Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

2 EA / 3 ZH / évközi jegy

70% jelenlét / 2 legjobb ZH átlaga 50%

Németh Róbert

Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

Mit fogunk tanulni?

Alapfogalmak
Egyszabadságfokú rendszerek rezgései
Többszabadságfokú rendszerek rezgései
Rúdszerkezetek rezgése
Kontinuumok rezgése

Mit fogunk tanulni ma?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

Alapfogalmak – I.

Bevezetés

Építőmérnöki szerkezetek terhei → általában álló teherként kezeljük

Valójában a terhek jó része mozog:

- hidakon átmenő (gyalogos-, jármű-) forgalom
- koncertterem közönsége
- szélteher
- gépek mozgó részei miatti terhek
-
-
-
- stb.

Mi változik emiatt?

Időfüggő elmozdulások → időfüggő alakváltozások → időfüggő igénybevételek

-Esetleg elegendő ezek maximumértéke.

Követelmények: teherbírási, használhatósági, stabilitási követelmények

Mit használunk? (≈Előkövetelmények)

- Közönséges differenciálegyenletek $(homogén, inhomogén, lineáris, állandó\ együtthatójú, stb.)$
- Tartók elmozdulásainak számítása, mátrix-elmozdulásmódszer $(Tartók\ statikája\ I., Szilárdságtan)$
- Lineáris algebra $(lineáris\ egyenletrendszerek, sajátértékfeladat, sajátérték, sajátvektor)$
- Parciális differenciálegyenletek $(változók\ szétválasztása)$

Miben más a dinamikai vizsgálat az egyensúlyi helyzetéhez képest?

Emlékeztetőül a dinamika alaptörvénye:

$$\boldsymbol{R} = m \cdot \boldsymbol{a}$$

Itt a gyorsulás nem nulla ➜ a jobb oldal nem nulla.
Ennek két oka lehet:

1. Konstans teher, stabil egyensúlyi helyzet ➜ a kitérített szerkezet visszatér az egyensúlyi állapotban.
   - Milyen gyorsan (mennyi idő alatt) tér vissza?
   - Mennyire megy túl az egyensúlyi helyzeten, mielőtt megáll?

   (Hogy aztán ebből a nem egyensúlyi, azaz kitérítettnek tekinthető helyzetből visszatérjen, s.í.t.
   Ez az oda-vissza mozgás a *rezgés*.)

   A magára hagyott szerkezet mozgása a *szabadrezgés*.
   A kitérés maximumának csökkenése a *csillapítás* hatása.

2. Időfüggő teher ➜ *gerjesztett* rezgés
   - Mi az elmozdulások, alakváltozások, igénybevételek időfüggése?
   - Mi az elmozdulások, alakváltozások, igénybevételek maximuma?

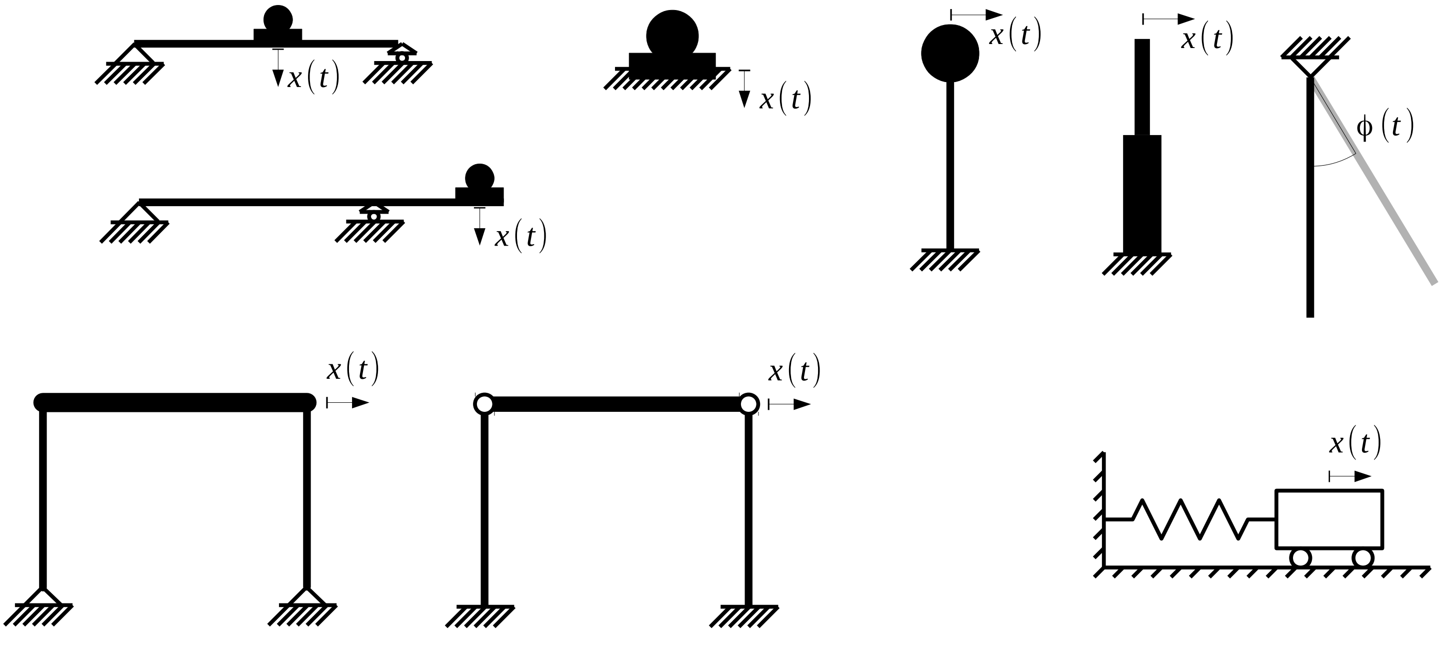
Szabadságfok – I.

Szabadságfok :

azon skalárfüggvények minimális száma, mely elegendő a szerkezet pillanatnyi helyzetének megadására.

→ valamilyen hely-, vagy elmozdulás-koordináta.

Példák egyszabadságfokú szerkezetekre (mindig síkbeli feladat)



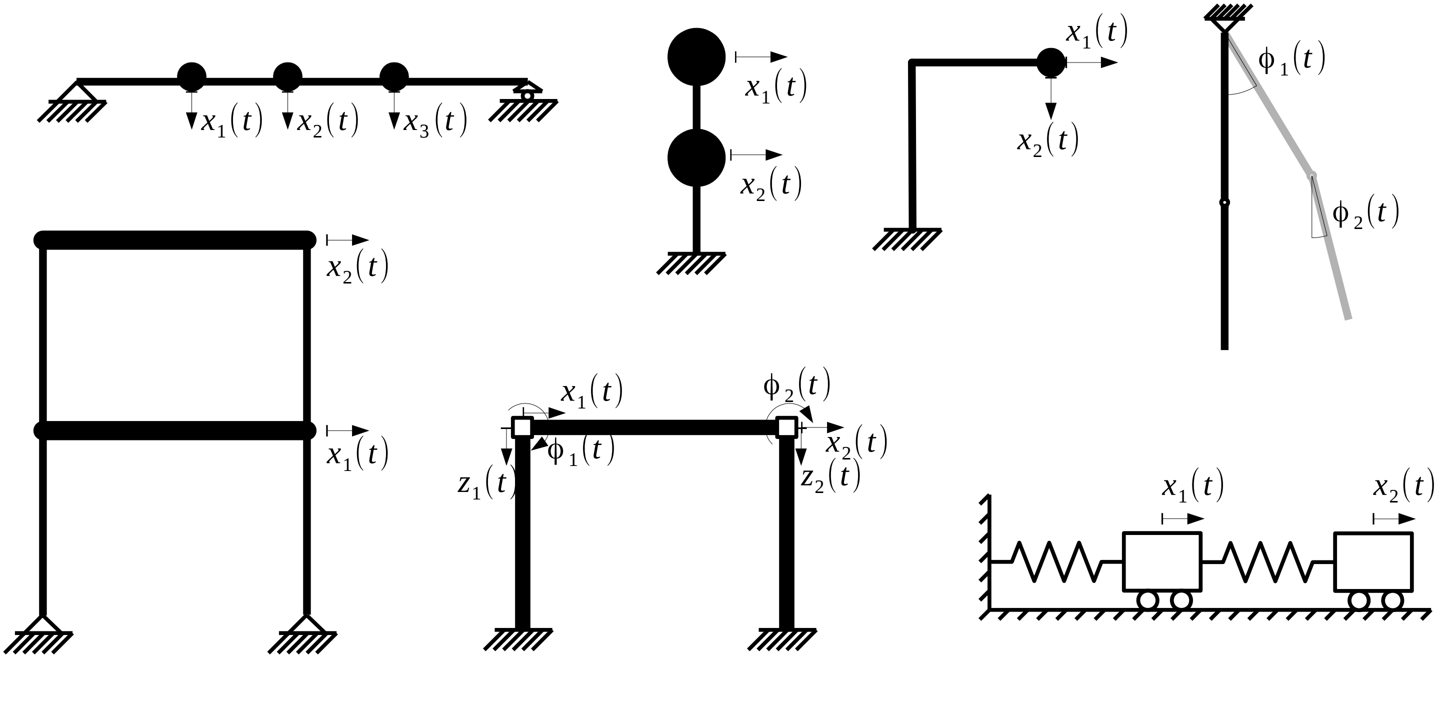
Szabadságfok – II.

Szabadságfok :

azon skalárfüggvények minimális száma, mely elegendő a szerkezet pillanatnyi helyzetének megadására.

➔ valamilyen hely-, vagy elmozdulás.

Példák többszabadságfokú szerkezetekre



Mit fogunk tanulni ma?

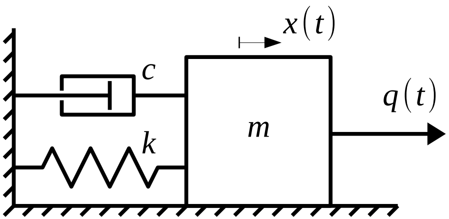
Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

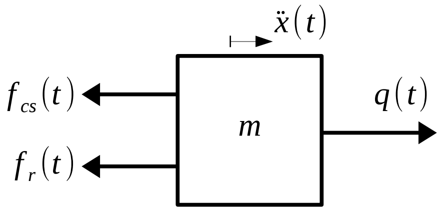
szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
mozgás differenciálegyenlete

Egyszabadságfokú rendszer – modell és mozgásegyenlet

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = q(t) - f_r(t) - f_{cs}(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)}$$

A modell elemei:
tömeg
merevség
csillapítás
gerjesztés (teher)

elmozdulás $(x(t))$
alakváltozás $(u(t))$

Az elmozdulást az egyensúlyi helyzethez képest mérjük. Globális koordináta.

sebesség:
a helykoordináta idő szerinti első deriváltja

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = \dot{x}(t)$$

gyorsulás:
a helykoordináta idő szerinti második deriváltja

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^2} = \ddot{x}(t)$$

Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – tömeg

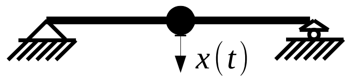
$$m\cdot\ddot{x}(t)+f_{cs}(t)+f_r(t)=q(t)$$

A szabadságfok elmozdulása nem mindig azonos a rugalmas szerkezet minden pontjának elmozdulásával ➜ nem a teljes tömeg mozog azonos gyorsulással.
A folytonos szerkezet tömegének csak egy része jelenik meg a modell tömegében.
➜ A teljes tömeg helyett egy *redukált* tömeget használunk.

Példák a redukált tömegre:

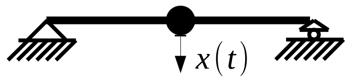
naiv közelítés:
szakaszok tömegeinek a
fele a szakaszok végpontjaiba

$$m\approx m_{tot}/2$$



pontosabb közelítés:
hasonló rezgésjellemzők

$$m\approx\frac{17}{35}m_{tot}$$



$$m\approx m_{tot}/3$$

Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – merevség I.

$$m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)$$

A rugalmas visszatérítő erő arányos a rugó megnyúlásával/rugalmas szerkezet alakváltozásával: $u(t)$.
Lineárisan rugalmas szerkezet: az arányossági tényező a *rugómerevség* $:k$.

$$f_r(t) = k \cdot u(t)$$

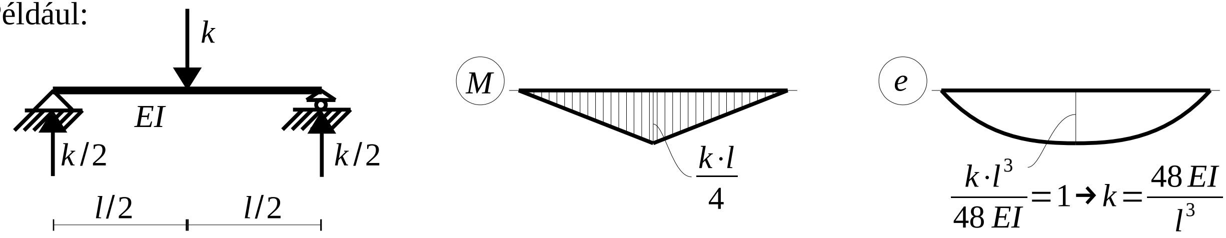
Ha a rugó másik vége (a támasz) nem mozog, akkor $x(t) = u(t)$.

$$f_r(t) = k \cdot x(t)$$

Rugómerevség fizikai jelentése: egységnyi elmozdulást létrehozó statikus erő.

Rugalmas szerkezeten *helyettesítő* vagy *ekvivalens* *rugómerevség* számítható a jelentés alapján:

Például:



Hátrány: paraméteres reakciók, igénybevételi ábrák, elmozdulások.

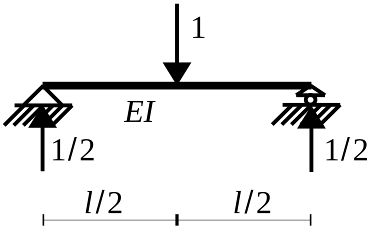
Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – merevség II.

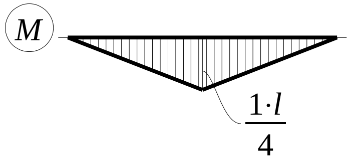
$$m\cdot\ddot{x}(t)+f_{cs}(t)+f_r(t)=q(t)$$

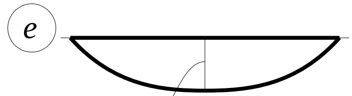
A helyettesítő vagy ekvivalens rugómerevség számítható az ellentettje alapján is.

Ez a szerkezet *hajlékonysága*, vagy *engedékenysége*. $\rightarrow f=\dfrac{1}{k}$, és így $k=\dfrac{1}{f}$

Fizikai jelentése: egységnyi statikus erő által létrehozott elmozdulás.

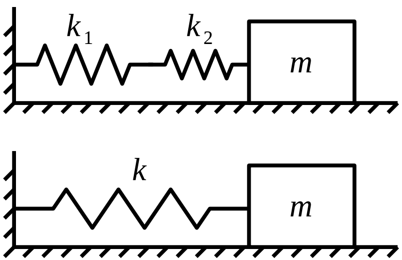






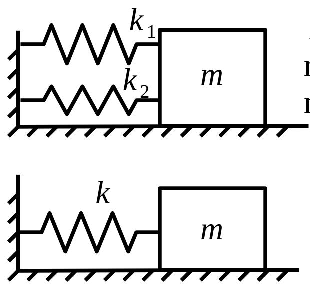
$$f=\frac{1\cdot l^3}{48\,EI}\rightarrow k=\frac{1}{f}=\frac{48\,EI}{l^3}$$

Sorba és *párhuzamosan* kapcsolt rugók helyettesítő merevsége



Soros kapcsolás
rugóerők azonosak
megnyúlások összeadódnak:

$$f=f_1+f_2$$
$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$



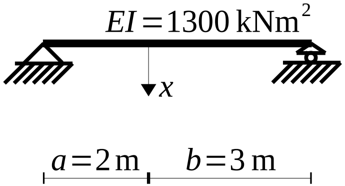
Párhuzamos kapcsolás
rugóerők összeadódnak
megnyúlások azonosak:

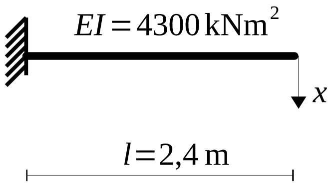
$$k=k_1+k_2$$
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

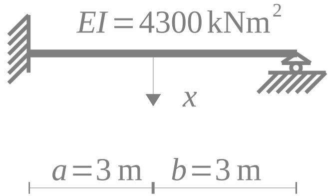
Ha nem lineárisan rugalmas a szerkezet, akkor a helyettesítő rugó sem lineáris $\rightarrow$ *a differenciálegyenlet is nemlineáris*

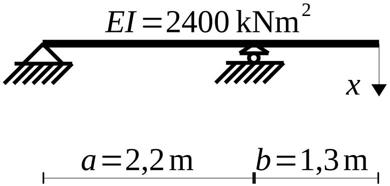
Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – merevség HF

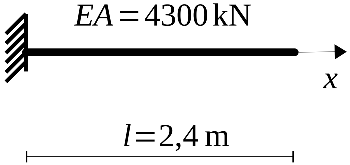
Számítsa ki az alábbi szerkezetek helyettesítő rugómerevségét!
(Az x koordináta jelöli a szabadságfok helyét.)

