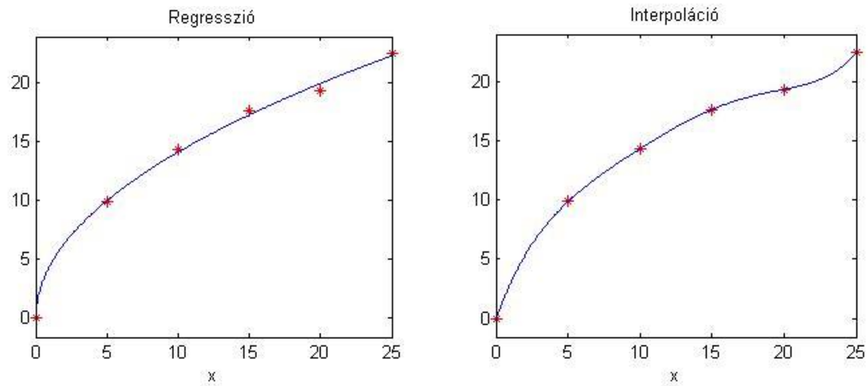
REGRESSZIÓ

A mérnöki gyakorlatban sokféle fizikai mennyiséget mérnek műszerekkel, amiket manapság többnyire digitalizálnak és a mérési eredményeket diszkrét pontonként tárolják. Ilyen például szilárdságtanból a szakítóvizsgálat, ahol az anyagok húzó igénybevétellel szembeni ellenállását mérik vagy geodéziából a teljes hullámalakos lézerszkennerek mérései. A méréseket különböző módokon használják fel, van amikor tudják, hogy az adott fizikai mennyiség milyen alakú összefüggéssel írható le és függvényillesztéssel (regresszió) keresik ennek a függvénynek a paramétereit, máskor a mért pontok között lenne szükség a becsült értékekre (interpoláció) vagy meg kellene becsülni, hogy a mért tartományon kívül hogyan alakulnának az adatok (extrapoláció).

Regresszió (függvényillesztés) esetén meghatározzuk a pontokra legjobban illeszkedő függvény paramétereit, ilyenkor a meghatározott függvény többnyire nem megy át a mért pontokon, csak közel halad hozzájuk. Interpoláció esetén az ismert pontok közötti értékeket szeretnénk megbecsülni, úgy, hogy a görbe (általában valamilyen polinom) minden mért ponton áthaladjon.



REGRESSZIÓ MINŐSÍTÉSE

Regresszió esetében a 'legjobban' illeszkedő függvényt keressük. Hogyan tudjuk mérni, mi a legjobban illeszkedő? Ehhez meg kell határozzuk az eltéréseket a mért pontok y_i koordinátái és az illesztett függvény adott pontbeli $f(x_i)$ függvényértéke között. Ezeket maradék eltéréseknek is szokták nevezni (r_i): $r_i = y_i - f(x_i)$

A maradék eltéréseket kellene valamilyen módon minimalizálni, az összes pontra. Lehetne egyszerűen összeadni a hibákat, de ebben az esetben előfordulhatna, hogy nagyon nagy pozitív és nagyon nagy negatív hibák vannak, amelyek kiejtik egymást és hiába lesz nulla az összes eltérés, az illeszkedés rossz lesz. Lehetne a hibák abszolút értékeit venni, akkor nem ejthetnék ki egymást a hibák, viszont ebben az esetben nem egyértelmű a függvény illesztés, pl. adott ponthalmazra több egyenes is illeszthető ugyanakkora összes hibával. A megoldás erre, hogy a hibák négyzetösszegét minimalizálják. Ezzel jól lehet mérni az illeszkedés minőségét és egyértelmű megoldást ad a függvény paramétereire. Minimalizálandó összes hiba (S):

$$S = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

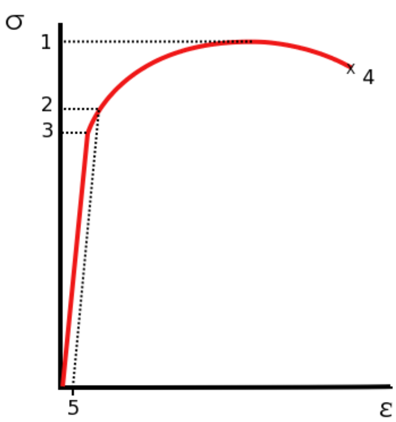
A regresszió lokális minősítése a maradék eltérések (r_i - rezídiumok) alapján történhet, a globális minősítés pedig ezeknek a korrigált tapasztalati szórásával:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{n - np}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2}{f}} = \sqrt{\frac{S}{f}}$$

ahol *n* a rendelkezésre álló mérések, *np* a becsült paraméterek, *f* pedig a fölös mérések száma (*f*=*n*-*np*).

