13. előadás

Kiegyenlítő számítások MSc 2018/19

Áttekintés

- Függvények meghatározása
    - regresszió
        - példák a mérnöki gyakorlatból
    - szimbolikus regresszió

Függvények meghatározása

- alkalmazási példák
    - mért alakzatok geometriai jellemzőinek kiszámítása
    - kiegyenlítő felületek (mérnökgeodézia)
    - digitális felületmodellek felállítása
- rendelkezünk-e információval a függvény jellegéről?
    - igen: regresszió
    - nem: szimbolikus regresszió
- mely mennyiségeket tekintjük hibátlannak?

Regresszió

- a feladat ismert jellegű függvény ismeretlen paramétereinek a meghatározása
- lineáris-e a függvény a meghatározandó paraméterekre nézve?

    igen (túlhatározott lin. egyenletrendszer)

    részben (variable projection)

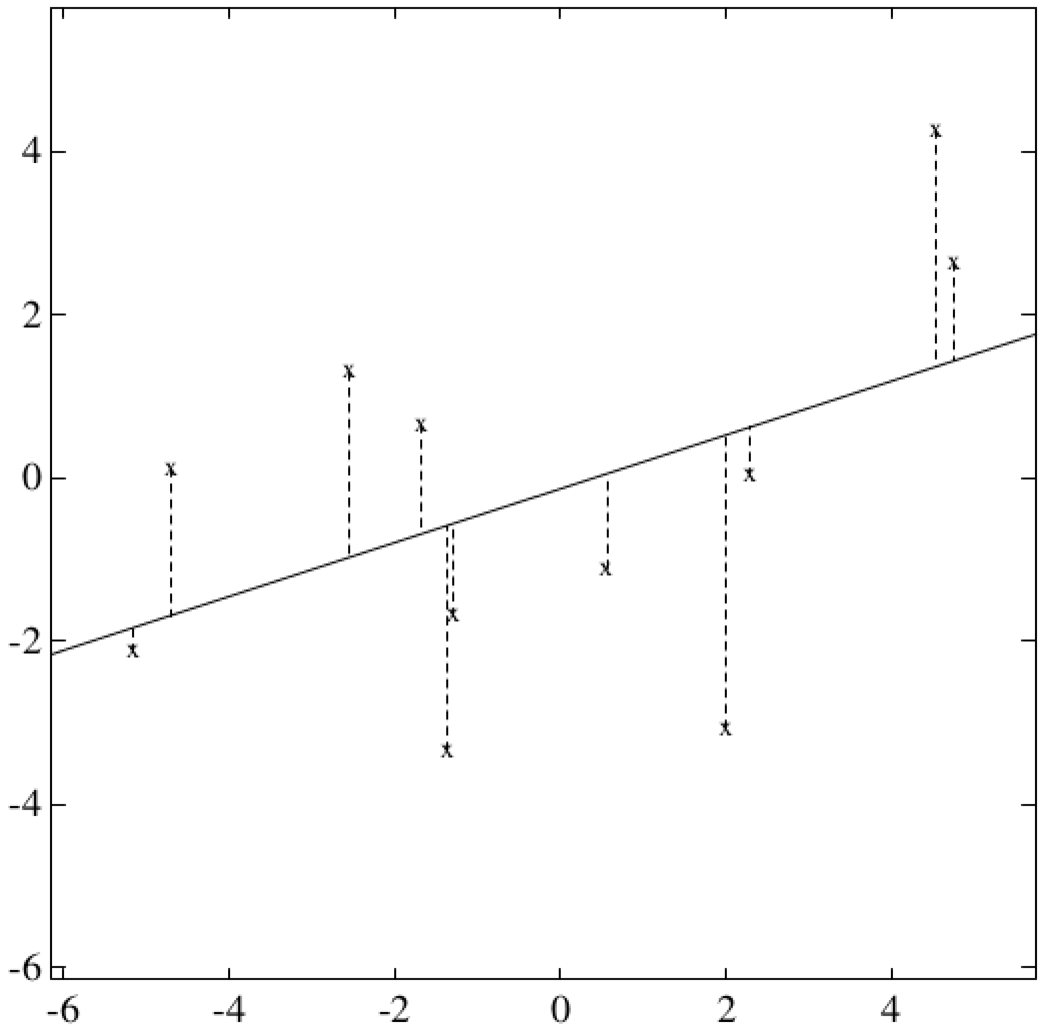
    nem (Levenberg-Marquardt)

Regresszió

- egyenes illesztés
- egyenes sereg illesztés
- függvény meghatározás (láncgörbe illesztés)
- kiegyenlítő sík meghatározása
- kör, henger, gömb illesztés
- függvénysorba fejtés

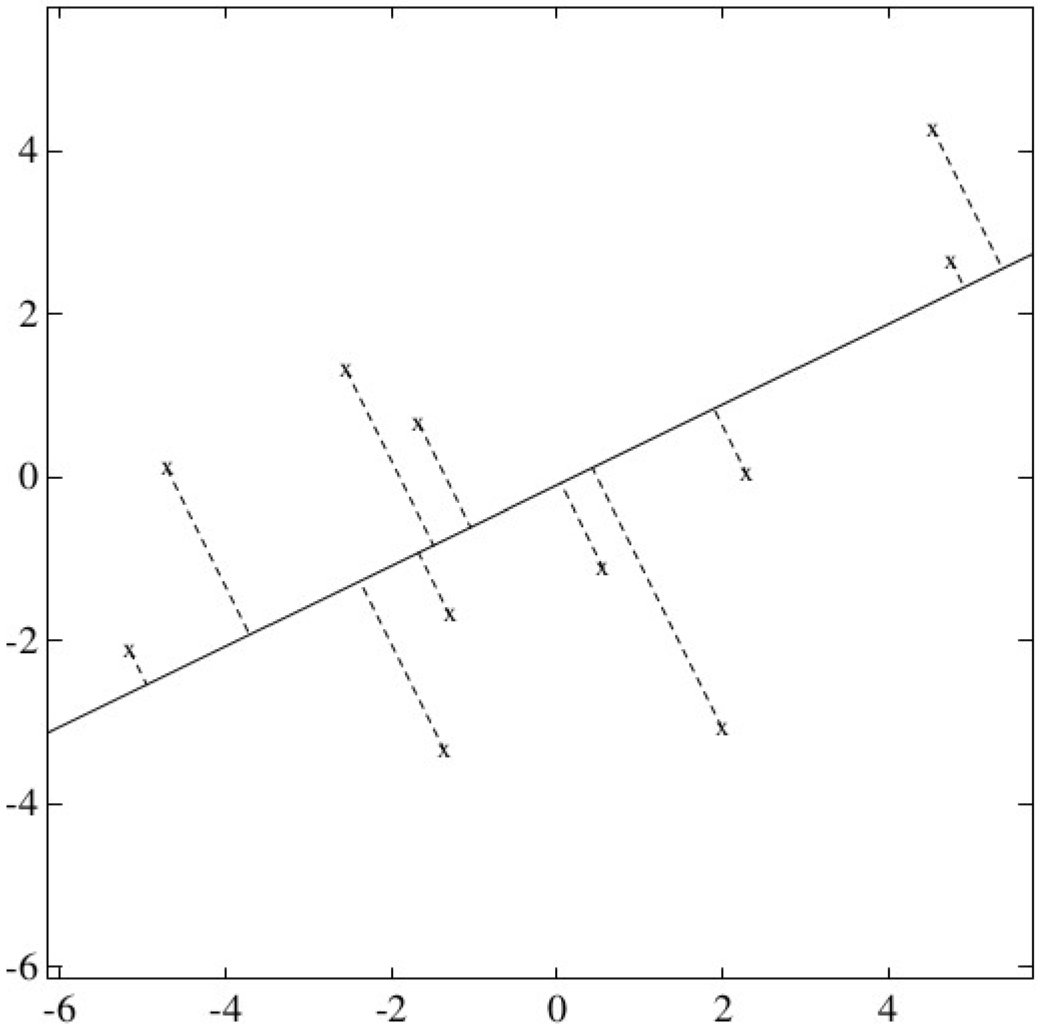
Egyenes illesztés

- egyszerű illesztés: az x értékek hibátlanok



Egyenes illesztés

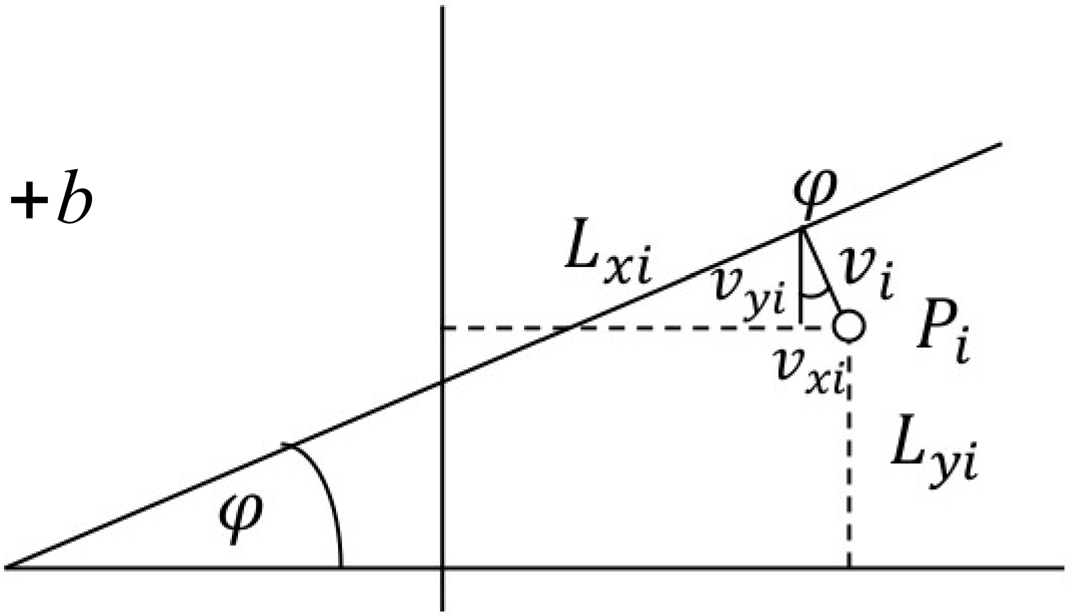
- teljes illesztés: az x értékek sem hibátlanok