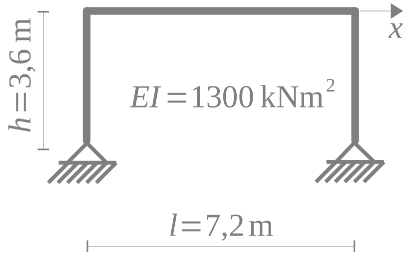


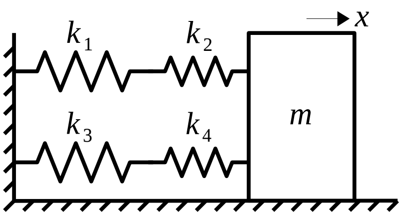


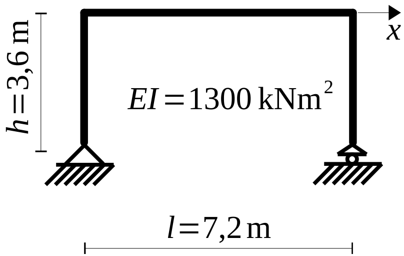


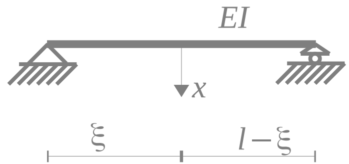






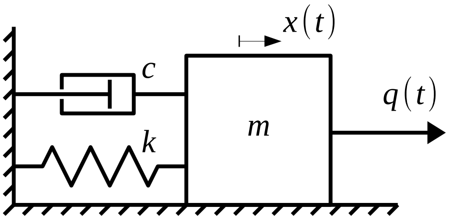






Egyszabadságfokú rendszer – modell és mozgásegyenlet

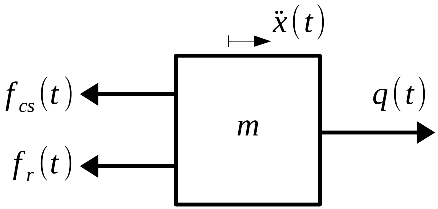
Modell



A modell elemei:
tömeg
merevség
csillapítás
gerjesztés (teher)

elmozdulás $(x(t))$
alakváltozás $(u(t))$

Elkülönítés



Az elmozdulást az egyensúlyi helyzethez képest mérjük. Globális koordináta.

N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=q(t)-f_r(t)-f_{cs}(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+f_{cs}(t)+k\cdot x(t)=q(t)}$$

sebesség:
a helykoordináta idő szerinti első deriváltja

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=\dot{x}(t)$$

gyorsulás:
a helykoordináta idő szerinti második deriváltja

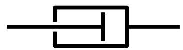
$$a(t)=\frac{\mathrm{d}^2\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^2}=\ddot{x}(t)$$

Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – csillapítás

$$m \cdot \ddot{x}(t) + f_{cs}(t) + f_r(t) = q(t)$$

A mozgás miatti lassító erő, az alakváltozás sebességével ($\dot{u}(t)$) ellenkező irányba hat

Sebességgel arányos csillapítás
Modell: viszkózus folyadékkal töltött hengerben mozgó dugattyú
Arányossági tényező: $c \rightarrow f_{cs}(t) = c \cdot \dot{u}(t)$

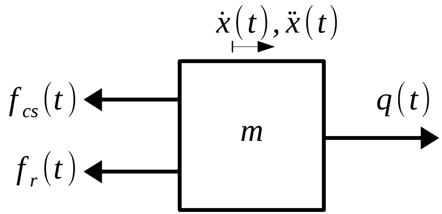


Ha a rugó másik vége (a támasz) nem mozog, akkor $x(t) = u(t) \rightarrow \dot{x}(t) = \dot{u}(t) \rightarrow f_{cs}(t) = c \cdot \dot{x}(t)$

Behelyettesítés után a mozgás differenciálegyenlete:

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}$$

közönséges, másodrendű, lineáris, állandó együtthatójú



Súrlódási erő miatti csillapítás
Modell : Coulomb − féle száraz súrlódás
A súrlódási erő mozgás esetén állandó nagyságú , iránya a mozgás irányával (a sebességgel) ellentétes :

$$f_{cs} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{|\dot{x}(t)|}{\dot{x}(t)}$$ (a pozitív előjel esetén mutat balra, mint az elkülönítésen)

Így a mozgás diff . egyenlete : $m \cdot \ddot{x}(t) + \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{|\dot{x}(t)|}{\dot{x}(t)} + k \cdot x(t) = q(t) \rightarrow$ *ez már nemlineáris*

Rezgések típusai

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

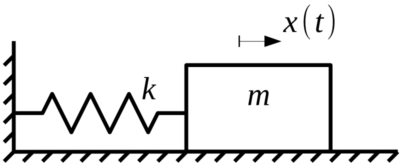
	$q(t)=0$ *szabadrezgés* (homogén DE)	$q(t)\neq 0$ *gerjesztett rezgés* (inhomogén DE)
$c=0$ *csillapítatlan rendszer* (hiányos DE)	*csillapítatlan szabadrezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$	*csillapítatlan, gerjesztett rezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$
$c>0$ *csillapított rendszer*	*csillapított szabadrezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$	*csillapított, gerjesztett rezgés* $m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$

A differenciálegyenlet $x(t)$ megoldásának ki kell elégítenie a *kezdeti feltételeket* is.
Egy adott t_0 pillanatban az elmozdulás és a sebesség értéke előírt: x_0, illetve v_0, azaz:

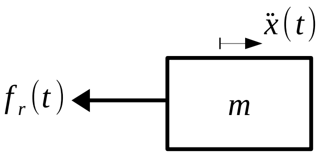
$$x(t_0)=x_0 \qquad \dot{x}(t_0)=v_0$$

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = -f_r(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0}$$

közönséges, másodrendű, lineáris, hiányos
állandó együtthatójú, homogén

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0) = x_0$, és $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Megoldás

Az $x(t) = 0$ ún. *triviális* megoldás, nem érdekes.

Keressük az általános megoldást az alábbi alakban:

$$x(t) = d \cdot e^{\lambda t}$$

Így: $\ddot{x}(t) = d \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

Behelyettesítve a DE-be: $m \cdot d \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + k \cdot d \cdot e^{\lambda t} = 0$

Amiből: $\lambda^2 = -\dfrac{k}{m}$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vezessük be az $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ mennyiséget

Neve: *sajátkörfrekvencia* [rad/s]

Így $\lambda_{1,2} = \pm i \omega_0$ és $x(t) = d_1 \cdot e^{+i\omega_0 t} + d_2 \cdot e^{-i\omega_0 t}$

$$Euler: e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – II.

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$$

Az általános megoldás átírása:

$$\boxed{x(t)} = d_1 \cdot (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) +$$
$$+ d_2 \cdot (\cos(-\omega_0 t) + i \sin(-\omega_0 t))$$
$$= (d_1 + d_2) \cos(\omega_0 t) + (i d_1 - i d_2) \sin(\omega_0 t)$$
$$= \boxed{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}$$

A hely, a sebesség és a gyorsulás:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \right)$$

$$Ell.: m \left(-\omega_0^2 \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \right)\right) +$$
$$+ k \left(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \right) =$$
$$= -m \omega_0^2 + k = -m \frac{k}{m} + k = 0$$

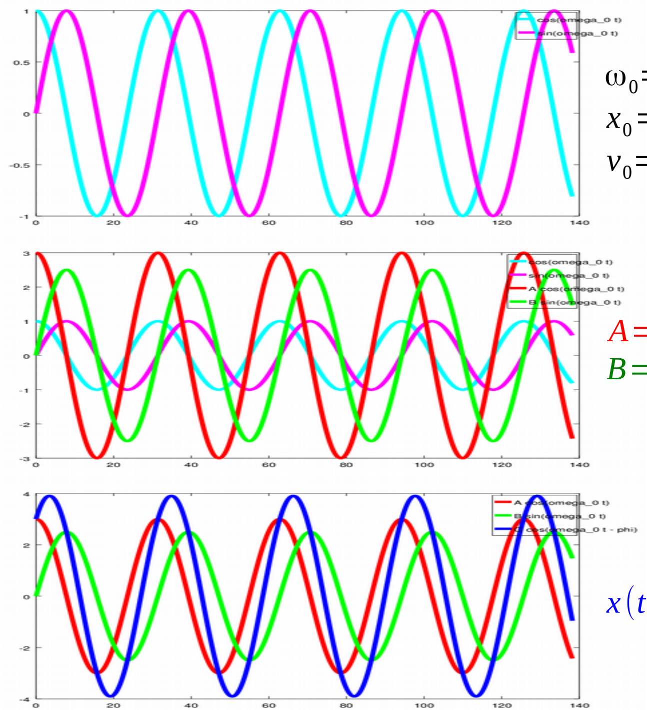
Kezdeti feltételek, ha $t_0 = 0$:

$$x_0 = A \cdot \cos 0 + B \cdot \sin 0 \rightarrow A = x_0$$

$$v_0 = -\omega_0 A \cdot \sin 0 + \omega_0 B \cdot \cos 0 \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)}$$



$\omega_0 = 0{,}2\,\text{rad/s}$

$x_0 = 3\,\text{cm}$

$v_0 = 0{,}5\,\text{cm/s}$

$A = 3\,\text{cm}$

$B = 2{,}5\,\text{cm}$

$x(t)$

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – III.

$$m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=0$$

Az általános megoldás átírása:

$$\boxed{x(t)}=d_1\cdot(\cos(\omega_0 t)+i\sin(\omega_0 t))+$$
$$+d_2\cdot(\cos(-\omega_0 t)+i\sin(-\omega_0 t))$$
$$=(d_1+d_2)\cos(\omega_0 t)+(i d_1-i d_2)\sin(\omega_0 t)$$
$$=\boxed{A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)}$$

A hely, a sebesség és a gyorsulás:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(t)=-\omega_0 A\sin(\omega_0 t)+\omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$
$$\ddot{x}(t)=-\omega_0^2(A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t))$$

$$Ell.: m(-\omega_0^2(A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)))+$$
$$+k(A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t))=$$
$$=-m\omega_0^2+k=-m\frac{k}{m}+k=0$$

Kezdeti feltételek, ha $t_0=0$:

$$x_0=A\cdot\cos 0+B\cdot\sin 0\rightarrow A=x_0$$

$$v_0=-\omega_0 A\cdot\sin 0+\omega_0 B\cdot\cos 0\rightarrow B=\frac{v_0}{\omega_0}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$\boxed{x(t)=x_0\cdot\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\cdot\sin(\omega_0 t)}$$

A két harmonikus függvény összege átírható

$$x(t)=C\cdot\cos(\omega_0 t-\phi_0)$$

ahol C: a rezgés *amplitúdója*

ϕ_0: a rezgés *kezdeti fázisszöge*

Trigonometriai azonosságok:

$$x(t)=C\cdot\cos(\omega_0 t-\phi_0)$$
$$=C\cdot\cos(-\phi_0)\cdot\cos(\omega_0 t)-C\cdot\sin(-\phi_0)\cdot\sin(\omega_0 t)$$
$$=C\cdot\cos\phi_0\cdot\cos(\omega_0 t)+C\cdot\sin\phi_0\cdot\sin(\omega_0 t)$$

$$\rightarrow A=C\cos\phi_0,\ B=C\sin\phi_0,\ C=\sqrt{A^2+B^2}$$

Ebből a felírásból:

$$x_{max}=C$$
$$\dot{x}(t)=-\omega_0 C\sin(\omega_0 t-\phi_0)\ \rightarrow\ \dot{x}_{max}=\omega_0 C$$
$$\ddot{x}(t)=-\omega_0^2 C\cos(\omega_0 t-\phi_0)\ \rightarrow\ \ddot{x}_{max}=\omega_0^2 C$$
$$\ddot{x}(t)=-\omega_0^2 x(t)$$

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – IV.

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$$

Az általános megoldás átírása:

$$\boxed{x(t)} = d_1 \cdot (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) +$$
$$+ d_2 \cdot (\cos(-\omega_0 t) + i \sin(-\omega_0 t))$$
$$= (d_1 + d_2)\cos(\omega_0 t) + (i d_1 - i d_2)\sin(\omega_0 t)$$
$$= \boxed{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}$$

A hely, a sebesség és a gyorsulás:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$$

$$Ell.: m(-\omega_0^2(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))) +$$
$$+ k(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) =$$
$$= -m\omega_0^2 + k = -m \frac{k}{m} + k = 0$$

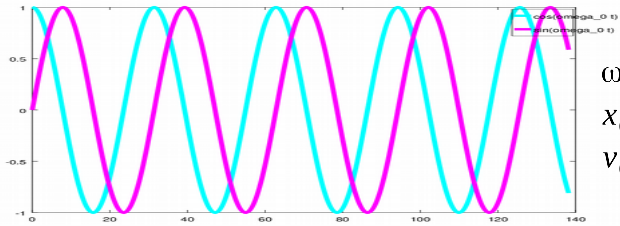
Kezdeti feltételek, ha $t_0 = 0$:

$$x_0 = A \cdot \cos 0 + B \cdot \sin 0 \rightarrow A = x_0$$

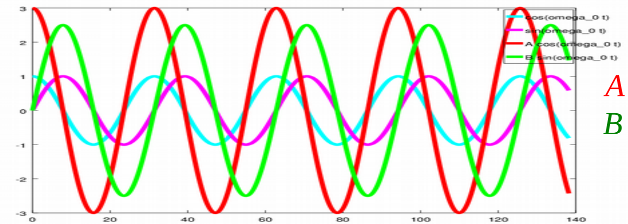
$$v_0 = -\omega_0 A \cdot \sin 0 + \omega_0 B \cdot \cos 0 \rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

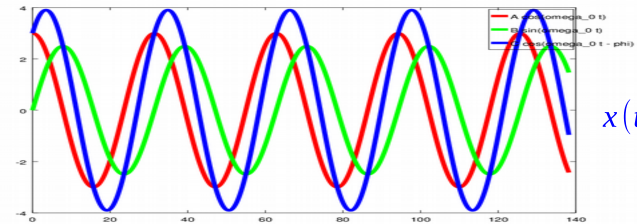
$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)}$$



$\omega_0 = 0{,}2\,\mathrm{rad/s}$
$x_0 = 3\,\mathrm{cm}$
$v_0 = 0{,}5\,\mathrm{cm/s}$



$A = 3\,\mathrm{cm}$
$B = 2{,}5\,\mathrm{cm}$



$x(t)$

$C = 3{,}905\,\mathrm{cm}$

A két harmonikus függvény összege átírható

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

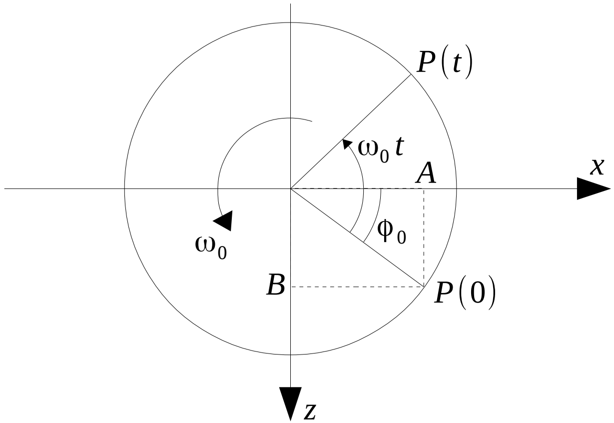
ahol C: a rezgés *amplitúdója*
ϕ_0: a rezgés *kezdeti fázisszöge*

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – V.

$A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$

Miért saját *kör* frekvencia?

Az origó körül ω_0 szögsebességel forgó merev test egy pontjának az egyik koordinátája megegyezik $x(t)$-vel.



$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)=C\cdot\cos(\omega_0 t-\phi_0)$$

A csillapítatlan szabadrezgés *periódikus* azaz:

$\exists T_0>0$ amire $x(t)=x(t+T_0)\forall t$

A legkisebb T_0 neve a *periódusidő*, vagy *rezgésidő*.

A harmonikus $x(t)$ függvényből:

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

A periódusidő egy teljes rezgés megtételéhez szükséges idő.

A periódusidő fordítottja az egységnyi idő alatt megtett rezgések száma.

Ez a rezgés *sajátfrekvenciája* vagy *önrezgésszáma*.

$$n_0=\frac{1}{T_0}=\frac{\omega_0}{2\pi}$$

(Mértékegysége [1/s]=Hz, Hertz➔ ezt halljuk)

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer szabadrezgése – VI.

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$$

Sajátkörfrekvencia közelítő számítása

Ha az önsúly hatására a szabadsági fok elmozdulása e_0, akkor a rugómerevség: $k = \frac{m \cdot g}{e_0}$

Ezt behelyettesítve a sajátkörfrekvencia képletébe: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{e_0 m}} = \sqrt{\frac{g}{e_0}}$

Az önrezgésszám pedig: $n_0 = \frac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{e_0}}$

A távolságokat cm-ben behelyettesítve (azaz $g = 981\,\text{cm/s}^2$-ből):

$$n_0 = \frac{4{,}985}{\sqrt{e_0}} \approx \frac{5}{\sqrt{e_0}}$$

Egyszerű, a hiba kb. $3‰$, de e_0-t cm-ben kell behelyettesíteni!!!

