjaként állítjuk elő:

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{v}_j\,y_j(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)\,,$$

ahol az $y_j(t)$ függvényeket a modális koordinátáknak nevezzük, az $\boldsymbol{y}(t)$ vektoban pedig ezeket a modális koordinátákat soroljuk fel.

A modálanalízis tehát minden esetben igényli a szabadrezgésnél látott általánosított sajátértékfeladat megoldását.

A modális koordinátákkal kifejezett elmozdulásokból a gyorsulások vektorát a kétszeri deriválással kapjuk meg. A sajátvektorok időfüggetlenek, így csak a modális gyorsulásokra lesz szükségünk:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{v}_j\,\ddot{y}_j(t)=\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)\,.$$

Az így kifejezett vektorokat behelyettesítve a rezgés egyenletébe:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

Ha ezt az egyenletet beszorozzuk balról a sajátvektorok mátrixának transzponáltjával:

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{q}(t)$$

akkor a sajátvektorok normáltsága és ortogonalitási tulajdonságai miatt a bal oldal mátrix-szorzatai egy-egy diagonálmátrixszá egyszerűsödnek. A jobb oldalt jelöljük az $\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{q}(t)$ vektorral, így a vektor *j*-edik eleme a *j*-edik sajátvektor és a tehervektor skaláris szorzata ($f_j(t)=\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{q}(t)$). Az egyszerűsítés eredménye:

$$\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{f}(t)\,.$$

A fenti mátrixegyenlet *j*-edik sora által meghatározott egyenlet bal oldalán csak a *j*-edik modális koordinátának és második deriváltjának van nemzérus együtthatója. Ugyanezen sor jobb oldalán az $\boldsymbol{f}(t)$ *j*-edik eleme szerepel:

$$\ddot{y}_j(t)+\omega_{0j}^2\,y(t)=f_j(t)\,,$$

ahol a j index értéke természetesen 1 és N közötti egész szám. Az N-változós differenciálegyenlet-rendszer tehát szétesik N darab egyszabadságfokú rendszer differenciálegyenletére. Ezekben az egyszabadságfokú rendszerekben közös, hogy a „tömegük” egységnyi, míg a „rugómerevségük” a rezgésmód sajátkörfrekvenciájának a négyzete[6]. Az idáig vezető átalakítások bármilyen teher esetén azonos módon végrehajthatók, vagyis a modálanalízissel történő vizsgálat mindig az egyszabadságfokú rendszerek gerjesztett rezgésére történő átalakítással zajlik.

Ha a tehervektorunk a direkt módszerrel fentebb már vizsgált harmonikus terhelés, akkor a *j*-edik mód terhe: $f_j(t)=\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{q}_0 \cos(\omega t)=f_{j0}\cos(\omega t)$. A harmonikus erővel gerjesztett egyszabadságfokú rendszer megoldását felhasználva a modális elmozdulás megoldása:

$$y_j(t)=\frac{f_{j0}}{\omega_{0j^2}}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}}\cos(\omega t).$$

Ezt felhasználva a modális összegzés képletében a teljes szerkezet válaszából az *állandósult rezgésrész*:

$$\boldsymbol{x}_{áll}(t)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{q}_0\frac{1}{\omega_{0j}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}}\cos(\omega t).$$

Fenti képletből azt olvashatjuk ki, hogy minden $(\boldsymbol{v}_j)$ rezgésalak:

- szorozva van a gerjesztés időfüggésével $(\cos(\omega t))$,
- szorozva van a tehervektor amplitúdójának a rezgésalakra vett vetületével $(\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{q}_0)$,
- szorozva van a rezgésalak sajátfrekvenciájának segítségével számított, a rezonanciatényezővel rokon tényezővel $\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0j}^2}}\right)$,
- osztva van a sajátkörfrekvencia négyzetével $\left(\frac{1}{\omega_{0j}^2}\right)$.

Az utolsó két tag hatása, hogy a magasabb módokhoz tartozó válasz általában kisebb hatású. Ez áll annak a hátterében, amikor a sajátértékfeladatot csak részlegesen oldják meg az első néhány alak és sajátfrekvencia kiszámításával, a magasabb alakokat pedig elhanyagolják.

Fenti levezetésben nem foglalkoztunk a rezonancia esetleges lehetőségével. Amennyiben a gerjesztőerő körfrekvenciája megegyezik a szerkezet *j*-edik sajátkörfrekvenciájával, úgy a fenti összegzésben azt kell megnézni, hogy a *j*-edik összegzendő elem végtelen nagyságú lesz-e. Ha a $\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{q}_0$ tag zérus, akkor az az összegzendő nulla lesz, így nem okoz gondot, ha viszont nullától eltérő az értéke, akkor az adott frekvencián rezonancia következik be.

6 Ellenőrzésként: $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{\omega_{0j}^2}{1}}=\omega_{0j}$.

3.4. Speciális kérdések

3.4.1. Támaszrezgés

Egyszabadságfokú rendszereknél láttuk, hogy a támaszrezgés gerjesztett rezgésként kezelhető a megfelelő gerjesztőerő meghatározásával. A feladatunk többszabadságfokú szerkezetek esetén is e gerjesztőerők meghatározása.

A peremfeltételek figyelembevételéhez bővítsük ki az eddig használt modellünket ún. külső szabadságfokokkal: ezek azok a pontok, amelyek elmozdulásai előírtak, ezeket az előírt értékeket gyűjtsük a $\mathbf{x}_k(t)$ vektorba. Ezekre a külső szabadságfokokra a terheken és belső erőkön kívül az ottani reakcióerők hatnak, ezek alapján írhatjuk fel blokkos alakban a kibővített mozgásegyenletet[7]:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{M}_k \\ \boldsymbol{M}_k^T & \boldsymbol{M}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{K}_k \\ \boldsymbol{K}_k^T & \boldsymbol{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}(t) \\ \boldsymbol{q}_k(t) + \boldsymbol{r}_k(t) \end{bmatrix} .$$

Fenti egyenletben a k indexek mindig a külső szabadságfokokhoz kötődő mennyiségekre utalnak, az $\boldsymbol{r}_k(t)$ vektorban pedig a külső szabadságfokokra ható reakcióerők szerepelnek.