Egyenes illesztés

- Detrekői 11.3.3: kiegyenlítő egyenes
- mindkét koordináta hibával terhelt

$$y = m \cdot x + b$$



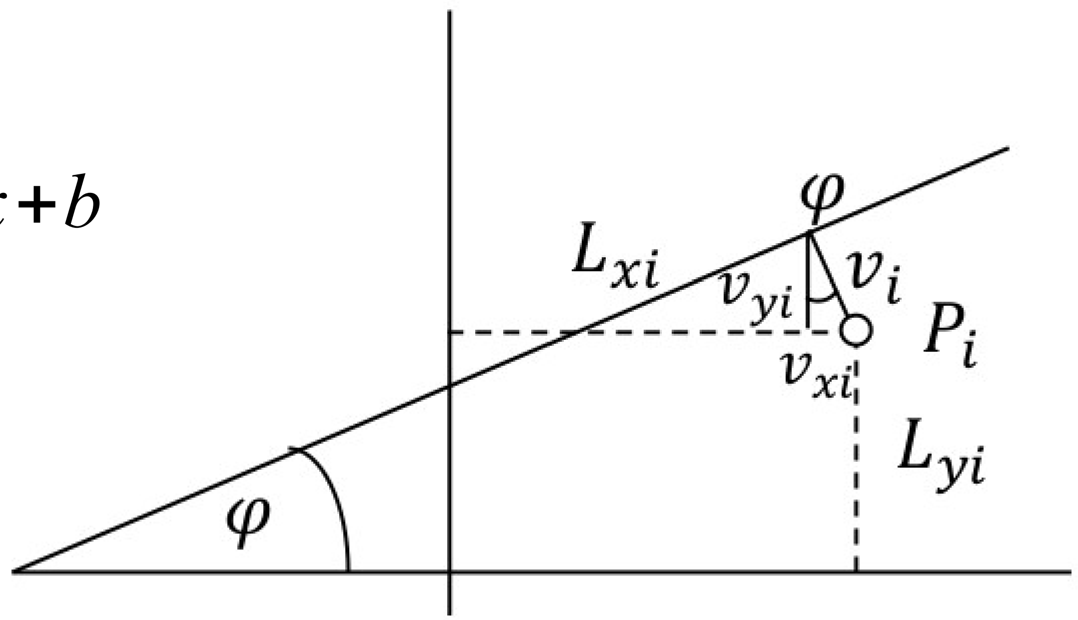
$$L_{yi} + v_{yi} = m\left(L_{xi} + v_{xi}\right) + b$$

$$v_i = \left(v_{xi}^2 + v_{yi}^2\right)^{1/2}$$

Egyenes illesztés

- Detrekői 11.3.3: kiegyenlítő egyenes
- mindkét koordináta hibával terhelt

$$y = m \cdot x + b$$



$$v_{xi} = -v_i \sin\varphi$$

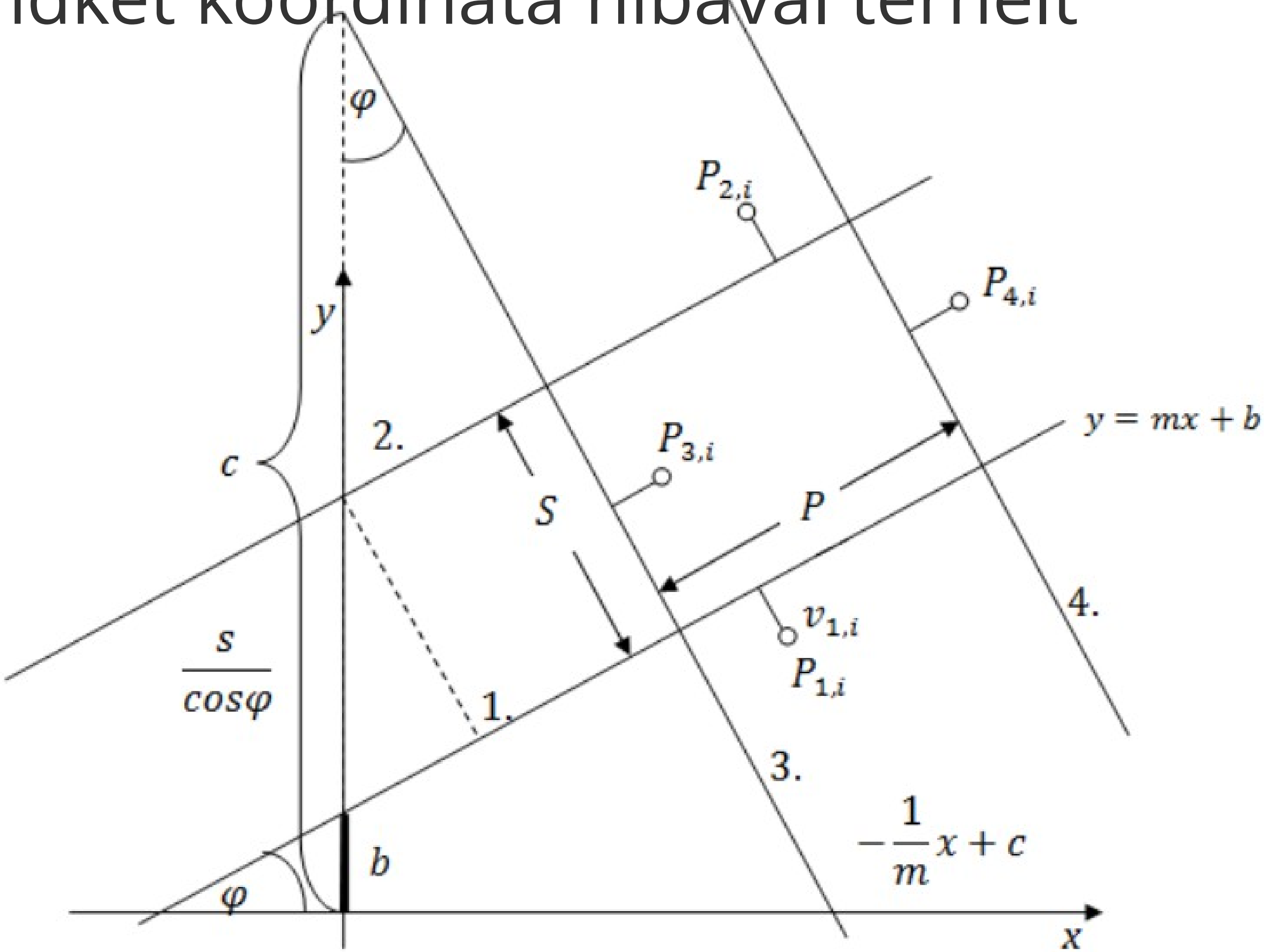
$$v_{yi} = v_i \cos\varphi$$

$$v_i = b\cos\varphi + L_{xi}\sin\varphi - L_{yi}\cos\varphi$$

$$\sum v_i^2 = \min$$

Egyenes sereg illesztés

- merőleges egyenes seregek egymástól p, s távolságban
- mindkét koordináta hibával terhelt

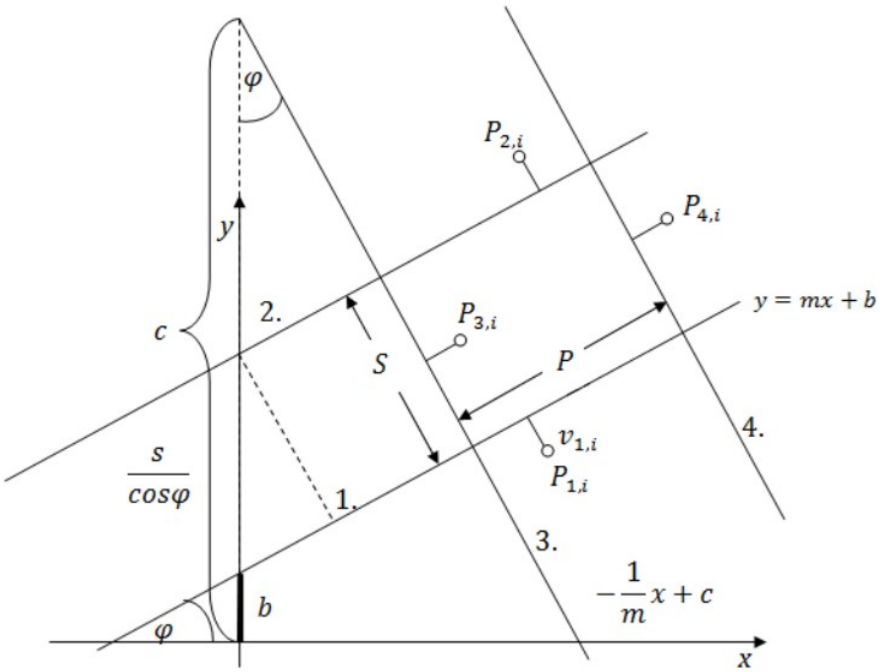


Egyenes sereg illesztés

- javítási egyenletek

$$v_i = b\cos\varphi + L_{xi}\sin\varphi - L_{yi}\cos\varphi + s$$

$$v_i = c\sin\varphi - L_{xi}\cos\varphi - L_{yi}\sin\varphi + p$$



- alakmátrix, tisztatag vektor

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -b_0 \cdot sin\varphi_0 + Lx_i \cdot cos\varphi_0 + Ly_i \cdot sin\varphi_0 & cos\varphi_0 & 0 \\ -b_0 \cdot sin\varphi_0 + Lx_i \cdot cos\varphi_0 + Ly_i \cdot sin\varphi_0 & cos\varphi_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_0 \cdot cos\varphi_0 + Lx_i \cdot sin\varphi_0 - Ly_i \cdot cos\varphi_0 & 0 & sin\varphi_0 \\ -c_0 \cdot cos\varphi_0 + Lx_i \cdot sin\varphi_0 - Ly_i \cdot cos\varphi_0 & 0 & sin\varphi_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} -b_0 \cdot cos\varphi_0 - Lx_i \cdot sin\varphi_0 + Ly_i \cdot cos\varphi_0 \\ -b_0 \cdot cos\varphi_0 - Lx_i \cdot sin\varphi_0 + Ly_i \cdot cos\varphi_0 - s \\ \vdots \\ -c_0 \cdot sin\varphi_0 - Lx_i \cdot cos\varphi_0 - Ly_i \cdot sin\varphi_0 \\ -c_0 \cdot sin\varphi_0 - Lx_i \cdot cos\varphi_0 - Ly_i \cdot sin\varphi_0 - p \end{bmatrix}$$