A rugóerő (ami a rugóról a testre hat):

$$f_r(t) = k \cdot x(t) = k\left(x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t)\right)$$

a maximuma: $f_{r,max} = k \cdot x_{max}$

a rugóra (rugalmas szerkezetre) ható erő ennek ellentettje

➔ azonos nagyság, ellentétes irány

Példa

Két végén megtámasztott acél cső sajátrezgésideje, ha adott: $l = 1{,}2\,\text{m}$, $\varphi = 3\,\text{cm}$ (külső átmérő), $v = 2\,\text{mm}$, $\varrho = 7{,}85\,\text{g/cm}^3$, $E = 210\,\text{GPa}$

Megoldás

$$EI = E \cdot \frac{R^4 - B^4}{4}\pi = 3639\,\text{Nm}^2$$

$$k = \frac{48\,EI}{l^3} = 101085\,\text{N/m}$$

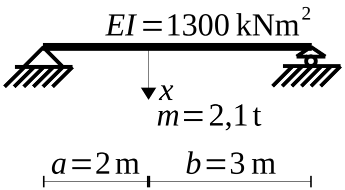
$$m = \frac{17}{35} \cdot \varrho \cdot l \cdot (R^2 - B^2)\pi = 1{,}657\,\text{kg}$$

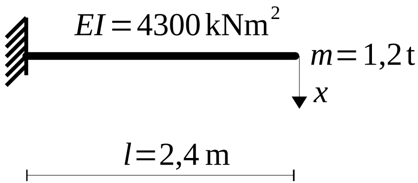
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{101085}{1{,}657}} = 354{,}4\,\text{rad/s}$$

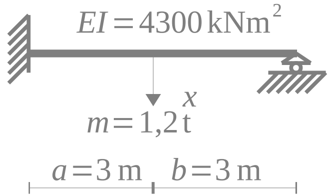
$$n_0 = 56{,}4\,\text{Hz}, \quad T_0 = 0{,}01773\,\text{s}$$

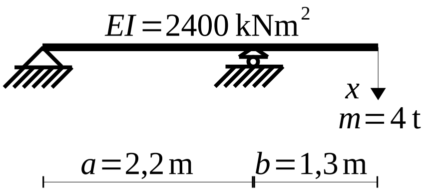
Egyszabadságfokú rendszer jellemzői – sajátkörfrekvencia HF

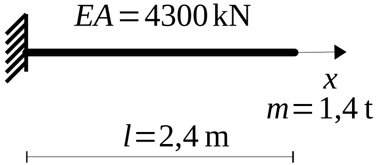
Számítsa ki az alábbi szerkezetek sajátkörfrekvenciáját, önrezgésszámát, periódusidejét!
(Az x koordináta jelöli a szabadságfok helyét.)

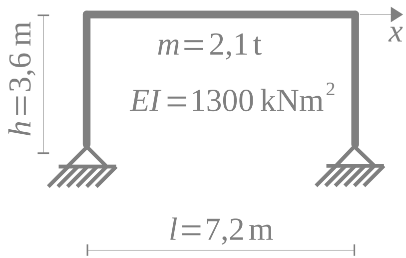


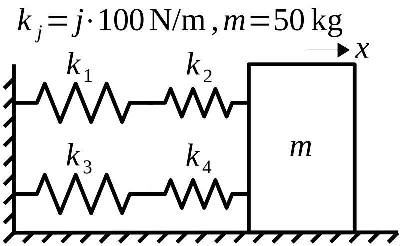


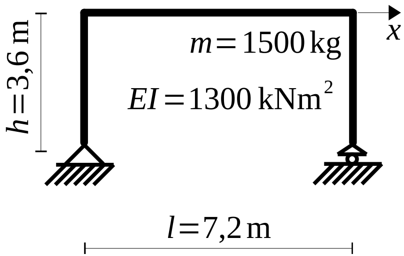


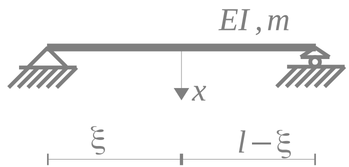












Összefoglalás

rezgés

szabadságfok

rugómerevség

csillapítás

gerjesztés

szabadrezgés

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$$

sajátkörfrekvencia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

periódusidő

önrezgésszám

kezdeti feltételek

Mit tanultunk eddig?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

szabadságfok
modell
merevség, helyettesítő merevség
tömeg
csillapítás
általános mozgás differenciálegyenlete

csillapított, csillapítatlan rezgés
gerjesztett rezgés, szabadrezgés

csillapítatlan szabadrezgés
sajátkörfrekvencia
önrezgésszám, periódusidő

Mit fogunk tanulni ma?

Egyszabadságfokú csillapított rendszer mechanikai rezgései:

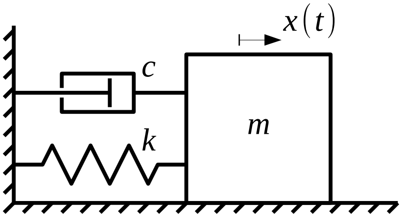
mozgás differenciálegyenlete
általános megoldás menete
megoldási lehetőségek, a csillapítás jellemzése

Egyszabadságfokú csillapítatlan rendszer gerjesztett rezgései:

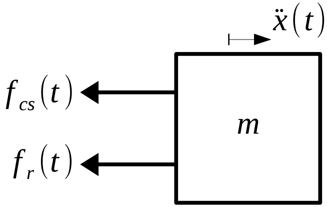
mozgás differenciálegyenlete
általános megoldás menete
megoldás

Csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = -f_r(t) - f_{cs}(t)$

lineáris rugó: $f_r(t) = k \cdot x(t)$

seb. arányos csill.: $f_{cs}(t) = c \cdot \dot{x}(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0) = x_0$, és $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Megoldás

Keressük az általános megoldást az alábbi alakban:

$$x(t) = d \cdot e^{\lambda t}$$

Így: $\dot{x}(t) = d \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t) = d \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

Behelyettesítve a DE-be:

$$m \cdot d \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + c \cdot d \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + k \cdot d \cdot e^{\lambda t} = 0$$

A *karakterisztikus egyenlet*:

$$m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k = 0$$

Amiből: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\dfrac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2 - \dfrac{k}{m}}$

Vezessük be a $\varrho = \dfrac{c}{2m}$ mennyiséget

(ez végső soron egy, a csillapítást jellemző fajlagos érték),

és használjuk az $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ sajátkörfrekvenciát:

$$\lambda_{1,2} = -\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2}$$

Csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – II.

Def.: $\textit{kritikus csillapítás}: c_{kr} = 2\sqrt{k \cdot m}$ ekkor $\varrho_{kr} = \omega_0$

$$\lambda_{1,2} = -\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \varrho = \frac{c}{2m} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

A csillapítás aktuális értékétől függően három eset lehetséges:

1. Nagy csillapítás: ha $c > c_{kr}$ és így $\varrho > \omega_0$

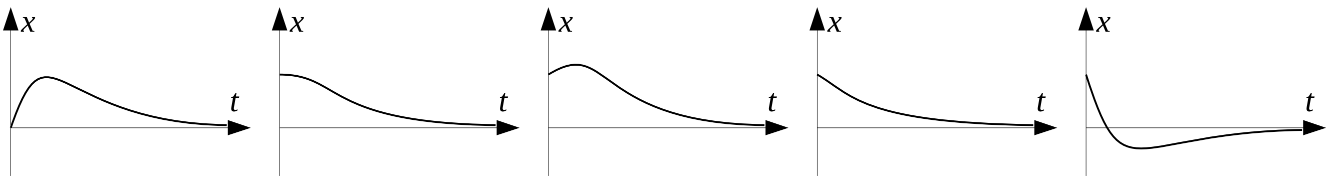
Ekkor $\sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2}$ valós (és kisebb ϱ-nál), így λ_1 és λ_2 két valós (negatív) gyök, ezért a megoldás:

$$x(t) = d_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + d_2 e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Mindkét exponenciális függvény aszimptotikusan tart a nullához (azaz az egyensúlyi helyzethez).
Nem alakul ki tényleges rezgés.
d_1 és d_2 értéke a kezdeti értékektől függ (x_0 és v_0)

Az elmozdulásfüggvény jellege néhány típus lehet:

$x_0 = 0$	$x_0 \neq 0$	$x_0 \neq 0$	$x_0 \neq 0$
$v_0 \neq 0$	$v_0 = 0$	$x_0 \cdot v_0 > 0$	$x_0 \cdot v_0 < 0$



Csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – III.

Def.: *kritikus csillapítás*: $c_{kr}=2\sqrt{k\cdot m}$ ekkor $\varrho_{kr}=\omega_0$

$\lambda_{1,2}=-\varrho\pm\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}$, $\varrho=\dfrac{c}{2m}$, $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$

A csillapítás aktuális értékétől függően három eset lehetséges:

2. Kritikus csillapítás: ha $c=c_{kr}$ és így $\varrho=\omega_0$

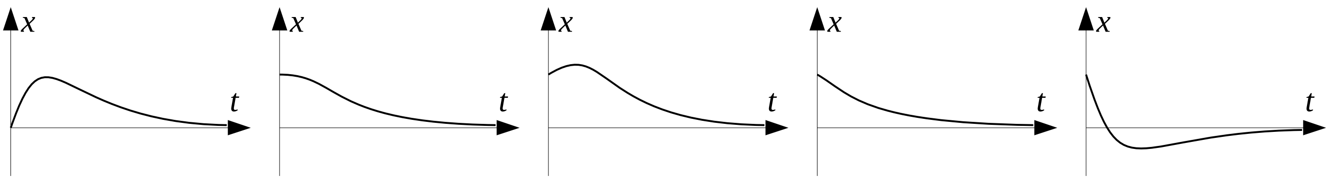
Ekkor $\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}=0$, így a $\lambda_1=\lambda_2=-\varrho$ valós (negatív) gyök kétszeres, ezért a megoldás:

$$x(t)=d_1\cdot e^{-\varrho\cdot t}+d_2\cdot t\cdot e^{-\varrho\cdot t}$$

Mindkét függvény aszimptotikusan tart a nullához (azaz az egyensúlyi helyzethez).
d_1 és d_2 értéke a kezdeti értékektől függ (x_0 és v_0)

Az elmozdulásfüggvény jellege néhány típus lehet:

$x_0=0$, $v_0\neq 0$	$x_0\neq 0$, $v_0=0$	$x_0\neq 0$, $x_0\cdot v_0>0$	$x_0\neq 0$, $x_0\cdot v_0<0$



Csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – IV.

Def.: $\textit{kritikus csillapítás}: c_{kr}=2\sqrt{k\cdot m}$ ekkor $\varrho_{kr}=\omega_0$ $\lambda_{1,2}=-\varrho\pm\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}$, $\varrho=\dfrac{c}{2m}$, $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$

A csillapítás aktuális értékétől függően három eset lehetséges:

3. Kis csillapítás: ha $c<c_{kr}$ és így $\varrho<\omega_0$

Ekkor $\sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}$ képzetes, így λ_1 és λ_2 két komplex gyök.

Legyen $c=\xi\cdot c_{kr}$ (azaz jellemezzük a csillapítás mértékét a dimenziótlan $\xi<1$ számmal)

$$\text{Így } \varrho=\frac{\xi 2\sqrt{k\cdot m}}{2m}=\xi\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}=\xi\cdot\omega_0$$

$$\text{és } \sqrt{\varrho^2-\omega_0^2}=\omega_0\cdot\sqrt{\xi^2-1}=\omega_0\cdot\sqrt{-\left(1-\xi^2\right)}=\omega_0\cdot\sqrt{-1}\sqrt{1-\xi^2}=i\,\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}=i\,\omega_0^*$$

ω_0^* a csillapított sajátkörfrekvencia (és van csillapított periódusidő T_0^*, ill. önrezgésszám n_0^* is)

$$\lambda_1=-\varrho+i\,\omega_0^*\ ,\ \lambda_2=-\varrho-i\,\omega_0^* \ \rightarrow \boxed{x(t)}=d_1\cdot e^{\left(-\varrho+i\omega_0^*\right)t}+d_2\cdot e^{\left(-\varrho-i\omega_0^*\right)t}=d_1\cdot e^{-\varrho t}e^{+i\omega_0^* t}+d_2\cdot e^{-\varrho t}e^{-i\omega_0^* t}$$

$$=e^{-\varrho t}\cdot\left(d_1\cdot e^{+i\omega_0^* t}+d_2\cdot e^{-i\omega_0^* t}\right)=\boxed{e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)}$$

A megoldás két függvény szorzata: $e^{-\varrho t}$ exponenciálisan lecsengő

$A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)$ harmonikus függvény

Csillapított szabadrezgés – kis csillapítás I.

$$\varrho = \xi \cdot \omega_0 \;,\; \omega_0^* = \omega_0 \cdot \sqrt{1-\xi^2}$$

A megoldás általános alakja: $x(t) = e^{-\varrho t} \cdot \left(A \cdot \cos\left(\omega_0^* t\right) + B \cdot \sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$

Kezdeti feltételek: $x(0) = x_0 \;,\; \dot{x}(0) = v_0$

Ehhez: $\dot{x}(t) = -\varrho \cdot e^{-\varrho t} \cdot \left(A \cdot \cos\left(\omega_0^* t\right) + B \cdot \sin\left(\omega_0^* t\right)\right) + e^{-\varrho t} \cdot \left(-A \cdot \omega_0^* \cdot \sin\left(\omega_0^* t\right) + B \cdot \omega_0^* \cdot \cos\left(\omega_0^* t\right)\right)$

$$x_0 = 1 \cdot (A \cdot 1 + B \cdot 0) \rightarrow A = x_0$$

$$v_0 = -\varrho \cdot 1 \cdot (x_0 \cdot 1 + B \cdot 0) + 1 \cdot (-x_0 \cdot 0 + B \cdot \omega_0^* \cdot 1) \rightarrow B = \frac{v_0 + \varrho x_0}{\omega_0^*} = \frac{v_0}{\omega_0^*} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} x_0$$

A megoldás kezdeti feltételeket kielégítő alakja: $x(t) = e^{-\varrho t} \cdot \left(x_0 \cdot \cos\left(\omega_0^* t\right) + \frac{v_0 + \varrho x_0}{\omega_0^*} \cdot \sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$

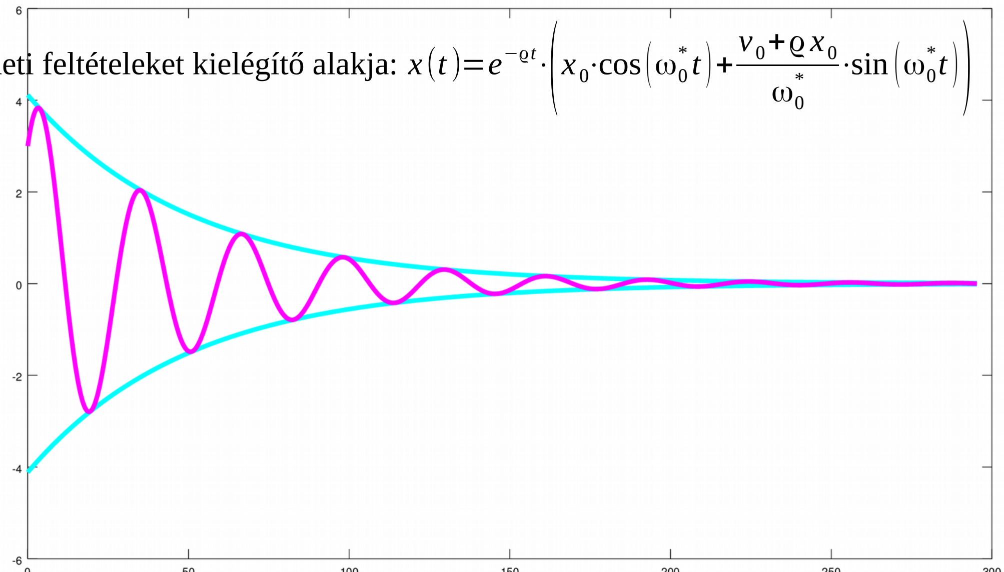
Pl.:

$\omega_0 = 0{,}2\,\mathrm{rad/s}$

$\xi = 0{,}1$

$x_0 = 3\,\mathrm{cm}$

$v_0 = 0{,}5\,\mathrm{cm/s}$



Csillapított szabadrezgés – kis csillapítás II.

$$\varrho=\xi\cdot\omega_0\ ,\ \omega_0^*=\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$$

$$x(t)=e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$$

A csillapítás hatása a csillapítatlan esethez képest kettős:

1. Az amplitúdó csökkenése
   az $e^{-\varrho t}$ tag miatt.

2. A "periódusidő" megnövekedése
   az $\omega_0^*=\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}$ tag miatt: $T_0^*=\dfrac{2\pi}{\omega_0^*}=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Nézzük két, egymáshoz képest T_0^* idő különbséggel mérhető elmozdulás hányadosát:

$$\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}=\frac{e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)}{e^{-\varrho(t+T_0^*)}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^*(t+T_0^*)\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^*(t+T_0^*)\right)\right)}=\frac{e^{-\varrho t}}{e^{-\varrho(t+T_0^*)}}\cdot\frac{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)}{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t+\omega_0^* T_0^*\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t+\omega_0^* T_0^*\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{e^{-\varrho t}}}{\cancel{e^{-\varrho t}}\cdot e^{-\varrho T_0^*}}\cdot\cancel{\frac{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)}{A\cdot\cos\left(\omega_0^* t+2\pi\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t+2\pi\right)}}=\frac{1}{e^{-\varrho T_0^*}}=\boxed{e^{\varrho T_0^*}}=e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

ez hányados csak a csillapítástól függ
akár ezzel is jellemezhető a csillapítás

A gyakorlatban a hányados e-alapú logaritmusát használják.
Ennek neve *logaritmikus dekrementum*:

$$\boxed{\vartheta}=\ln\frac{x(t)}{x(t+T_0^*)}=\boxed{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Ha a (kis) csillapítás kicsi $(\xi\ll 1)$,
akkor $\sqrt{1-\xi^2}\approx 1$ és

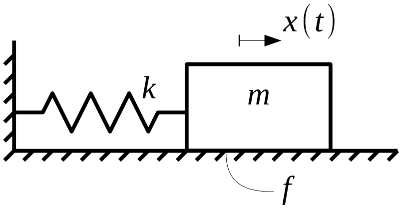
$$\vartheta\approx 2\pi\xi\ ,$$

$$\xi\approx\frac{\vartheta}{2\pi}$$

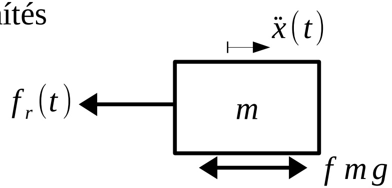
A logaritmikus dekrementum gyakorlati haszna:
a kitérés maximumértékei (egymástól T_0^* időben) könnyen mérhetők
→ hányadosuk számítható → a szerkezet csillapítása jellemezhető.