Amennyiben a támaszok elmozdulása nulla, úgy a gyorsulásaik is, ezért a $\mathbf{x}_k(t)$ és a $\ddot{\mathbf{x}}_k(t)$ vektorok (amikkel az első blokksorban a $\boldsymbol{K}_k$ és $\boldsymbol{M}_k$ mátrixokat szorozzuk) zérus nagyságúak, az első blokksorból visszakapjuk az $\boldsymbol{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{K}\,\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{q}(t)$ egyenletet. Ennek megoldása után a második blokksorban már csak a reakciók maradnak ismeretlenek, így azt azok meghatározására használhatjuk.

Amennyiben a támaszok elmozdulása nem nulla, úgy az első blokksor által kifejezett egyenletet átalakíthatjuk úgy, hogy az előírt ($\mathbf{x}_k(t)$ -t és $\ddot{\mathbf{x}}_k(t)$ -t tartalmazó) mennyiségeket az egyenlet jobb oldalára rendezzük:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{K}\,\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{M}_k \ddot{\mathbf{x}}_k(t) - \boldsymbol{K}_k \mathbf{x}_k(t) \; .$$

Az *elmozdulások vizsgálatához* tehát a támasz mozgását egy olyan teherként vehetjük figyelembe, ahol a szabadságfokokra jutó erőjellegű terheket módosítjuk a támaszok mozgásából származó $-\boldsymbol{M}_k \ddot{\mathbf{x}}_k(t) - \boldsymbol{K}_k \mathbf{x}_k(t)$ erővel. Az elmozdulások meghatározása után a második blokksorban már csak a reakciók maradnak ismeretlenek, így azt azok meghatározására használhatjuk.

Többszabadságfokú szerkezetek földrengésvizsgálatához feltételezzük, hogy a szabadságfokokra ható erőjellegű terhekből származó $\boldsymbol{q}(t)$ vektor egy nullvektor. (Ha nem az, akkor a számítás végén a szuperpozíció elvét használva adhatjuk hozzá a hatását a

7 A hipermátrixos jelöléssel egyetlen mátrixegyenletként írtuk fel a belső és a külső szabadságfokok mozgásegyenleteit:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{M}_k \ddot{\mathbf{x}}_k(t) + \boldsymbol{K}\,\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{K}_k \mathbf{x}_k(t) = \boldsymbol{q}(t)$$
$$\boldsymbol{M}_k^T \ddot{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{M}_{kk} \ddot{\mathbf{x}}_k(t) + \boldsymbol{K}_k^T \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{K}_k \mathbf{x}_k(t) = \boldsymbol{q}_k(t) + \boldsymbol{r}_k(t)$$

számított eredményekhez.) Ezután még két megkötést teszünk a számítás elején. Feltételezzük, hogy az összes megtámasztott szabadsági fok azonos irányban és azonos mértékben mozdul el a $z(t)$ függvény szerint, és az igénybevételeket okozó, alakváltozással járó elmozdulásokat akarjuk csak meghatározni. Az első feltételezésünket matematikailag úgy írhatjuk le, hogy ez előírt elmozdulások vektorát a $z(t)$ skalárfüggvény, és a támaszmozgás irányába eső egységnyi eltolódásnak a külső szabadságfokok irányába eső vetületeit összegyűjtő vektor, az ún. *mutatóvektor* (*index-vektor*) szorzataként írjuk fel:

$$\boldsymbol{x}_k(t)=\boldsymbol{i}_k z(t) ,$$

ahol $\boldsymbol{i}_k$ a külső szabadságfokok mutatóvektora (ezzel tudjuk kifejezni, hogy a támaszok vízszintes elmozdulása esetén a függőleges irányú eltolódást kifejező szabadságfok elmozdulása nulla). A belső csomópontok elmozdulását két tag összegeként írjuk fel: az első egy merevtest-szerű mozgás, mely a támaszmozgás irányába eső, $z(t)$ nagyságú eltolódás minden szabadsági fokban, a második pedig az alakváltozást okozó elmozdulásokból áll. Az előbbi számításához bevezetjük a belső szabadságfokok $\boldsymbol{i}$ mutatóvektorát, ami azt mutatja meg, hogy a támaszmozgás irányába történő egységnyi statikus eltolódás esetén az egyes szabadságfokok elmozdulása mennyi lesz, az alakváltozást okozó elmozdulásokhoz pedig bevezetjük a támaszokhoz képesti elmozdulás $\boldsymbol{u}(t)$ vektorát:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{i}\,z(t)+\boldsymbol{u}(t) .$$

A fentiek szerint előállított elmozdulásvektorokból a gyorsulásvektorok:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{i}\,\ddot{z}(t)+\ddot{\boldsymbol{u}}(t) \text{ és } \ddot{\boldsymbol{x}}_k(t)=\boldsymbol{i}_k\ddot{z}(t) .$$

Ezeket beírva belső szabadságfokok mozgásegyenletébe, az ismert és ismeretlen mennyiségek egy oldalra rendezése után azt kapjuk, hogy:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{i}\,\ddot{z}(t)-\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{i}_k\ddot{z}(t)-\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{i}\,z(t)-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{i}_k z(t) .$$

Az egyenlet jobb oldalán az utolsó két tag együttesen a $-(\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{i}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{i}_k)z(t)$ erőrendszert fejezi ki. A zárójelen belüli rész azt az erőrendszert fejezi ki, ami akkor keletkezik, ha az összes (belső és a külső) szabadságfokot elmozdítjuk a támaszrezgés irányába egységnyivel. Mivel ebben minden szabadságfok szerepel, ezért ez a mozgás egy merevtest-szerű mozgás lesz, amihez nem tartozik alakváltozás, így a zárójeles kifejezés egy nullvektor lesz, azaz ez a két tag nem befolyásolja a számítást. A megmaradó két tagot blokkos szerkezetben is írhatjuk:

$$-\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{M}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{i}_k\end{bmatrix}\ddot{z}(t) .$$

A mátrix-vektor szorzat a kibővített (teljes) tömegmátrix belső szabadságfokokhoz tartozó sorainak és az összes szabadságfok mutatóvektorának a szorzataként adódó vektor, ami a mutatóvektoron keresztül függ a támaszrezgés irányától is, ezért az adott irányú támaszrezgéshez tartozó *szabadságfokonkénti tömegek vektora*. Ezt a vektort $\boldsymbol{m}$ -mel jelöljük:

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{M}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{i}_k\end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva az alakváltozások meghatározására szolgáló mozgásegyenlet:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)\ .$$