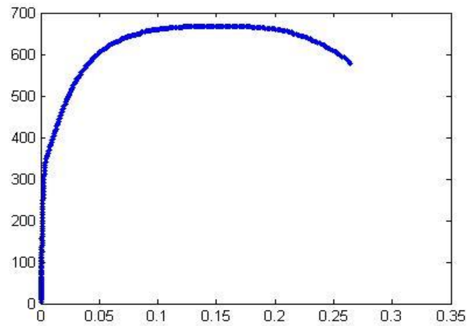
EGYENES ILLESZTÉS

Nézzünk egy konkrét példát szilárdságtanból! Egy jól megmunkálható, ötvözött acél szakítóvizsgálatából származó méréseket kell feldolgozni. A teszt során a terhelés folyamatosan növekszik egy maximum értékig, utána csökken, majd tönkremegy (eltörik) az anyag. A vizsgálatból meghatározható a rugalmassági modulus (vagy Young-modulus) (E), a szakítószilárdság (1), az egyezményes folyáshatár (2) (0.2% maradó alakváltozáshoz (5)) az arányossági határ (3)[1]. Most a rugalmassági határon belül érvényes Hooke-törvénye alapján meghatározzuk a rugalmassági modulust, az egyezményes folyáshatárt, a szakadás helyét és a szakítószilárdságot!



Ehhez először töltsük be a mérési adatainkat a **szakitovizsgalat.txt** fájlból! Ebben a mért fajlagos alakváltozásokhoz (ε - %) tartozó feszültség (σ - Mpa) értékek találhatóak meg.

```
> % Szakítóvizsgálat
> clc; clear all; close all;
> data =
  load('szakitovizsgalat.txt');
> x = data(:,1); % fajlagos
  alakváltozás, epszilon
> y = data(:,2); % feszültség, szigma
> figure(1)
> plot(x,y,'.')
```



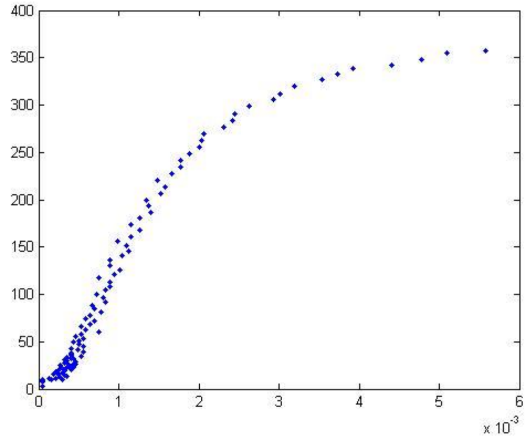
Azt, hogy hol megy tönkre az anyag, könnyű meghatározni, az utolsó mérési eredményt kell venni, ez a maximális ε érték is egyben. A szakítószilárdság meghatározásához a maximális feszültség (σ) értéket kell megkeresnünk:

```
> disp('Tönkremenetelhez tartozó fajlagos alakváltozás:')
> x(end) % ugyanaz, mint a max(x) => 0.2644 %
> disp('Szakítószilárdság:')
> max(y) %  668.3606 Mpa
```

[1] CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=647577

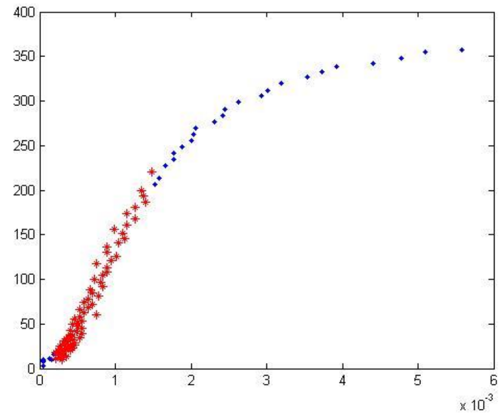
Tehát 26.4 % fajlagos alakváltozásnál szakadt el az anyag, és 668 MPa volt a maximális feszültség, a szakítószilárdság. A rugalmassági modulus meghatározásához azt a szakaszt kell megkeressük, ahol lineáris az összefüggés a fajlagos alakváltozás és a feszültség között, és erre kell egy egyenest illesztenünk. Az egyenes meredeksége lesz a rugalmassági modulus értéke. Ehhez nagyítsunk bele egy kicsit az ábrába, 0.6 % alakváltozásig és 400 MPa feszültségig!

```
> axis([0 0.006 0 400])
```



A fenti ábrán látszik, hogy a mérés elején, az origó közelében nem tekinthető lineárisnak a mérés a műszer bizonytalansága miatt, így az egyenes illesztéshez le kell vágni az adatok elejét, most vágjuk le, ami kisebb, mint 0.02 %. Meg kell keresni a rugalmassági határ (arányossági határ) felső végét is, vegyük ezt most 0.15 %-nak.