Súrlódással csillapított szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=\pm f_s - f_r(t)$

lineáris rugó: $f_r(t)=k\cdot x(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)\pm f\,m\,g+k\cdot x(t)=0}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0)=x_0$, és $\dot{x}(t_0)=v_0$.

Megoldás

Válasszuk szét a mozgást három szakaszra:

1. előre mozog a test $(\dot{x}(t)>0)$:

$$m\ddot{x}(t)+f\,m\,g+k\,x(t)=0$$

2. hátra mozog a test $(\dot{x}(t)<0)$:

$$m\ddot{x}(t)-f\,m\,g+k\,x(t)=0$$

3. áll (és többé nem mozdul) a test

$$\dot{x}(t)=0 \text{ és } |k\cdot x(t)|\leq f\,m\,g$$

Az első két eset külön-külön lineáris feladat.
Ha az $f\,m\,g$-t átvinnénk a túloldalra, akkor egy gerjesztett rezgés differenciálegyenletét kapnánk.

$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=-f\,m\,g$$

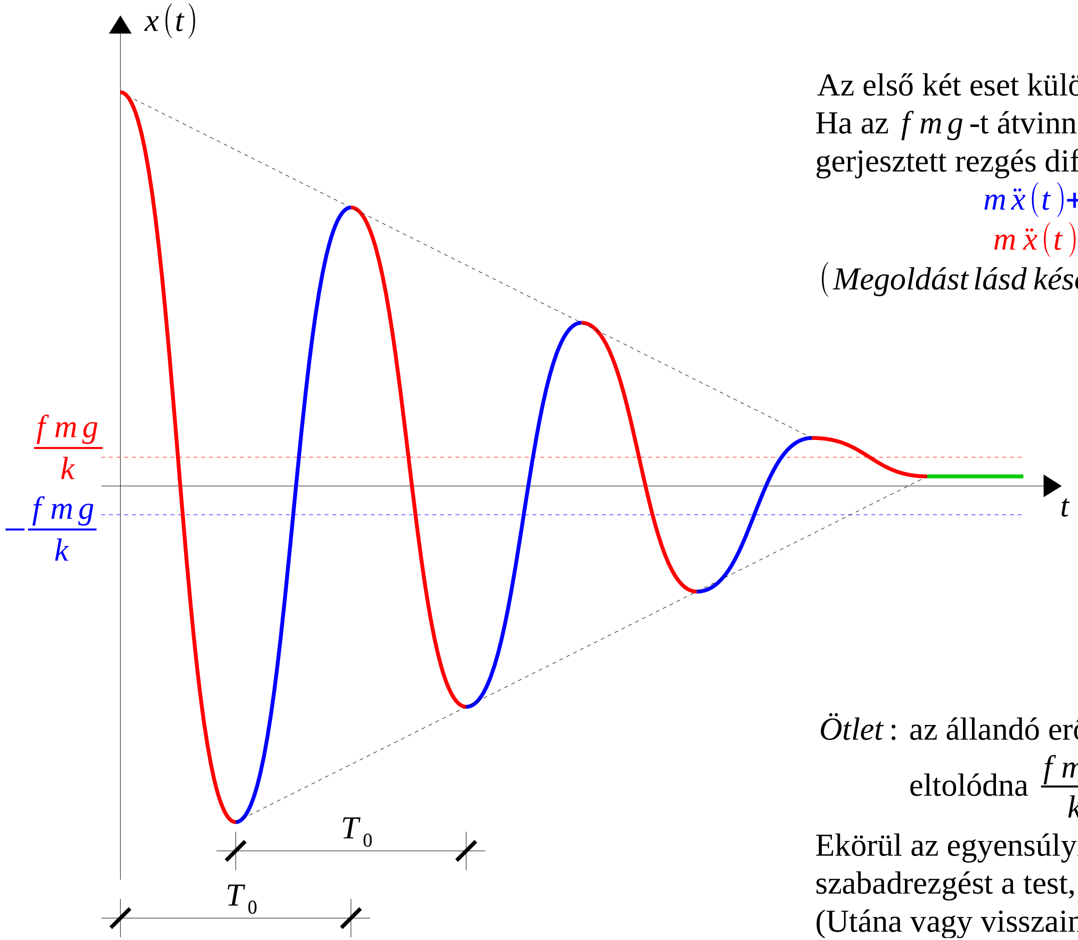
$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=f\,m\,g$$

$(\textit{Megoldást lásd később.})$

Ötlet: az állandó erő miatt az egyensúlyi helyzet eltolódna $\frac{f\,m\,g}{k}$-val (hátra ill. előre)

Ekörül az egyensúlyi helyzet körül végez szabadrezgést a test, amíg meg nem áll.
(Utána vagy visszaindul, vagy ottmarad.)

Súrlódással csillapítatott szabadrezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás II.



Az első két eset külön-külön lineáris feladat.
Ha az $f\,m\,g$ -t átvinnénk a túloldalra, akkor egy gerjesztett rezgés differenciálegyenletét kapnánk.

$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=-f\,m\,g$$

$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=f\,m\,g$$

$(\mathit{Megoldást\ lásd\ később.})$

Ötlet: az állandó erő miatt az egyensúlyi helyzet eltolódna $\frac{f\,m\,g}{k}$ -val (hátra ill. előre)

Ekörül az egyensúlyi helyzet körül végez szabadrezgést a test, amíg meg nem áll.
(Utána vagy visszaindul, vagy ottmarad.)

Rezgések egyéb ábrázolási módja

A másdorendű differenciálegyenlet átírható két elsőrendű differenciálegyenletté.

Például: $m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = 0$

helyett: $m \cdot \dot{v}(t) + c \cdot v(t) + k \cdot x(t) = 0$ és $v(t) = \dot{x}(t)$

vagy átírva: $\dot{x}(t) = v(t)$

$$\dot{v}(t) = -2\varrho\, v(t) - \omega_0^2\, x(t)$$

Bármilyen $x(t), v(t)$ párosból egyértelműen eldönthető, hogy hogyan fog változni ez a két mennyiség.

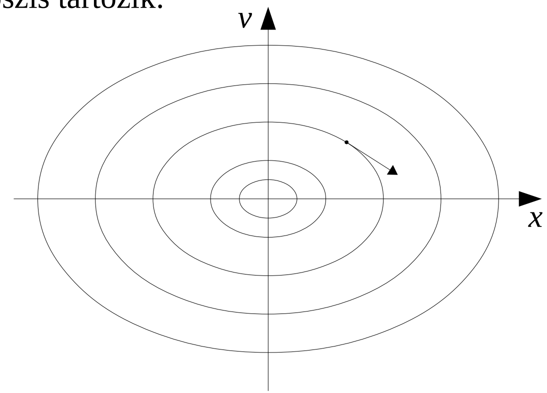
A mozgást akár egy $(x(t), v(t))$ síkon is ábrázolhatjuk.

E sík neve: *fázistér*.

Példa: csillapítatlan szabadrezgés

A fázistérben $\dot{x}(t) = v(t), \dot{v}(t) = -\omega_0^2\, x(t)$

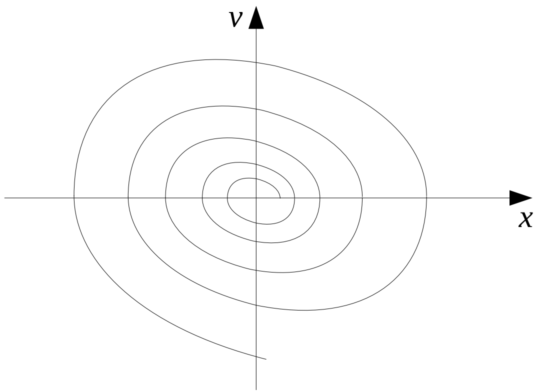
A rezgéshez a kezdeti értékektől függő ellipszis tartozik:



Példa: csillapított szabadrezgés

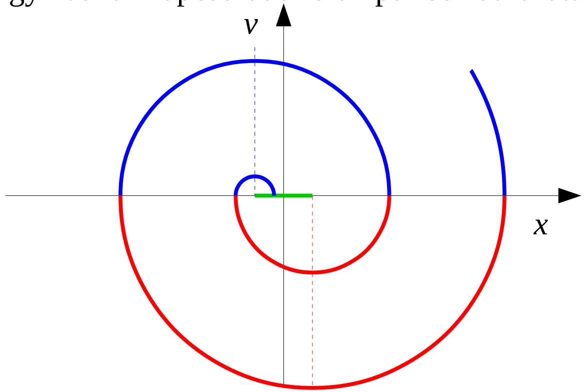
A fázistérben $\dot{x}(t) = v(t), \dot{v}(t) = -2\varrho\, v(t) - \omega_0^2\, x(t)$

Spirálisan befelé tartó vonal:



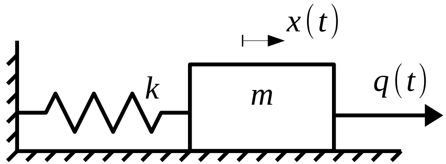
Példa: súrlódás

Egymáshoz kapcsolódó félellipszisek sorozata

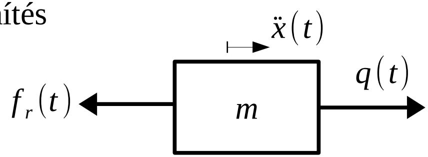


Csillapítatlan rendszer gerjesztett rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = q(t) - f_r(t)$

lineáris rugó: $f_r(t) = k \cdot x(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}$$

közönséges, másodrendű, lineáris, hiányos
állandó együtthatójú, inhomogén

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0) = x_0$, és $\dot{x}(t_0) = v_0$.

Megoldás

A megoldás a homogén differenciálegyenlet általános, és az inhomogén differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldásának összege:

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_g(t)$$

A homogén egyenlet $m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0$ megoldása:
$x_{hom}(t)$ a szabadrezgésnél megismert megoldás:

$$x_{hom}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

(de A és B majd $x_g(t)$-től is függ, ezért a kezdeti) feltételeket még nem helyettesítjük be)

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása a gerjesztéstől függ (ezért g az indexe).

Gerjesztett rezgés – harmonikus gerjesztőerő

Merev test forog ω szögsebességgel egy,
a súlypontján nem átmenő tengely körül.
A súlypont külpontossága legyen r_S.

A súlypont helyzete: $\boldsymbol{r}_S = \begin{bmatrix} r_s \cdot \cos(\omega t - \phi_0) \\ -r_s \cdot \sin(\omega t - \phi_0) \end{bmatrix}$.

A súlypont körmozgást végez, ezért gyorsulása:
$a_n = \omega^2 \cdot r_S$ a forgástengely felé mutat.

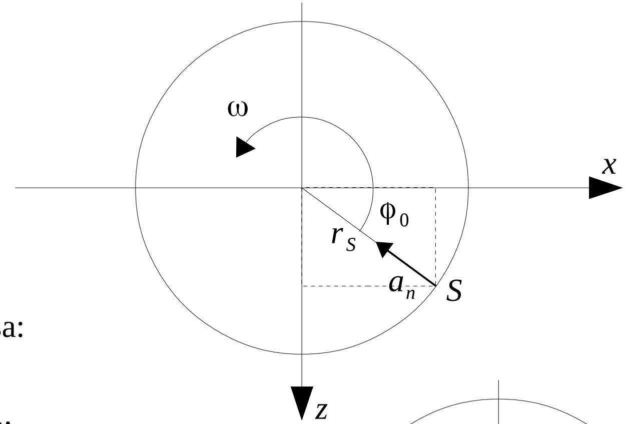
Súlyponttétel: a merev testre ható erők eredője:
$m \cdot a_n$ a forgástengely felé mutat.
Ez az erő a tengelyről adódik át a testre
(nagysága állandó)

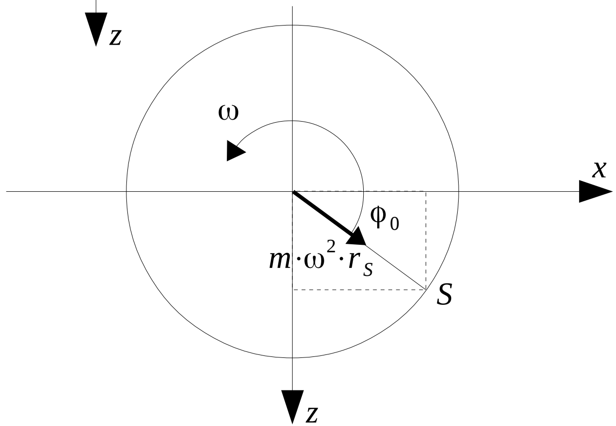
Hatás–ellenhatás: a forgás tengelyére és az
azt megtámasztó szerkezetre ugyanekkora, de
ellentétes irányú erő hat:

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{bmatrix} m \cdot \omega^2 r_S \cos(\omega t - \phi_0) \\ -m \cdot \omega^2 r_S \sin(\omega t - \phi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \cos(\omega t - \phi_0) \\ -q_0 \sin(\omega t - \phi_0) \end{bmatrix}$$

Minket csak a rezgés irányába eső komponens érdekel:
q_0 amplitúdójú, ω körfrekvenciájú harmonikus gerjesztőerő:

$$q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega t) \text{ vagy } q(t) = q_0 \cdot \sin(\omega t)$$

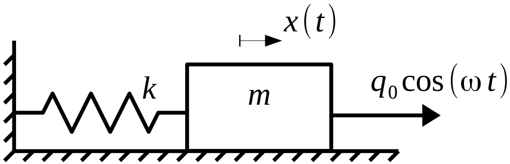




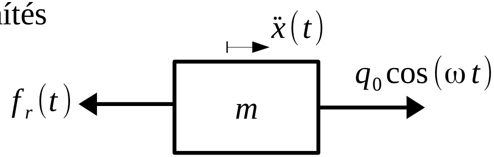
(a másik irányú elmozdulást meggátoljuk,
vagy két, egymással szemben forgó test
miatt azok a komponensek kiejtik egymást)

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=q_0\cos(\omega t)-f_r(t)$

lineáris rugó: $f_r(t)=k\cdot x(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=q_0\cos(\omega t)}$$

közönséges, másodrendű, lineáris, hiányos állandó együtthatójú, inhomogén

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0)=x_0$, és $\dot{x}(t_0)=v_0$.

Megoldás

Keressük a partikuláris megoldást a gerjesztőerő függvényéhez hasonló alakban:

$$x_g(t)=x_{g0}\cdot\cos(\omega t)$$

Így: $\dot{x}_g(t)=-x_{g0}\,\omega\sin(\omega t)$, $\ddot{x}_g(t)=-x_{g0}\,\omega^2\cos(\omega t)$

Behelyettesítve a DE-be:

$$-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\cos(\omega t)+k\cdot x_{g0}\cos(\omega t)=q_0\cdot\cos(\omega t)$$

$\cos(\omega t)$-vel egyszerűsítve:

$$-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}+k\cdot x_{g0}=q_0$$

$$(k-m\cdot\omega^2)\cdot x_{g0}=q_0 \qquad /\text{t.f.h. } k\neq m\omega^2 \Leftrightarrow \omega\neq\omega_0$$

$$x_{g0}=\frac{q_0}{k-m\omega^2}=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{m\omega^2}{k}}=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

ez a modell válasza a gerjesztésre

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás II.

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

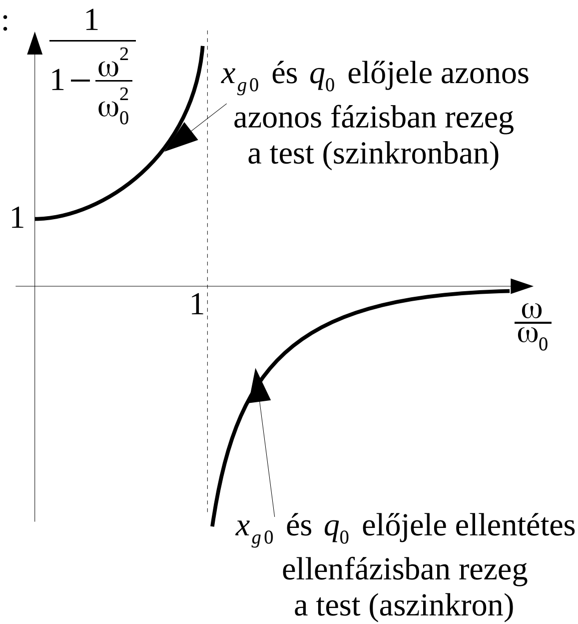
A teljes megoldás:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\boxed{\frac{q_0}{k}}\cdot\boxed{\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos(\omega t)$$

a válaszfüggvény időfüggése (azonos a gerjesztés időfüggésével)

gerjesztés amplitúdója/rugómerevség
→ statikus elmozdulás x_{st}

a két körfrekvencia viszonyától függő tényező:



A válasz írható az alábbi alakban is:

$$x_g(t)=x_{st}\cdot\left|\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right|\cdot\cos(\omega t-\varphi),\quad \text{ahol } \varphi=\begin{cases}0, & \text{ha } \omega<\omega_0\\ \pi, & \text{ha } \omega>\omega_0\end{cases}$$

a válasz φ szöggel 'késik' a gerjesztéshez képest
rezonancia esetén $\varphi=\pi/2$

Ha $\omega=\omega_0$ (azaz a gerjesztőerő körfrekvenciája azonos a sajátkörfrekvenciával), akkor a válaszfüggvény $x_g(t)=x_{g0}t\sin(\omega t)$ lenne, maximuma a végtelenhez tartana. Ennek az esetnek a neve *rezonancia*.