Ennek az egyenletnek a modálanalízissel történő megoldása esetén a *j*-edik egyszabadságfokú rendszer differenciálegyenletének alakja:

$$\ddot{y}_j(t)+\omega_{0j}^2\,y(t)=-\boldsymbol{v}_j^T\,\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

lesz, ahol bevezetve a *modális részvétel* (*modal participation*) $\Gamma_j=\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{m}$ fogalmát:

$$\ddot{y}_j(t)+\omega_{0j}^2\,y(t)=-\Gamma_j\ddot{z}(t)$$

adódik. Amennyiben a támasz mozgása a válaszspektrumával van megadva, úgy a modális elmozdulás legnagyobb értékét az $S_{pa}(T_{0j})$ pszeudogyorsulásból tudjuk felírni:

$$y_j^{max}=\Gamma_j\frac{S_{pa}(T_{0j})}{\omega_{0j}^2}\ .$$

Ez a modális elmozdulás a $\boldsymbol{v}_j\,y_j^{max}$ szabadságfokonkénti elmozdulással egyenértékű, amely elmozdulásrendszert az $\boldsymbol{f}_j^{max}=\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_j\,y_j^{max}$ statikus erőrendszer hozna létre. Mivel $\boldsymbol{v}_j$ egy sajátvektor, ezért $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_j=\omega_{0j}^2\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j$. Ezt és a maximális modális kitérésre levezetett összefüggést felhasználva a *j*-edik rezgésalakban a legnagyobb alakváltozásokat és igénybevételeket az

$$\boldsymbol{f}_j^{max}=\omega_{0j}^2\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j\,\Gamma_j\frac{S_{pa}(T_{0j})}{\omega_{0j}^2}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j\,\Gamma_j S_{pa}(T_{0j})$$

módon számítható statikus helyettesítő erőrendszer okozza. Bármely keresztmetszet igénybevételeinek rezgésmódonkénti maximumait a fentiek szerint kiszámítva az összegzést az előjelek és az egyidejűségek figyelembevételével kell és lehet elvégezni.

3.4.2. Az általánosított sajátértékfeladat közelítő megoldása – Rayleigh-hányados

A $\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ általánosított sajátértékfeladat esetén egy tetszőleges *N*-elemű $\boldsymbol{v}$ vektorra az alábbiak szerint definiáljuk a Rayleigh-hányadost:

$$R(\boldsymbol{v})=\frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}}\ .$$

A Rayleigh-hányadosnak egyik fontos tulajdonsága, hogy ha a vektor a rendszer valamelyik sajátvektora, akkor a hányados értéke a sajátvektorhoz tartozó sajátkörfrekvencia négyzete:

$$R(\boldsymbol{v}_j)=\omega_{0j}^2\ .$$

Ennek bizonyítása a sajátvektorok tulajdonságainak levezetésénél korábban már felírt

$\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{v}_j = \omega_{0j}^2 \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{v}_j$ összefüggés alapján könnyen belátható.

Ha a vektor nem sajátvektor, akkor is felírható a tömegmátrixra normált sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{v}_j .$$

Ezt behelyettesítve a Rayleigh-hányados definíciójába, a sajátvektorok ortogonalitása miatt a hányados átalakítható az alábbi alakra:

$$R(\boldsymbol{v}) = \frac{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 \omega_{0j}^2}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2} .$$

A számlálót kibővítve $+\sum_{j=2}^{N} \alpha_j^2 \omega_{01}^2 - \sum_{j=2}^{N} \alpha_j^2 \omega_{01}^2$ -tel és az összegzéseket átalakítva azt kaphatjuk, hogy:

$$R(\boldsymbol{v}) = \omega_{01}^2 + \frac{\sum_{j=2}^{N} \alpha_j^2 (\omega_{0j}^2 - \omega_{01}^2)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2} .$$

A második tag vagy pozitív (hiszen az első sajátkörfrekvencia a legkisebb), vagy nulla (ha $\boldsymbol{v} \| \boldsymbol{v}_1$), amiből a Rayleigh-hányados azon tulajdonságát állapíthatjuk meg, hogy mindig *nagyobb vagy egyenlő mint az első sajátkörfrekvencia négyzete:* $R(\boldsymbol{v}) \geq \omega_{01}^2$.

Ha a számláló bővítésére a $+\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j^2 \omega_{0N}^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j^2 \omega_{0N}^2$ kifejezést használjuk, akkor az összegzések átalakítása után azt kapjuk, hogy:

$$R(\boldsymbol{v}) = \omega_{0N}^2 + \frac{\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j^2 (\omega_{0j}^2 - \omega_{0N}^2)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2} .$$

Itt a második tag vagy negatív (hiszen az utolsó sajátkörfrekvencia a legnagyobb), vagy nulla (ha $\boldsymbol{v} \| \boldsymbol{v}_N$), amiből a Rayleigh-hányados azon tulajdonságát állapíthatjuk meg, hogy mindig *kisebb vagy egyenlő mint az utolsó sajátkörfrekvencia négyzete:* $R(\boldsymbol{v}) \leq \omega_{0N}^2$.

A Rayleigh-hányados fenti tulajdonságait felhasználhatjuk a sajátkörfrekvencia becslésére is. Tetszőleges rezgésalak felvétele esetén az alakot leíró vektorból számított hányados az első sajátkörfrekvencia négyzeténél nem kisebb érték lesz. A különbség annál kisebb, minél jobban eltaláljuk a vektorral az első rezgésalakot. Ennek különösen olyan diszkrét szerkezeteknél lehet nagy haszna, ahol egy egyenértékű kontinuum-modell rezgésalakját könnyen leírhatjuk valamilyen függvénnyel, így annak a diszkrét pontokban vett értékeivel a rezgésalakot jól közelítő vektorból számított hányados a sajátkörfrekvenciát is jól közelíti majd.

3.4.3. Az általánosított sajátértékfeladat átalakítása

A $\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ homogén egyenlet formájában megadott általánosított sajátértékfeladatot általában átrendezhetjük sztenderd sajátértékfeladattá. Amennyiben a tömegmátrix invertálható, akkor a $\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}=\omega_0^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}$ alakban felírt egyenlet mindkét oldalát balról beszorozva az inverzzel az $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}=\omega_0^2\boldsymbol{v}$ feladatot kapjuk. Ez egy sztenderd, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ alakban írható sajátértékfeladat, ahol $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$ és $\lambda=\omega_0^2$.

Amennyiben a merevségi mátrix invertálható (márpedig építőmérnöki szerkezeteknél általában ez a helyzet), akkor annak inverzével beszorozva mindkét oldalt és a sajátkörfrekvencia négyzetével pedig leosztva azt kapjuk, hogy: $\frac{1}{\omega_0^2}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}$.

