Tartók dinamikája
BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

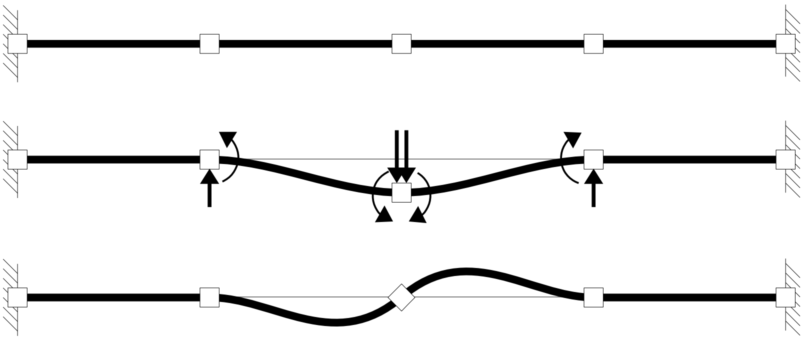
Mit fogunk tanulni ma?

Keretek rezgései

Keretek számítása (tömegmátrix, kompilálás, rugalmas megtámasztás)
Végeselem módszer

Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix I.

A Tartók statikája I.-II.-ben tanult merevségi mátrix fizikai jelentése ugyanaz.
Előállítása azonban mindig *elemenként* történik, amit a kompilálás követ.
Az elemekre bontás miatt egy szabadságfokra csak a kapcsolódó elemek szabadságfokainak elmozdulása miatt adódik erő, távolabbi elemek távolabbi csomópontjai miatt nem.



Ennek az elvnek a hatása keretek számítására:

Az *ij*-elem elemi merevségi mátrixa lokális koordinátarendszerben előállítható.
Ez a $\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}$ mátrix a végpontok lokális elmozdulásából számítja a végpontokra ható erőket, nyomatékokat a lokális koordináta-rendszerben.
Az elem lokális koordinátarendszeréből át kell forgatni a globális rendszerbe.
A globális koordinátarendszerbe forgatott $\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}$ mátrixokból kompiláljuk a szerkezet merevségi mátrixát.

Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix II.

A módszer előnyei:
+ a merevségi mátrix kompilálható, elemenként, egyszerűen állítható elő
+ A mátrix sávos szerkezetű lesz, sok zérus elemmel

Hátrányok
- a csompontonkénti szabadságfokok száma megnövekszik: eltolódások + elfordulás
- sok szabadságfok ➔ nagy mátrixok ➔ a sajátértékfeladat megoldása nehezebb

Egy elem (ij) merevségi mátrixa a *lokális* koordinátarendszerben:

A $\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}$ elemi merevségi mátrix megadja, hogy az elemvégekre mekkora erőket/nyomatékokat kell működtetni, hogy az $\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}$ elmozdult alakot kapjuk:

$$\boldsymbol{f}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_i^{lok} \\ \boldsymbol{f}_j^{lok} \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}_{ij}^{lok} \boldsymbol{u}_{ij}^{lok}$$

Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i^{lok} \\ \boldsymbol{u}_j^{lok} \end{bmatrix}$$

Az elemvég elmozdulásvektorai:

$$\boldsymbol{u}_i^{lok} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_j^{lok} = \begin{bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}$$

Az elemvégre ható erők:

$$\boldsymbol{f}_i^{lok} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{zi} \\ M_{iy} \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}_j^{lok} = \begin{bmatrix} F_{xj} \\ F_{zj} \\ M_{jy} \end{bmatrix}$$

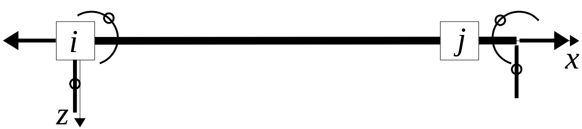
Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix III.

Az elemi merevségi mátrix tehát 6×6-os, de felírható ún. *blokkos* alakban is:

$$\boldsymbol{f}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}F_{xi}\\F_{zi}\\M_{iy}\\F_{xj}\\F_{zj}\\M_{jy}\end{bmatrix}=\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}\cdot\begin{bmatrix}u_i\\w_i\\\varphi_{iy}\\u_j\\w_j\\\varphi_{jy}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right]\begin{bmatrix}u_i\\w_i\\\varphi_{iy}\\u_j\\w_j\\\varphi_{jy}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AA} & \boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AB}\\ \hline \boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BA} & \boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BB}\end{array}\right]\begin{bmatrix}u_i\\w_i\\\varphi_{iy}\\u_j\\w_j\\\varphi_{jy}\end{bmatrix}$$

Egy oszlop jelentése most is a szokásos:
Mekkora erőket/nyomatékokat kell működtetnünk, hogy egységnyi elmozdulást kapjunk a megfelelő szabadságfokon?

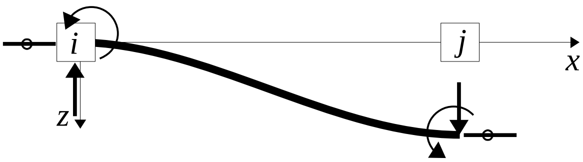
Például a negyedik oszlop $\rightarrow u_j$
(a végcsomópont (j) eltolódása x-irányba (u)



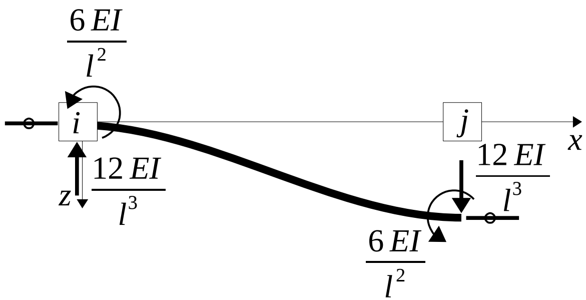
$$\boldsymbol{k}_4=\begin{bmatrix}-\dfrac{EA}{l}\\0\\0\\\dfrac{EA}{l}\\0\\0\end{bmatrix}$$

Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix IV.

Például az ötödik oszlop → w_j
(a végcsomópont (j)
eltolódása z-irányba (w)

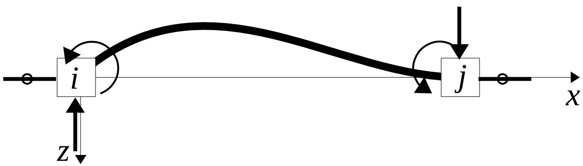


Pl. Tartók statikája I.-ből:

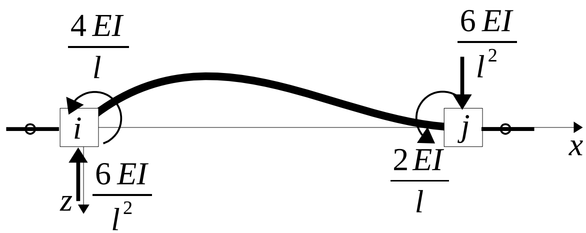


$$\boldsymbol{k}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{12EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^2} \\ 0 \\ \frac{12EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^2} \end{bmatrix}$$

Például a harmadik oszlop → φ_{iy}
(a kezdő (i)
csomópont elfordulása (φ)
az y-tengely körül)

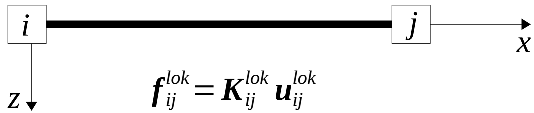


Pl. Tartók statikája I.-ből:



$$\boldsymbol{k}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{4EI}{l} \\ 0 \\ \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

Dinamikai vizsgálat merevségi mátrixa – jellemzők



$$\boldsymbol{f}_{ij}^{lok} = \boldsymbol{K}_{ij}^{lok}\,\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}$$

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{zi} \\ M_{iy} \\ F_{xj} \\ F_{zj} \\ M_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & -\frac{EA}{l} & & \\ & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & & \\ & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}$$

Mértékegységek:

		u, w:	m
EA:	kN	φ:	rad
EI:	kNm^2	F:	kN
l:	m	M:	kNm

$$\begin{bmatrix} \mathrm{kN} \\ \mathrm{kN} \\ \mathrm{kNm} \\ \mathrm{kN} \\ \mathrm{kN} \\ \mathrm{kNm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{kN/m} & & & \mathrm{kN/m} & & \\ & \mathrm{kN/m} & \mathrm{kN} & & \mathrm{kN/m} & \mathrm{kN} \\ & \mathrm{kN} & \mathrm{kNm} & & \mathrm{kN} & \mathrm{kNm} \\ \mathrm{kN/m} & & & \mathrm{kN/m} & & \\ & \mathrm{kN/m} & \mathrm{kN} & & \mathrm{kN/m} & \mathrm{kN} \\ & \mathrm{kN} & \mathrm{kNm} & & \mathrm{kN} & \mathrm{kNm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{rad} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{rad} \end{bmatrix}$$

Főátlóban pozitív számok!

Az elemi merevségi mátrixot egyensúlyi alapon is számíthatjuk, ezért:

¤ az 1. és 4. sorban szerepelnek az x irányú erők.

¤ a 2. és 5. sorban szerepelnek a z irányú erők.

Ezek összege külön-külön nullát kell adjon (1. sor + 4. sor, illetve 2. sor + 5. sor).

¤ a j csomópont körül forgatnak a 3. és 6. sor nyomatékai, valamint a 2 sor erői l karral pozitív irányba.

Az összes nyomatéknak nullát kell adnia (2. sor l-szerese + 3. sor + 6. sor).

A 2., 3., 5., 6. sorok fenti tulajdonságaiból következően: 5. sor l-szerese = 3. sor + 6. sor.

Dinamikai vizsgálat mátrix-elmozdulásmódszerrel – merevségi mátrix V.