Megjegyzés: a lineáris szakasz végét az ábra alapján állapítottuk meg. Segítségül a 'data cursor' gombra  kattintva lekérdezhetjük az egyes pontok adatait. Válogassuk le logikai indexelést használva a lineáris szakasz pontjait, ahol az x koordináta nagyobb, mint 0.0002 és kisebb, mint 0.0015!




```
> feltetel=and(x>0.0002,x<0.0015);
> xl = x(feltetel);
> yl = y(feltetel);
> hold on;
> plot(xl,yl,'r*');
```

Vizsgáljuk meg, hogy a leválogatott pontok között tényleg lineáris kapcsolat áll-e fent. Ehhez számoljuk ki a lineáris korrelációs együtthatót:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

```
> xs = xl-mean(xl)
> ys = yl-mean(yl)
> r = sum(xs.*ys)/sqrt(sum(xs.^2)*sum(ys.^2)) %  0.9805
```

Vagy ugyanez egyszerűbben a matlab beépített **corr2** parancsával:

```
> r = corr2(xl,yl) %  0.9805
```

Minél jobban közelít a korrelációs tényező abszolút értéke az 1-hez, annál inkább lineáris a kapcsolat a két változó között. Mivel most 0.98 lett ez az érték, a kapcsolatot lineárisnak tekinthetjük és illeszthetünk rá egy egyenest. Ehhez nézzük meg az egyenes egyenletét: $y = m \cdot x + b$. Ebben két ismeretlen található m, az egyenes meredeksége és b eltolás paraméter, ahol az egyenes metszi az y tengelyt. A leválogatott mérések alapján 75 összetartozó x,y értékünk van, ezek alapján 75 egyenletet tudunk felírni, amelyek lineárisak az ismeretleneket tekintve (m,b):

$$\begin{aligned} m\cdot x_1+b &= y_1\\ m\cdot x_2+b &= y_2\\ &\vdots\\ m\cdot x_{75}+b &= y_{75}\end{aligned}$$

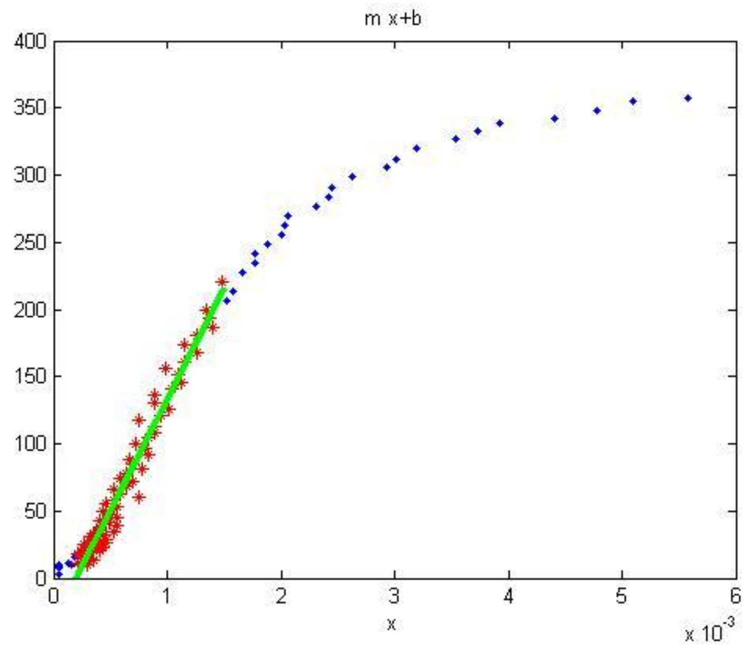
Mátrixos alakban ($A\cdot x=B$):

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & 1\\ x_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ x_{75} & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{75}\end{pmatrix}$$

Ez egy túlhatározott egyenletrendszer, ahol a maradék eltérések négyzetösszegének minimalizásával szeretnénk megkapni a legkisebb hibájú megoldást. A korábbi órák alapján ehhez használhatjuk például a túlhatározott esetben QR felbontást alkalmazó x=A\B alakú parancsot, vagy az SVD felbontást használó x=pinv(A)*B-t is.

Először elő kell állítanunk az A alakmátrixot az ismeretlenek együtthatóival. Az első oszlopban m együtthatói lesznek, vagyis x_i értékei (x_i^1), a másodikban pedig b együtthatója, ami mindig 1, ezt írhatjuk az egyszerűség kedvéért x_i^0 alakba is.

```
> A = [xl.^1 xl.^0]
> B = yl;
> mb = A\B
> % egyenes egyenlete
> m = mb(1)
> b = mb(2)
> f = @(x) m*x+b
> hold on;
> fplot(f,[0 0.0015],'g','LineWidth',3);
> axis([0 0.006 0 400])
```



Az illesztett egyenes meredeksége lesz a rugalmassági modulus értéke:

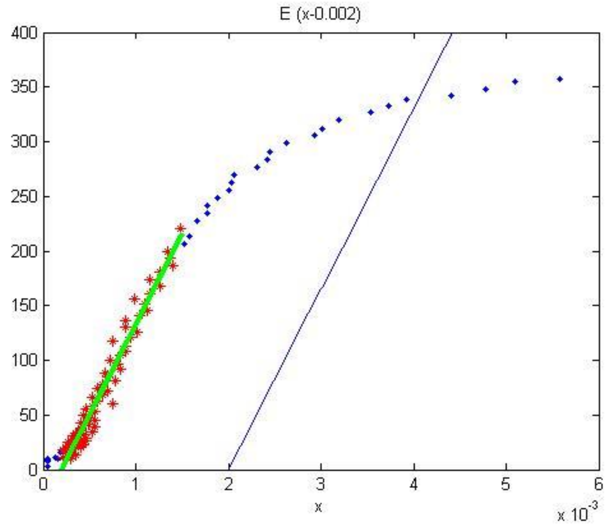
```
> format long
> E = m % E = 1.656261744954783e+05
```

Vagyis a mérés alapján meghatározott E rugalmassági modulus értéke: 165 626 N/mm^2 (MPa).