Ez is egy sztenderd, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ alakban írható sajátértékfeladat, ahol $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}$ és $\lambda=\frac{1}{\omega_0^2}$.

A fenti két átalakításban közös, hogy szükség van hozzá egy nagy mátrix invertálására és két nagy mátrix szorzatára, ráadásul a kapott $\boldsymbol{A}$ mátrix tipikus esetben nem szimmetrikus. A sztenderd sajátértékfeladat megoldásaként kapott sajátvektorok megegyeznek az eredeti feladat sajátvektoraival, az első esetben a legkisebb, a második esetben pedig a legnagyobb sajátértékhez tartozik az első sajátkörfrekvencia.

A sztenderd sajátértékfeladat részleges megoldására létezik egy egyszerű iteratív módszer. Egy általános $\boldsymbol{v}$ vektornak minden sajátvektorra van valamekkora vetülete. Ha ennek a vektornak egymás után képezzük az $\boldsymbol{A}$ mátrixszal vett szorzatát, akkor az eredmény a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorhoz fog tartani $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\ldots\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\rightarrow\lambda_1^n\boldsymbol{v}_1\|\boldsymbol{v}_1$. Azaz a második átalakítás esetén ez az eljárás éppen az első rezgésalakot szolgáltatja.

3.4.4. Modálanalízis az általánosított sajátértékfeladat részleges megoldása esetén

A sajátértékfeladat részleges megoldása azt jelenti, hogy az *N* sajátvektorból csak az első *n* sajátvektort és a hozzájuk tartozó rezgésalakokat határozzuk meg. A rezgésalakok $\boldsymbol{V}$ mátrixa helyett tehát csak egy redukált mátrixot használunk: $\widetilde{\boldsymbol{V}}=\left[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \ldots \quad \boldsymbol{v}_n\right]$. Ezekre az alakokra természetesen ugyanúgy igaz a sajátvektorok normáltsága, illetve ortogonalitása, de az ezt kifejező mátrix-szorzatok eredménye egy-egy kisebb mátrix lesz: $\widetilde{\boldsymbol{V}}^T\boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{V}}=\widetilde{\boldsymbol{E}}$ és

$\widetilde{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{K} \widetilde{\boldsymbol{V}} = \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^2$. A méretek eltérése miatt tehát a $\widetilde{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{M}$ mátrix nem lehet az inverze a $\widetilde{\boldsymbol{V}}$ mátrixnak, így a $\widetilde{\boldsymbol{V}} \widetilde{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{M}$ szorzás, bár elvégezhető, de nem egy egységmátrixot eredményez, miként az $\boldsymbol{M} \widetilde{\boldsymbol{V}} \widetilde{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{M}$ szorzat sem adja vissza a teljes tömeg mátrixot, csak annak a számítás során *hatékony* részét. A célunk azonban az, hogy a mátrixok hatását, illetve annak kellő hányadát kapjuk meg a számítás eredményeként.

A támaszrezgés vizsgálatánál láttuk, hogy a támaszok mozgásának irányába mozgó szabadságfokonkénti tömegeket a mutatóvektor segítségével állítjuk elő. Ennek az $\boldsymbol{i}$ vektornak a segítségével képezhetjük az alábbi szorzatot: $\boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M} \widetilde{\boldsymbol{V}} \widetilde{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{i}$. A szorzatot elemeire bontva azt tapasztaljuk, hogy a $\widetilde{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{i}$ szorzat egy olyan *n*-elemű vektor, melynek a *j*-edik eleme éppen a *j*-edik rezgésalak modális részvétele: $\boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{v}_j^T \boldsymbol{m} = \Gamma_j$. Mivel ezt a vektor a saját transzponáltjával szorozzuk balról, az eredmény az egyes modális részvételek négyzetösszege lesz. Egy *rezgésalak modális tömegé*t a modális részvétel négyzeteként definiáljuk: $m_j = \Gamma_j^2$, a számítás során használt *hatékony (effektív) tömeg* pedig a modális tömegek összege: $m_{eff} = \sum_{j=1}^{n} m_j = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j^2 = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M} \widetilde{\boldsymbol{V}} \widetilde{\boldsymbol{V}}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{i}$.

Ennek a teljes tömeghez viszonyított arányát írák elő a szabványok.

3.4.5. Dinamikus rezgéscsillapítás

Ezt a fogalmat annak a jelenségnek a leírására használjuk, amikor a többszabadságfokú szerkezet valamelyik részét (tömegét, illetve a környezetéhez való kapcsolódásának a merevségét) úgy hangoljuk, hogy a tipikus (harmonikus) gerjesztés esetén a fő szerkezeti elemek elmozdulásai kicsinyek (az állandósult rezgésrészben akár nulla amplitúdójúak) legyenek.

3.4.6. Megfordított szabadságfok hatása

Ha egy szabadságfok pozitív értelmezési irányát megfordítjuk, akkor annak az alábbi hatásai lesznek:

- A merevségi és a hajlékonysági mátrixban egyaránt szoroznunk kell mínusz eggyel mind a szabadságfokhoz tartozó oszlop, mind a szabadságfokhoz tartozó sor elemeit. (Hiszen az elmozdulások pozitív irányának megváltozásával a szabadságfokra ható erő pozitív irányát is meg kell fordítanunk.) A főátlóbeli tagot mindkétszer szorozzuk, így annak előjele végül nem változik.
- A sajátkörfrekvenciák azonosak lesznek, hiszen az a fizikai rendszer jellemzője.
- A sajátvektorokban az érintett szabadságfokhoz tartozó tag előjele megfordul.

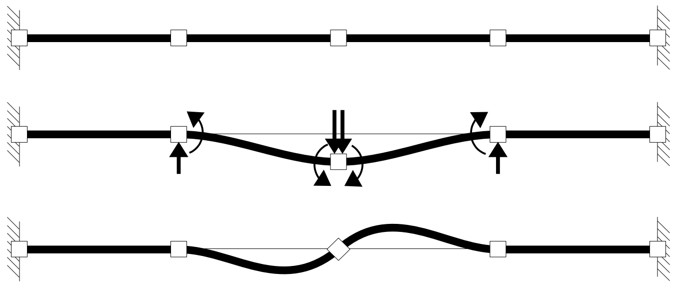
- A rezgésalakok fizikailag azonosak lesznek (hiszen az ellenkező előjelű tagot a sajátvektorból az ellenkező irányú szabadságfokhoz kell viszonyítani).