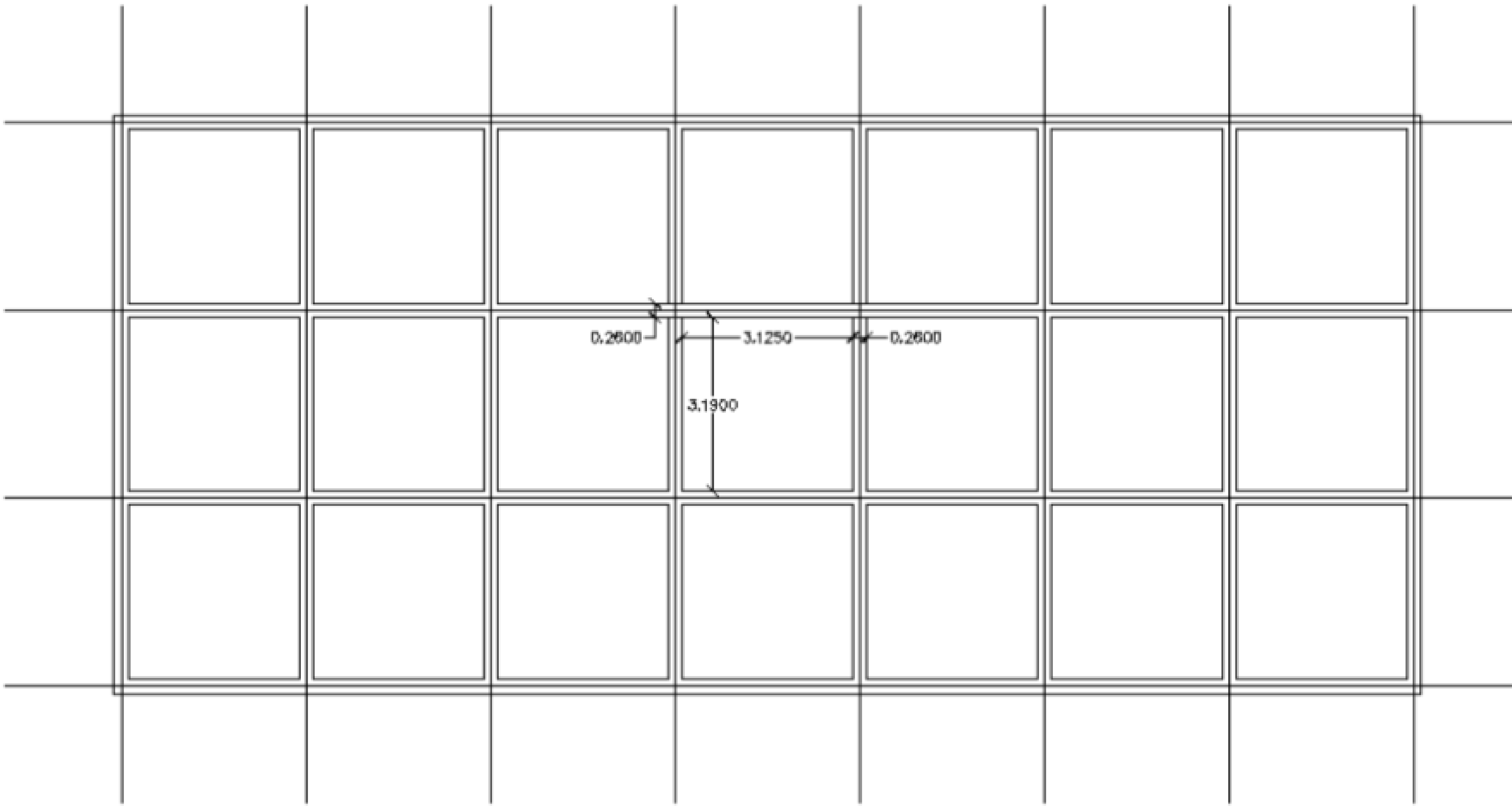
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}$$

Egyenes sereg illesztés

- Kossuth téri látogatóközpont kazettás mennyezete (Vitányi A. TDK dolgozat, 2014)