A merevségi mátrix transzformálása lokálisból globális koordinátarendszerbe

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij} & 0\\ 0 & \boldsymbol{T}_{ij}\end{bmatrix}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & 0\\ 0 & \boldsymbol{T}_{ij}^{T}\end{bmatrix}$$

A transzformáció blokkonként is elvégezhető: $\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\end{bmatrix}$

Amikor jobbról szorozzuk a globális elmozdulással, akkor $\boldsymbol{T}_{ij}^{T}$-vel való szorzás lokális elmozdulást számít, amiből $\boldsymbol{K}_{ij}^{lok}$ blokkja erőt számol a lokális rendszerben, amit a $\boldsymbol{T}_{ij}$-vel való szorzás átszámít a globális krsz.-be.

Merevségi mátrix kompilálása

Mint a diszkrét rugós modellnél, itt is az egyes elemek merevségi mátrixaiból állíthatjuk elő a szerkezet merevségi mátrixát, de most az egyes csomópontok 3×3-as blokkjait kell összegezni a kezdetben nullákkal feltöltött $\boldsymbol{K}$ mátrixban.

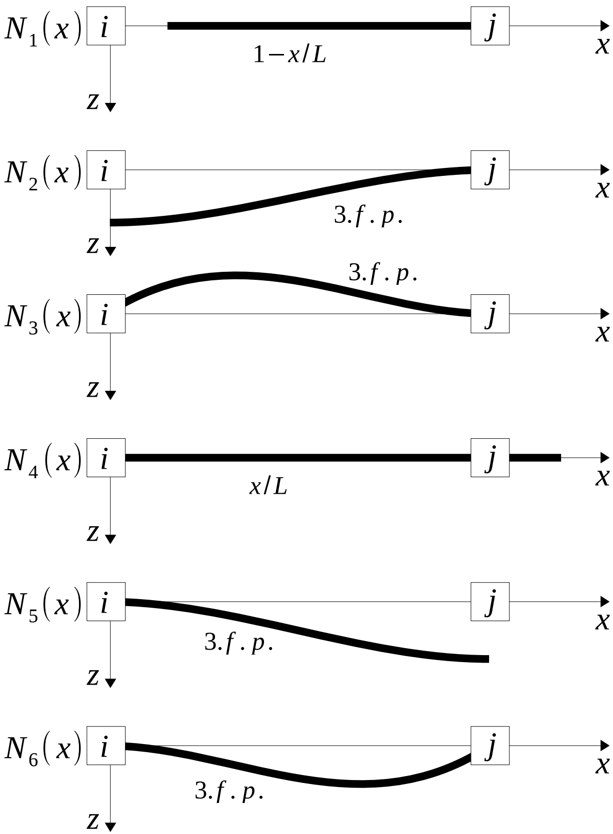
A $\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,AA} & \boldsymbol{K}_{ij}^{gl,AB}\\ \boldsymbol{K}_{ij}^{gl,BA} & \boldsymbol{K}_{ij}^{gl,BB}\end{bmatrix}$ blokkstruktúra esetén:

$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,AA}$-t az i,i-blokkhoz adjuk,
$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,AB}$-t az i,j-blokkhoz adjuk,
$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,BA}$-t a j,i-blokkhoz adjuk,
$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl,BB}$-t a j,j-blokkhoz adjuk.

Dinamikai vizsgálat végeselemmódszerrel – alakfüggvények

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i^{lok} \\ \boldsymbol{u}_j^{lok} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_i^{lok} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_j^{lok} = \begin{bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}$$

A merevségi mátrix előállításának automatizálásához felsoroljuk az egyes oszlopok alakjait:



Az elem teljes elmozdulása ezeknek a függvényeknek a lineáris kombinációja:

$$u(x) = u_i \cdot N_1(x) + u_j \cdot N_4(x)$$
$$w(x) = w_i \cdot N_2(x) + \varphi_{iy} \cdot N_3(x) + w_j \cdot N_5(x) + \varphi_{jy} \cdot N_6(x)$$

De elegánsabb úgy írni, hogy:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{bmatrix} = \boldsymbol{N}(x) \cdot \boldsymbol{u}_{ij}^{loc}$$

ahol $\boldsymbol{N}(x)$ a *bázisfüggvények* mátrixa:

$$\boldsymbol{N}(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}$$

Az $N_k(x)$ függvények pedig a *bázisfüggvények*.

- egy szabadságfok helyén 1, a többi helyén zérus
- kellően folytonos
- előállítási technikái itt nem a feladatunk

Dinamikai vizsgálat végeselemmódszerrel – mátrixok

Vezessük be az $\boldsymbol{L}$ ún. *operátormátrixot*:

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}()}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2()}{dx^2} \end{bmatrix}$$

Operátor: amit mögé írunk, azzal csinál valamit.

Az $\boldsymbol{L}$ mátrixot alkalmazva a bázisfüggvények mátrixára
a kapott mátrix az alakváltozások mátrixa $(\boldsymbol{B}(x))$:

$$\boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{N}(x)=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}()}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2()}{dx^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1(x)}{dx} & 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}N_4(x)}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2N_2(x)}{dx^2} & \frac{\mathrm{d}^2N_3(x)}{dx^2} & 0 & \frac{\mathrm{d}^2N_5(x)}{dx^2} & \frac{\mathrm{d}^2N_6(x)}{dx^2} \end{bmatrix}$$

Vezessük be a $\boldsymbol{D}$ ún. *keresztmetszeti merevségi mátrixot*:

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}$$

Dinamikai vizsgálat végeselemmódszerrel – merevségi mátrix

Az elemi merevségi mátrix így előállítható az alábbi formulával:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{loc} = \int_L \boldsymbol{B}^T(x)\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Az integrálást a mátrixszorzaton belül elemenként lehet végrehajtani,
de ez alapvetően a program dolga. (Persze ha nekünk kell megírni a programot
akkor ez már nem ilyen egyértelmű.)

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & -\frac{EA}{l} & & \\ & \frac{12\,EI}{l^3} & -\frac{6\,EI}{l^2} & & -\frac{12\,EI}{l^3} & -\frac{6\,EI}{l^2} \\ & -\frac{6\,EI}{l^2} & \frac{4\,EI}{l} & & \frac{6\,EI}{l^2} & \frac{2\,EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & & & \frac{EA}{l} & & \\ & -\frac{12\,EI}{l^3} & \frac{6\,EI}{l^2} & & \frac{12\,EI}{l^3} & \frac{6\,EI}{l^2} \\ & -\frac{6\,EI}{l^2} & \frac{2\,EI}{l} & & \frac{6\,EI}{l^2} & \frac{4\,EI}{l} \end{bmatrix}$$

Például: a második sor ötödik oszlopában az elem*:

$$K_{ij,2,5}^{loc} = \int_L \left(0 \cdot EA \cdot 0 + \frac{\mathrm{d}^2 N_2(x)}{dx^2} \cdot EI \cdot \frac{\mathrm{d}^2 N_5(x)}{dx^2} \right) \mathrm{d}\,x =$$

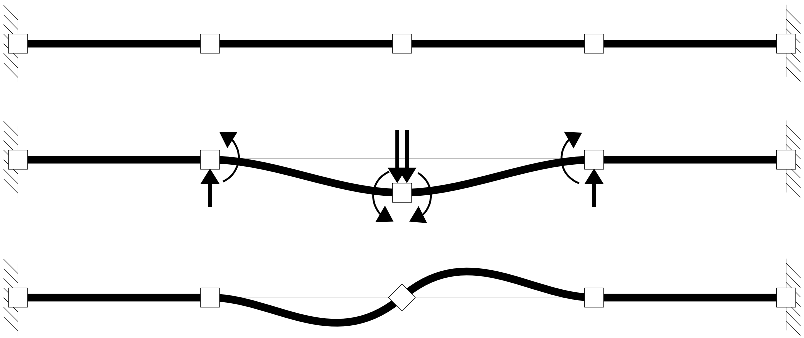
$$= EI \int_L \frac{\mathrm{d}^2 N_2(x)}{dx^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 N_5(x)}{dx^2}\,\mathrm{d}\,x$$

A virtuális elmozdulások tétele alapján látható be, hogy ez valóban
éppen a keresett elmozdulásrendszer mellett a keresett reakcióerő.

A fenti elv más szerkezetnél is használható (pl. tárcsa, lemez), csak más lesz:
- a végeselem
- a csomóponti elmozdulások vektora
- a bázisfüggvények, és azok mátrixa
- az operátormátrix
- a keresztmetszeti merevség mátrixa

* Egy mátrixszorzat eredményének a k, l eleme
(azaz a k-adik sor, l-edik oszlop eleme
a szorzat első mátrixának k-adik sorából
a közbenső mátrixokból és az utolsó mátrix
l-edik oszlopából képzett szorzattal egyenlő

Dinamikai vizsgálat merevségi mátrixa – összefoglalás



Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i^{lok}\\ \boldsymbol{u}_j^{lok}\end{bmatrix}$$

Az elemvég elmozdulásvektorai:

$$\boldsymbol{u}_i^{lok}=\begin{bmatrix}u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_j^{lok}=\begin{bmatrix}u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}(x)=\begin{bmatrix}N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0\\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x)\end{bmatrix}$$

Az elemvégre ható erők:

$$\boldsymbol{f}_i^{lok}=\begin{bmatrix}F_{xi}\\ F_{zi}\\ M_{iy}\end{bmatrix},\boldsymbol{f}_j^{lok}=\begin{bmatrix}F_{xj}\\ F_{zj}\\ M_{jy}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}()}{dx} & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2()}{dx^2}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}(x)=\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{N}(x)\qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}EA & 0\\ 0 & EI\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{loc}=\int_L \boldsymbol{B}^T(x)\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\begin{bmatrix}u(x)\\ w(x)\end{bmatrix}=\boldsymbol{N}(x)\cdot\boldsymbol{u}_{ij}^{loc}$$

Krsz.-transzformáció: $\boldsymbol{K}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^T & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^T\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^T & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{K}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^T\end{bmatrix}$ ➔ Kompilálás

Mit tanultunk eddig?

Egy- és többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései

Keretszerkezetek merevségi mátrixa

Mi lesz még?

Keretszerkezetek számítása

Keretek számítása (tömegmátrix, rugalmas megtámasztás)

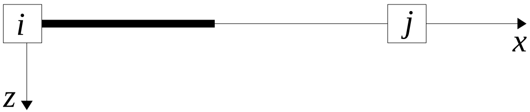
Példák

Dinamikai vizsgálat tömegmátrixa – diagonál tömegmátrix

Legyen az l hosszúságú elem fajlagos *fajlagos tömege*: μ.

Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i^{lok} \\ \boldsymbol{u}_j^{lok} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \\ u_j \\ w_j \\ \varphi_{jy} \end{bmatrix}$$



Az eltolódási szabadságfokokhoz az elem tömegének fele tartozik: $m_{ix} = m_{iz} = m_{jx} = m_{jz} = \dfrac{\mu l}{2}$

Az elfordulási szabadságfokokra nyomatéki egyenletet írunk ➔ perdülettétel a csomópontra
Az ehhez tartozó tehetetlenség a tehetetlenségi nyomaték.

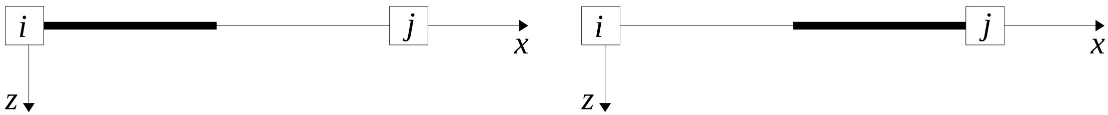
A rúd végi forgástengelyre ez tömeg-szer-hossznégyzet-per-három, azaz a fél elemre: $I_{iy} = I_{jy} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\mu l}{2}\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = \dfrac{\mu l^3}{24}$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok} = \mu l \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & & & & & \\ & 1/2 & & & & \\ & & l^2/24 & & & \\ \hline & & & 1/2 & & \\ & & & & 1/2 & \\ & & & & & l^2/24 \end{array}\right]$$

Ez a tömegmátrix a globális koordináta-rendszerbe forgatáskor sem változik:

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl} = \boldsymbol{M}_{ij}^{lok}$$

Dinamikai vizsgálat tömegmátrixa – majdnem diagonál tömegmátrix



Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i^{lok}\\ \boldsymbol{u}_j^{lok}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\\ u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}$$

A fél rúdelem haladó mozgásakor (w_i, w_j) perdülete is van a csomópontra.
A fél rúdelem elfordulásakor $(\varphi_{iy}, \varphi_{jy})$ a súlypontjának haladó mozgása is van.

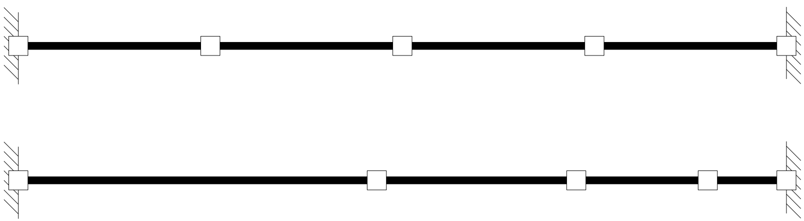
$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok}=\mu l\left[\begin{array}{ccc|ccc}1/2 & & & & & \\ & 1/2 & -l/8 & & & \\ & -l/8 & l^2/24 & & & \\ \hline & & & 1/2 & & \\ & & & & 1/2 & l/8 \\ & & & & l/8 & l^2/24\end{array}\right]$$

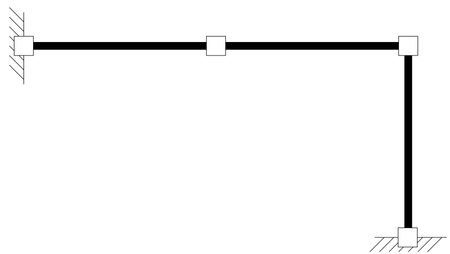
Ezt a tömegmátrixot transzformálni kell:
(Ezt is lehet blokkonként)

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^{T} & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^{T}\end{bmatrix}$$

Csak a 3×3-as főátló-blokkok leszneк zérustól különbözők.

A főátlón kívüli tagok a kompilálás után kiesnek, ha a csomóponthoz kapcsolódó rúdelem-felek súlypontja a csomópontba esik.





Dinamikai vizsgálat tömegmátrixa – konzisztens tömegmátrix

Az elem elmozdulásvektora:

$$\boldsymbol{u}_{ij}^{lok}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_i^{lok}\\ \boldsymbol{u}_j^{lok}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_i\\ w_i\\ \varphi_{iy}\\ u_j\\ w_j\\ \varphi_{jy}\end{bmatrix}$$

A bázisfüggvények mátrixával:

$$\boldsymbol{N}(x)=\begin{bmatrix}N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0\\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{loc}=\int_L \mu\, \boldsymbol{N}^T(x)\boldsymbol{N}(x)\,\mathrm{d}x$$

Konzisztens tömegmátrix:
A merevségi mátrixhoz használt bázisfüggvényeket alkalmazzuk a tömegmátrixhoz is.

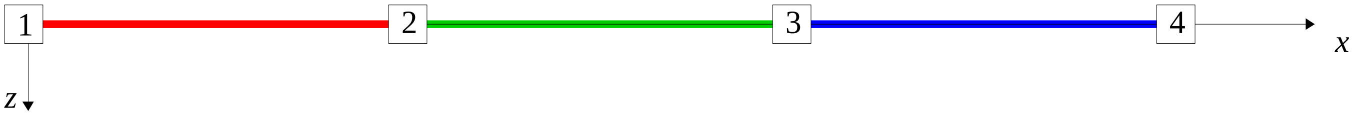
$$\boldsymbol{M}_{ij}^{lok}=\mu l\left[\begin{array}{ccc|ccc}1/3 & & & 1/6 & & \\ & 13/35 & -11l/210 & & 9/70 & 13l/420\\ & -11l/210 & l^2/105 & & -13l/420 & l^2/140\\ \hline 1/6 & & & 1/3 & & \\ & 9/70 & -13l/420 & & 13/35 & 11l/210\\ & 13l/420 & l^2/140 & & 11l/210 & l^2/105\end{array}\right]$$

Ezt a tömegmátrixot transzformálni kell:
(Ezt is lehet blokkonként)

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AA}\boldsymbol{T}_{ij}^T & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,AB}\boldsymbol{T}_{ij}^T\\ \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BA}\boldsymbol{T}_{ij}^T & \boldsymbol{T}_{ij}\boldsymbol{M}_{ij}^{lok,BB}\boldsymbol{T}_{ij}^T\end{bmatrix}$$

Példa – Gerenda normál és hajlítórezgése I.

$L = 4{,}8\,\mathrm{m}$ hosszú rúd, fajlagos tömege: $\mu = 400\,\mathrm{kg/m}$,
normálmerevsége: $EA = 15000\,\mathrm{kN}$, hajlítómerevsége $EI = 100\,\mathrm{kNm}^2$
Állítsuk elő a teljes szerkezet merevségi és tömegmátrixát, ha 3 elemre bontjuk a rudat!



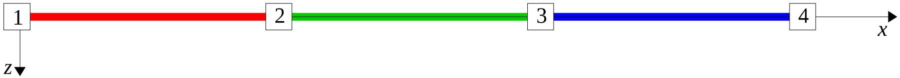
Mindegyik elem azonos (hosszúságú, anyagú, merevségű) $\rightarrow \boldsymbol{K}_{12}^{lok} = \boldsymbol{K}_{23}^{lok} = \boldsymbol{K}_{34}^{lok}$ és $\boldsymbol{M}_{12}^{lok} = \boldsymbol{M}_{23}^{lok} = \boldsymbol{M}_{34}^{lok}$

Mindegyik elem a globális krsz.-ben azonos módon áll $\rightarrow$ nem szükséges transzformálni:

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{lok} = \boldsymbol{K}_{ij}^{gl} \text{ és } \boldsymbol{M}_{ij}^{lok} = \boldsymbol{M}_{ij}^{gl}$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 213 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \\ 0 & 237 & -54 & 0 & 82 & 31 \\ 0 & -54 & 15 & 0 & -32 & 11 \\ 106 & 0 & 0 & 213 & 0 & 0 \\ 0 & 82 & -32 & 0 & 237 & 53 \\ 0 & 31 & 11 & 0 & 53 & 15 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_{ij}^{gl} = \begin{bmatrix} 9375 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 \\ 0 & 292 & -235 & 0 & -293 & -235 \\ 0 & -235 & 250 & 0 & 234 & 125 \\ -9375 & 0 & 0 & 9375 & 0 & 0 \\ 0 & -293 & 234 & 0 & 292 & 234 \\ 0 & -235 & 125 & 0 & 234 & 250 \end{bmatrix}$$

Példa – Gerenda normál és hajlítórezgése II.

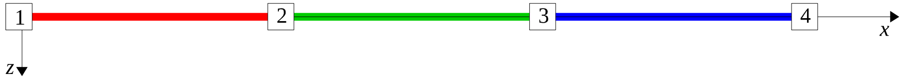


$$\boldsymbol{K}_{ij}^{gl} = \begin{bmatrix} 9375 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 \\ 0 & 292 & -235 & 0 & -293 & -235 \\ 0 & -235 & 250 & 0 & 234 & 125 \\ -9375 & 0 & 0 & 9375 & 0 & 0 \\ 0 & -293 & 234 & 0 & 292 & 234 \\ 0 & -235 & 125 & 0 & 234 & 250 \end{bmatrix}$$

Merevségi mátrix kompilálása:

$$\boldsymbol{K}^{all} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccccccc} & 1 & & & 2 & & & 3 & & & 4 & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} 9375 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 292 & -235 & 0 & -293 & -235 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235 & 250 & 0 & 234 & 125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -9375 & 0 & 0 & 18750 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -293 & 234 & 0 & 585 & 0 & 0 & -293 & -235 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -235 & 125 & 0 & 0 & 500 & 0 & 234 & 125 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 & 18750 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -293 & 234 & 0 & 585 & 0 & 0 & -293 & -235 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -235 & 125 & 0 & 0 & 500 & 0 & 234 & 125 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 & 9375 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -293 & 234 & 0 & 292 & 234 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -235 & 125 & 0 & 234 & 250 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ 2 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Példa – Gerenda normál és hajlítórezgése III.