Több szabadságfok megfordítása esetén természetesen fentiek egymás után végrehajtandók és értelmezendők.

4. Keretek rezgésvizsgálata végeslemmódszerrel

4.1. A mátrix-elmozdulásmódszer háttere, merevségi mátrixa

A félév során már láttuk, hogy folytonos szerkezeteken csomópontok, szabadságfokok felvételével a diszkretizált szerkezet elmozdulásainak számításaival hogyan határozhatunk meg merevségi mátrixot, melyet a dinamikai vizsgálathoz is használhatunk. Bonyolult, nagy szerkezeteknél az eddig bemutatott módszer mégsem járható út: a sok szabadságfok miatt sok elmozdulást kell kiszámolni a hajlékonysági mátrixhoz, majd a nagy méretű mátrixot invertálni. A sok szabadságfok miatt a mátrix nagy méretén nem lehet változtatni, de legalább a sok számítási munka egyszerűbb elemekre bontását és így automatizálhatóságát tűzzük ki célként (a nagyméretű általánosított sajátértékfeladatot úgyis számítógéppel oldatjuk meg). Ehhez a Tartók statikája I.-II. tárgyakban is látott módszerhez nyúlunk. Vegyünk fel olyan szabadságfokokat, melyek egyenkénti elmozdulásai csak a tartónak egy, az érintett szabadságfokhoz kapcsolódó részén okoznak alakváltozásokat. Egy síkbeli keretszerkezet[8] esetén ezt úgy érhetjük el, ha a rúdtengelyt megszakító csomópontokban nem csak az *eltolódások*at, hanem az *elfordulások*at is szabadságfoknak tekintjük.



Ha például a jobb oldalon látható gerendát három közbenső csomóponttal négy szakaszra bontjuk, akkor egy csomópont egységnyi eltolásához, illetve elfordításához csak a kapcsolódó szakaszok végein kell a csomópontokra a szabadságfokoknak megfelelő erőt, illetve nyomatékot működtetni az egyensúly fenntartásához. A többszabadságfokú rendszereknél már megtanultuk, hogy ezek a csomóponti erők és nyomatékok alkotják a merevségi mátrix adott szabadságfokhoz tartozó oszlopát (meg persze van ott jó pár zérus értékű is), azaz itt lehetőség nyílik a hajlékonysági mátrix felírása helyett az egyes szakaszokról, mint rugalmas elemekről a csomópontokra átadódó erőknek az összegzésére, amit korábban *kompilálás*nak neveztünk. Az egyes szakaszok (amiket *elemek*nek hívunk majd) esetén külön-külön számítjuk az *elemi merevségi mátrix*ot. Az elemi merevségi mátrix számításához

8 Itt keretszerkezetnek tekintünk minden oszlopokból, gerendákból álló szerkezetet, aminek az elemei húzás-nyomást, illetve hajlítást szenvedhetnek.

különválasztjuk a húzás-nyomáshoz és a hajlításhoz tartozó elmozdulásokat, ezért egy lokális koordinátarendszerben határozzuk meg először, majd az elem helyzetétől függően transzformáljuk a globális koordináta-rendszerbe.

Először egy elem lokális koordináta-rendszerében nézzük meg a mátrix előállítását, ehhez a jobb oldalt látható *lokális* koordinátarendszerben nézzük az elemet. Az *ij-elem elmozdulásvektora* a két csomópont elmozdulásvektorából állítható elő:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i^{lok}\\ \boldsymbol{u}_j^{lok}\end{bmatrix},$$

ahol a két csomóponti elmozdulásvektor elemei a hosszirányú eltolódás (u), a merőleges eltolódás (w) és az elfordulás (φ):

$$\boldsymbol{u}_i^{lok}=\begin{bmatrix}u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_j^{lok}=\begin{bmatrix}u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}.$$

Az elemvégi elmozdulásokból az *elemvégre ható erők*et a

$$\boldsymbol{f}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_i^{lok}\\ \boldsymbol{f}_j^{lok}\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}\,\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}$$

formulával számítjuk, ahol az erők vektoraiban a szabadságfokokra ható rugalmas hatások szerepelnek, hosszirányú erő, merőleges irányú erő és forgatónyomaték:

$$\boldsymbol{f}_i^{lok}=\begin{bmatrix}F_{xi}\\ F_{zi}\\ M_{iy}\end{bmatrix},\boldsymbol{f}_j^{lok}=\begin{bmatrix}F_{xj}\\ F_{zj}\\ M_{jy}\end{bmatrix},$$

az elmozdulások és erők közötti kapcsolatot pedig az elemi merevségi mátrix írja le. Utóbbi oszlopait tehát a befogott-befogott gerenda végponti reakcióit felhasználva írhatjuk fel, amennyiben a kezdő-, vagy végpontját egységnyivel eltoljuk hosszirányban, vagy a rúdtengelyre merőlegesen, illetve elforgatjuk. A hat oszlopot külön-külön végigszámolva kapjuk a 6×6 -os merevségi mátrixot az elem lokális koordináta-rendszerében:

$$\begin{bmatrix}F_{xi}\\ F_{zi}\\ M_{iy}\\ F_{xj}\\ F_{zj}\\ M_{jy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l}\\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}\\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\\ u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}.$$

A merevségi mátrix három jellemzőjére hívjuk fel a figyelmet:

- A merevségi mátrix szimmetrikus.
- Emlékeztetünk, hogy az egyes oszlopok mindegyike egy egyensúlyban levő, de deformált rúd végeire ható erőket tartalmazza. Az x-, illetve z-irányú vetületi egyenleteket rendre az első és negyedik, illetve a második sor összegeként írhatjuk fel, ezért azoknak nullát kell adni. A nyomatéki egyensúlyt a harmadik és hatodik sorok és a második sor *l*-szeresének összegével ellenőrizhetjük, hiszen annak is nullának kell lennie.
- Végül, a merevségi mátrix elemeiben szereplő törtek nevezőjének hatványkitevőjét úgy ellenőrizhetjük, hogy tudjuk, milyen elmozdulási szabadságfokból milyen erőt, vagy nyomatékot kell kapnunk a vele való szorzást követően.