PARABOLA ILLESZTÉS

A folyáshatár megállapítása ebben az esetben nem egyértelmű az ábrából, ennek az anyagnak nincs jól látható folyáshatára. Ilyenkor az egyezményes folyáshatárt szokás használni, ami a 0.2% maradó alakváltozáshoz tartozó feszültség érték. Ezt a szakítódiagramból úgy lehet meghatározni, hogy 0.2% fajlagos nyúlás értékétől párhuzamos egyenest húznak a lineáris szakasszal, vagyis E meredekséggel kell berajzolni egy egyenest ebből a pontból, és ahol ez metszi a szakítógörbét, ott kell leolvasni a feszültséget. Definiáljuk ezt az egyenest és rajzoljuk be az ábrába!

```
> % 0.2%-os folyáshatár
> fhatar = @(x) E*(x-0.002)
> fplot(fhatar,[0 0.006])
> axis([0 0.006 0 400])
```



Hogyan határozzuk meg ennek az egyenesnek és a szakítógörbének a metszéspontját? Jó lenne illeszteni egy függvényt arra a szakaszra is, ahol a metszéspont is található, és ennek a metszéspontját megkeresni az egyenessel. Ehhez válogassuk le az előzőekhez hasonlóan a x>0.0015 és x<0.006 pontokat:

```
> % 0.0015 és 0.006 közötti
  szakasz
> feltetel2=and(x>0.0015,x<0.006);
> xp = x(feltetel2);
> yp = y(feltetel2);
> plot(xp,yp,'m*')
```

Erre most illesszünk egy másodfokú polinomot, egy parabolát $y = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$ alakban!

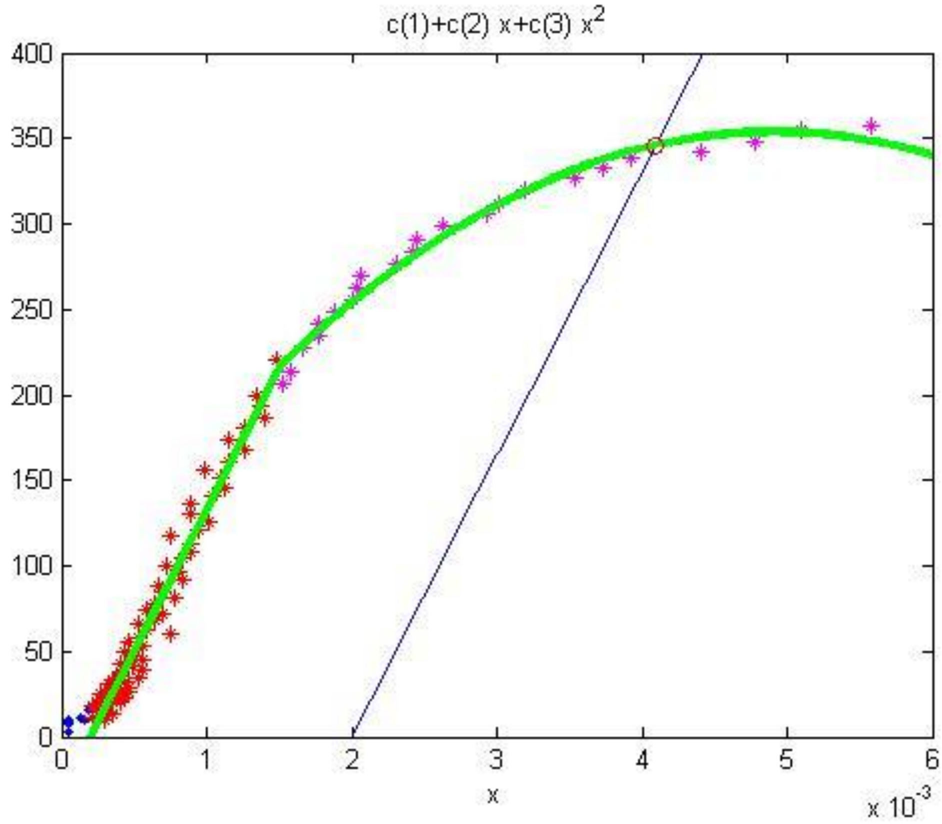
$$
\begin{aligned}
y_1 &= c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 \\
y_2 &= c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 \\
&\vdots \\
y_n &= c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2
\end{aligned}
$$