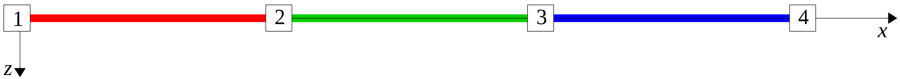


$$\boldsymbol{M}_{ij}^{gl} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 213 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \\ 0 & 237 & -54 & 0 & 82 & 31 \\ 0 & -54 & 15 & 0 & -32 & 11 \\ 106 & 0 & 0 & 213 & 0 & 0 \\ 0 & 82 & -32 & 0 & 237 & 53 \\ 0 & 63 & 11 & 0 & 53 & 15 \end{bmatrix}$$

Tömegmátrix kompilálása:

$$\boldsymbol{M}^{all} = 10^{-3} \cdot \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \qquad\boxed{1}\qquad & \qquad\boxed{2}\qquad & \qquad\boxed{3}\qquad & \qquad\boxed{4}\qquad \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} 213 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 237 & -54 & 0 & 82 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -54 & 15 & 0 & -32 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 106 & 0 & 0 & 426 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 82 & -32 & 0 & 475 & 0 & 0 & 82 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 11 & 0 & 0 & 31 & 0 & -32 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 & 426 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 82 & -32 & 0 & 475 & 0 & 0 & 82 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 11 & 0 & 0 & 31 & 0 & -32 & 11 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 & 213 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 82 & -32 & 0 & 237 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 & 11 & 0 & 53 & 15 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \\ \\ \boxed{2} \\ \\ \\ \boxed{3} \\ \\ \\ \boxed{4} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Példa – Gerenda támaszai I.



Merev befogás mindkét végen: a megtámasztott szabadságfokok elmozdulása 0.

➔ a nekik megfelelő oszlopok nullával szorzódnak

➔ a nekik megfelelő sorokban a reakció lesz az ismeretlen

➔ az egyenletrenszer redukálható

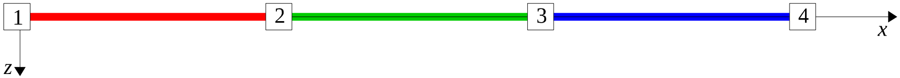
$$\boldsymbol{M}^{all} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{K}^{all} \cdot \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{q}(t)$$

$$\boldsymbol{M} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}_2 \\ \ddot{\boldsymbol{u}}_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{K} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_2 \\ \boldsymbol{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{q}(t)$$

Innen a szokott módon számolható.

Példa – Gerenda támaszai II.



$$\boldsymbol{K}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 18750 & 0 & 0 & -9375 & 0 & 0 \\ 0 & 585 & 0 & 0 & -293 & -235 \\ 0 & 0 & 500 & 0 & 234 & 125 \\ \hline -9375 & 0 & 0 & 18750 & 0 & 0 \\ 0 & -293 & 234 & 0 & 585 & 0 \\ 0 & -235 & 125 & 0 & 0 & 500 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array}$$

$$\boldsymbol{M}=10^{-3}\cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 426 & 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \\ 0 & 475 & 0 & 0 & 82 & 31 \\ 0 & 0 & 31 & 0 & -32 & 11 \\ \hline 106 & 0 & 0 & 426 & 0 & 0 \\ 0 & 82 & -32 & 0 & 475 & 0 \\ 0 & 31 & 11 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{array}$$

A szabadrezgés (az általánosított sajátértékfeladat) megoldásai:

$$\boldsymbol{\Omega}=\langle 15{,}545 \quad 42{,}859 \quad 130{,}247 \quad 132{,}583 \quad 151{,}737 \quad 296{,}464 \rangle$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}968 & 0 & -1{,}250 \\ -0{,}907 & 1{,}067 & 0{,}463 & 0 & -0{,}406 & 0 \\ 0{,}593 & 0{,}571 & -3{,}473 & 0 & -5{,}281 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}968 & 0 & 1{,}250 \\ -0{,}907 & -1{,}067 & -0{,}463 & 0 & -0{,}406 & 0 \\ -0{,}593 & 0{,}571 & -3{,}473 & 0 & 5{,}281 & 0 \end{bmatrix}$$

hajlító rezgések

normál rezgések

Példa – Elemméret, elemszám hatása

Hajlítórezgések sajátkörfrekvenciái az elemszám függvényében:

$$N=2 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}603 \;\; 56{,}256 \; \rangle$$
$$N=3 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}545 \;\; 42{,}859 \;\; 130{,}247 \;\; 151{,}737 \; \rangle$$
$$N=4 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}374 \;\; 43{,}381 \;\; 84{,}743 \;\; 218{,}388 \;\; 265{,}156 \;\; 308{,}835 \; \rangle$$
$$N=5 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}330 \;\; 42{,}658 \;\; 86{,}229 \;\; 140{,}911 \;\; 339{,}550 \;\; 375{,}270 \;\; 463{,}823 \;\; 520{,}455 \; \rangle$$
$$N=6 \quad \mathbf{\Omega}=\langle \; 15{,}321 \;\; 42{,}329 \;\; 84{,}592 \;\; 144{,}102 \;\; 211{,}406 \;\; 482{,}082 \;\; 528{,}409 \;\; 596{,}410 \;\; 727{,}317 \;\; 777{,}986 \; \rangle$$

A sajátkörfrekvenciák első fele hihető, a magasabb tagok még messze nem.
Ennek oka: a bázisfüggvények legfeljebb harmadfokú függvények, ilyen alakokkal próbáljuk leírni a tényleges rezgésalakot. Ez egy geometriai kényszer, ami merevíti a ténylegeshez képest a szerkezetet ➜ magasabb sajátkörfrekvenciák.

Mekkora elemméretet használjunk?

A figyelembe vehető sajátkörfrekvenciák a gerjesztés körfrekvenciáját követni tudják.
Különben lehet, hogy éppen a rezonáns rezgésmódot hagyjuk ki.

A magasabb értékekre semmi szükség:
¤ pontatlan
¤ tszf. rendszerben a hatása egyre csökken.

Általánosított sajátértékfeladat redukált megoldása

Ha az N szabadságfokú rendszerben csak n sajátvektort és sajátkörfrekvenciát határozunk meg:

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_N\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\Omega}=\langle \omega_{0,1} \quad \omega_{0,2} \quad \dots \quad \omega_{0,N}\rangle$$

helyett

$$\boldsymbol{V}_n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\Omega}_n=\langle \omega_{0,1} \quad \omega_{0,2} \quad \dots \quad \omega_{0,n}\rangle$$

De az ortogonalitási és normáltsági tulajdonságok megmaradnak:

$$\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{\Omega}_n$$

A modálanalízis során csak közelítő megoldást kapunk: $\boldsymbol{x}(t)\approx \boldsymbol{V}_n \boldsymbol{y}_n(t)$

A mozgásegyenlet: $\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{V}_n \ddot{\boldsymbol{y}}_n(t)+\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{V}_n \boldsymbol{y}_n(t)=\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{q}(t)$

Most is szétesik (az első n alakra): $\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_n(t)+\boldsymbol{\Omega}_n \boldsymbol{y}_n(t)=\boldsymbol{f}_n(t)$

$$\ddot{y}_i(t)+\omega_{0,i}^2 y_i(t)=f_i(t)$$

Támaszrezgés esetén a mutatóvektort a teljes szerkezeten számoljuk, így: $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{i}$

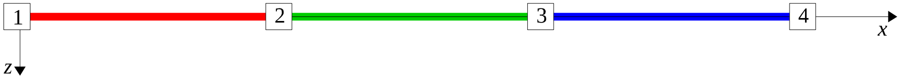
A modális részvétel is változatlan: $\Gamma_i=\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m}$, ezeket egy vektorba gyűjtve:

$$\boldsymbol{\Gamma}_n=\begin{bmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\\ \vdots\\ \Gamma_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{m}\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{m}\end{bmatrix}=\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{m}=\boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{i}$$

Az n rezgésalakkal figyelembe vett *hatékony tömeg*:

$$m_{eff}=\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i^2=\boldsymbol{\Gamma}_n^T \boldsymbol{\Gamma}_n=\boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{V}_n \boldsymbol{V}_n^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{i}$$

Gerenda rugalmas megtámasztása

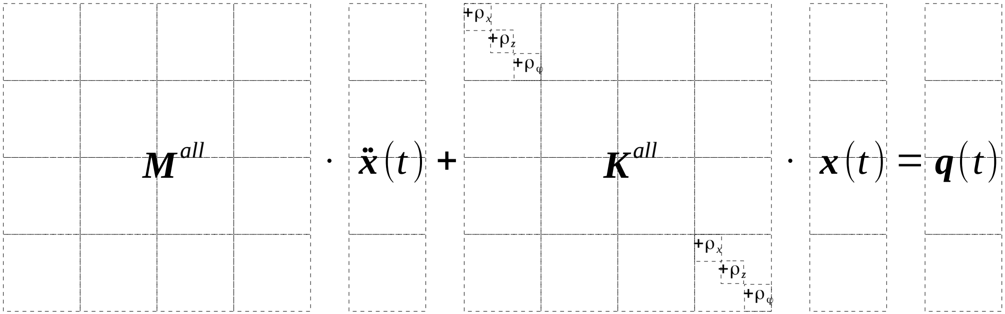


A teljes merevségi mátrix főátlójában a rugalmasan megtámasztott szabadságfokok elemeihez kell hozzáadni a rugómerevséget:

¤ merev támasz esetén egy numerikusan *kellően nagy merevségű* rugóval támasztjuk meg

¤ nem kell megkülönböztetni a külső- és belső csomópontokat, szabadságfokokat

¤ a merev támasz esetén nagyobb lesz az egyenletrendszer
(de úgyis csak az első néhány sajátrezgésalakot használjuk)



$$\boldsymbol{M}^{all}\cdot\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}^{all}\cdot\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