A merevségi mátrix elemeit a *virtuális elmozdulások tétele* segítségével is számolhatjuk. Ehhez egy adott sorban olyan elmozdulásrendszert kell felvenni, amelyen a keresett rúdvégi erő munkát tud végezni. Az ilyen elmozdulások persze éppen az egyes szabadságfokok egységnyi elmozdulásához tartozó elmozdult alakok, ugyanúgy, mint az egyes oszlopok számításához felvett elmozdult alakok esetében. Ezeket az elmozdult alakokat leíró függvényeket az adott *szabadságfok alakfüggvényének* nevezzük. A virtuális elmozdulások tételét formálisan felírva azt tapasztaljuk, hogy egy adott sor- és oszlopban levő elem számításához a kapcsolódó két szabadságfok alakfüggvényének megfelelő deriváltjainak és az alakváltozáshoz tartozó keresztmetszeti merevségnek a szorzatintegrálját kell kiszámolni.

4.2. Merevségi mátrix végeselemmódszerrel

Az előző pont végén leírtakat mátrixos alakban is megfogalmazhatjuk.

A szabadságfokok alakfüggvényeit a *bázisfüggvények mátrixá*ba gyűjtjük:

$$\boldsymbol{N}(x)=\begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix},$$

ahol $N_k(x)$ a *k*-adik szabadságfokhoz tartozó alakfüggvény. Ezzel az $\boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}$ szorzat két sora az $u(x)=u_i\cdot N_1(x)+u_j\cdot N_4(x)$, $w(x)=w_i\cdot N_2(x)+\varphi_{iy}\cdot N_3(x)+w_j\cdot N_5(x)+\varphi_{jy}\cdot N_6(x)$ elmozdulásfüggvényeket határozza meg.

Vezessük be az ***L*** *operátormátrix*ot:

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}()}{dx} & 0 \\ 0 & \dfrac{\mathrm{d}^2()}{dx^2} \end{bmatrix},$$

ami a mögé írt mátrixon az előírt deriválást hajtja végre. Ezzel előállíthatjuk a keresztmetszet alakváltozásait (fajlagos megnyúlását és görbületét):

$$\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}\right).$$

Fenti szorzatban a csomóponti elmozdulások vektora független az x koordinátától, ezért vezessük be az *alakváltozások mátrixát*:

$$\boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}(x)=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1(x)}{dx} & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}N_4(x)}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2 N_2(x)}{dx^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_3(x)}{dx^2} & 0 & \frac{\mathrm{d}^2 N_5(x)}{dx^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_6(x)}{dx^2} \end{bmatrix}.$$

Végül a normál- és hajlítómerevségeket a keresztmetszet merevségi mátrixába gyűjtjük:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}.$$

Fenti bevezetett mátrixos jelöléssel a merevségi mátrixot a

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{loc}=\int_l \boldsymbol{B}^T(x)\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}(x)\,\mathrm{d}x$$

képlettel számolhatjuk.

Az így kiszámolt merevségi mátrixot át kell még transzformálni a globális koordináta-rendszerbe és kompilálni a szerkezet merevségi mátrixába, amit a 4.4. pontban mutatunk majd be.

Maga a mátrix persze nem különbözik a korábban felírttól, viszont a végeselemes megfogalmazás lehetővé teszi más típusú szerkezetek (tárcsák, lemezek, testek, stb.) esetén is a rendszer mátrixainak előállítását, csupán a szabadságfokok vektorát, és a bázisfüggvényeket, azok mátrixát, az operátor és az elemi merevségi mátrixot kell más módon (és méretben) előállítani.

4.3. Keretek tömegmátrixa

4.3.1. Diagonál tömegmátrix

Keretek dinamikai számítását a statikai vizsgálathoz hasonlóan egy többszabadságfokú diszkrét rendszer vizsgálatára vezetjük vissza, ezért a szabadságfokok elmozdulásainak második deriváltjait tartalmazó gyorsulásvektor szorzótényezőjére, a tömegmátrixra is szükségünk lesz.

A legegyszerűbb esetben a gerendaelemet félbevágjuk, és a félgerenda hatását kell a rúdvégi csomópontokba, az ottani szabadságfokokba redukálni. Ehhez tételezzük fel, hogy az elem fajlagos (egységnyi hosszra jutó) tömege μ. Az eltolódásokhoz egyszerűen csak a fél gerendaelem tömegét kell beírnunk. Az elfordulási szabadságfokokra a perdülettételt írjuk fel mozgásegyenletként, tehát a szöggyorsulás szorzótényezője a csomópontra vett tehetetlenségi nyomaték (tömegszer hossz a négyzeten per három). Ezekkel a tagokkal a *diagonáltömegmátrix* alakja:

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok} = \mu l \begin{bmatrix} 1/2 & & & & & \\ & 1/2 & & & & \\ & & l^2/24 & & & \\ & & & 1/2 & & \\ & & & & 1/2 & \\ & & & & & l^2/24 \end{bmatrix}.$$

Ezt a tömegmátrixot bármilyen koordinátarendszerbe forgatjuk, mindig megtartja diagonálszerkezetét és az egyes tagok értékét is.

4.3.2. Blokk-diagonál tömegmátrix

A gerendaelem félbevágásával kapott diagonáltömegmátrixnál nem csak a gerendaelem felezésével végeztünk egy egyszerűsítést, de a haladó félgerenda súlypontjának a csomópontra vett perdületét illetve az elforduló félgerenda súlypontjának eltolódását is elhanyagoltuk. Ha ezt is figyelembe vesszük, akkor a mátrix az alábbi alakra módosul a lokális koordinátarendszerben:

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok} = \mu l \begin{bmatrix} 1/2 & & & & & \\ & 1/2 & -l/8 & & & \\ & -l/8 & l^2/24 & & & \\ & & & 1/2 & & \\ & & & & 1/2 & l/8 \\ & & & & l/8 & l^2/24 \end{bmatrix}.$$

Ezt a változatot *blokkdiagonál tömegmátrix*nak nevezzük. A koordinátarendszer forgatása esetén ez a mátrix a blokkdiagonál szerkezetét őrzi meg, de az elemi tömegmátrixnak lesznek főátlón kívüli elemei.

Ugyanakkor, a szerkezet tömegmátrixának kompilálása során az egyes elemekből származó főátlón kívüli tagok kiejthetik egymást, ha egy csomópont körül úgy helyezkednek el az elemek, hogy a kapcsolódó elemek súlypontja a csomópontra esik. Ilyen lehet például szimmetrikusan elhelyezkedő elemeknél, de tipikusan nem ez történik elágazásoknál, sarkoknál.