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás III.

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

A kezdeti feltételekkel ($x(0)=x_0, \dot{x}(0)=v_0$):

$$x(t)=\left(x_0-\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)+\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

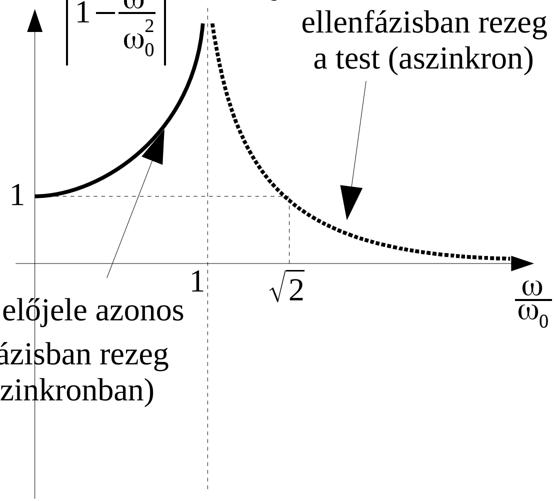
A valóságban mindig van valamilyen csillapítás.
Ezért a $\omega_0 t$-s tagok lecsengenek (ún. tranziens rezgésrész).
Csak ki kell várni.
Ami marad *állandósult rezgésrész*.

$$x_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

Az állandósult rezgésrészből minket csak az amplitúdó érdekel, a fázis általában már nem

$$x_á=\frac{q_0}{k}\cdot\left|\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right|=x_{st}\cdot\mu$$

$$\mu=\left|\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right|$$



x_{g0} és q_0 előjele ellentétes
ellenfázisban rezeg
a test (aszinkron)

x_{g0} és q_0 előjele azonos
azonos fázisban rezeg
a test (szinkronban)

A $\mu=\left|\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right|$ tag neve *rezonanciatényező*.

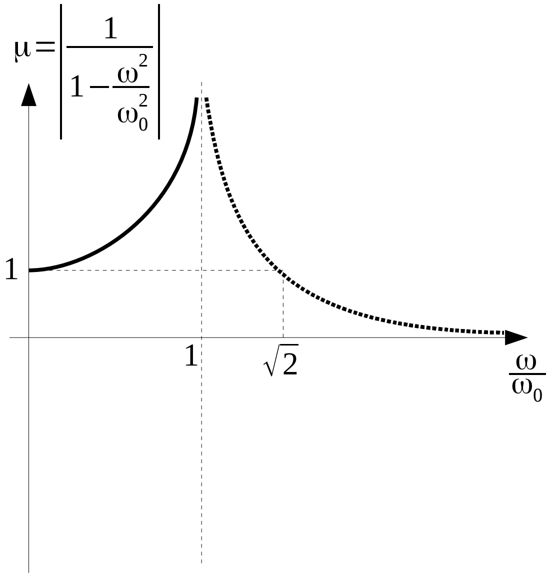
Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás IV.

$x_á(t) = x_{st} \cdot \mu \cos(\omega t)$

Ha $\omega > \sqrt{2}\omega_0$, akkor $\mu < 1$.

Bármilyen kis rezonanciatényező elérhető, de

- a gép felpörgésekor/leállásakor át kell jutni a rezonancián (erős motor/fék, vagy rövid ideig nagy amplitúdó lehet)
- kis $\omega_0 \rightarrow$ kis rugómerevség $\rightarrow$ nagy statikus elmozdulások



A rugóerő értéke az állandósult rezgésrészből:

$$f_r(t) = k \cdot x_g(t) = k \cdot \frac{q_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t) = q_0 \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega t)$$

A rugóerő szélsőértéke az állandósult rezgésrészből:

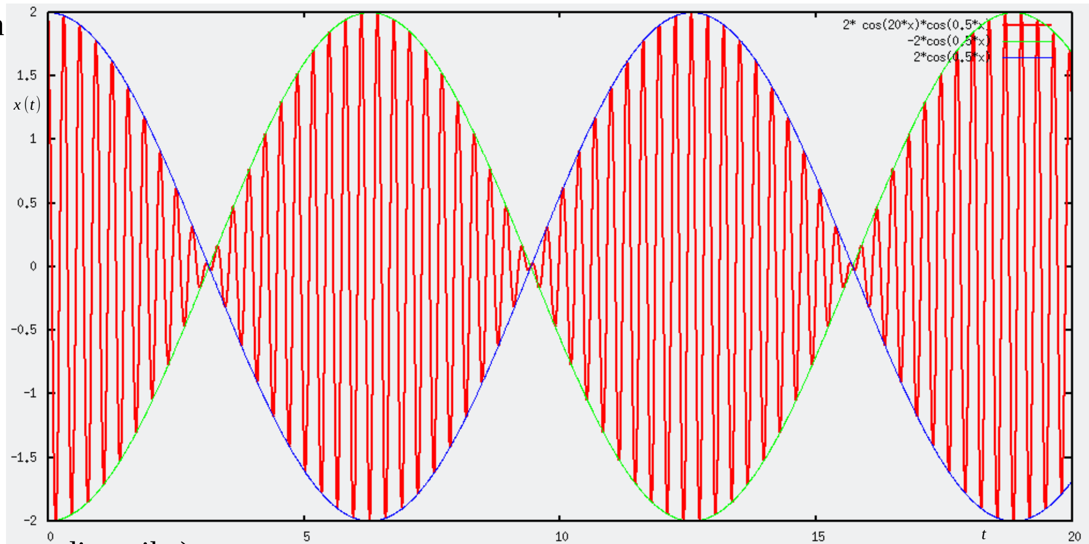
$$f_r^{max} = q_0 \cdot \left| \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right| = q_0 \cdot \mu$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet, megoldás V.

Ha $|\omega-\omega_0|$ kicsiny (közel a rezonanciához): Legyen $\bar{\omega}=\dfrac{\omega_0+\omega}{2}, \Delta\omega=\dfrac{\omega_0-\omega}{2}$

$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 t)+\cos(\omega t)&=\cos(\bar{\omega} t+\Delta\omega t)+\cos(\bar{\omega} t-\Delta\omega t)=\\&=\cos(\bar{\omega} t)\cos(\Delta\omega t)-\sin(\bar{\omega} t)\sin(\Delta\omega t)+\cos(\bar{\omega} t)\cos(-\Delta\omega t)-\sin(\bar{\omega} t)\sin(-\Delta\omega t)=\\&=2\cos(\bar{\omega} t)\cos(\Delta\omega t)\end{aligned}$$

Eredmény: egy $\Delta\omega$-tól függően változó amplitúdójú rezgés a gerjesztés körfrekvenciája és a sajátkörfrekvencia közelében levő átlagos körfrekvenciával. Ez a jelenség (az amplitúdó hullámzó változása) a *lebegés*.



pl.:

$\omega=19{,}5\,\mathrm{rad/s}$

$\omega_0=20{,}5\,\mathrm{rad/s}$

$\bar{\omega}=20\,\mathrm{rad/s}$ (gyors dinamika)

$\Delta\omega=0{,}5\,\mathrm{rad/s}$ (lassú dinamika)

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rendszer rezgése – szinuszos gerjesztőerő

A differenciálegyenlet alakja, ha $q(t)=q_0 \sin(\omega t)$:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q_0 \sin(\omega t)$$

A megoldás feltételezett alakja:

$$x_g(t) = x_{g0} \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}_g(t) = -\omega^2 x_{g0} \sin(\omega t)$$

A teljes megoldás:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{q_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega t)$$

Csak a harmonikus függvény változott.

Mintha az időt eltoltuk volna $\frac{\pi}{2\omega}$ *-val.*

Összefoglalás

csillapított szabadrezgés

nagy, kritikus, kis csillapítás

logaritmikus dekrementum

harmonikus gerjesztés

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = q_0 \cdot \cos(\omega t)$$

rezgés azonos / ellenfázisban

rezonancia

rezonanciatényező

állandósul rezgésrész

lebegés

Mit tanultunk eddig?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

általános mozgás differenciálegyenlete

csillapítatlan szabadrezgés
sajátkörfrekvencia

csillapított szabadrezgés
exponenciálisan lecsengő rezgés

harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés
rezonanciatényező

Mit fogunk tanulni ma?

Egyszabadságfokú csillapított rendszer gerjesztett rezgései:

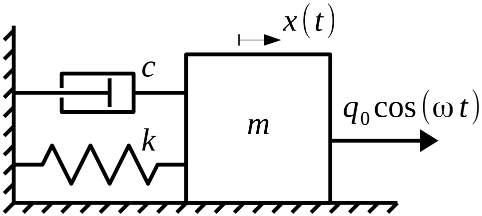
mozgás differenciálegyenlete
általános megoldás menete
megoldás

Egyszabadságfokú rendszer rezgései: általános gerjesztés

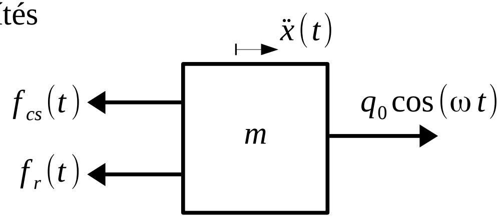
támaszrezgés
periódikus gerjesztés
nemperiódikus gerjesztés

Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – I.

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=q_0\cos(\omega t)-f_r(t)-f_{cs}(t)$

lineáris rugó: $f_r(t)=k\cdot x(t)$

seb. arányos csill.: $f_{cs}(t)=c\cdot\dot{x}(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q_0\cos(\omega t)}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0)=x_0$, és $\dot{x}(t_0)=v_0$.

Megoldás

A megoldás a homogén differenciálegyenlet általános, és az inhomogén differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldásának összege:

$$x(t)=x_{hom}(t)+x_g(t)$$

A homogén egyenlet megoldásának általános alakja:

$$x_{hom}(t)=e^{-\varrho t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)$$

Keressük a partikuláris megoldást a gerjesztőerő függvényéhez hasonló alakban:

$$x_g(t)=x_{g0}\cdot\cos(\omega t-\varphi_0)$$

azaz a válasz φ_0 szöggel *késik* a gerjesztéshez képest.

Így: $\dot{x}_g(t)=-x_{g0}\,\omega\sin(\omega t-\varphi_0)$,

$\ddot{x}_g(t)=-x_{g0}\,\omega^2\cos(\omega t-\varphi_0)$

Behelyettesítve a DE-be:

$$-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\cos(\omega t-\varphi_0)-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\sin(\omega t-\varphi_0)+$$
$$+k\cdot x_{g0}\cos(\omega t-\varphi_0)=q_0\cdot\cos(\omega t)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – II.

Behelyettesítve a DE-be:

$$-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\cos(\omega t-\varphi_0)-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\sin(\omega t-\varphi_0)+k\cdot x_{g0}\cos(\omega t-\varphi_0)=q_0\cdot\cos(\omega t)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

A trigonometriai azonosságokat felhasználva:

$$-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\left(\cos(\omega t)\cos\varphi_0+\sin(\omega t)\sin\varphi_0\right)-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\left(\sin(\omega t)\cos\varphi_0-\cos(\omega t)\sin\varphi_0\right)+$$

$$+k\cdot x_{g0}\left(\cos(\omega t)\cos\varphi_0+\sin(\omega t)\sin\varphi_0\right)-q_0\cdot\cos(\omega t)=0$$

az időben szinuszos és koszinuszos tagokat szétválasztva

$$\cos(\omega t)\left(-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\cos\varphi_0+c\cdot\omega\cdot x_{g0}\cdot\sin\varphi_0+k\cdot x_{g0}\cos\varphi_0-q_0\right)+$$

$$+\sin(\omega t)\left(-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\sin\varphi_0-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\cdot\cos\varphi_0+k\cdot x_{g0}\sin\varphi_0\right)=0$$

(1) Ha $\sin(\omega t)=0$ akkor $\cos(\omega t)\neq 0$ és: $-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\cos\varphi_0+c\cdot\omega\cdot x_{g0}\sin\varphi_0+k\cdot x_{g0}\cos\varphi_0-q_0=0$

(2) Ha $\cos(\omega t)=0$ akkor $\sin(\omega t)\neq 0$ és: $-m\cdot\omega^2\cdot x_{g0}\sin\varphi_0-c\cdot\omega\cdot x_{g0}\cos\varphi_0+k\cdot x_{g0}\sin\varphi_0=0$

A (2) egyenletből:

$$\left(k-m\cdot\omega^2\right)\sin\varphi_0=c\,\omega\cos\varphi_0 \;\rightarrow\; \mathrm{tg}\,\varphi_0=\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2} \;\rightarrow\; \varphi_0=\mathrm{arctg}\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}}$$

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+1}}$$

Ezt használjuk fel az (1) egyenletben:

$$x_{g0}\left(\left(k-m\cdot\omega^2\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}\right)^2+1}}+c\cdot\omega\cdot\frac{\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}\right)^2+1}}\right)=q_0$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – III.

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{c\,\omega}{k - m\cdot\omega^2}$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\,\frac{c\,\omega}{k - m\cdot\omega^2}$$

$$x_{g0}\left((k - m\cdot\omega^2)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}\right)^2+1}} + c\cdot\omega\cdot\frac{\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{c\,\omega}{k-m\cdot\omega^2}\right)^2+1}}\right) = q_0$$

$$x_{g0}\left(\frac{(k-m\cdot\omega^2)^2}{\sqrt{(c\,\omega)^2+(k-m\cdot\omega^2)^2}} + \frac{(c\,\omega)^2}{\sqrt{(c\,\omega)^2+(k-m\cdot\omega^2)^2}}\right) = x_{g0}\sqrt{(k-m\cdot\omega^2)^2+(c\,\omega)^2} = q_0$$

Amiből a válasz amplitúdója:

$$x_{g0} = \frac{q_0}{\sqrt{(k-m\cdot\omega^2)^2+(c\,\omega)^2}} = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{m}{k}\cdot\omega^2\right)^2+\left(\frac{c}{k}\,\omega\right)^2}} = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\,\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$c = \xi\cdot 2\sqrt{k\cdot m}$$

$$\frac{2\,\xi\sqrt{k\,m}\,\omega}{k-m\,\omega^2} = \frac{2\,\xi\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

A partikuláris megoldás:

$$x_g(t) = \frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\,\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega\,t - \mathrm{arctg}\,\frac{2\,\xi\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás – IV.

A teljes megoldás:

$$x(t)=e^{-\xi\omega_0 t}\cdot\left(A\cdot\cos\left(\omega_0^* t\right)+B\cdot\sin\left(\omega_0^* t\right)\right)+\boxed{\frac{q_0}{k}}\boxed{\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}}\cos\left(\omega t-\operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

gerjesztés amplitúdója/rugómerevség
→ statikus elmozdulás x_{st}

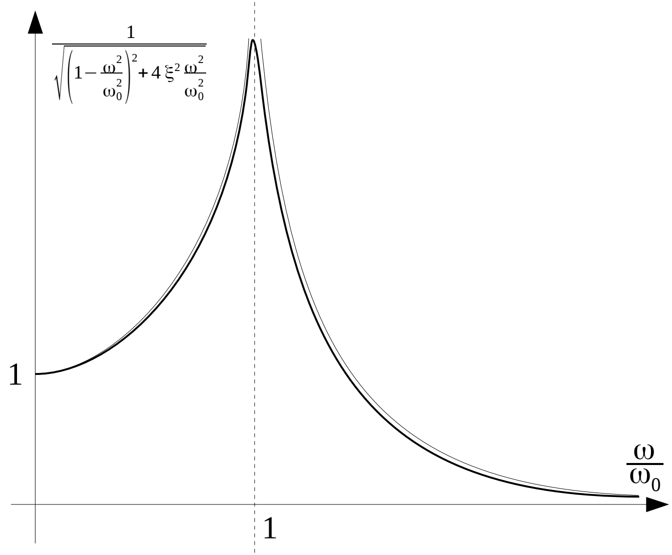
a két körfrekvencia viszonyától függő tényező:

Az állandósult rezgésrész
(most nyilvánvaló a tranziens rész lecsengése):

$$x_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega t-\operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

Az állandósult rezgés amplitúdója:

$$x_á(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}=x_{st}\cdot\mu$$



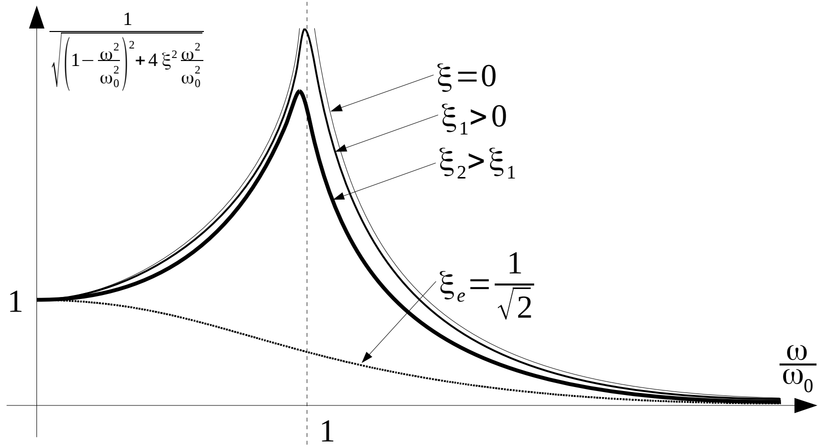
Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – rezonancia, rezonanciatényező I.