Mátrixos alakban:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

A parabola (másodfokú polinom) illesztéséhez elő kell állítanunk ismét a megfelelő alakmátrixot (az ismeretlen c_0, c_1 és c_2 együtthatóit), és megoldanunk egy túlhatározott lineáris egyenlet rendszert!

```
> A = [xp.^0 xp.^1 xp.^2]
> b = yp;
> % túlhatározott lin. egy. rsz. megoldása
> c = A\b
> % parabola egyenlete
> f2 = @(x) c(1) + c(2).*x + c(3)*x.^2
> fplot(f2,[0.0015 0.006],'g','LineWidth',3)
> axis([0 0.006 0 400])
```



Most már csak a metszéspontot kell megkeressük. Ezt a korábbi tanulmányaink alapján szintén könnyen megtehetjük. Egy f(x) és egy g(x) függvény metszéspontjában f(x)=g(x). Ezt nullára rendezve a h(x) = f(x)-g(x) = 0 nemlineáris egyenlet gyökeit kell megkeresni, amit megtehetünk például a beépített **fzero** függvényt alkalmazva!

```
> %% 0.2 %-hoz tartozó folyáshatár megállapítása
> % fhatar(x) = f2(x), vagyis h(x) = fhatar(x) - f2(2)=0
> h = @(x) fhatar(x) - f2(x)
> metszes = fzero(h,0.004)
> folyashatar = f2(metszes) % 345.818 MPa
> plot(metszes, folyashatar,'ro')
```

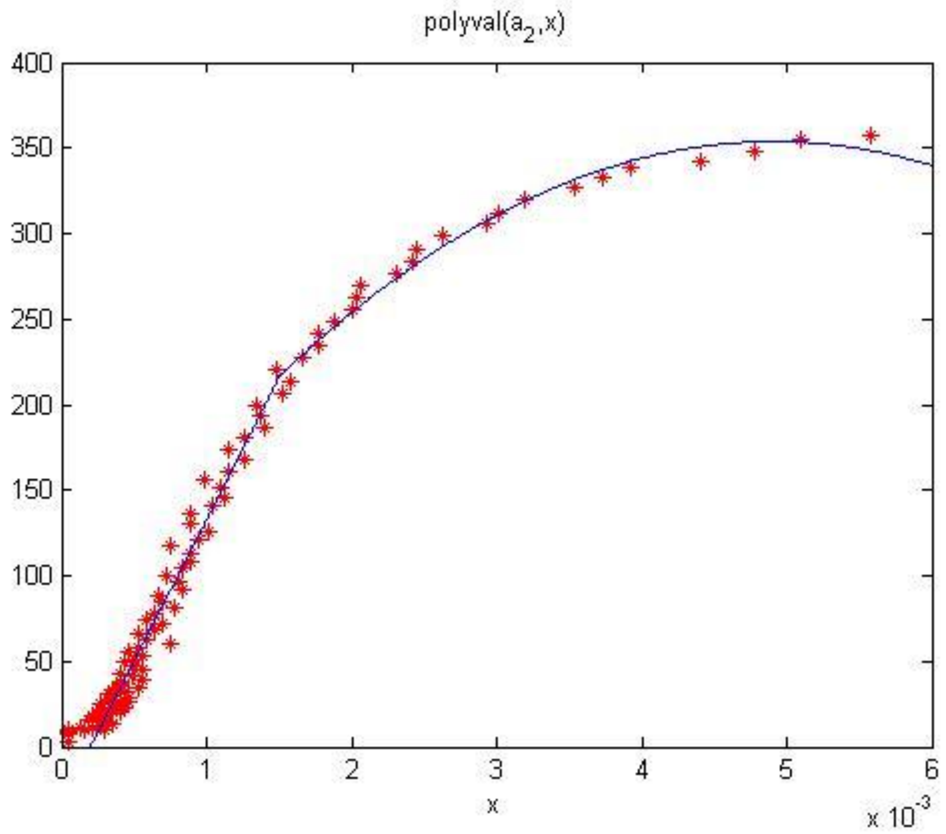
Az egyezményes, 0.2% maradék alakváltozáshoz tartozó folyáshatár a mérésünknél 346 MPa-ra adódott.

Hasonlóan az eddigiekhez harmad, negyed stb. fokú polinomokat is illeszthetünk az adatainkra. A magasabb fokú polinomoknál azonban vigyáznunk kell, mert az alakmátrixunk rosszul kondicionált lesz és bizonytalan lesz a megoldásunk, a mérési pontjainkra lehet, hogy tökéletesen fog illeszkedni a polinom, de közöttük oszcilláció léphet fel. Erre fogunk majd példát látni az interpolációnál.