Gerenda rugalmas megtámasztása – példa

A korábban már kompilált mátrixok első 6 sajátkörfrekvenciája a rugómerevség függvényében:

$$\rho=0 \qquad \boldsymbol{\Omega}_6=\langle\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 14{,}83 \quad 43{,}84 \quad 117{,}59\ \rangle$$

$$\rho=10 \qquad \boldsymbol{\Omega}_6=\langle\ 2{,}99 \quad 3{,}22 \quad 5{,}75 \quad 17{,}17 \quad 45{,}38 \quad 118{,}16\ \rangle$$

$$\rho=100 \qquad \boldsymbol{\Omega}_6=\langle\ 7{,}48 \quad 15{,}44 \quad 28{,}44 \quad 54{,}20 \quad 122{,}2 \quad 147{,}98\ \rangle$$

$$\rho=1000 \qquad \boldsymbol{\Omega}_6=\langle\ 13{,}38 \quad 32{,}75 \quad 61{,}30 \quad 81{,}33 \quad 134{,}92 \quad 178{,}74\ \rangle$$

$$\rho=10000 \qquad \boldsymbol{\Omega}_6=\langle\ 15{,}28 \quad 41{,}59 \quad 82{,}93 \quad 126{,}43 \quad 128{,}01 \quad 194{,}82\ \rangle$$

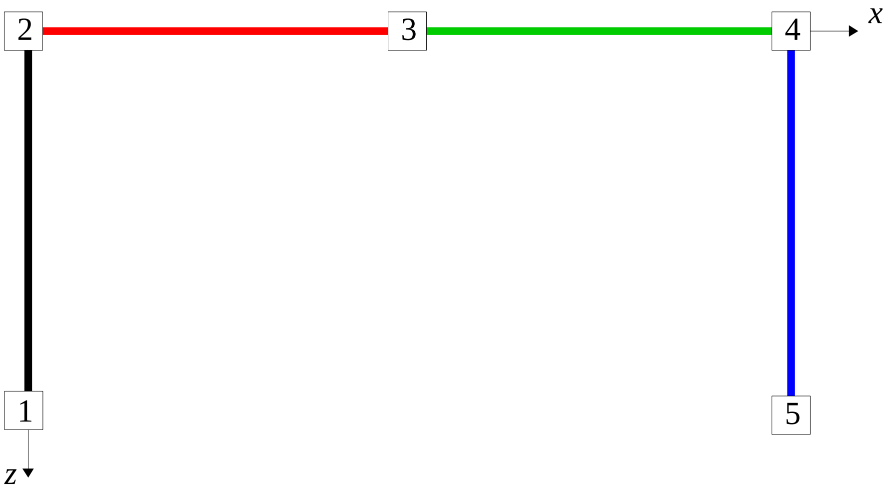
$$\rho=100000 \qquad \boldsymbol{\Omega}_6=\langle\ 15{,}51 \quad 42{,}73 \quad 124{,}22 \quad 129{,}93 \quad 149{,}35 \quad 278{,}25\ \rangle$$

$$\rho=\infty \qquad \boldsymbol{\Omega}_6=\langle\ 15{,}55 \quad 42{,}86 \quad 130{,}25 \quad 132{,}58 \quad 151{,}74 \quad 296{,}46\ \rangle$$

Túl kicsi rugómerevség → a merevtest-szerű mozgás dominál
Mennyi az elegendő merevség a merev támasz modellezésére?
¤ Elsősorban szerkezetfüggő (még csak nem is a főátló értékeitől).
¤ A merevtest-szerű rezgés frekvenciája legyen nagyságrendekkel nagyobb az első sajátkörfrekvenciánál.

Példa – Keret rezgése, elemi mátrixok a lokális krsz.-ben

$L = 8$ m hosszú, $H = 4$ m magas keret, fajlagos tömege: $\mu = 400$ kg/m,
normálmerevsége: $EA = 15000$ kN, hajlítómerevsége $EI = 100$ kNm^2
Állítsuk elő a teljes szerkezet merevségi és tömegmátrixát, ha 4 elemre bontjuk a keretet!



Mindegyik elem azonos
(hosszúságú, anyagú, merevségű):

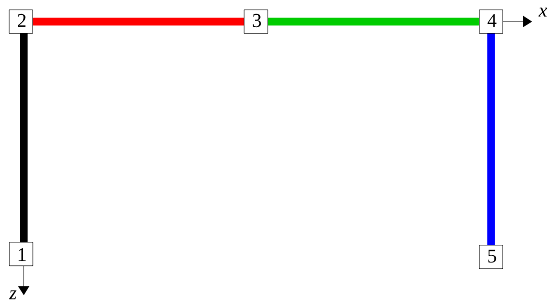
$$\boldsymbol{K}_{12}^{lok} = \boldsymbol{K}_{23}^{lok} = \boldsymbol{K}_{34}^{lok} = \boldsymbol{K}_{45}^{lok}$$

és

$$\boldsymbol{M}_{12}^{lok} = \boldsymbol{M}_{23}^{lok} = \boldsymbol{M}_{34}^{lok} = \boldsymbol{M}_{45}^{lok}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{lok} = \begin{bmatrix} 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 & 0 \\ 0 & 37{,}5 & -75 & 0 & -37{,}5 & -75 \\ 0 & -75 & 200 & 0 & 75 & 100 \\ -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 & 0 \\ 0 & -37{,}5 & 75 & 0 & 37{,}5 & 75 \\ 0 & -75 & 100 & 0 & 75 & 200 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{ij}^{lok} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 533 & 0 & 0 & 267 & 0 & 0 \\ 0 & 594 & -335 & 0 & 206 & 198 \\ 0 & -335 & 244 & 0 & -198 & 183 \\ 267 & 0 & 0 & 533 & 0 & 0 \\ 0 & 206 & -198 & 0 & 594 & 335 \\ 0 & 198 & 183 & 0 & 335 & 244 \end{bmatrix}$$

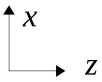
Példa – Keret rezgése, elemi mátrixok a globális krsz.-ben



A vízszintes elemek a globális krsz.-rel azonosan állnak

➔ nem szükséges transzformálni:

$$\boldsymbol{K}_{23}^{gl}=\boldsymbol{K}_{34}^{gl}=\boldsymbol{K}_{ij}^{lok} \text{ és } \boldsymbol{M}_{23}^{gl}=\boldsymbol{M}_{34}^{gl}=\boldsymbol{M}_{ij}^{lok}$$



A függőleges elemek álljanak azonos módon:

1-2 és 5-4 elem lesz, de a lokális krsz. azonosan áll

➔ csak egy transzformáció kell

viszont az utolsó elemnél $i=5$ és $j=4$!

A transzformáció eredménye:

$$\boldsymbol{K}_{12}^{gl}=\begin{bmatrix} 37{,}5 & 0 & -75 & -37{,}5 & 0 & -75 \\ 0 & 3000 & 0 & 0 & -3000 & 0 \\ -75 & 0 & 200 & 75 & 0 & 100 \\ -37{,}5 & 0 & 75 & 37{,}5 & 0 & 75 \\ 0 & -3000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ -75 & 0 & 100 & 75 & 0 & 200 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{12}^{gl}=10^{-3}\cdot\begin{bmatrix} 594 & 0 & -335 & 206 & 0 & 198 \\ 0 & 533 & 0 & 0 & 267 & 0 \\ -335 & 0 & 244 & -198 & 0 & 183 \\ 206 & 0 & -198 & 594 & 0 & 335 \\ 0 & 267 & 0 & 0 & 533 & 0 \\ 198 & 0 & 183 & 335 & 0 & 244 \end{bmatrix}$$

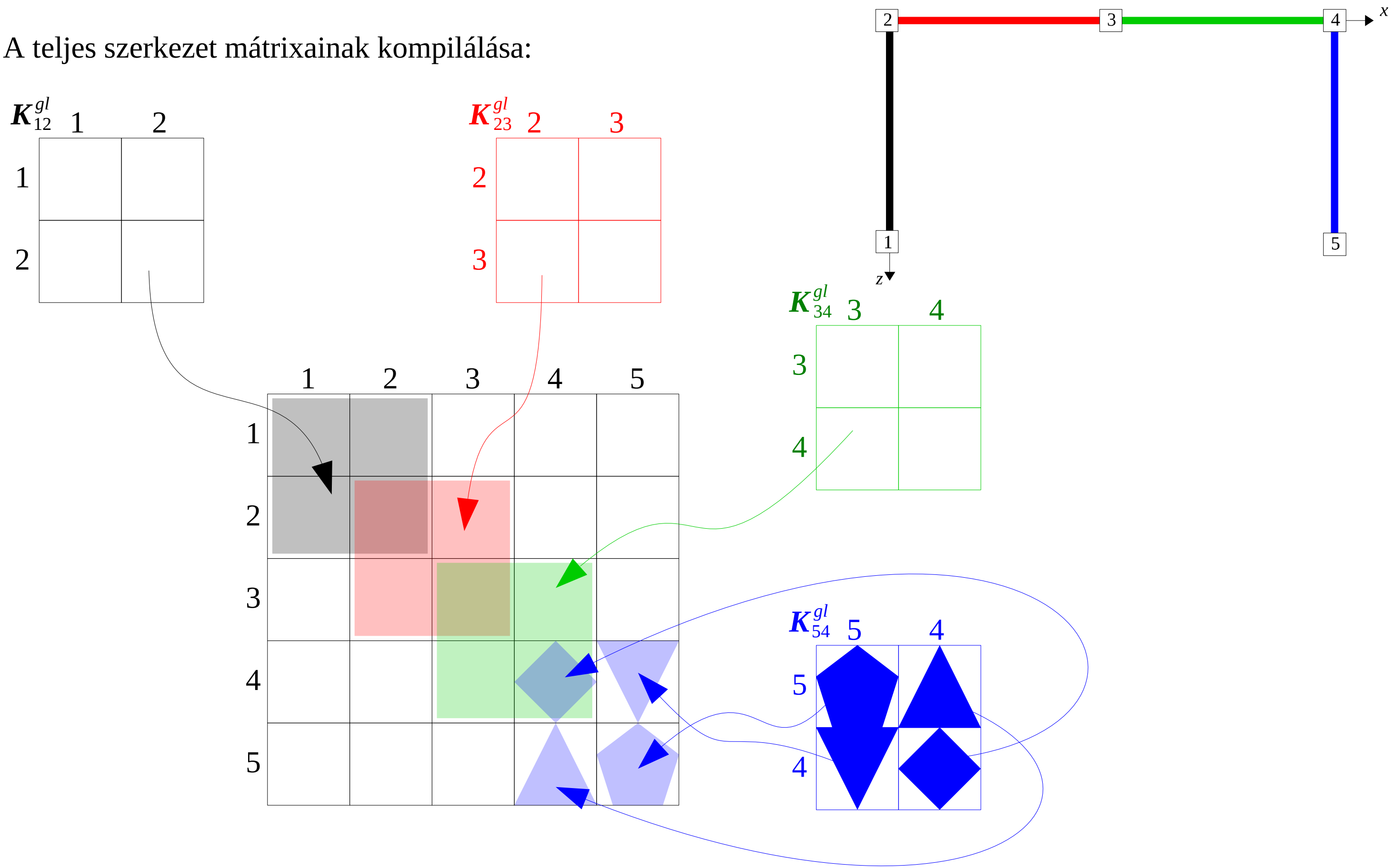
Lépésenként:

¤ fel kellett cserélni az x és z irányú elmozdulásokat és
azaz az 1. és 2. sort, a 4. és 5. sort, az 1. és 2. oszlopot végül a 4. és 5. oszlopot

¤ az így kapott z irány a globálissal ellenkező irányú:
-1-gyel szorozni kell a 2. és 5. sort, majd a 2. és 5. oszlopot

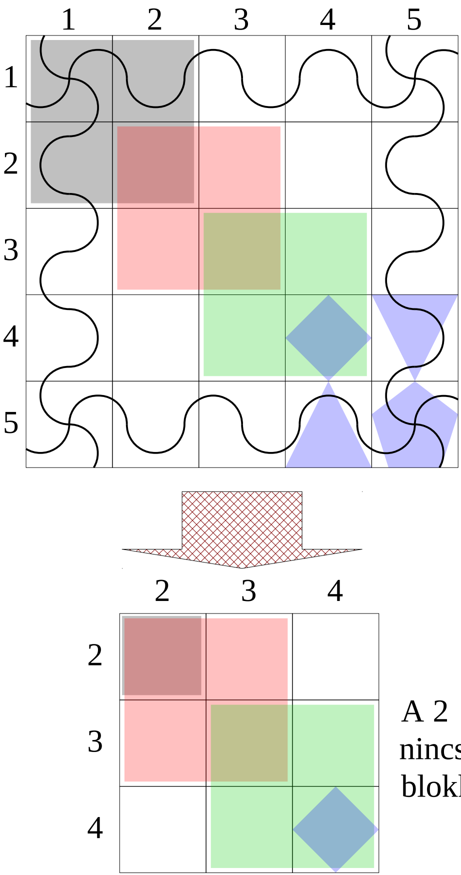
Példa – Keret rezgése, kompilálás

A teljes szerkezet mátrixainak kompilálása:

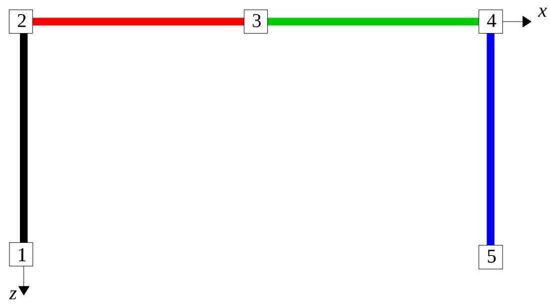


Példa – Keret rezgése, peremfeltételek, sajátértékfeladat

Peremfeltételek, például befogott-befogott oszloptalpak:



A 2 és 4 csomópont között nincs elem → a 2,4 és a 4,2 blokkok üresen maradtak.



A maradék mátrixokból: $\mathbf{\Omega}_n = \langle 3{,}22 \quad 5{,}77 \quad 26{,}77 \quad 29{,}55 \quad \ldots \rangle$

$$\boldsymbol{V}_n = \begin{bmatrix} -0.9973 & -0.0046 & -0.0273 & 0.1051 & \ldots \\ 0.0022 & -0.0103 & 0.0770 & 0.2001 & \ldots \\ 0.2062 & 0.2116 & 0.2741 & -1.0000 & \ldots \\ -1.0000 & -0.0001 & -0.0333 & 0.1341 & \ldots \\ 0.0000 & -1.0000 & 0.0000 & -0.0001 & \ldots \\ -0.1016 & 0.0000 & 1.0000 & 0.7788 & \ldots \\ -0.9973 & 0.0045 & -0.0273 & 0.1051 & \ldots \\ -0.0023 & -0.0103 & -0.0771 & -0.2002 & \ldots \\ 0.2062 & -0.2117 & 0.2741 & -1.0000 & \ldots \end{bmatrix}$$

HF: hogy néznek ki ezek az alakok?

Összefoglalás

keretek merevségi mátrixa

keretek tömegmátrixai

kompilálás

elemméret hatása

rugalmas megtámasztás

transzformáció

Mit tanultunk eddig?

Keretszerkezetek merevségi és tömegmátrixai

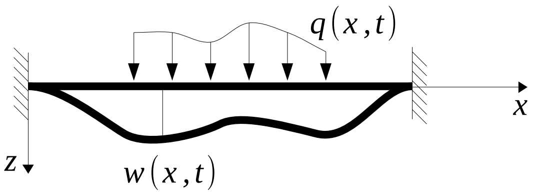
Mit fogunk tanulni ma?

Folytonos rúd rezgése

hajlítórezgés differenciálegyenlete

hajlítórezgés: szabadrezgés, rezgésalakok

Folytonos rúd hajlítórezgése – differenciálegyenlet I.

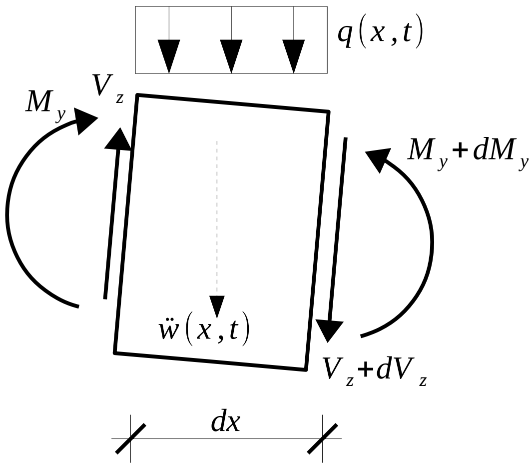


Adott:
EI : hajlítómerevség
μ : fajlagos tömeg
L : hossz
$q(x,t)$: teher

Keressük:
$w(x,t)$: elmozdulásfüggvény

Feltételezéseink:
¤ Kis elmozdulások elve
¤ Euler-Bernoulli gerenda
¤ A keresztmetszet elfordulási tehetetlenségét elhanyagoljuk

Egy elemi (dx) hosszúságú darab elkülönítése:



Newton második törvénye:

$$-V_z + (V_z + dV_z) + q(x,t)\cdot dx = \mu\, dx \cdot \ddot{w}(x,t)$$

$$+dV_z \quad + q(x,t)\cdot dx = \mu\, dx \cdot \ddot{w}(x,t)$$

$$\frac{dV_z}{dx} + q(x,t) = \mu\, \ddot{w}(x,t)$$

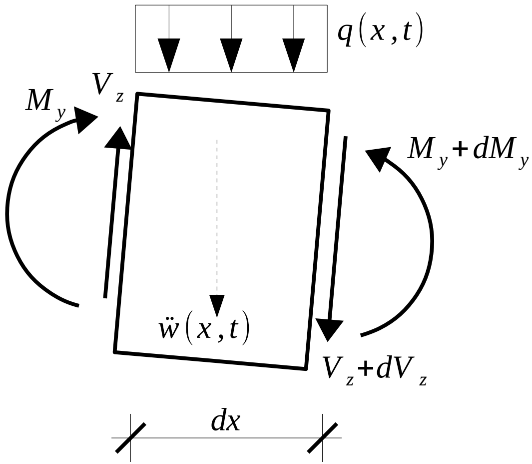
$$V_z'(x,t) + q(x,t) = \mu\, \ddot{w}(x,t)$$

A nyíróerők és hajlítónyomatékok is hely- és időfüggők, a teljes jelölésük: $V_z(x,t), M_y(x,t)$, illetve $V_z(x+dx,t), M_y(x+dx,t)$

Folytonos rúd hajlítórezgése – differenciálegyenlet II.

Feltételezéseink:
¤ A keresztmetszet elfordulási tehetetlenségét elhanyagoljuk

Egy elemi (dx) hosszúságú darab elkülönítése:



A perdülettételből nyomatéki egyensúlyi egyenlet lesz:

$$-M_y - V_z\,dx + \left(M_y + dM_y\right) + q(x,t)\cdot dx\cdot\frac{dx}{2} = 0$$

$$-V_z\,dx \qquad + dM_y \qquad = 0$$

$$\rightarrow \quad V_z = \frac{dM_y}{dx}$$

$$\frac{dV_z}{dx} + q(x,t) = \mu\,\ddot{w}(x,t) \qquad \frac{d^2 M_y}{dx} + q(x,t) = \mu\,\ddot{w}(x,t)$$

$$M_y''(x,t) + q(x,t) = \mu\,\ddot{w}(x,t)$$

Anyagegyenlet:
$M_y(x,t) = EI_y\cdot\kappa_y(x,t)$
Geom. egyenlet:
$\kappa_y(x,t) = -w''(x,t)$

$$M_y(x,t) = -EI_y\cdot w''(x,t)$$

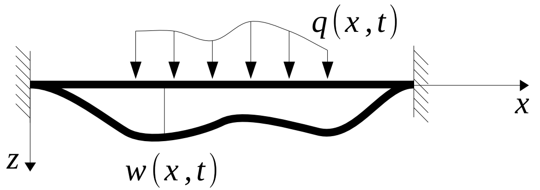
$$-EI\,w''''(x,t) + q(x,t) = \mu\,\ddot{w}(x,t)$$

$$\boxed{EI\,w''''(x,t) + \mu\,\ddot{w}(x,t) = q(x,t)}$$

parciális differenciálegyenlet (van benne x és t szerinti derivált is)

Folytonos rúd hajlítórezgése – differenciálegyenlet III.

$$\boxed{EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=q(x,t)}$$



parciális differenciálegyenlet (van benne x és t szerinti derivált is)

A megoldás itt is két részből áll:

1. A homogén differenciálegyenlet: $EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=0$

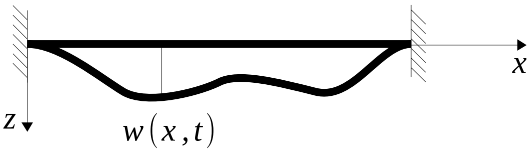
A kontinuum *szabadrezgése*.
Megoldásaként kapjuk a sajátkörfrekvenciákat, sajátrezgésalakokat.
A $w(x,t)$ végtelen sok pont elmozdulását adja meg
➔ végtelen szabadsági fok
➔ végtelen számú sajátkörfrekvencia, sajátrezgésalakok

2. Az inhomogén differenciálegyenlet: $EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=q(x,t)$

A kontinuum *gerjesztett rezgése*.
Partikuláris megoldás.
A teljes megoldást a végtelen sok sajátrezgésalakból képzett összeg hozzáadásával kapjuk. Ezek együtthatóit a végtelen sok kezdeti feltételből számíthatjuk.