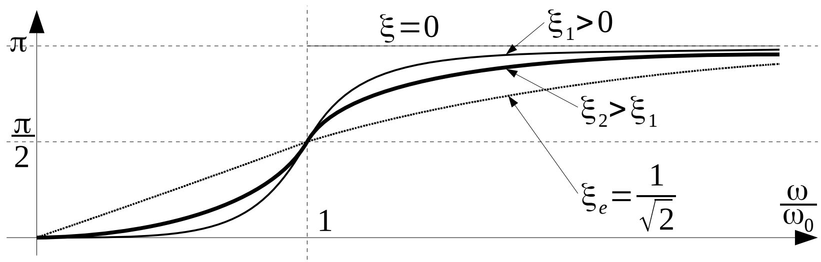
$$x_{áll}(t)=x_{st}\cdot\mu\cdot\cos(\omega t-\varphi_0)$$

$$x_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cos\left(\omega t-\operatorname{arctg}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

$\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ jellemzői:

- pozitív ➔ csillapított rezonanciatényező μ
  (a fázis már φ_0-ban benne van)
- mindig kisebb a csillapítatlan rendszer rezonanciatényezőjénél
- nagyobb csillapításnál kisebb a rezonanciatényező
- nem válik soha végtelenné
- rezonancia $(\omega=\omega_0)$ esetén:
  ¤ csillapítás hatása a legjelentősebb (végtelenből véges)
  ¤ fáziskésés: $\varphi_0=\pi/2$
- μ maximuma eltolódik balra, ahogy ξ növekszik, de
  ¤ ha ξ kicsi, akkor $\mu_{max}\approx\dfrac{1}{2\xi}$
  ¤ ha $\xi>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ akkor $\mu\leq 1$
  ➔ *eszményi* csillapítás: $\xi=1/\sqrt{2}$



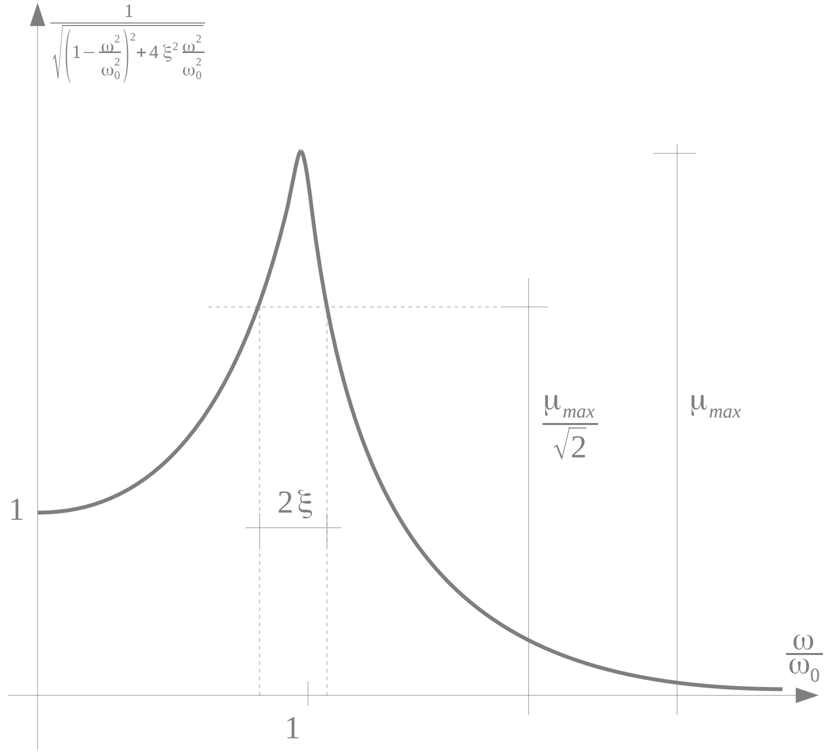


Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés – rezonancia, rezonanciatényező II.

Kísérletek során a $q_0 \cdot \mu$ erőt tudjuk mérni (miközben q_0 is bizonytalan)

Kicsi ξ esetén közelítő módszer használható:

a maximum/$\sqrt{2}$ értékhez tartozó két körfrekvencia közötti sávszélesség 2ξ



Mit fogunk tanulni ma?

Egyszabadságfokú csillapított rendszer gerjesztett rezgései:

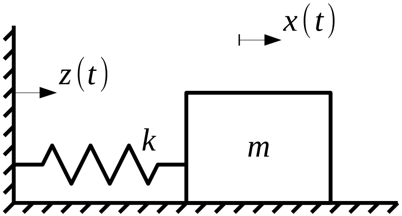
mozgás differenciálegyenlete
általános megoldás menete
megoldás

Egyszabadságfokú rendszer rezgései: általános gerjesztés

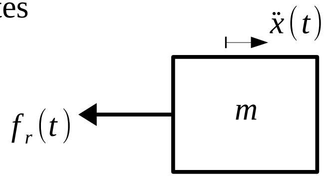
támaszrezgés
periódikus gerjesztés
nemperiódikus gerjesztés

Támaszrezgéssel gerjesztett rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás

Modell



Elkülönítés



N2: $m\cdot\ddot{x}(t)=-f_r(t)$

lineáris rugó: $f_r(t)=k\cdot u(t)$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot u(t)=0}$$

Keressük $x(t)$-t, vagy $u(t)$-t.

Differenciálegyenlet az elmozdulásra

rugó megnyúlása: $u(t)=x(t)-z(t)$

így: $m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot(x(t)-z(t))=0$

amiből:

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=k\cdot z(t)}$$

Differenciálegyenlet a rugó megnyúlására

az elmozdulás: $x(t)=u(t)+z(t)$

a gyorsulás: $\ddot{x}(t)=\ddot{z}(t)+\ddot{u}(t)$

így: $m\cdot(\ddot{z}(t)+\ddot{u}(t))+k\cdot u(t)=0$

amiből:

$$\boxed{m\cdot\ddot{u}(t)+k\cdot u(t)=-m\cdot\ddot{z}(t)}$$

Formailag mindkét eset egy gerjesztett rezgés vizsgálatához felírt differenciálegyenletnek felel meg

➔ a támaszrezgés gerjesztett rezgésként kezelhető

Különbség az eredmények felhasználásában van:

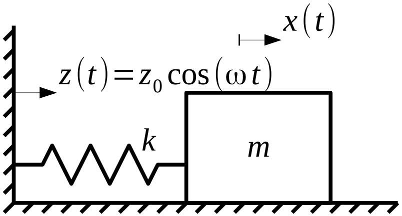
¤ $x(t)$-ből számolható: sebesség, gyorsulás

¤ $u(t)$-ből számolható: alakváltozás, belső erők

Harmonikus támaszrezgéssel gerjesztett rezgés – elmozdulások

$$m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=k\cdot z(t)$$

Modell



$$m\cdot\ddot{x}(t)+k\cdot x(t)=k\cdot z_0\cos(\omega t)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés, ahol
$q_0=k\cdot z_0$

Az állandósult rezgésrész:

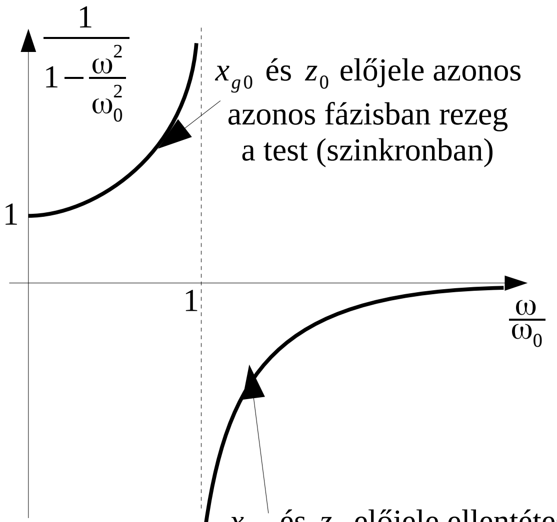
$$x_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)=\frac{(k\cdot z_0)}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)=$$

$$=\boxed{z_0}\boxed{\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cdot\cos(\omega t)$$

a válaszfüggvény időfüggése

gerjesztés amplitúdója

a két körfrekvencia viszonyától függő tényező (mint korábban)



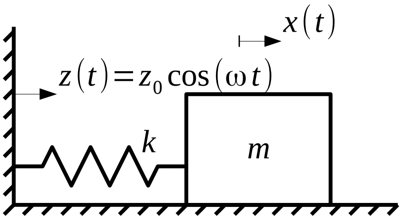
x_{g0} és z_0 előjele azonos
azonos fázisban rezeg a test (szinkronban)

x_{g0} és z_0 előjele ellentétes
ellenfázisban rezeg a test (aszinkron)

$$u(t)=x(t)-z(t)=z_0\left(\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}-1\right)\cos(\omega t)=z_0\frac{1-\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)=z_0\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$$

Harmonikus támaszrezgéssel gerjesztett rezgés – alakváltozások $m\cdot\ddot{u}(t)+k\cdot u(t)=-m\cdot\ddot{z}(t)$

Modell



$$m\cdot\ddot{u}(t)+k\cdot u(t)=m\cdot\omega^2\cdot z_0\cos(\omega t)$$

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés, ahol

$$q_0=m\omega^2\cdot z_0$$

Az állandósult rezgésrész:

$$u_{áll}(t)=\frac{q_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)=\frac{(m\omega^2\cdot z_0)}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cdot\cos(\omega t)=$$

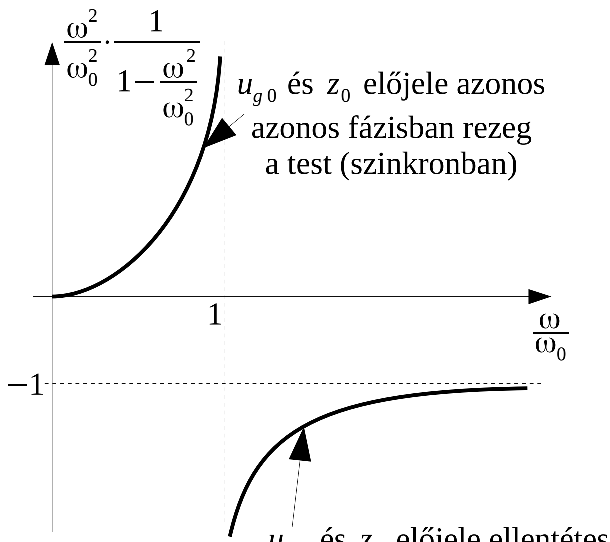
$$=\boxed{z_0}\cdot\boxed{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\cdot\cos(\omega t)$$

a válaszfüggvény időfüggése

gerjesztés amplitúdója

a két körfrekvencia viszonyától függő tényező

(a korábbi $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$-szerese)



u_{g0} és z_0 előjele azonos
azonos fázisban rezeg
a test (szinkronban)

u_{g0} és z_0 előjele ellentétes
ellenfázisban rezeg
a test (aszinkron)

A rugóerő maximuma az állandósult rezgés során:

$$f_r^{max}=z_0\cdot\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|}$$

statikusan ekkora erővel lehetne
ugyanakkora alakváltozást elérni

Általános periódikus gerjesztés – alapelv I.

Működjön két periódikus gerjesztőerő: $m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=q_1\cos(\omega_1 t)+q_2\cos(\omega_2 t)$

A megoldás a homogén egyenlet általános megoldása és az ihomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+\frac{q_1}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_1 t)+\frac{q_2}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_2 t)$$

Az állandósult rezgésrész:

$$x_{áll}(t)=\frac{q_1}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_1 t)+\frac{q_2}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_2 t)$$

Mekkora a maximuma? $(x_á=?)$

Ha ω_1 és ω_2 relatív prímek, akkor előfordulhat olyan t, amikor a két tag

szélsőértékei *egyszerre* és *azonos* *előjellel* lépnek fel. $\rightarrow x_á=\sum_i\left|\frac{q_i}{k}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}}\right|$

Minél több ω_i van, ez az egybeesés annál valószínűtlenebb.
Pontosabb felső határ kellene?

Általános periódikus gerjesztés – alapelv II.

Mekkora az állandósult rezgésrész: $\left(x_{áll}(t) = \sum_i \frac{q_i}{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \cos(\omega_i t) \right)$ maximuma? $(x_á = ?)$

Ha a gerjesztést alkoto harmonikus függvények körfrekvenciái egy közös körfrekvencia többszörösei $(\omega_j = j \cdot \omega_1)$, pl.:

$$q(t) = \sum_j q_j \cos(\omega_j t) = \sum_j q_j \cos(j \omega_1 t)$$

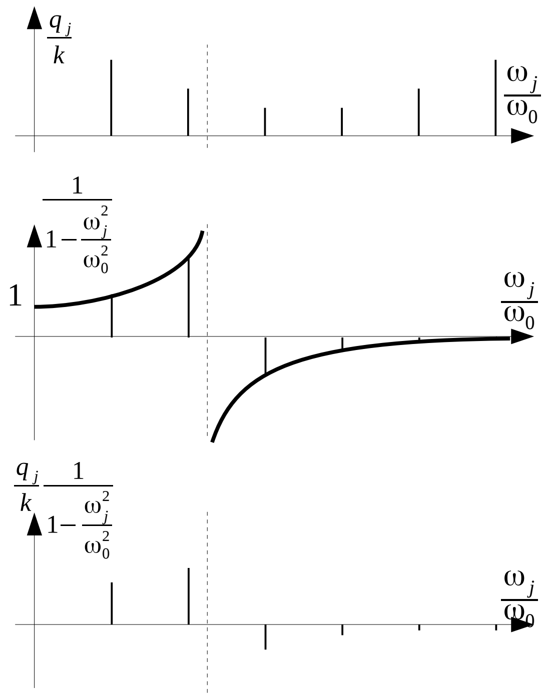
akkor a válasz is periódikus lesz $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ (alap) periódusidővel:

$$x_{áll}(t) = \sum_j \frac{q_j}{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{j^2 \omega_1^2}{\omega_0^2}} \cos(j \omega_1 t)$$

A szélsőérték is T_1 időközönként lép fel.

Elegendő egy akkora időtartamban megkeresni a maximumot.

A válaszban a (kellően) magasabb felharmonikusok szerepe kisebb.



Periódikus gerjesztés – Fourier-sor I.

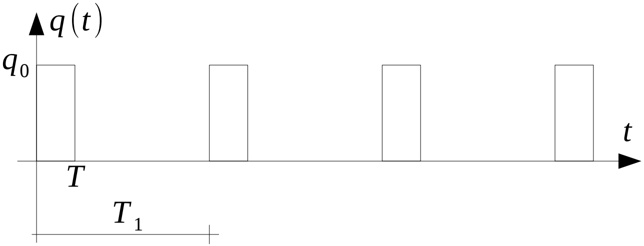
Ha a gerjesztés T_1 periódikus (azaz $q(t)=q(t+T_1)$), akkor átírható az előbbihez hasonló alakra:

$$q(t)=a_0+\sum_j \left(a_j\cos(j\omega_1 t)+b_j\sin(j\omega_1 t)\right)=a_0+\sum_j c_j\cos(j\omega_1 t-\varphi_j)$$

ahol: $a_0=\dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{\tau}^{\tau+T_1} q(t)\,\mathrm{d}t$

$$a_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1}\cos(j\omega_1 t)q(t)\,\mathrm{d}t\ ,\ b_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1}\sin(j\omega_1 t)q(t)\,\mathrm{d}t$$

Példa

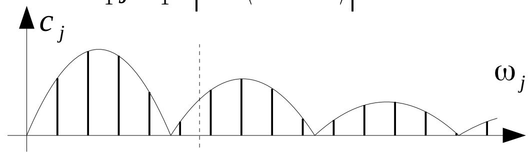


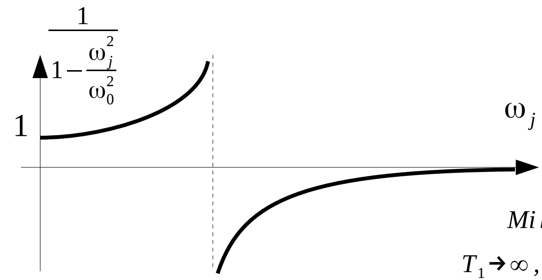
$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_0^T q_0\,\mathrm{d}t=\frac{T q_0}{T_1}$$

$$a_j=\frac{2}{T_1}\int_0^T\cos(j\omega_1 t)q_0\,\mathrm{d}t=\frac{2q_0}{T_1}\frac{\sin(j\omega_1 T)}{j\omega_1}$$

$$b_j=\frac{2}{T_1}\int_0^T\sin(j\omega_1 t)q_0\,\mathrm{d}t=\frac{2q_0}{T_1}\frac{1-\cos(j\omega_1 T)}{j\omega_1}$$

$$c_j=\frac{2q_0}{T_1 j\omega_1}2\left|\sin\left(\frac{j\omega_1 T}{2}\right)\right|$$





Mi lenne, ha:

$T_1\to\infty,\ T\to 0,\ q_0=\dfrac{1}{T}$?