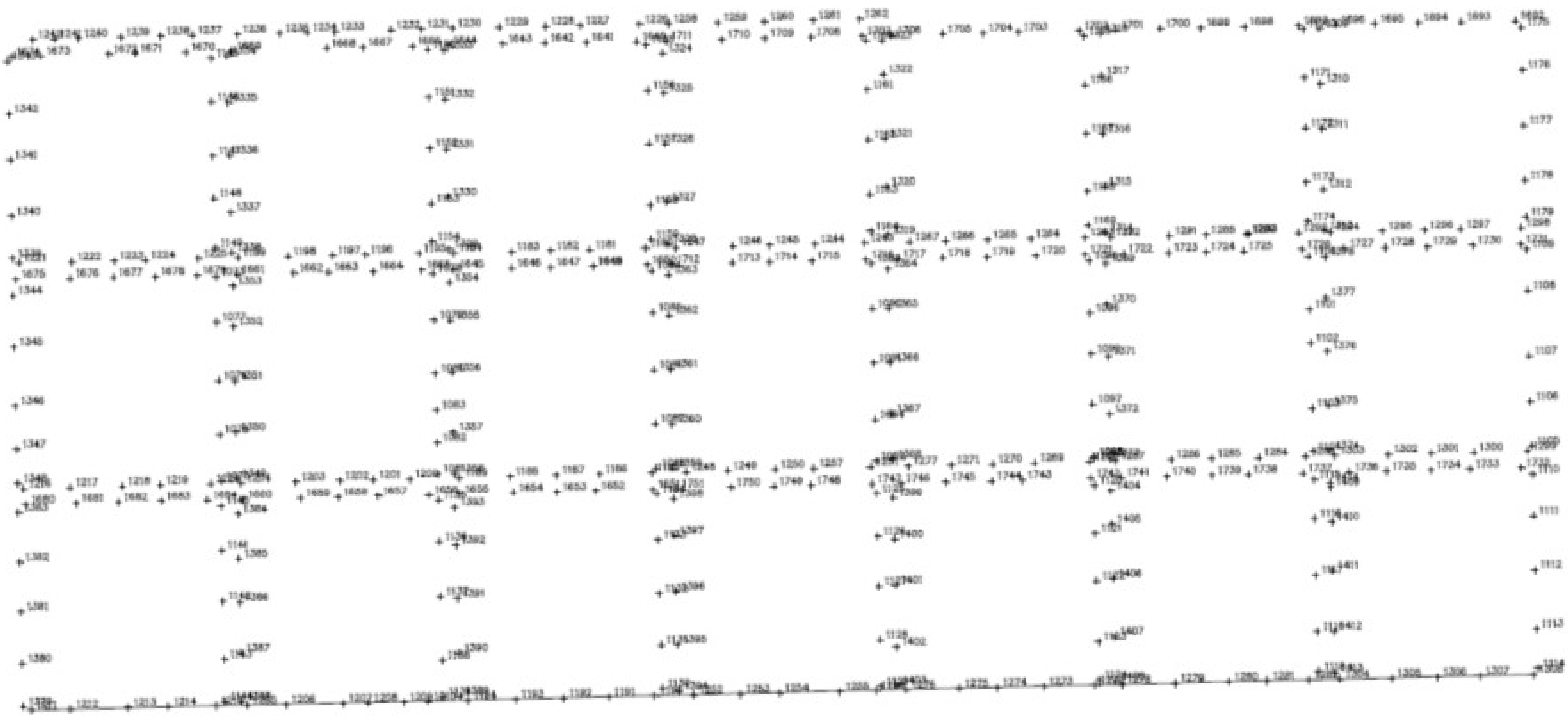
Egyenes sereg illesztés

- Tervezett geometria



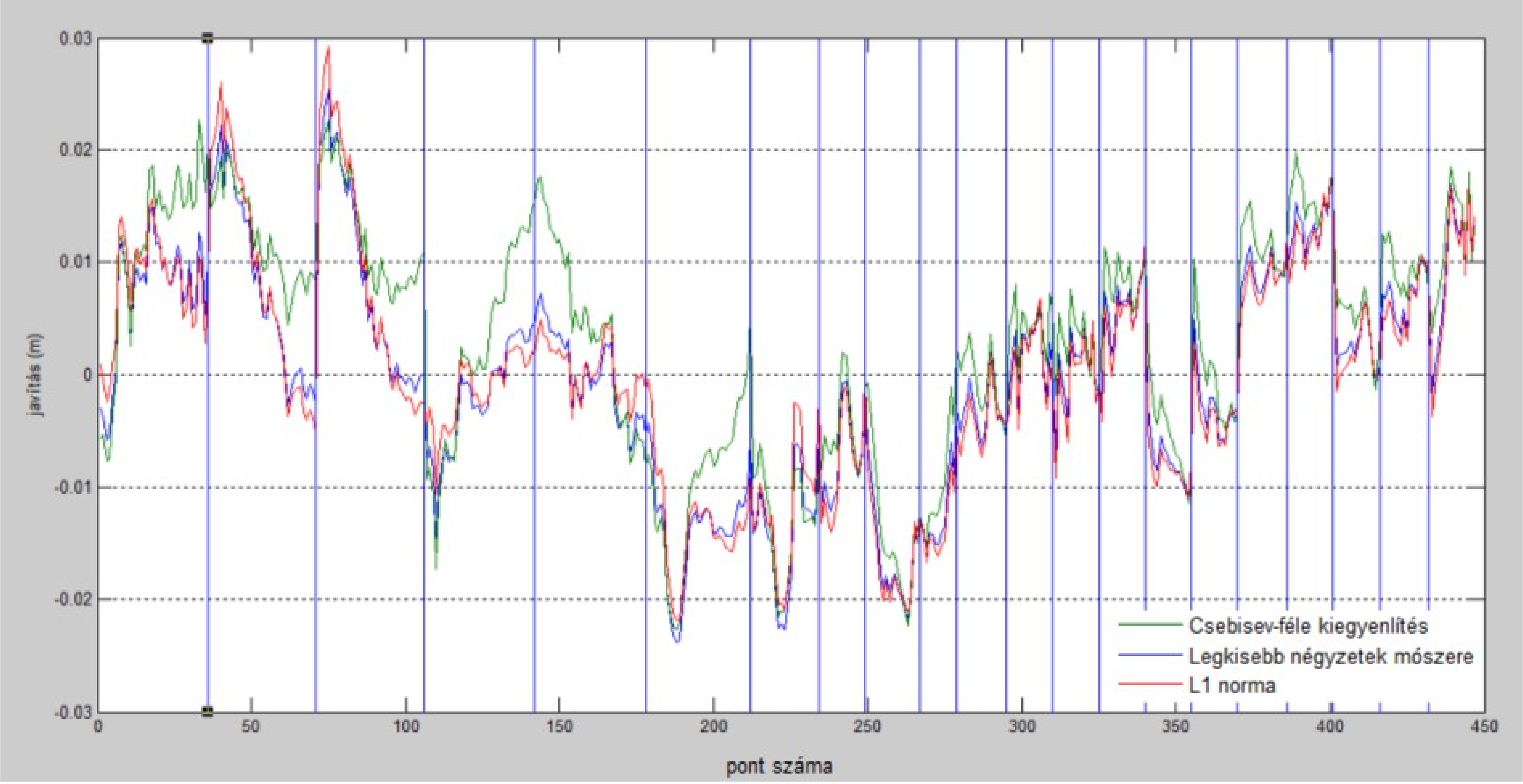
Egyenes sereg illesztés

- Mérőállomással mért pontok



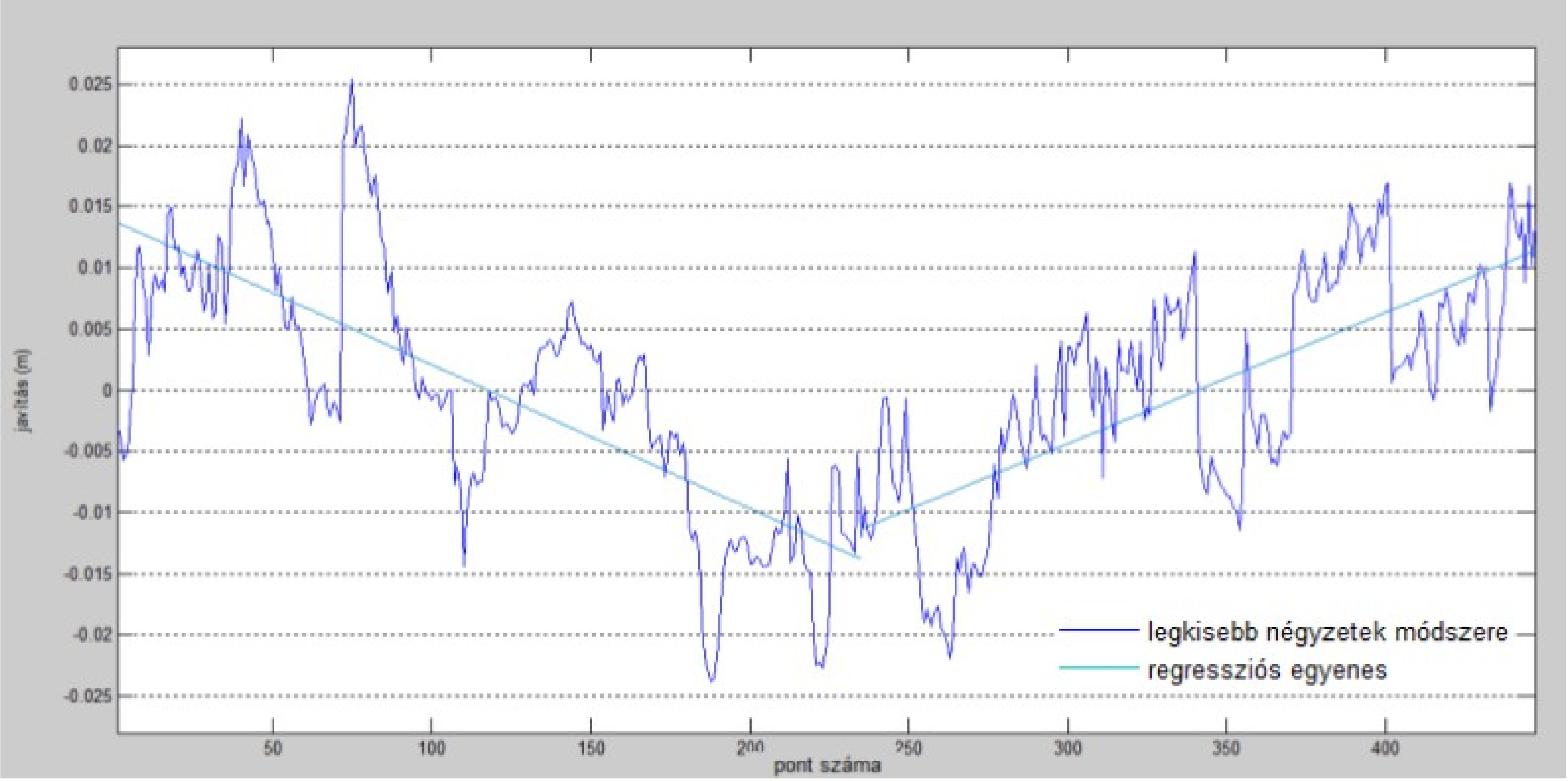
Egyenes sereg illesztés

- L_1, L_2, L_∞ norma szerinti megoldások



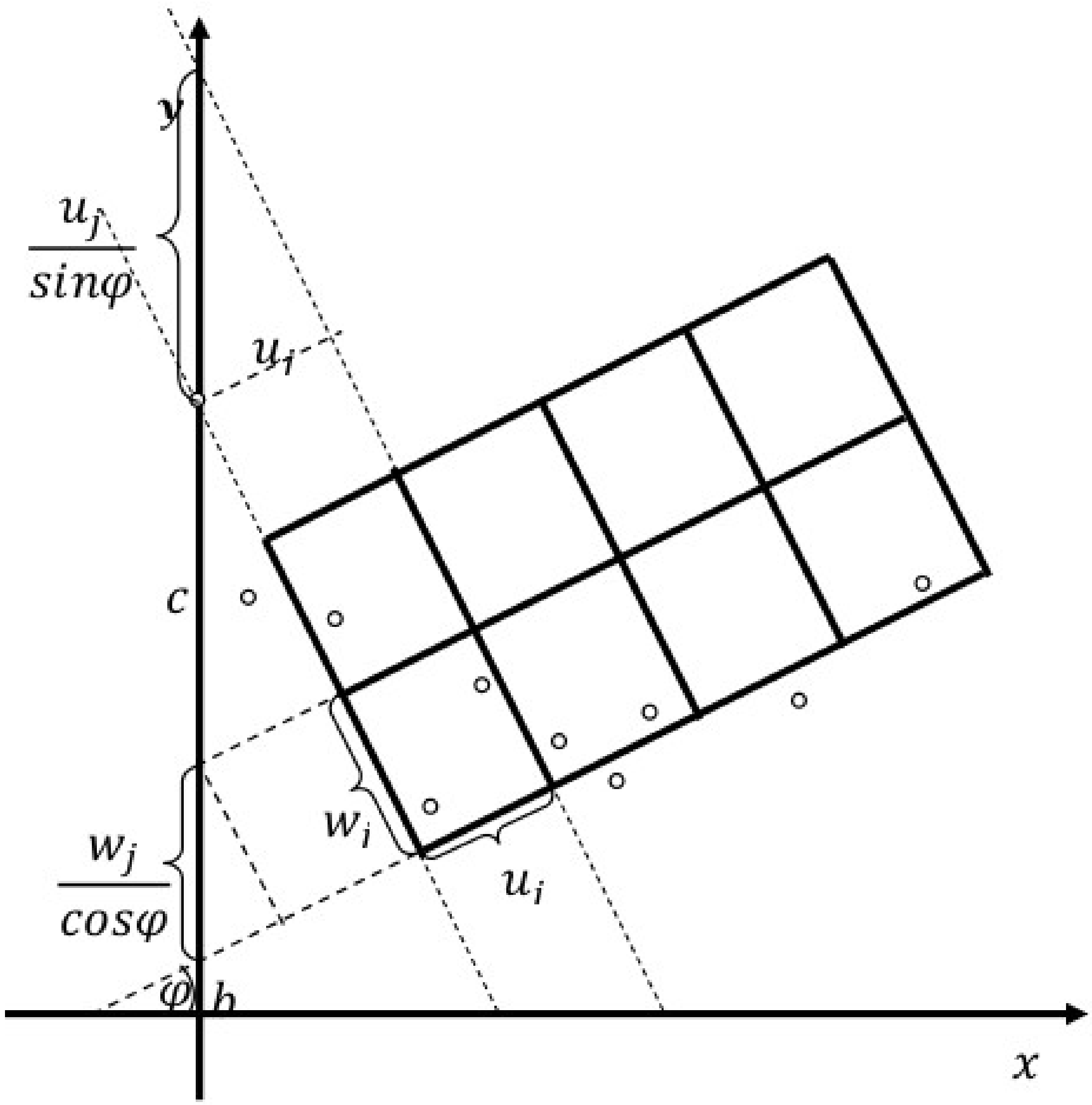
Egyenes sereg illesztés

- L_2 norma szerinti megoldás lineáris trendjei



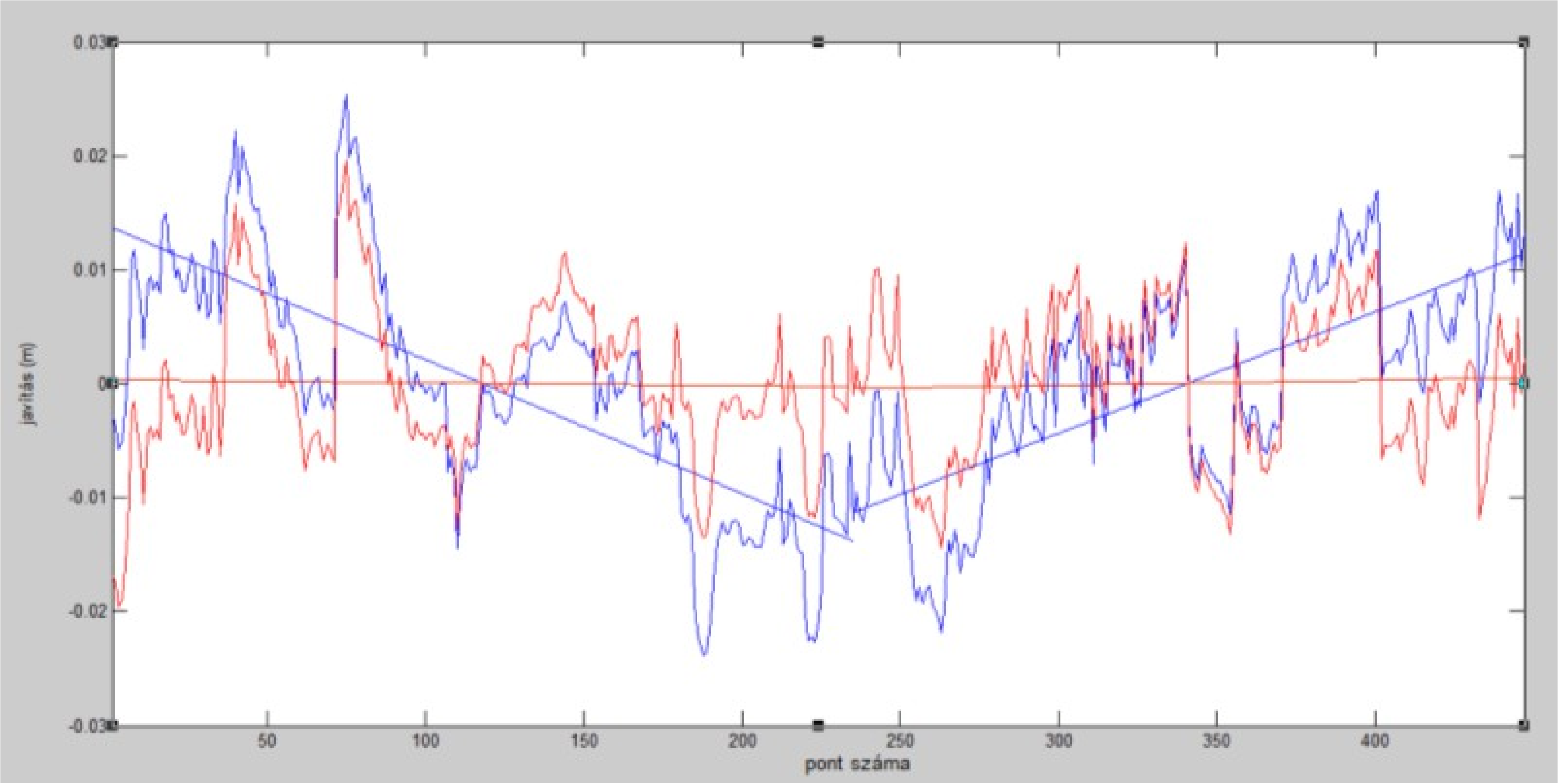
Egyenes sereg illesztés

- Kiegyenlítés két irányban eltérő méretarány tényezővel



Egyenes sereg illesztés

- Kiegyenlítés két irányban eltérő méretarány tényezővel L_2 norma szerint

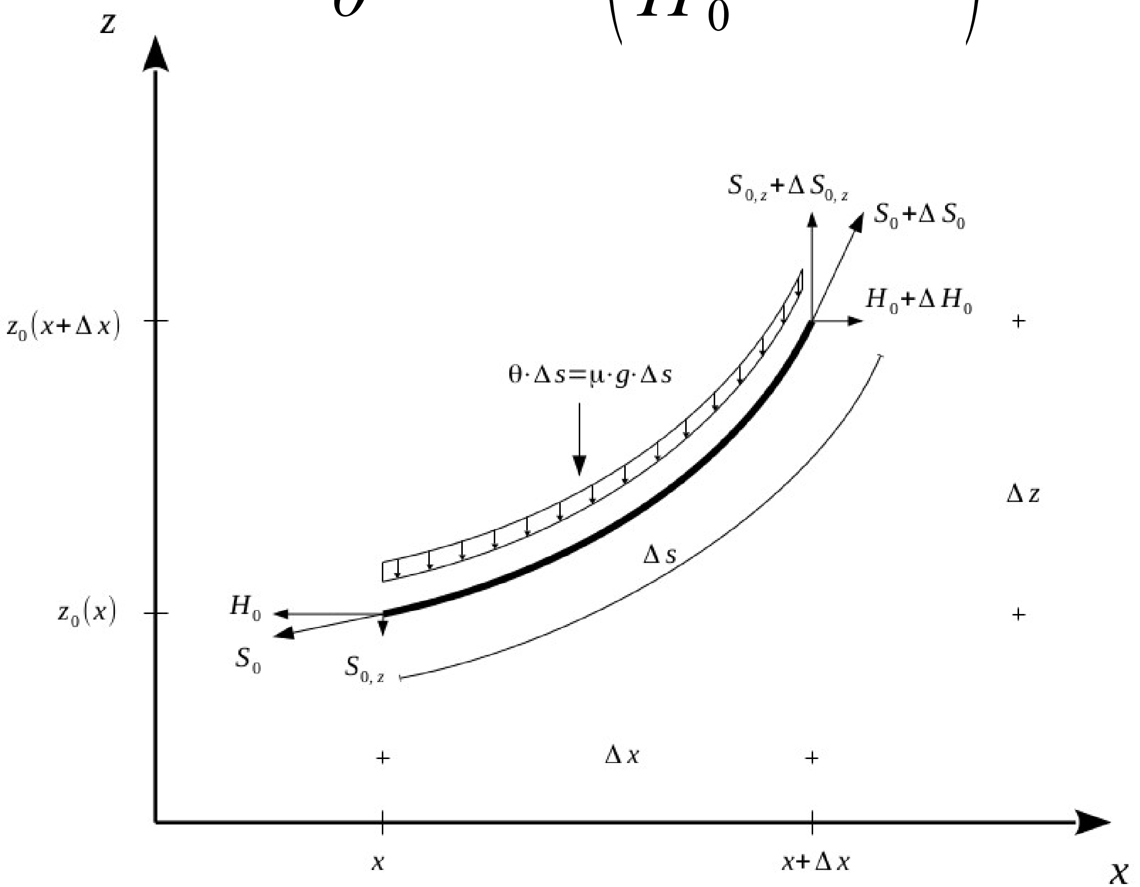


x irányban a szerkezet 10 m-en 9.2 mm-el rövidebb,
y irányban 10 m-en 23 mm-el hosszabb

Függvény meghatározás

- Önsúlyukkal terhelt kötél jellegű befüggesztett szerkezetek alakja láncgörbe:

$$z_0(x)=\frac{H_0}{\theta}\cdot\cosh\left(\frac{\theta}{H_0}(x+c_1)\right)+c_2 \qquad \text{ahol}\ \theta=\mu\cdot g$$



meghatározandó :
$H_{0,}\theta, c_{1,} c_2$

Nagyfeszültségű távvezeték alakjának meghatározása

- Balogh Bálint (BSc diplomamunka, 2015)
- Leica TS15i robot mérőállomás
- Göd és Budafok

Nem lineáris regresszió számítási eljárása

- Matlab Curve Fitting Toolbox

    a `fit` függvény a *Levenberg-Marquardt* eljárást alkalmazza a regresszióhoz