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés I.

$$EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=q(x,t)$$



szabadrezgés → nincs teher → $q(x,t)=0$

homogén diff.egy.: $EI\,w''''(x,t)+\mu\,\ddot{w}(x,t)=0$

Időben másodrendű → várhatóan harmonikus rezgés lesz
Keressük a megoldást
egy ismeretlen helyfüggő tag, és
egy harmonikus időfüggő tag szorzataként:

$$w(x,t)=\hat{w}(x)\cdot\cos(\omega_0 t)$$

Az időfüggő tag lehetne más harmonikus fv. is,
pl.: $\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t-\phi_0)$, stb.

A parciális deriváltak egyszerűek:

$$w''''(x,t)=\hat{w}''''(x)\cdot\cos(\omega_0 t)$$

$$\ddot{w}(x,t)=\hat{w}(x)\cdot(-\omega_0^2)\cdot\cos(\omega_0 t)$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$EI\,\hat{w}''''(x)\cdot\cos(\omega_0 t)+\mu\,\hat{w}(x)\cdot(-\omega_0^2)\cdot\cos(\omega_0 t)=0 \qquad /:\cos(\omega_0 t)$$

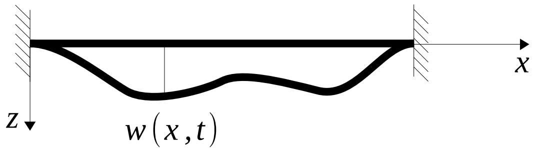
$$EI\,\hat{w}''''(x)-\mu\,\omega_0^2\,\hat{w}(x)=0$$

A homogén parciális DE-ből
homogén közönséges DE lett.

Ha ez valakit emlékeztet az
$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=0$-ra:
hasonló, de
- ¤ negyedrendű és
- ¤ kivonás van az összeadás helyett

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés II.

$$EI\,\hat{w}''''(x)-\mu\omega_0^2\hat{w}(x)=0$$



Az alakfüggvény differenciálegyenletének *általános* megoldása:

$$\hat{w}(x)=A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)+C\sinh(\lambda x)+D\cosh(\lambda x)$$

A harmonikus tagokon belül a λ (frekvenciaparaméter) a hosszmenti oda-vissza változás gyakoriságával függ össze.

Ennek első, második, harmadik, negyedik deriváltjai:

$$\hat{w}'(x)=\lambda^1\cdot(+A\cos(\lambda x)-B\sin(\lambda x)+C\cosh(\lambda x)+D\sinh(\lambda x))$$

$$\hat{w}''(x)=\lambda^2\cdot(-A\sin(\lambda x)-B\cos(\lambda x)+C\sinh(\lambda x)+D\cosh(\lambda x))$$

$$\hat{w}'''(x)=\lambda^3\cdot(-A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)+C\cosh(\lambda x)+D\sinh(\lambda x))$$

$$\hat{w}''''(x)=\lambda^4\cdot(+A\sin(\lambda x)+B\cos(\lambda x)+C\sinh(\lambda x)+D\cosh(\lambda x))=\lambda^4\cdot\hat{w}(x)$$

Ha $\hat{w}(x)$ egy megoldás, akkor annak bármely skalárszorosa is az, mint a sajátvektoroknál. A négy paraméter (A,B,C,D) egymáshoz viszonyított aránya számít. (Ez is egyértelműsíthető: függvény normája.)

Visszahelyettesítve:

$$EI\cdot\lambda^4\cdot\hat{w}(x)-\mu\omega_0^2\hat{w}(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{EI}{\mu}\cdot\lambda^4=\omega_0^2 \;\rightarrow\; \omega_0=\lambda^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nagyobb } \lambda\\ \text{(sűrűbben változó alak)}\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Nagyobb sajátkörfrekvencia}\\ \text{(gyorsabban változó rezgés)}\\ \text{rövidebb periódusidő}\end{array}\right.$$

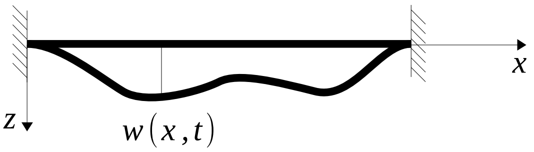
Mennyi $A, B, C, D, \lambda, \omega_0$?

Attól függ.

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés peremfeltételek I.

$$\omega_0 = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Befogott-befogott gerenda:



Eltolódások és elfordulások a gerenda végeinél előírtak:

$$w(0,t) = w(L,t) = 0$$
$$w'(0,t) = w'(L,t) = 0$$

Mivel $w(x,t) = \hat{w}(x)\cos(\omega_0 t)$, és a peremfeltételeknek minden t-re teljesülniük kell:

$$\hat{w}(0) = \hat{w}(L) = 0$$
$$\hat{w}'(0) = \hat{w}'(L) = 0$$

A feltételezett alakot behelyettesítve:

$$\hat{w}(0) = +A\sin(\lambda 0) + B\cos(\lambda 0) + C\sinh(\lambda 0) + D\cosh(\lambda 0) = 0$$
$$\hat{w}'(0) = \lambda \cdot \left(+A\cos(\lambda 0) - B\sin(\lambda 0) + C\cosh(\lambda 0) + D\sinh(\lambda 0)\right) = 0$$
$$\hat{w}(L) = +A\sin(\lambda L) + B\cos(\lambda L) + C\sinh(\lambda L) + D\cosh(\lambda L) = 0$$
$$\hat{w}'(L) = \lambda \cdot \left(+A\cos(\lambda L) - B\sin(\lambda L) + C\cosh(\lambda L) + D\sinh(\lambda L)\right) = 0$$

$$\sin(0) = \sinh(0) = 0$$

és

$$\cos(0) = \cosh(0) = 1$$

Mátrix-alakban:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \\ \lambda\cos(\lambda L) & -\lambda\sin(\lambda L) & \lambda\cosh(\lambda L) & \lambda\sinh(\lambda L) \end{bmatrix}}_{\text{Frekvenciamátrix}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az általános megoldás paramétereinek arányait
a peremfeltételek függvényében meghatározó
egyenletrendszer együtthatómátixa

Homogén, lineáris egyenletrendszer
4 egyenlet, 5 ismeretlen

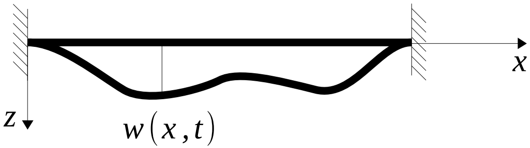
Nemtriviális megoldás létének feltétele, hogy az együtthatómátrix

- ¤ szinguláris
- ¤ sorai lineárisan összefüggők
- ¤ determinánsa zérus

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés peremfeltételek II.

$$\omega_0=\lambda^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Befogott-befogott gerenda:



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \\ \lambda\cos(\lambda L) & -\lambda\sin(\lambda L) & \lambda\cosh(\lambda L) & \lambda\sinh(\lambda L) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A determináns kifejtve:

$$\det(\boldsymbol{F})=2\cdot\lambda^2\cdot(1-\cos(\lambda L)\cdot\cosh(\lambda L))=0$$

Ennek első megoldásai:

i	0	1	2	3	4	5	…
λ_i	0 $(triv.)$	$\frac{4{,}73}{L}$	$\frac{7{,}86}{L}$	$\frac{10{,}98}{L}$	$\frac{14{,}15}{L}$	$\frac{17{,}29}{L}$	…

← végtelen sok, ahogy vártuk

A számlálók rendre $(2i+1)\pi$ közelében vannak. (Egy nagyobb, egy kisebb.)