4.3.3. Konzisztens tömegmátrix

Ha a végeselemes megközelítést használunk, akkor a félbevágott rúdelemnél pontosabban is közelíthetjük a tehetetlenségi hatásokat. A merevségi mátrix számításánál is használt bázisfüggvények mátrixával számítható a *konzisztens tömegmátrix*:

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{loc} = \int_L \mu\, \boldsymbol{N}^T(x)\, \boldsymbol{N}(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

Elnevezésének háttere, hogy előállításához ugyanazokat az alakfüggvényeket használjuk, mint a merevségi mátrix számításához, azzal konzisztens alakot tételezünk fel. Elemei:

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok}=\mu l\begin{bmatrix}1/3 & & & 1/6 & & \\ & 13/35 & -11l/210 & & 9/70 & 13l/420 \\ & -11l/210 & l^2/105 & & -13l/420 & l^2/140 \\ 1/6 & & & 1/3 & & \\ & 9/70 & -13l/420 & & 13/35 & 11l/210 \\ & 13l/420 & l^2/140 & & 11l/210 & l^2/105\end{bmatrix}.$$

Látszik, hogy ez a mátrix teli mátrix, a forgatás, ill. a kompilálás sem hozza diagonál-alakra.

4.4. Rendszermátrixok kompilálása, általánosított sajátértékfeladat

Amennyiben a gerendaelem lokális koordináta-rendszerében megadott $\boldsymbol{a}^{lok}$ vektor elemeit a $\boldsymbol{a}^{gl}=\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{a}^{lok}$ transzformációval lehet a globális koordinátarendszerbe forgatni, úgy az elem merevségi és tömegmátrixát egyaránt a

$$\hat{\boldsymbol{T}}_{ij}^{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}_{ij}\end{bmatrix}$$

mátrix segítségével forgathatjuk a globális koordinátarendszerbe:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\hat{\boldsymbol{T}}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}\hat{\boldsymbol{T}}_{ij}^{T}, \quad \boldsymbol{M}_{ij}^{gl}=\hat{\boldsymbol{T}}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok}\hat{\boldsymbol{T}}_{ij}^{T}.$$

A gyakorlatban a fenti szorzást nem a 6×6 -os mátrixokon végezzük el, hanem 3×3 -as blokkonként:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\end{bmatrix} \text{ és } \boldsymbol{M}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\end{bmatrix}.$$

Az egyes szabadságfokokra ható erők összegzése a mátrixok kompilálásával történik. Globális koordinátarendszerbe forgatott elemi mátrix elemeit a szerekezet (kezdetben nulla elemekkel feltöltött) merevségi mátrixának a megfelelő elemeihez kell hozzáadni.

A teljes szerkezet merevségi és tömegmátrixára kell alkalmazni a támaszokat, azaz a nem elmozduló szabadságfokok sorainak és oszlopainak törlésével a mátrixokat kondenzáljuk. Támaszmozgás esetén viszont figyelni kell arra, hogy a helyettesítő tehervektort számító

$$-\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{M}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{i}_k\end{bmatrix}\ddot{z}(t)$$

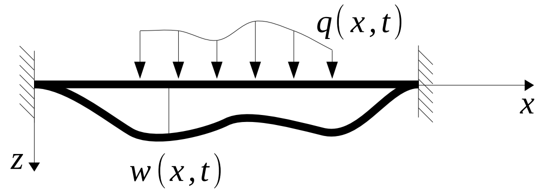
szorzatban a tömegmátrix esetleges nem-diagonál volta miatt az $\boldsymbol{M}_k$ tag nem mindig zérus, ezért elhanyagolása hibát eredményezhet. A szabadságfokonkéni tömegek vektorát tehát a

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{M}_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{i}_k\end{bmatrix}$$

szorzattal kell számítanunk. A további lépések nem különböznek a többszabadságfokú rendszereknél tanultaktól.

5. Folytonos rúd hajlítórezgése

A végeselemes megoldásnál bemutatott konzisztens tömegmátrix előállítási módjánál nem igazoltuk, hogy az valóban valamilyen közelítése lenne a folytonos rúd rezgésének. Ez ebben a tárgyban nem is célunk, de előkészítésként megmutatjuk, hogyan lehet vizsgálni a folytonos rúd hajlítórezgését. Az alapelv egyszerre nyúl a szilárdságtan és az eddigi dinamikai vizsgálatok módszereihez. Egy elemi darab egyensúlya helyett Newton második törvényét írjuk fel a belső erőket az elmozdulásokból származtatva, majd az elem méretét végtelen kicsire csökkentve határátmenetben egy differenciálegyenletet kapunk.



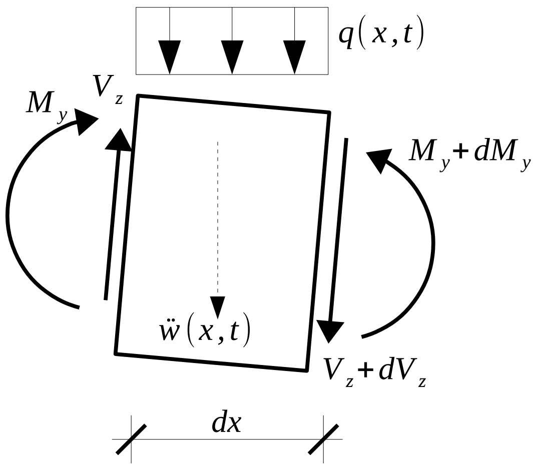
A hajlítórezgés vizsgálatához az alábbi feltételezésekkel élünk:

- adott a hossz mentén megoszló erő $q(x,t)$,
- ismert a gerenda fajlagos tömege μ,
- érvényes a kis elmozdulások elve,
- a gerenda viselkedését az Euler-Bernoulli, modell írja le
- a keresztmetszetek elfordulási tehetetlenségét elhanyagoljuk.