- Levenberg-Marquardt eljárás

    nem lineáris LKN problémák megoldására

    lokális minimum meghatározására alkalmas

    Gauss-Newton és a legmeredekebb lejtő algoritmusok csillapítási tényezőtől függő kombinációja

        csillapítási tényező kezdetben nagy, azután csökken

Levenberg-Marquardt eljárás

- adott m adatpont (x_i, y_i) esetén határozzuk meg az $f(x, \boldsymbol{\beta})$ görbe $\boldsymbol{\beta}$ paramétereit a legkisebb négyzetes eltérések alapján:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{m} [y_i - f(x_i, \boldsymbol{\beta})]^2$$

- iteráció, lépésenként változik a $\boldsymbol{\beta}$ vektor $\boldsymbol{\delta}$-val ($\boldsymbol{J}$ a Jacobi mátrix)

$$f(x, \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta}) \approx f(x, \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\delta}$$

Levenberg-Marquardt eljárás

- megoldás a $\boldsymbol{\delta}$-ra:

$$\left(\boldsymbol{J}^T \boldsymbol{J}\right)\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{J}^T\left[\boldsymbol{y} - f\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right]$$

- λ csillapítási tényezővel:

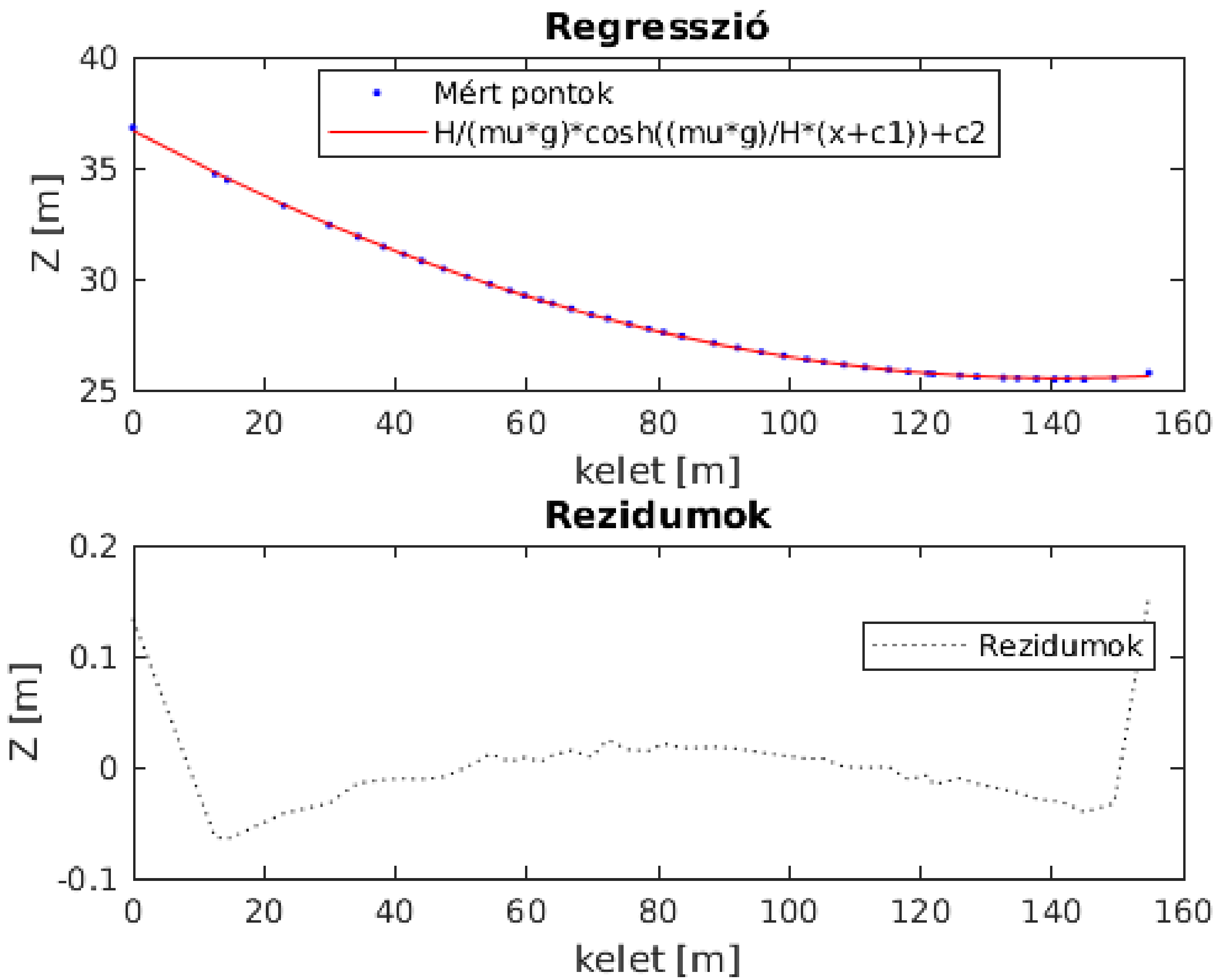
$$\left(\boldsymbol{J}^T \boldsymbol{J} + \lambda \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{J}^T\left[\boldsymbol{y} - f\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right]$$