A kapcsolódó sajátkörfrekvenciák, periódusidők:

i	1	2	3	4	5	…
λ_i	$\frac{4{,}73}{L}$	$\frac{7{,}86}{L}$	$\frac{10{,}98}{L}$	$\frac{14{,}15}{L}$	$\frac{17{,}29}{L}$	…
ω_{0i}	$22{,}4\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$61{,}8\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$120{,}6\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$200{,}2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$298{,}9\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	…
T_{0i}	$0{,}0447\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0162\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0083\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0050\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0033\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	…

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés körfrekvenciái

$$\omega_0=\lambda^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

A múlt órai példánk numerikus eredményei a hajlítórezgésekre:

$$EI=100\,\text{kNm}^2 \qquad L=4{,}8\,\text{m} \qquad \mu=400\,\text{kg/m}$$

$$N=2 \quad \mathbf{\Omega}=\langle\; 15{,}603 \quad 56{,}256 \;\rangle$$
$$N=3 \quad \mathbf{\Omega}=\langle\; 15{,}545 \quad 42{,}859 \quad 130{,}247 \quad 151{,}737 \;\rangle$$
$$N=4 \quad \mathbf{\Omega}=\langle\; 15{,}374 \quad 43{,}381 \quad 84{,}743 \quad 218{,}388 \quad 265{,}156 \quad 308{,}835 \;\rangle$$
$$N=5 \quad \mathbf{\Omega}=\langle\; 15{,}330 \quad 42{,}658 \quad 86{,}229 \quad 140{,}911 \quad 339{,}550 \quad 375{,}270 \quad 463{,}823 \quad 520{,}455 \;\rangle$$
$$N=6 \quad \mathbf{\Omega}=\langle\; 15{,}321 \quad 42{,}329 \quad 84{,}592 \quad 144{,}102 \quad 211{,}406 \quad 482{,}082 \quad 528{,}409 \quad 596{,}410 \quad 727{,}317 \quad 777{,}986 \;\rangle$$

A folytonos rúd alapján számítható sajátkörfrekvenciák:

$$N=\infty \quad \mathbf{\Omega}=\langle\; 15{,}37 \quad 42{,}41 \quad 82{,}76 \quad 137{,}4 \quad 205{,}1 \quad \sim 286 \quad \ldots \;\rangle$$

A kapcsolódó sajátkörfrekvenciák, periódusidők:

i	1	2	3	4	5	…
λ_i	$\frac{4{,}73}{L}$	$\frac{7{,}86}{L}$	$\frac{10{,}98}{L}$	$\frac{14{,}15}{L}$	$\frac{17{,}29}{L}$	$\ldots\sim\frac{(2i+1)\pi}{2L}$
ω_{0i}	$22{,}4\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$61{,}8\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$120{,}6\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$200{,}2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	$298{,}9\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$	…
T_{0i}	$0{,}0447\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0162\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0083\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0050\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	$0{,}0033\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$	…

Folytonos rúd hajlítórezgése – szabadrezgés rezgésalakok

Az i-edik alakhoz tartozó λ_i ismeretében A_i, B_i, C_i, D_i aránya számítható.

$\lambda_1, \omega_{0,1}, T_{0,1} \rightarrow \hat{w}_1(x)$

Normálni az

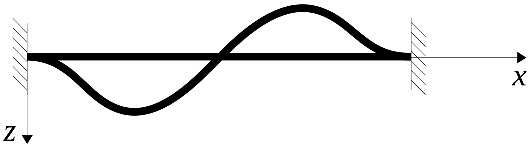
$$\int_0^L \hat{w}_i(x)\hat{w}_i(x)\,dx = 1$$

vagy

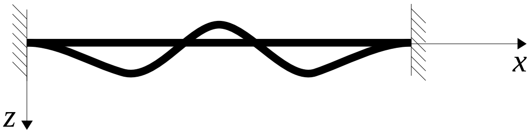
$$\int_0^L \mu\,\hat{w}_i(x)\hat{w}_i(x)\,dx = 1$$

feltétellel lehet.

$\lambda_2, \omega_{0,2}, T_{0,2} \rightarrow \hat{w}_2(x)$



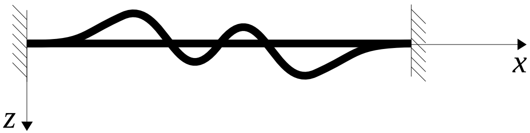
$\lambda_3, \omega_{0,3}, T_{0,3} \rightarrow \hat{w}_3(x)$



Sajátalakok ortogonalitása:
ha $i \neq j$:

$$\int_0^L \hat{w}_i(x)\hat{w}_j(x)\,dx = 0$$

$\lambda_4, \omega_{0,4}, T_{0,4} \rightarrow \hat{w}_4(x)$



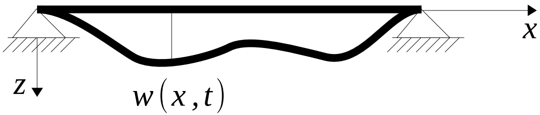
A szabadrezgés teljes megoldása a rezgésalakokkal:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{w}_i(x) \cdot \left(a_i \cos(\omega_{0,i} t) + b_i \sin(\omega_{0,i} t)\right)$$

A λ frekvenciaparaméter a zérushelyek/inflexiók gyakoriságára utal.

Folytonos rúd hajlítórezgése – példa I.

Csuklós-csuklós gerenda:



Eltolódások és hajlítónyomatékok a gerenda végeinél előírtak:

$$w(0,t)=w(L,t)=0$$
$$M(0,t)=M(L,t)=0$$

Mivel $M(x,t)=-EI\,w''(x,t)$ és $w(x,t)=\hat{w}(x)\cos(\omega_0 t)$, és a peremfeltételeknek minden t-re teljesülniük kell:

$$\hat{w}(0)=\hat{w}(L)=0$$
$$\hat{w}''(0)=\hat{w}''(L)=0$$

A feltételezett alakot behelyettesítve:

$$\hat{w}(0)= +A\sin(\lambda 0)+B\cos(\lambda 0)+C\sinh(\lambda 0)+D\cosh(\lambda 0)=0$$
$$\hat{w}''(0)=\lambda^2\cdot(-A\sin(\lambda 0)-B\cos(\lambda 0)+C\sinh(\lambda 0)+D\cosh(\lambda 0))=0$$
$$\hat{w}(L)= +A\sin(\lambda L)+B\cos(\lambda L)+C\sinh(\lambda L)+D\cosh(\lambda L)=0$$
$$\hat{w}''(L)=\lambda^2\cdot(-A\sin(\lambda L)-B\cos(\lambda L)+C\sinh(\lambda L)+D\cosh(\lambda L))=0$$

$$\sin(0)=\sinh(0)=0$$
és
$$\cos(0)=\cosh(0)=1$$

Mátrix-alakban:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & \lambda^2 \\ \sin(\lambda L) & \cos(\lambda L) & \sinh(\lambda L) & \cosh(\lambda L) \\ -\lambda^2\sin(\lambda L) & -\lambda^2\cos(\lambda L) & \lambda^2\sinh(\lambda L) & \lambda^2\cosh(\lambda L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

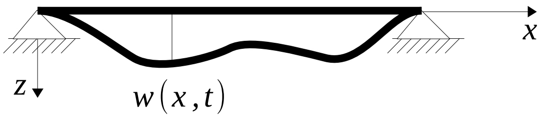
Homogén, lineáris egyenletrendszer
4 egyenlet, 5 ismeretlen

Nemtriviális megoldás létének feltétele, hogy az együtthatómátrix
- ¤ szinguláris
- ¤ sorai lineárisan összefüggők
- ¤ determinánsa zérus

A frekvenciamátrix determinánsa kifejtve:

$$\det(\boldsymbol{F})=4\lambda^3\sin(\lambda L)\sinh(\lambda L)=0$$

Folytonos rúd hajlítórezgése – példa II.



A frekvenciamátrix determinánsa kifejtve:

$$\det(\boldsymbol{F}) = 4\lambda^3 \sin(\lambda L)\sinh(\lambda L) = 0 \quad \rightarrow \sin(\lambda L) = 0 \rightarrow \lambda_i L = i\cdot\pi \rightarrow \lambda_i = \frac{i\cdot\pi}{L}$$

Az i-edik alak egyenlete:

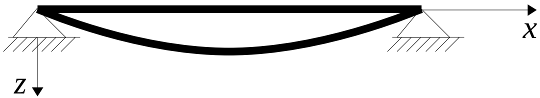
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(i\pi) & \sinh(i\pi) & \cosh(i\pi) \\ 0 & -\cos(i\pi) & \sinh(i\pi) & \cosh(i\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Csak A_i különbözhet zérustól.

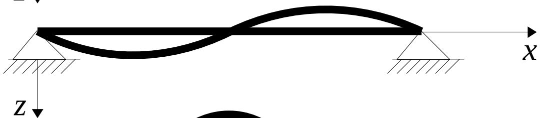
$\downarrow$

csak szinuszos alakok

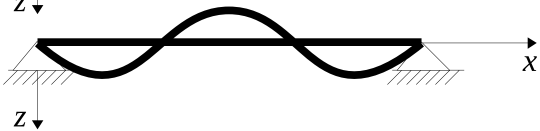
$\hat{w}_1(x)$



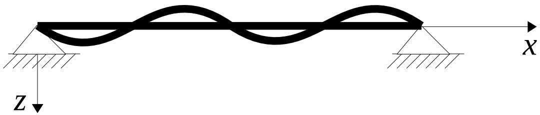
$\hat{w}_2(x)$



$\hat{w}_3(x)$



$\hat{w}_4(x)$



A sajátkörfrekvenciák i^2 szerint növekednek.

A peridóusidők $\frac{1}{i^2\pi^2}$ szerint változnak

$$\omega_{0,i} = i^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

$$T_{0,i} = \frac{1}{i^2\pi^2}\sqrt{\frac{\mu L^4}{EI}}$$

Folytonos rúd hajlítórezgése – példa III.

$$\omega_{0,i} = i^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu L^4}}$$

A csuklós-csuklós gerendát diszkretizáltuk többszabadságfokúként.
Az akkori sajátkörfrekvenciák:

1 sz.f. esetén: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{96}\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} = 9{,}798\sqrt{\frac{EI}{m_{tot} l^3}}$

2 sz.f. esetén: $\mathbf{\Omega} = \sqrt{\frac{EI}{m_{tot} l^3}} \begin{bmatrix} 9{,}859 & \\ & 38{,}184 \end{bmatrix}$

3 sz.f. esetén: $\mathbf{\Omega} = \sqrt{\frac{EI}{m_{tot} l^3}} \begin{bmatrix} 9{,}867 & & \\ & 39{,}19 & \\ & & 83{,}21 \end{bmatrix}$

A folytonos gerenda rezgését számolva: $\mathbf{\Omega} = \sqrt{\frac{EI}{m_{tot} l^3}} \begin{bmatrix} 9{,}870 & & & & \\ & 39{,}48 & & & \\ & & 88{,}83 & & \\ & & & 157{,}9 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$

Összefoglalás

folytonos rúd hajlítórezgése

kiindulási feltételezések

mozgás differenciálegyenlete

homogén differenciálegyenlet (sajátrezgés) megoldása

frekvenciaparaméterek, sajátkörfrekvenciák jellemzői

sajátrezgésalakok jellemzői