5.1. Kontinuum mozgásának differenciálegyenlete

Egy elemi hosszúságú szakaszra ható külső és belső erőket mutatja a jobb oldali ábra. A mozgásegyenletet egy elemi darabra ható erők alapján írhatjuk fel:

$$-V_z+\left(V_z+dV_z\right)+q(x,t)\cdot dx=\mu\, dx\cdot \ddot{w}(x,t)$$



Egyszerűsítés, dx-szel való osztás és határátmenet után ($'$ jelöli az x szerinti deriválást):

$$V_z'(x,t)+q(x,t)=\mu\,\ddot{w}(x,t)$$

Az elfordulási tehetetlenség elhanyagolása miatt a perdülettételből nyomatéki egyensúlyi egyenlet lesz: $-M_y-V_z dx+\left(M_y+dM_y\right)+q(x,t)\cdot dx\cdot\frac{dx}{2}=0$, amiből $V_z=\frac{dM_y}{dx}$,

az eddigiekből pedig:

$$M_y''(x,t)+q(x,t)=\mu\,\ddot{w}(x,t)\ .$$

A geometria egyenlet $\kappa_y(x,t)=-w''(x,t)$, míg az anyagegyenlet: $M_y(x,t)=EI_y\cdot\kappa_y(x,t)$, a kettő együtt:

$$M_y(x,t)=-EI_y\cdot w''(x,t)\ .$$

Ezt behelyettesítve a nyomatékfüggvény helyére, és az oldalakat átrendezve a *hajlítórezgés parciális differenciálegyenlete*:

$$EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=q(x,t)\;.$$

Fenti egyenletben q(x,t) fejezi ki a gerjesztést, amennyiben az nulla, úgy itt is szabadrezgésről beszélhetünk.

A megoldás itt is két rész összegéből áll:

- a szabadrezgés általános megoldása, plusz
- az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

A kezdeti feltételeket a kettő összegével kell kielégíteni. E tárgy keretében csak a szabadrezgéssel foglalkozunk.

5.2. Szabadrezgés általános megoldása

A szabadrezgés *homogén parciális differenciálegyenlete*

$$EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=0\;.$$

Keressük a megoldást a változók szétválasztásával, azaz egy, az alakot leíró és egy, az időfüggést leíró függvény szorzataként:

$$w(x,t)=\hat{w}(x)\cdot\cos(\omega_0 t)\;.$$

(Az időfüggést bármilyen más, ω_0 -tól függő harmonikus függvény megadhatná, a rövidebb megfogalmazás érdekében ezt most még így rövidítjük.)

A feltételezett megoldásfüggvény deriváltjait behelyettesítjük a parciális differenciálegyenletbe:

$$EI\,\hat{w}''''(x)\cdot\cos(\omega_0 t)+\mu\,\hat{w}(x)\cdot(-\omega_0^2)\cdot\cos(\omega_0 t)=0\;,$$

és egyszerűsítünk az időfüggő taggal. Így a rezgésalakra egy *homogén, közönséges differenciálegyenlet*et kapunk:

$$EI\,\hat{w}''''(x)-\mu\,\omega_0^2\,\hat{w}(x)=0\;.$$

Az alakfüggvény differenciálegyenletének általános megoldása:

$$\hat{w}(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)+C\sinh(\lambda x)+D\cosh(\lambda x)\;,$$

ahol λ a *frekvenciaparaméter,* a harmonikus tagokon belül az alak hosszmenti oda-vissza változásának gyakoriságát jellemzi. Az általános megoldást visszahelyettesítve a közönséges differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy:

$$EI\cdot\lambda^4\cdot\hat{w}(x)-\mu\,\omega_0^2\,\hat{w}(x)=0\;\rightarrow\;\frac{EI}{\mu}\cdot\lambda^4=\omega_0^2\;\rightarrow\;\omega_0=\lambda^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}\;,$$

azaz a frekvenciaparaméter és a sajátkörfrekvencia egyaránt jellemzi a szabadrezgést: nagyobb frekvenciaparaméter, sűrűbben változó rezgésalak esetén a sajátkörfrekvencia nagyobb, a periódusidő kisebb lesz.

Az *A,B,C,D* paramétereket és a frekvenciaparamétert a peremfeltételek segítségével kell meghatározni. A gerenda végein eltolódás, elfordulás, görbület (hajlítónyomaték), illetve nyíróerő zérus volta lehet előírva (végenként kettő). Az előírt értékeket egy egyenletrendszerbe foglalva egy *homogén lineáris egyenletrendszer*t kapunk *A,B,C,D*-re, melynek az együtthatómátrixa tartalmazza a frekvenciaparamétert. Ezt az együtthatómátrixot nevezzük a *gerenda **F** frekvenciamátrixá*nak. A frekvenciamátrix tehát az általános megoldás paramétereinek egymáshoz képesti arányának a peremfeltételek függvényében történő meghatározására szolgáló egyenletrendszer együtthatómátrixa.

Mivel az egyenletrendszer homogén, nemtriviális megoldása akkor lesz, ha a frekvenciamátrix szinguláris, determinánsa zérus. Ez egy nemlineáris kifejezést eredményez a frekvenciaparaméterre, melynek tipikusan végtelen megoldása van. A kontinuumnak tehát végtelen frekvenciaparamétere és így végtelen sok sajátkörfrekvenciája lesz. Ezeket most is növekvő sorrendben sorszámozzuk: $\omega_{0,1}, \omega_{0,2}, \omega_{0,3}, \cdots$ (és szükség esetén a magasabbakat elhanyagoljuk). A végtelen sok sajátkörfrekvencia mindegyikéhez külön *A,B,C,D* paraméternégyes által meghatározott sajátrezgésalak tartozik. Utóbbi ráadásul most sem egyértelmű, de megfelelő normálással azzá tehető. Kontinuum esetén a normálás általában egy szorzatintegrál segítségével történik.

A kontinuum sajátrezgésalakjaira is igaz az ortogonalitás, azaz két rezgésalak szorzatintegrálja nulla, kivéve, ha azonos alak függvényéről van szó. A szabadrezgés megoldását végül $w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} \hat{w}_i(x)\cdot\left(a_i \cos(\omega_{0,i} t)+b_i \sin(\omega_{0,i} t)\right)$ alakban írhatjuk fel, ahol a végtelen sok a_i és b_i paraméter a kezdeti feltételektől (a kezdeti alaktól és sebességtől) függenek. Ez gyakorlatilag egy végtelen szabadságfokú rendszerre kiterjesztett képlete a többszabadságfokú rendszereknek.

A sajátalakok ortogonalitása egyben lehetővé teszi a végtelen szabadságfokú rendszer modálanalízisét. Ilyenkor az elmozdulásfüggvényt a

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} \hat{w}_i(x)\cdot\eta_i(t)$$

alakban keressük, ahol $\eta_i(x)$-t modális koordinátának nevezzük. A fenti alakot behelyettesítve a rezgés parciális differenciálegyenletébe a rezgésalakokkal való szorzatintegrállal végtelen sok közönséges differenciálegyenletet kapunk a modális koordinátákra. Azokat (azok maximumait) meghatározva kaphatjuk meg a teljes szerkezet válaszát.