POLINOM ILLESZTÉS MATLAB BEÉPÍTETT FÜGGVÉNYEIVEL (POLYFIT, POLYVAL)

A rugalmassági modulus meghatározásához a feladat első részében egy egyenes illesztésre volt szükség, ami megfelel egy elsőfokú polinomnak, a feladat második részében pedig másodfokú polinomot illesztettünk. Matlab-ban van egy parancs (**polyfit**), amivel összetartozó pontpárokhoz határozhatjuk meg tetszőleges fokszámú polinom együtthatóit. Az eredménye ennek egy vektor lesz, ami a legkisebb négyzetek módszerével illesztett polinom együtthatóit tartalmazza, a legnagyobb fokú tagtól kezdve visszafelé a konstans tagig. Ennek a parancsnak van egy párja is, a **polyval** parancs, ami kiszámolja egy tetszőleges pontban a polinom értékét, ha megadtuk azt a vektort, ami az együtthatókat tartalmazza. Ez utóbbit meghívhatjuk egy konkrét x értékre, vagy definiálhatjuk függvényként x független változóval. Nézzük meg, hogyan oldhattuk volna meg az előző feladat függvény illesztéseit ezekkel a parancsokkal!

```
> % egyenes illesztése (elsőfokú polinom)
> a1 = polyfit(xl,yl,1)
> p1 = @(x) polyval(a1,x)
> % parabola illesztése (másodfokú polinom)
> a2 = polyfit(xp,yp,2)
> p2 = @(x) polyval(a2,x)
>
> figure(2)
> plot(x,y,'r*'); hold on;
> fplot(p1,[0 0.0015]);
> fplot(p2,[0.0015 0.006])
> axis([0 0.006 0 400])
```



NEMLINEÁRIS REGRESSZIÓ LINEÁRIS ALAKBA ÍRÁSSAL

A valóságban nagyon sok olyan fizikai jelenség van, ahol a mennyiségek közötti kapcsolat nem lineáris. Például a légsűrűséget (ρ) a magasság (h) függvényében exponenciális függvénnyel lehet modellezni: $\rho = k \cdot e^{m\,h}$, egy elejtett tárgy v sebessége a megtett x út függvényében az alábbi függvénnyel írható le: $v^2 = 2\,g\,x$.

Nagyon sok nemlineáris függvény van, de most csak azokkal fogunk foglalkozni, amelyeket át lehet úgy alakítani, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldásával megtaláljuk a paramétereket legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva. Ilyen többek között a

- hatványfüggvény: $y = k\,x^m$
- exponenciális függvény: $y = k\,e^{m\,x}$ vagy $y = k\,10^{m\,x}$
- reciprok függvény: $y = \frac{1}{m\,x+c}$

Az algebrai polinomok is ilyenek, ezeknek az illesztését már láttuk az előző példában.

Az a kérdés, hogyan tudjuk a fenti függvényeket lineáris alakba írni?

Általában új változók bevezetésével tudjuk átalakítani a kétváltozós nemlineáris egyenletet, hogy az új változók (amelyek az eredeti változókból levezethetőek) már lineáris kapcsolatban álljanak a keresett paraméterekkel. Nézzünk erre egy példát, hozzuk lineáris alakra a hatványfüggvényt, vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát!

$$\ln(y) = \ln(k\,x^m) = m\ln(x) + \ln(k)$$

Vezessünk be új változókat, hogy $Y = c_1\,X + c_2$ lineáris alakra hozzuk az egyenletet. Most legyen $Y = \ln(y)$, $X = \ln(x)$, $c_1 = m$, $c_2 = \ln(k)$:

$$\begin{array}{ccccc} \ln(y) & = & m\ln(x) & + & \ln(k) \\ Y & = & c_1\,X & + & c_2 \end{array}$$

A fenti formában már alkalmazhatjuk a lineáris regressziót, és amint megkaptuk c_1, c_2 értékét az eredeti összefüggés keresett paraméterei könnyen meghatározhatóak:

$$m = c_1, \qquad k = e^{c_2}$$

Sok más nemlineáris egyenlet is lineáris alakba hozható hasonlóan. Nézzük meg erre a bevezetőben említett egyik példát!

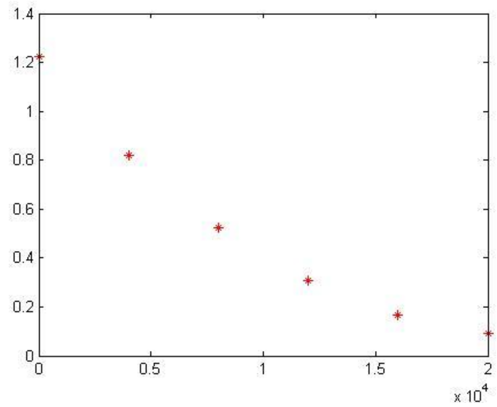
A légsűrűséget (ρ) a magasság (h) függvényében exponenciális függvénnyel lehet modellezni: $\rho = k \cdot e^{m\,h}$. A következő táblázatban különböző magasságokban mért légsűrűség értékek találhatóak:

$h\ [m]$	1	4000	8000	12000	16000	20000
$\rho\ [kg/m^3]$	1.225	0.820	0.525	0.309	0.168	0.092

Lineáris regressziót használva határozzuk meg a legjobban illeszkedő függvényhez a *k* és *m* együtthatókat! Az egyenletet használva mekkora lesz a 8850 m magas Csomolungmán a légsűrűség? Milyen magasan lesz 1 kg/m^3 a légsűrűség? Vizsgáljuk meg lokálisan és globálisan a görbeillesztés hibáit!