- Marquardt javításával:

$$\left[\boldsymbol{J}^T \boldsymbol{J} + \lambda \,\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{J}^T \boldsymbol{J}\right)\right]\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{J}^T\left[\boldsymbol{y} - f\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right]$$

- (hasonló a Tyihonov regularizációhoz)
- ha $\lambda \approx 0$, Gauss-Newton iteráció, ha λ nagy, legmeredekebb lejtő módszere lesz

Budafoki távvezeték

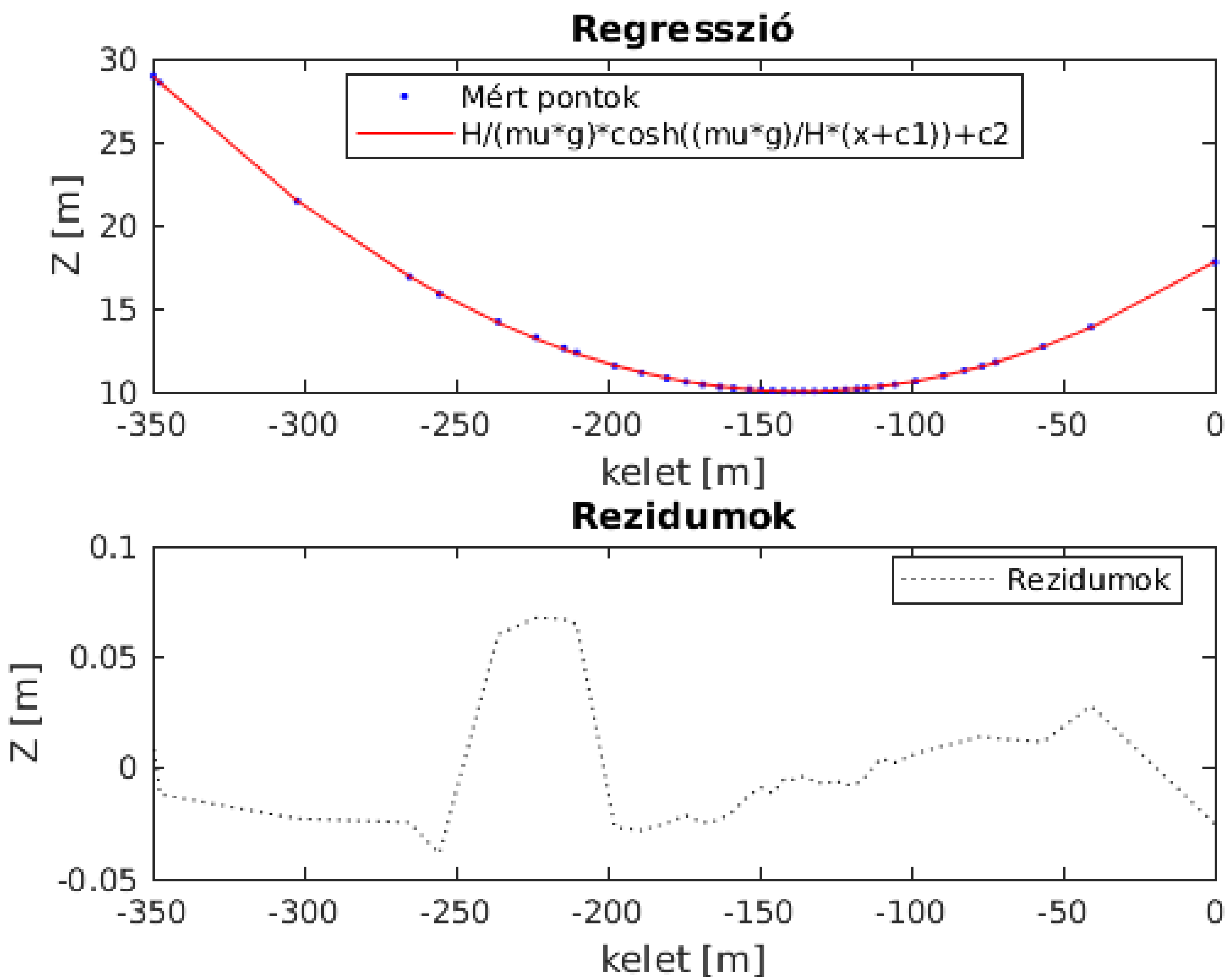


Eredmények

--------------------Mérési fájl név--------------------
BUDAFOK_távvezeték.xlsx
--------------------Függvény--------------------
H/(mu*g)*cosh((mu*g)/H*(x+c1))+c2
--------------------Illesztés típusa--------------------
customnonlinear
--------------------Illesztési kategória--------------------
custom
--------------------Illesztési algoritmus--------------------
trust-region-reflective
--------------------Illesztési eljárás--------------------
NonlinearLeastSquares
--------------------Iterációk száma--------------------
18 db
--------------------Illesztés minősítése--------------------
SSE= 0.063891
R^2= 0.99983
adjR^2= 0.99982
RMSE= 0.039476
--------------------Paraméter értékek--------------------
H = 17.126_[kN]
c1=-141.729_[m]
c2= -876.69_[m]
g = 9.81_[kg*m/s^2]
mu= 1.935_[kg/m]
--------------------Egyéb adatok, jellemzők--------------------
df1 = 11.1552_[m]
df2 =0.0947697_[m]
xmin= 141.729_[m]
fmin= 25.5176_[m]
l = 155.391_[m]
L = 154.807_[m]
l_L = 1.00377_[-]
--------------------Feszítőerők--------------------
S_max = 17.34_[kN]
Sz_max=0.2482_[kN]
Si =-2.701_[kN]
Sj =0.2482_[kN]
--------------------Húzófeszültségek--------------------
SzigmaS_max= 30.42__[N/mm^2]
SzigmaH = 30.05__[N/mm^2]
SzigmaZ_max=0.4355__[N/mm^2]
SzigmaSi = 30.42__[N/mm^2]
SzigmaSj = 30.05__[N/mm^2]
--------------------Végponti érintők--------------------
tan_i=-9 2 16__[DMS]
tan_j= 0 49 50__[DMS]
--------------------Illesztési hibák--------------------
maxEltérés = +15.4 cm
átlaEltérés = -0.0 cm
minEltérés = -6.5 cm

OK

Gödi távvezeték



Eredmények

---------------------Mérési fájl név---------------------
GÖD_dunaátfeszítő_2oszlopköz.xlsx
---------------------Függvény---------------------
H/(mu*g)*cosh((mu*g)/H*(x+c1))+c2
---------------------Illesztés típusa---------------------
customnonlinear
---------------------Illesztési kategória---------------------
custom
---------------------Illesztési algoritmus---------------------
trust-region-reflective
---------------------Illesztési eljárás---------------------
NonlinearLeastSquares
---------------------Iterációk száma---------------------
18 db
---------------------Illesztés minősítése---------------------
SSE= 0.026742
R^2= 0.99997
adjR^2= 0.99996
RMSE= 0.028045
---------------------Paraméter értékek---------------------
H = 12.2551_[kN]
c1= 136.623_[m]
c2=-1192.33_[m]
g = 9.81_[kg*m/s^2]
mu= 1.039_[kg/m]
---------------------Egyéb adatok, jellemzők---------------------
df1 = 18.9171_[m]
df2 = 7.77049_[m]
xmin=-136.623_[m]
fmin= 10.0298_[m]
l = 362.698_[m]
L = 349.629_[m]
l_L = 1.03738_[-]
---------------------Feszítőerők---------------------
S_max = 12.45_[kN]
Sz_max= 1.396_[kN]
Si = 1.396_[kN]
Sj =-2.182_[kN]
---------------------Húzófeszültségek---------------------
SzigmaS_max=42.45__[N/mm^2]
SzigmaH =41.79__[N/mm^2]
SzigmaZ_max=4.759__[N/mm^2]
SzigmaSi =42.06__[N/mm^2]
SzigmaSj =42.45__[N/mm^2]
---------------------Végponti érintők---------------------
tan_i= 6 31 28__[DMS]
tan_j=-10 12 13__[DMS]
---------------------Illesztési hibák---------------------
maxEltérés = +6.8 cm
átlaEltérés = -0.0 cm
minEltérés = -3.9 cm

OK

Kiegyenlítő sík illesztése

- Lineáris LKN probléma

  legjobban illeszkedő sík:

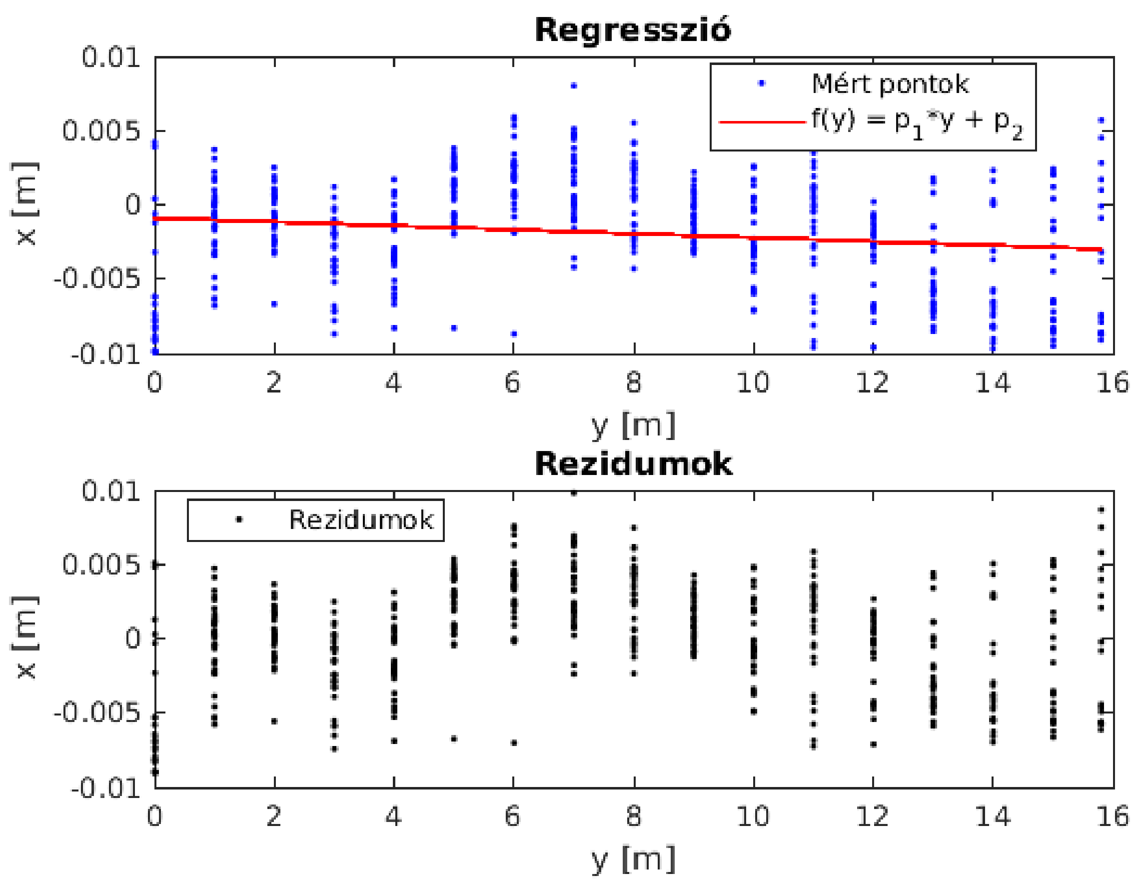
$$f(y,z) = p_{00} + p_{10}y + p_{01}z$$

  függőleges sík illesztése esetén valójában csak egyenes illesztésre van szükség:

$$f(y) = p_1 y + p_2$$

Függőleges sík illesztése

- MÜPA szkennelése robot mérőállomással



Eredmények

--------------------Mérési fájl név--------------------
MÜPA_rövidoldal_gyors_scann.xlsx
--------------------Függvény--------------------
p1*x + p2
--------------------Illesztés típusa--------------------
poly1
--------------------Illesztési kategória--------------------
library
--------------------Illesztési algoritmus--------------------
QR factorization and solve
--------------------Illesztési eljárás--------------------
LinearLeastSquares
--------------------Iterációk száma--------------------
1 db
--------------------Illesztés minősítése--------------------
SSE = 0.0063853
R^2 = 0.027173
adjR^2 = 0.025099
RMSE = 0.0036898
--------------------Paraméter értékek--------------------
p1=-0.000132256_[-]
p2=-0.000889162_[m]
--------------------Szóródó pontok--------------------
Összes mért pont = 527 db
Jó pontok = 471 db
Kivágó pontok = 56 db
Felső határ = 0.01 m
Alsó határ = -0.01 m
--------------------Sík Illesztési hibák--------------------
maxEltérés = +9.8 mm
átlaEltérés = -0.0 mm
minEltérés = -9.0 mm

OK

Gömb illesztése m pontra

- Mindegyik pontra illeszkedik az *r* sugarú gömb:

$$\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2}-r=0,\quad i=1,\ldots,m$$

  ezért mindegyik pontra

$$\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2}+r=2r=c=\text{áll.}$$

- A két egyenletet összeszorozva

$$(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+(z_i-z_0)^2-r^2=0$$

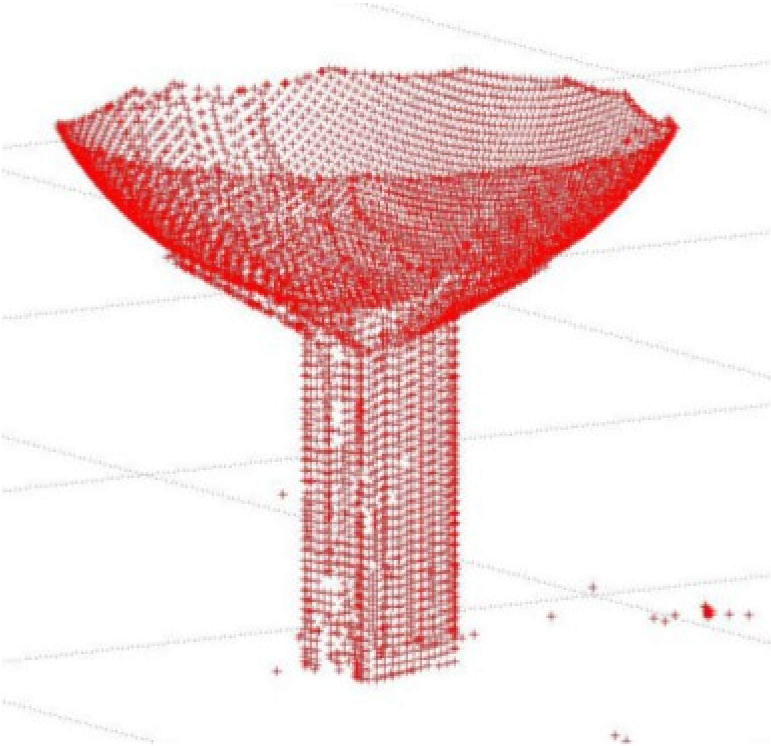
- Új α ismeretlent bevezetve r helyett túlhatározott *lineáris* egyenletrendszert kell megoldani:

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2-2x_0x_i-2y_0y_i-2z_0z_i+\alpha=0,\quad i=1,\ldots,m$$

$$\alpha=x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2$$

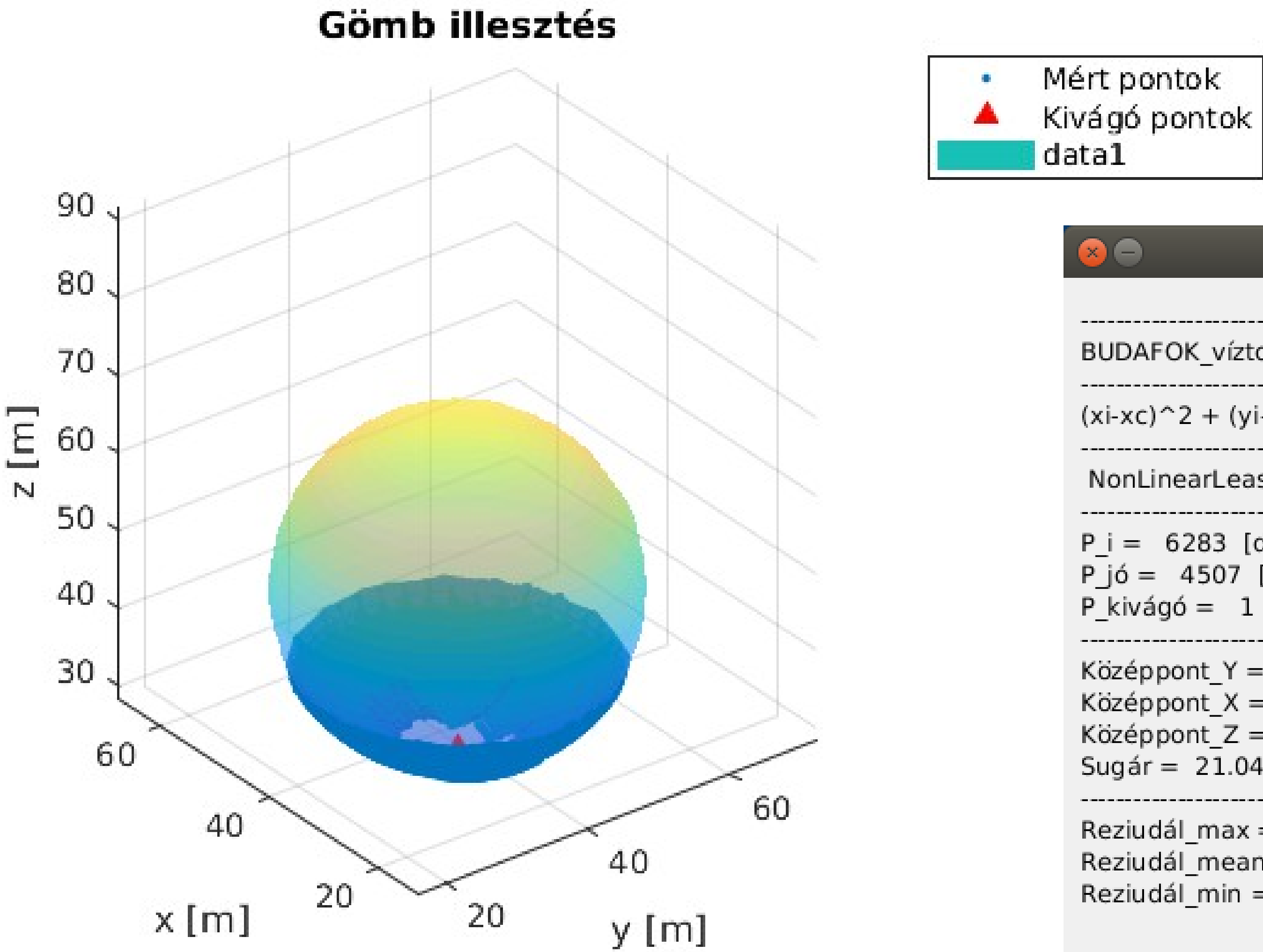
Budafoki víztorony

- Robot mérőállomással szkennelt pontfelhő



Budafoki víztorony

- gömb illesztése a tartályra

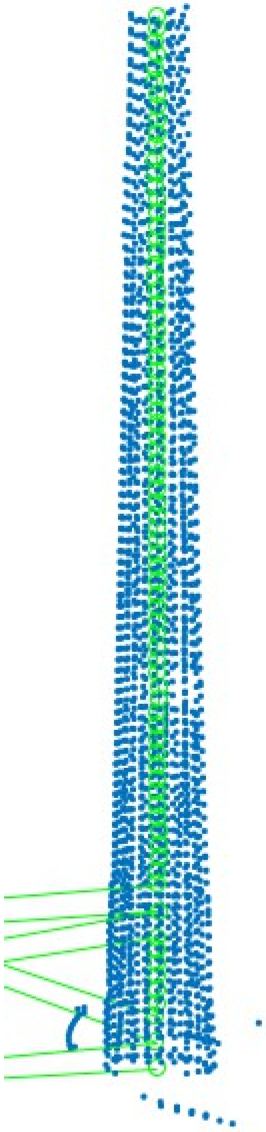


---------------------Mérési fájl név---------------------
BUDAFOK_víztorony.xlsx
---------------------Függvény--------------------------------
(xi-xc)^2 + (yi-yc)^2 (zi-zc)^2 = R^2
---------------------Illesztés típusa-------------------------
NonLinearLeastSquares
-----------------------------Mért pontok száma---------------------
P_i = 6283 [db]
P_jó = 4507 [db]
P_kivágó = 1 [db]
---------------------Illesztett gömb---------------------
Középpont_Y = 39.018 [m]
Középpont_X = 35.352 [m]
Középpont_Z = 49.502 [m]
Sugár = 21.042 [m]
------------------------Maradék illesztési hibák---------------------
Reziudál_max = 20.8 [cm]
Reziudál_mean = 0.0554 [cm]
Reziudál_min = -84.3 [cm]