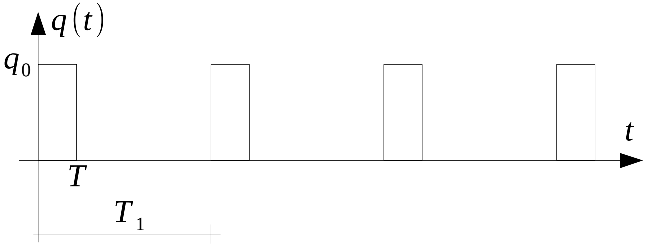
Periódikus gerjesztés – Fourier-sor II.

$$q(t)=a_0+\sum_j \left(a_j\cos(j\omega_1 t)+b_j\sin(j\omega_1 t)\right)$$

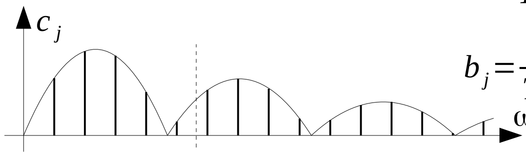
$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} \cos(j\omega_1 t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_j=\frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} \sin(j\omega_1 t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$



$$c_j=\frac{2q_0}{T_1 j\omega_1}2\left|\sin\left(\frac{j\omega_1 T}{2}\right)\right|$$



$Mi\,lenne, ha: T_1\to\infty\,?$

Ha $T_1\to\infty$, akkor az alap frekvencia nullához tart, a pálcikák végtelenül besűrűsödnek

a teherfüggvény összegzésekor integrálni kell ω szerint $\left(\mathrm{d}\omega=\frac{2\pi}{T_1}\text{-gyel szorzunk}\right)$

az a és b amplitúdó nem j-től függ, hanem ω-tól

az idő szerinti integrálást $-\infty$-től $+\infty$-ig kell elvégzni

és visszaszorozni $\frac{T_1}{2\pi}$-vel

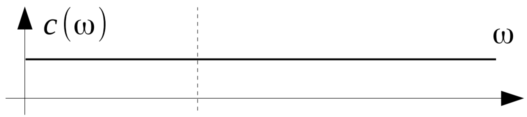
$$q(t)=\int_0^{\infty}\left(a(\omega)\cos(\omega t)+b(\omega)\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}\omega$$

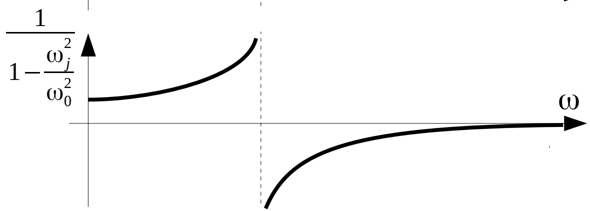
$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\omega t)\,q(t)\,\mathrm{d}t$$

$Mi\,lenne, ha\;a\;téglalappal$

$T_1\to\infty$ és $T\to 0$, $q_0=\frac{1}{T}$?





Összefoglalás

csillapított rendszer gerjesztett rezgése
rezonanciatényező
eszményi csillapítás

támaszrezgés
elmozdulás / alakváltozás differenciálegyenlete

harmonikus gerjesztések összegzése
Fourier – transzformáció

Mit tanultunk eddig?

Alapfogalmak

Egyszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:

általános mozgás differenciálegyenlete

szabadrezgés
harmonikus erővel gerjesztett rezgés
periódikus erővel gerjesztett rezgés

Mit fogunk tanulni ma?

Egyszabadságfokú rendszer gerjesztett rezgései:

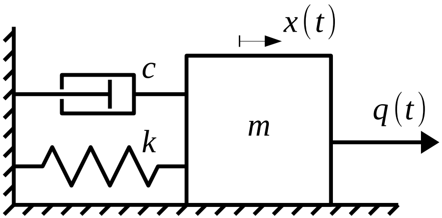
mozgás differenciálegyenlete
általános megoldás menete
megoldási módszerek

Többszabadságfokú rendszer rezgései

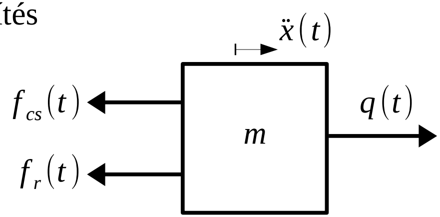
mozgás differenciálegyenlete
mozgás mátrix-differenciálegyenlete

Általános erővel gerjesztett rezgés – modell, mozgásegyenlet, megoldás

Modell



Elkülönítés



N2: $m \cdot \ddot{x}(t) = q(t) - f_r(t) - f_{cs}(t)$

lineáris rugó: $f_r(t) = k \cdot x(t)$

seb. arányos csill.: $f_{cs}(t) = c \cdot \dot{x}(t)$

$$\boxed{m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = q(t)}$$

Keressük $x(t)$-t, ha $x(t_0) = x_0 = 0$, és $\dot{x}(t_0) = v_0 = 0$.

Megoldás

A megoldás a homogén differenciálegyenlet általános, és az inhomogén differenciálegyenlet egy *partikuláris* megoldásának összege:

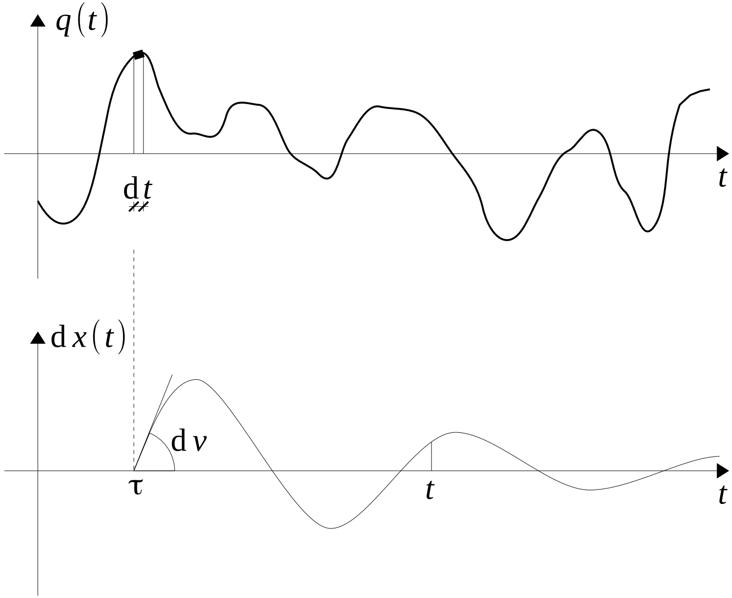
$$x(t) = x_{hom}(t) + x_g(t)$$

A megoldás gerjesztés miatti részét kereshetjük:

1. ún. *Ansatz*-függvénnyel
   feltételezett alak paramétereit a DE-be való visszahelyettesítéssel állítjuk be
   (harmonikus gerjesztésnél tulajdonképpen ezt csináltuk)
   - függvényszerű gerjesztés kell
2. Időlépéses megoldással:
   diszkrét t_i időpillanatokban:
   olyan elmozdulás és sebességértéket számítunk ami kielégíti a differenciálegyenletet
3. DE direkt integrálása

Mozgásegyenlet direkt integrálása – I.

A $q(t)$ gerjesztőerő-függvényt elemi $\mathrm{d}t$ ideig ható részekre bontjuk.
A $\mathrm{d}t$ ideig ható erők által átadott elemi $q(t)\cdot\mathrm{d}t$ impulzusok hatását összegezzük.



A τ időpillanatban átadott $q(\tau)\mathrm{d}t$ impulzus miatt a test mozgásmennyisége megváltozik:

$$q(\tau)\cdot\mathrm{d}t = m\cdot\mathrm{d}v$$

Ebből a $\mathrm{d}v = \frac{q(\tau)}{m}\mathrm{d}t$ egy, a $t=\tau$ pillanatban kezdődő szabadrezgés v_0 kezdeti sebessége. Mivel ez a rezgés hozzáadódik a korábbi mozgásokhoz, a kapcsolódó $x_0=0$.

Egy $t>\tau$ pillanatban az elmozdulás:
(figyelembe véve, hogy addig $t-\tau$ idő telik el)

$$\mathrm{d}x(t) = e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\left(\frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0^*}\mathrm{d}t\right)\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)$$

A teljes megoldáshoz az összes elemi impulzus hatását kell összegeznünk.
A t pillanat elmozdulásaira a $\tau<t$ pillanatokban ható elemi impulzusok hatnak.

Azok összege az alábbi integrál: $x(t)=\int_0^t \frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0^*}e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)\mathrm{d}\tau$

Mozgásegyenlet direkt integrálása – 2.

Duhamel-integrál: $x(t)=\int_0^t \frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0^*} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)\mathrm{d}\,\tau$

Ez a rendszer *válaszfüggvénye*.

Speciális esetek

Támaszrezgés: az alakváltozások, igénybevételek vizsgálatára a teherfüggvény:

$$q(t)=-m\ddot{z}(t)$$

Amit behelyettesítve:

$$u(t)=\int_0^t \frac{-\ddot{z}(\tau)}{\omega_0^*} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}\cdot\sin\left(\omega_0^*(t-\tau)\right)\mathrm{d}\,\tau$$

Csillapítatlan szerkezeten: $\xi=0$ és $\omega_0=\omega_0^*$:

$$x(t)=\int_0^t \frac{q(\tau)}{m\,\omega_0}\cdot\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)\mathrm{d}\,\tau$$

Mozgásegyenlet közvetlen megoldása – példa I.

A mozgás differenciálegyenlete:

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

$$\ddot{x}(t)+2\xi\omega_0\dot{x}(t)+\omega_0^2\cdot x(t)=\frac{q(t)}{m}$$

Legyen egy csillapítatlan rendszerben a teher egy időben lineárisan növekvő intenzitású erő:

$$q(t)=b\cdot t$$

Keressük a megoldást is lineárisan növekvő alakban:

$$x_g(t)=a\cdot t$$

Ekkor: $\dot{x}_g(t)=a,\ddot{x}_g(t)=0$ behelyettesíthető a DE-be (és $c=0$):

$$0+k\cdot a\cdot t=b\cdot t$$

Ez megoldható a-ra:

$$a=\frac{b}{k}\rightarrow x_g(t)=\frac{b}{k}\cdot t$$

A teljes megoldáshoz ezt kell kiegészítenünk a homogén egyenlet általános megoldásával:

$$x(t)=A\cdot\cos(\omega_0 t)+B\cdot\sin(\omega_0 t)+\frac{b}{k}\cdot t$$

És A, illetve B értékét a kezdeti feltételk függvényében meghatározni.

Ha például $x(0)=0$, és $\dot{x}(0)=0$:

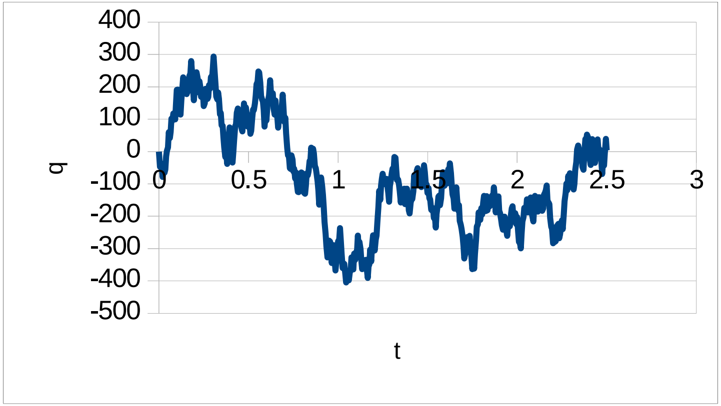
$$x(t)=-\frac{b}{k\omega_0}\sin(\omega_0 t)+\frac{b}{k}t$$

Mozgásegyenlet megoldása – példa II.

$m = 200\,\text{kg}\,, k = 5000\,\text{N/m} \rightarrow \omega_0 = 5\,\text{rad/s}\,, T_0 = 1{,}257\,\text{s}$

$\xi = 0{,}05 \rightarrow c = 100\,\text{Ns/m}$

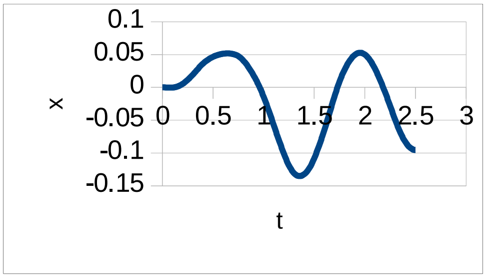
Keressük a választ egy *tetszőleges* gerjesztőerőre:
(Itt egy véletlenszerűen felvett függvénnyel szemléltetve.)

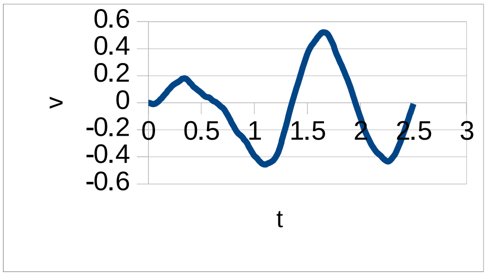


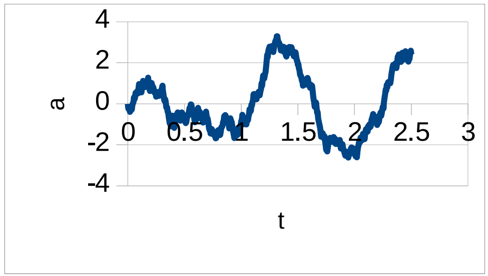
A t_i pillanatban ismert $q(t_i), x(t_i), v(t_i)$ meghatározza a DE-ből $a(t_i)$-t.

E gyorsulást felhasználva számoljuk a kis Δ t időlépésre levő $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ pillanatban a következő $x(t_{i+1}), v(t_{i+1})$ értékeket.

(Legegyszerűbb esetben pl. konstans gyorsulást feltételezve az időlépés alatt.)







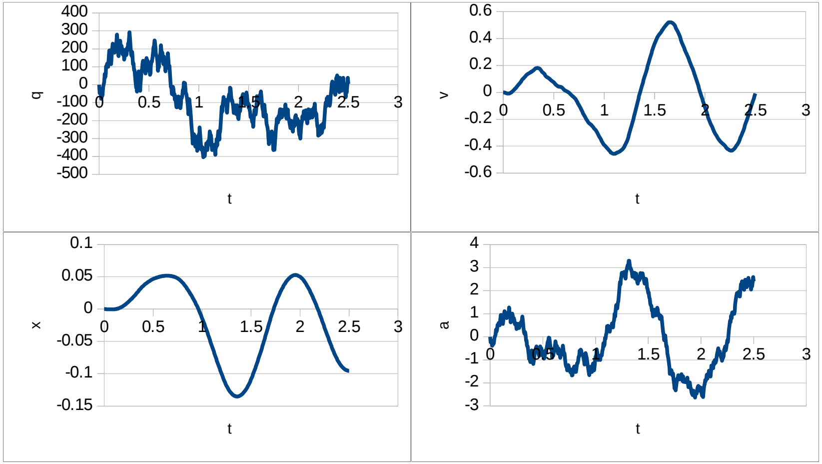
$$x^{max} = 0{,}135\,\text{m}\,, v^{max} = 0{,}5212\,\text{m/s}\,, a^{max} = 3{,}298\,\text{m/s}^2$$

Pszeudogyorsulás, pszeudosebesség

$m = 200\,\text{kg}, k = 5000\,\text{N/m} \rightarrow \omega_0 = 5\,\text{rad/s}, T_0 = 1{,}257\,\text{s}$

$\xi = 0{,}05 \rightarrow c = 100\,\text{Ns/m}$

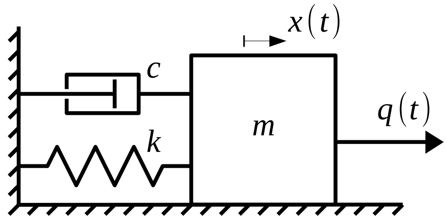
Keressük a választ egy *tetszőleges* gerjesztőerőre:
(Itt egy véletlenszerűen felvett függvénnyel szemléltetve.)



$x^{max} = 0{,}135\,\text{m}$

$v^{max} = 0{,}5212\,\text{m/s}$

$a^{max} = 3{,}298\,\text{m/s}^2$



Ahhoz, hogy az $x(t)$ elmozdulás statikusan jöjjön létre, egy $q_s(t) = k \cdot x(t)$ statikus erőt kellene működtetni.
Mivel $k = m \cdot \omega_0^2$, ez az erő számítható $q_s(t) = m \cdot \omega_0^2 \cdot x(t)$ alakban is.

Az $\omega_0^2 \cdot x(t)$ szorzat egy gyorsulás mértékegységű mennyiség, a neve *pszeudogyorsulás*: $a^p(t) = \omega_0^2 \cdot x(t)$

Az elmozdulást létrehozó erő a pszeudogyorsulásból: $q_s(t) = m \cdot a^p(t)$

Ha fentiekből csak a maximum érdekel minket, akkor az időfüggést elhagyva
a helyettesítő statikus erő: $q_s^{max} = m \cdot a^p$, ahol $a^p = \omega_0^2 \cdot x^{max}$

Hasonló elven definiálhatunk *pszeudosebességet* is: $v^p = \omega_0 \cdot x^{max}$. (Ez csillapítóelemeknél fordul elő.)

Mozgásegyenlet megoldása – válaszspektrum I.