A megoldáshoz töltsük be a **legsuruseg.txt** állományt, amiben a fenti adatok vannak.

```
> % légsűrűség a magasság függvényében
> clear all; close all; clc;
> data = load('legsuruseg.txt')
> % p=k*e^(m*h) - exponential function,
  m,k = ?
> h = data(:,1) % magasság
> p = data(:,2) % legsűrűség
> figure(1)
> plot(h,p,'r*')
```



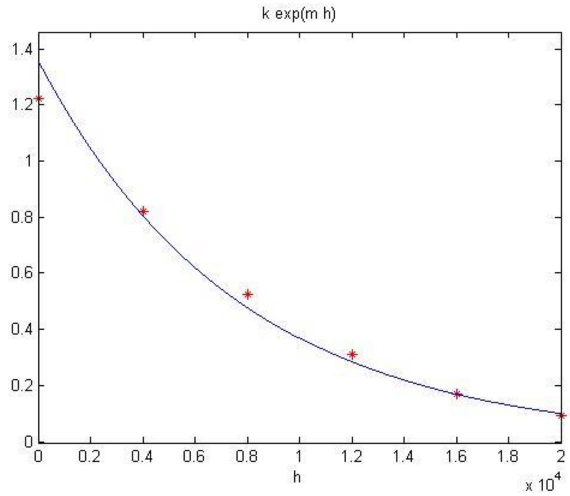
Hozzuk lineáris alakra az exponenciális függvényt! $\rho = k \cdot e^{m\,h}$

$$\begin{array}{ccccc} \ln(\rho) & = & m\,h & + & \ln(k) \\ Y & = & c_1\,X & + & c_2 \end{array}$$

```
> Y = log(p)
> X = h
> % A*x=b alakban felírva
> A = [X.^1 X.^0]
> b = Y
> % megoldás:
> c = A\b % c1 = m, c2 = ln(k)
```

A keresett paraméterek: $m = c_1,\ k = e^{c_2}$

```
> % a keresett paraméterek
> m = c(1)
> k = exp(c(2))
> % illesztett függvény
> f = @(h) k*exp(m*h)
> % felrajzolva
> hold on;
> fplot(f,[0 20000])
```



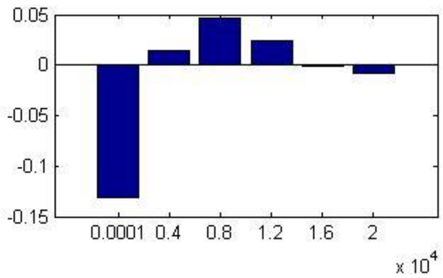
Az egyenletet használva mekkora lesz a 8850 m magas Csomolungmán a légsűrűség? Milyen magasan lesz 1 kg/m^3 a légsűrűség? Az első kérdést egy egyszerű behelyettesítéssel megválaszolhatjuk, a másodikhoz az $f(x) = 1$ egyenletet át kell alakítani $g(x) = f(x) - 1 = 0$ alakra és megkeresni ennek a nemlineáris egyenletnek a gyökeit. Ehhez szükséges egy kezdőértéket is megadni, amit vehetünk az ábrából körülbelül 2000-nek (0.2x10^4).

```
> % legnyomas 8850 m magasban
> p8850 = f(8850)  % 0.4285
>
> % Milyen magasan lesz 1 kg/m^3 a légsűrűség?
> g = @(h) f(h)-1
> h06 = fzero(g,2000) % 2.3415e+03
```

Tehát a Csomolungmán 0.4285 kg/m^3 a levegő sűrűsége, és 2342 m-en lesz pont 1 kg/m^3 a sűrűség.

Nézzük meg a maradék eltérések alakulását! Rajzoljuk fel őket egy oszlopdiagramra, és számítsuk ki az eltérések négyzetösszegét és a maradék eltérések korrigált tapasztalati szórását!

```
> % regresszió maradék hibái
> r = p - f(h)
> % maradék eltérések felrajzolása
> figure(2)
> bar(h,r)
> % hibák négyzetösszege
> S = sum(r.^2) %  0.0203
> % korrigált tapasztalati szórás
> n = length(h) % mérések száma
> np = 2 % becsült paraméterek száma: k, m
> szoras = sqrt(S/(n-np)) % 0.0712
```



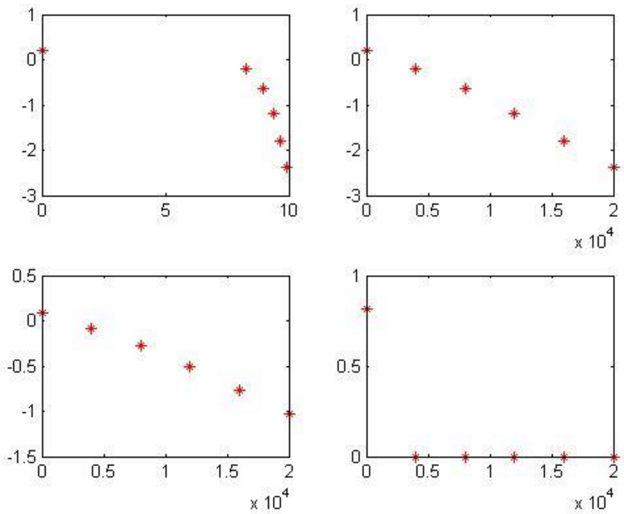
Foglaljunk össze egy táblázatban néhány nemlineáris egyenletet, amit hasonlóképpen megoldhatnánk lineáris regresszióval!