A mozgás differenciálegyenlete:

$$m\cdot\ddot{x}(t)+c\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=q(t)$$

$$\ddot{x}(t)+2\xi\,\omega_0\,\dot{x}(t)+\omega_0^2\cdot x(t)=\frac{q(t)}{m}$$

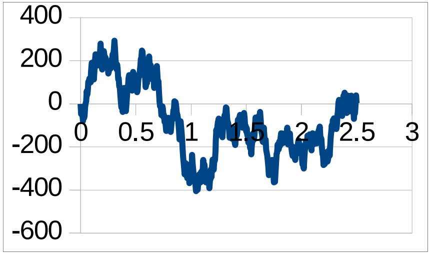
Támaszrezgésnél:

$$\ddot{u}(t)+2\xi\,\omega_0\,\dot{u}(t)+\omega_0^2\cdot u(t)=-\ddot{z}(t)$$

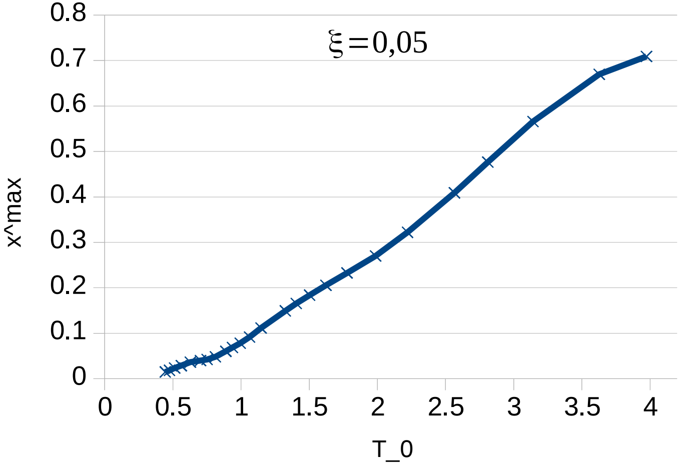
Legyen adott egy *tetszőleges* teher.
Határozzuk meg az elmozdulások maximumait különböző szerkezetekre, de legyen:

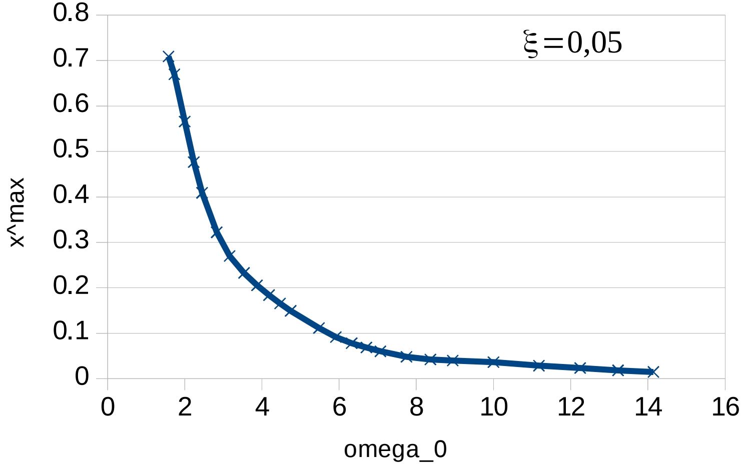
¤ azonos anyag ➔ azonos ξ
¤ azonos tömeg

A maximum csak ω_0-tól (vagy T_0-tól) függ.



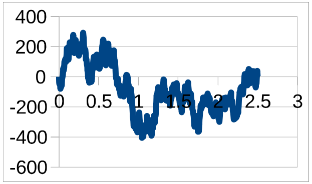
Ábrázoljuk ezeket a maximumokat a periódusidő, illetve a sajátkörfrekvencia függvényében:



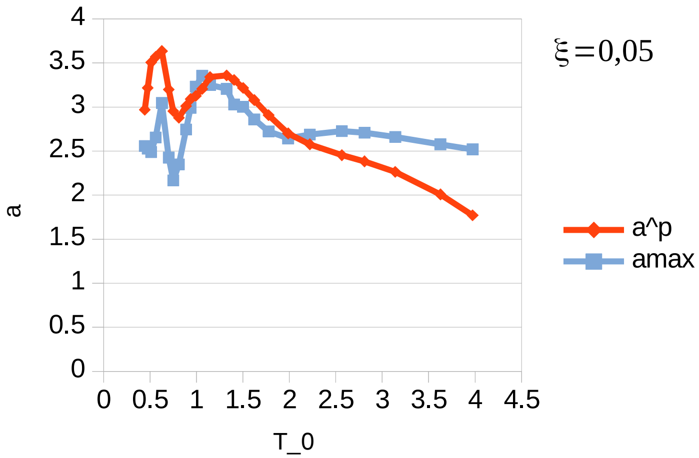


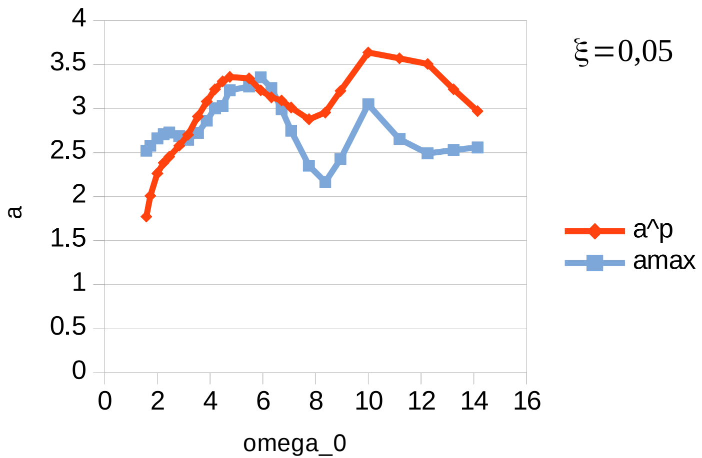
Az így kapott függvény az adott teher *elmozdulás-válaszspektruma*.

Mozgásegyenlet megoldása – válaszspektrum II.



Egy rögzített teherhez nem csak elmozdulás-válaszspektrum számítható.
Lehet még gyorsulási, pszeudogyorsulási, sebesség és pszeudosebesség válaszspektrum.





Használata:

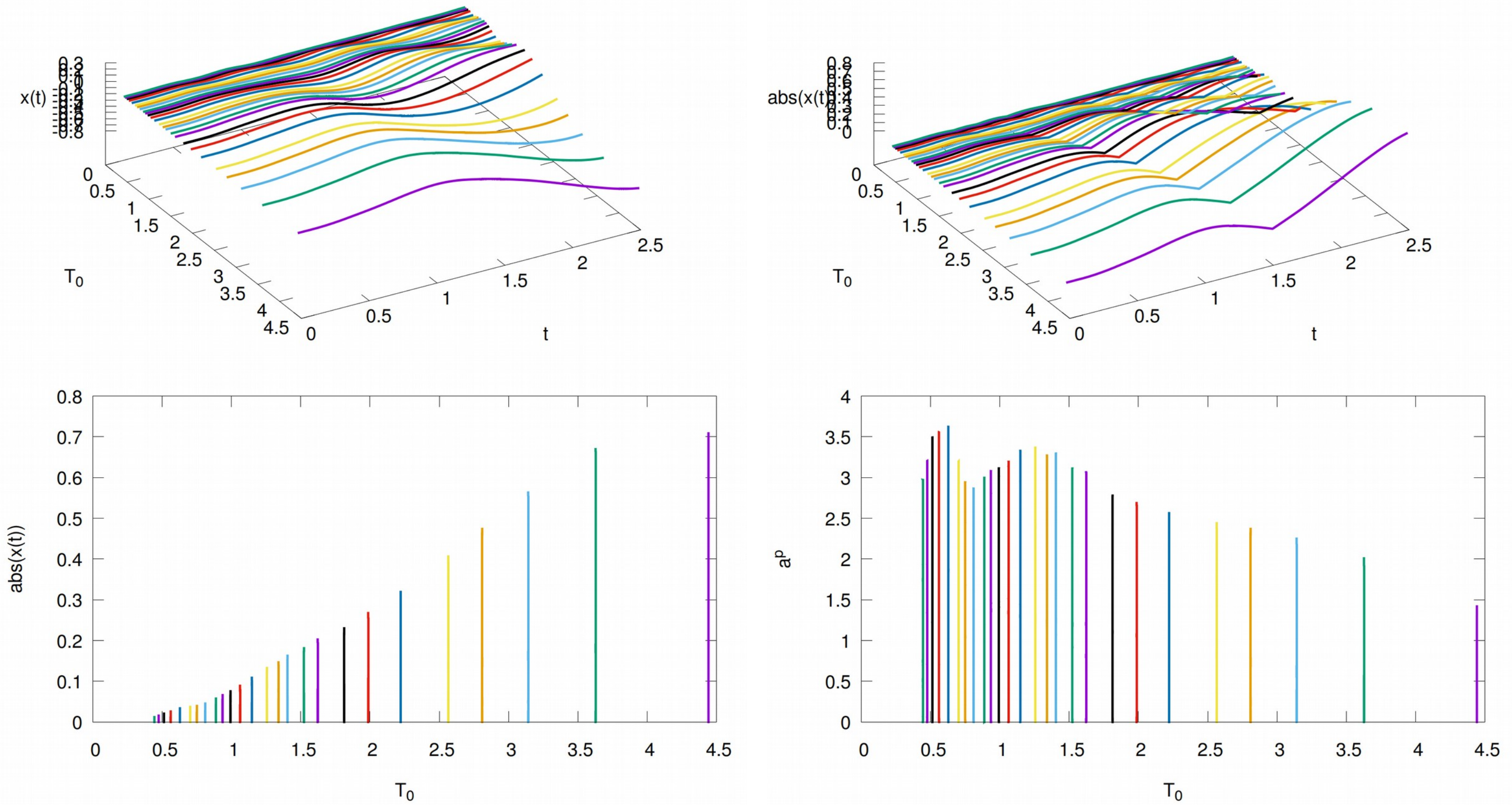
A (ξ csillapítású) szerkezet periódusidejéhez (vagy sajátkörfrekvenciájához) tartozó pszeudogyorsulást leolvassuk az ábrából: $S_{ap}(T_{0,}\xi)$

Az ehhez tartozó (legnagyobb) alakváltozást létrehozó statikus erő:

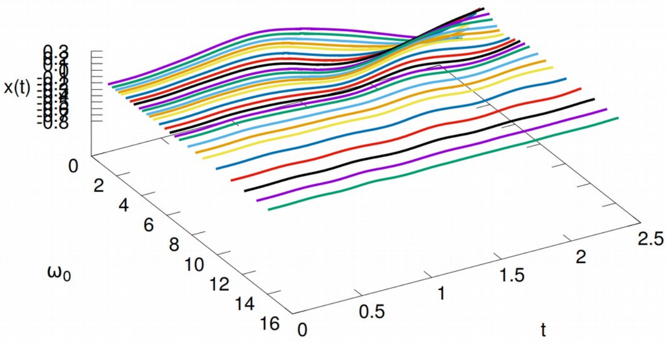
$$q_s^{max} = m \cdot S_{ap}(T_{0,}\xi)$$

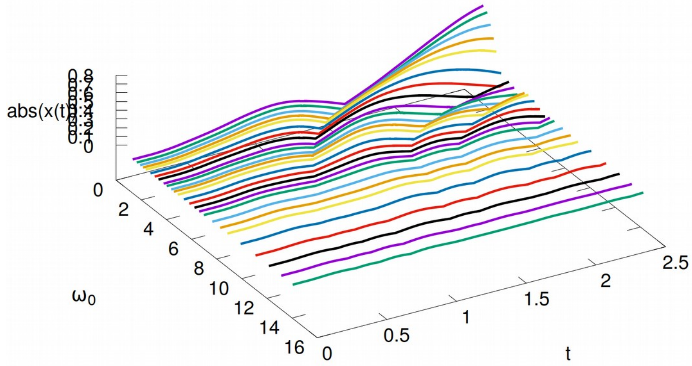
Ezzel terhelve a szerkezetet megkaphatók a legnagyobb igénybevételek.

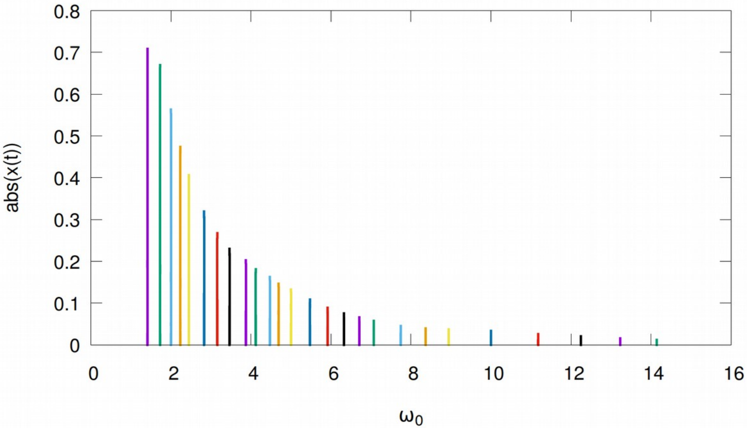
Válaszspektrum számításának lépései – a periódusidő függvényében

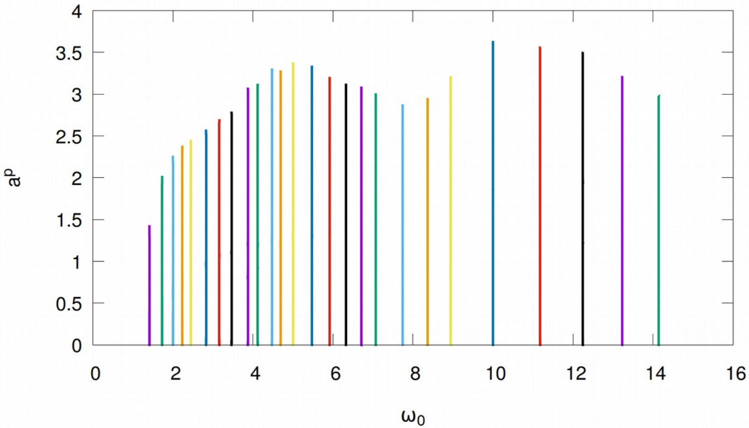


Válaszspektrum számításának lépései – a sajátkörfrekvencia függvényében









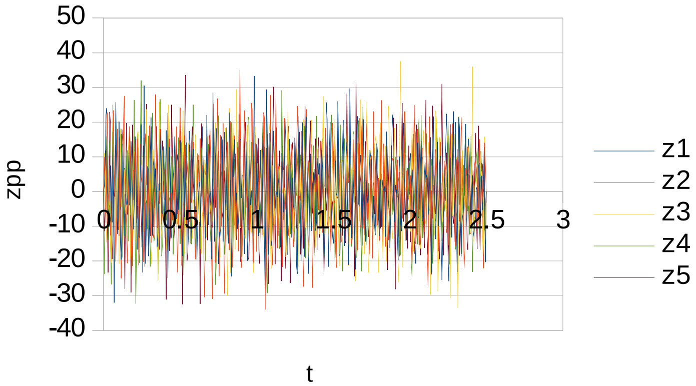
Földrengés-vizsgálat

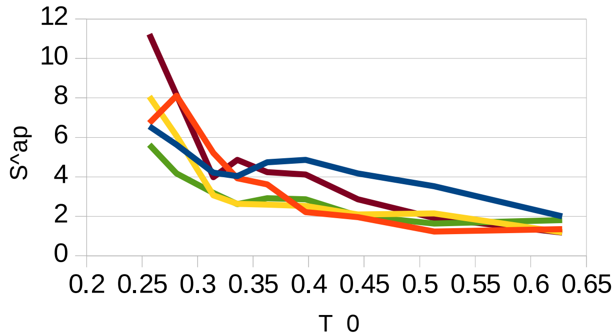
A támasz rezeg $z(t)$ függvény szerint, tehát a mozgás DE-e:

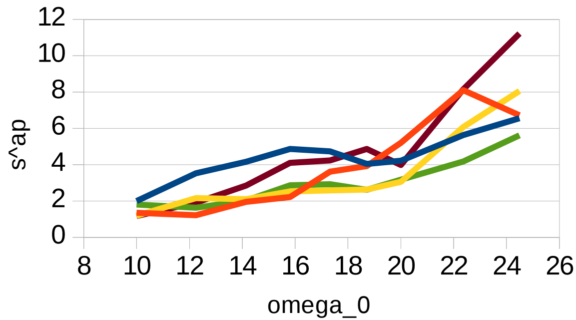
$$m\cdot\ddot{u}(t)+c\cdot\dot{u}(t)+k\cdot u(t)=-m\cdot\ddot{z}(t) \quad \rightarrow \quad \ddot{u}(t)+2\xi\omega_0\dot{u}(t)+\omega_0^2\cdot u(t)=-\ddot{z}(t)$$

- Csakhogy $z(t)$ ismeretlen (igazából azt sem tudjuk, mikor lesz)

+ Léteznek viszont korábbi rengések adatai, amikhez számolhatók a válaszspektrumok:

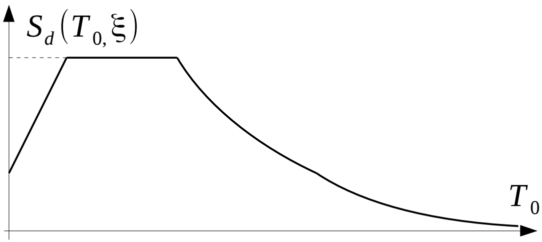






Az eltérő erősségek és a periódusidő-függő ugrásokat kisimítva egyfajta felső burkolóként kapható a *tervezési válaszspektrum*.

Pl. EC8:



Összefoglalás ma, eddig

$$\textit{gerjesztett rezgése}$$

$$\textit{Duhamel} - \textit{integrál}$$

$$(\textit{elmozdulás}, \textit{sebesség}, \textit{gyorsulás})\,\textit{válaszfüggvény}$$

$$\textit{pszeudosebesség}, \textit{pszeudogyorsulás}$$

$$\textit{válaszspektrum}$$

$$\textit{tervezési válaszspektrum}$$