Nemlineáris egyenlet	Lineáris alak	$Y = c_1\, X + c_2$ alakban	Keresett paraméterek	Értékek a lineáris regresszióhoz (képe egyenes)
$y = k\, x^m$	$\ln(y) = m\ln(x) + \ln(k)$	$Y = \ln(y), X = \ln(x),$ $c_1 = m,\ c_2 = \ln(k)$	$m = c_1$ $k = e^{c_2}$	$\ln(x), \ln(y)$
$y = k\, e^{m\,x}$	$\ln(y) = mx + \ln(k)$	$Y = \ln(y), X = \mathrm{x},$ $c_1 = m,\ c_2 = \ln(k)$	$m = c_1$ $k = e^{c_2}$	$\mathrm{x}, \ln(y)$
$y = k\, 10^{m\,x}$	$\lg(y) = mx + \lg(k)$	$Y = \lg(y), X = \mathrm{x},$ $c_1 = m,\ c_2 = \lg(k)$	$m = c_1$ $k = 10^{c_2}$	$\mathrm{x}, \lg(y)$
$y = \dfrac{1}{m\,x + k}$	$\dfrac{1}{y} = mx + k$	$Y = {}^{1}\!/_{y}, X = x,$ $c_1 = m,\ c_2 = \mathrm{k}$	$m = c_1$ $k = c_2$	$x, \dfrac{1}{y}$
$y = \dfrac{m\,x}{x + k}$	$\dfrac{1}{y} = \dfrac{k}{m}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{m}$	$Y = {}^{1}\!/_{y}, X = {}^{1}\!/_{x},$ $c_1 = {}^{k}\!/_{m},\ c_2 = {}^{1}\!/_{m}$	$m = {}^{1}\!/_{c_2}$ $k = c_1/c_2$	$\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}$

NEMLINEÁRIS EGYENLET TÍPUSÁNAK KIVÁLASZTÁSA[2]

Az előző feladatban rendelkezésünkre állt egy modell, hogy milyen alakú összefüggés áll fent a mennyiségek között. Előfordulhat azonban olyan eset is, amikor nem ismerjük a kapcsolatot leíró függvény alakját. Hogyan választhatjuk ki a megfelelő illesztendő nemlineáris egyenletet ilyen esetben? Célszerű felrajzolni a pontokat és a fenti táblázat utolsó oszlopában lévő értékeket. Ha van olyan, amelyik esetében a pontok nagyjából egy egyenes mentén helyezkednek el, akkor azt a függvény típust válasszuk a regresszióhoz! Néhányat ábrázoljunk az előző példához ezek közül! Matlab-ban a természetes alapú logaritmus a **log** függvény, 10-es alapú logaritmus a **log10** függvény, exponenciális függvény pedig az **exp** függvény. Az ábrázoláshoz használjuk a **subplot** függvényt, amivel egy ábrára több dolgot is fel tudunk rajzolni. A parancsot a **subplot(n,m,i)** formában hívhatjuk meg, ahol n a sorok, m az oszlopok száma, i pedig az adott rajz sorszáma balról jobbra és fentről le számolva.

```
> figure(3)
> x=h; y = p;
> subplot(2,2,1)
> plot(log(x), log(y), 'r*')
> subplot(2,2,2)
> plot(x,log(y),'r*')
> % egyenes lett!
> subplot(2,2,3)
> plot(x,log10(y),'r*')
> % egyenes lett!
> subplot(2,2,4)
> plot(x,1/y,'r*')
```



A fenti rajzon a második és a harmadik képen lett a pontok képe közelítőleg egyenes, amikor x és $\ln(y)$ illetve $\log(y)$ lett ábrázolva. A táblázatra ránézve látszódik, hogy abban az esetben, ha nem ismernénk a függvénykapcsolatot, akkor is exponenciális függvény illesztésével lenne érdemes próbálkozni.

ÚJ FÜGGVÉNYEK A GYAKORLATON

axis	-	Tengelyek minimális, maximális értékeinek megadása
mean	-	Vektor elemeinek számtani közepe, átlaga
sum	-	Vektor elemeinek összege
corr2	-	Lineáris korrelációs együttható
polyfit	-	Megadott fokszámú polinom illesztése az adatokra
polyval	-	Együttható vektorral megadott polinom értékének kiszámítása
bar	-	Ábrázolás oszlopdiagrammon
subplot	-	Egy grafikus ablakon belül több ábra

[2] Otthoni átnézésre