OK

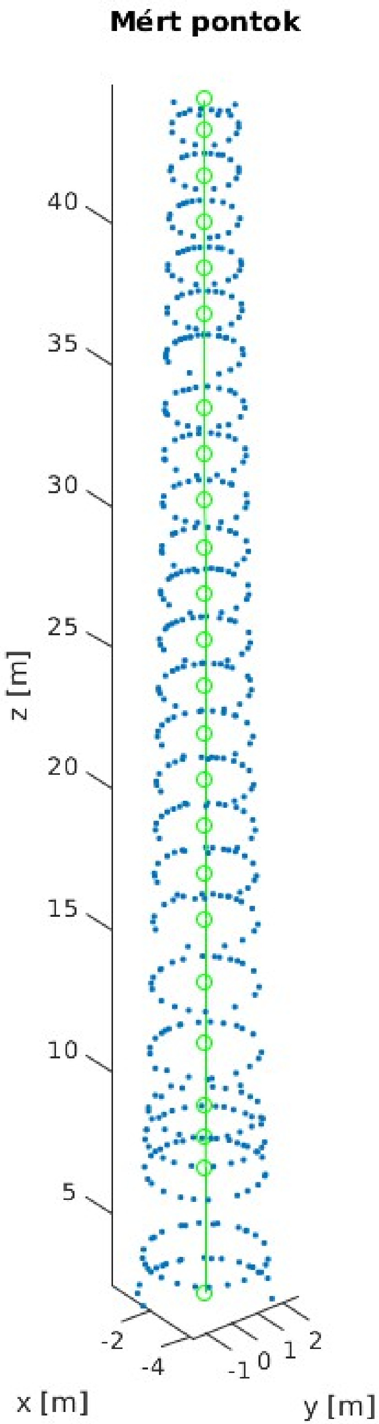
Henger tengelyének meghatározása

- Óbudai gyárkémény palástjának szkennelése



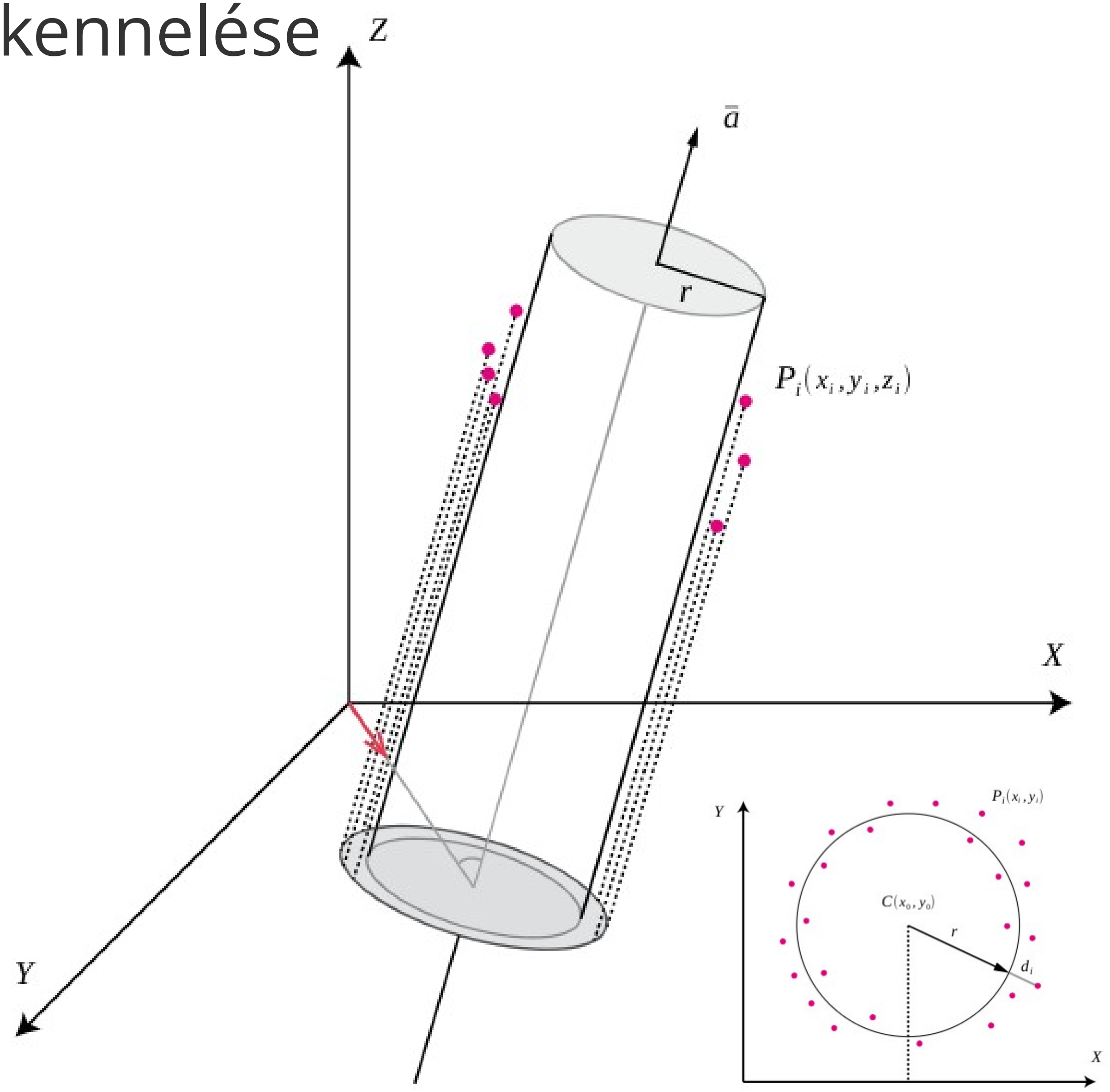
Henger tengelyének meghatározása

- körök illesztése a tengely meghatározásához



Henger palást meghatározása

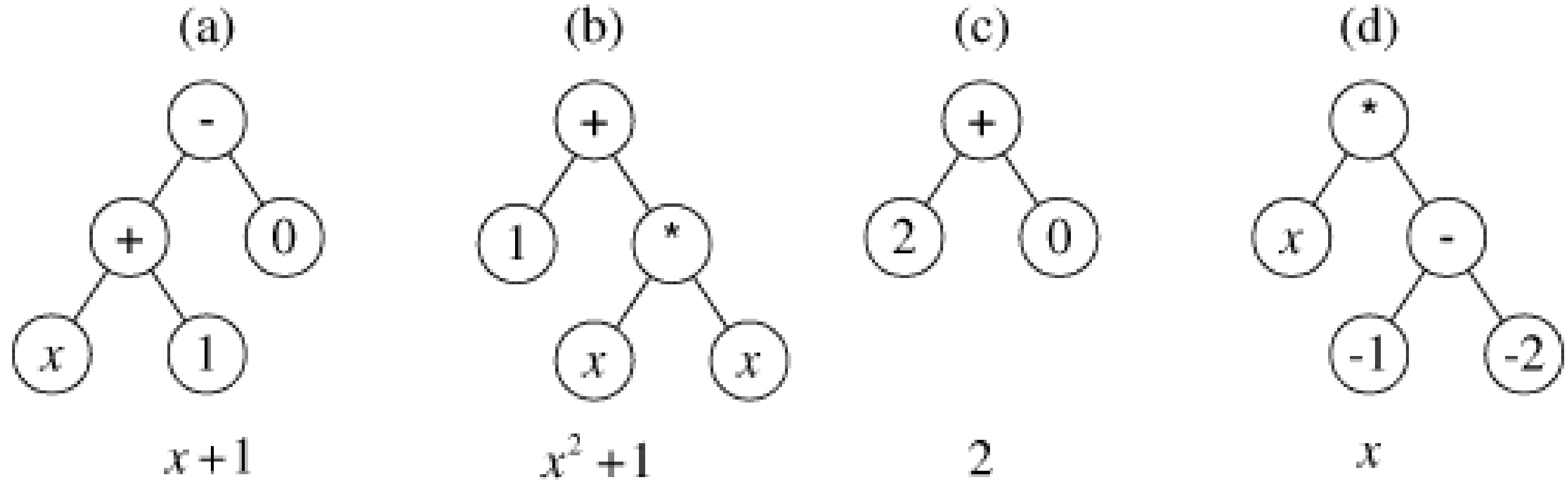
- Csepeli víztározó szkennelése

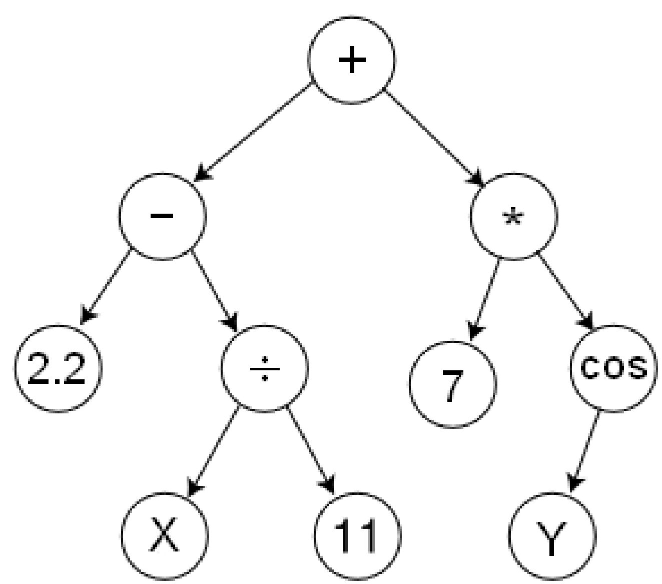


Szimbolikus regresszió

- A szimbolikus regresszió olyan eljárás, amelynek során az adatokhoz legjobban illeszkedő modellt keresünk, amelynek a matematikai alakja *nem ismert*
    - matematikai *kifejezések*et építünk fel
        - véletlenszerűen (genetikus algoritmus)
        - determinisztikusan (PGE)
    - meghatározzuk a kifejezés *paraméterei*t, hogy a legjobban illeszkedjen az adatokra
    - megtartjuk a legjobb modellt és paramétereit

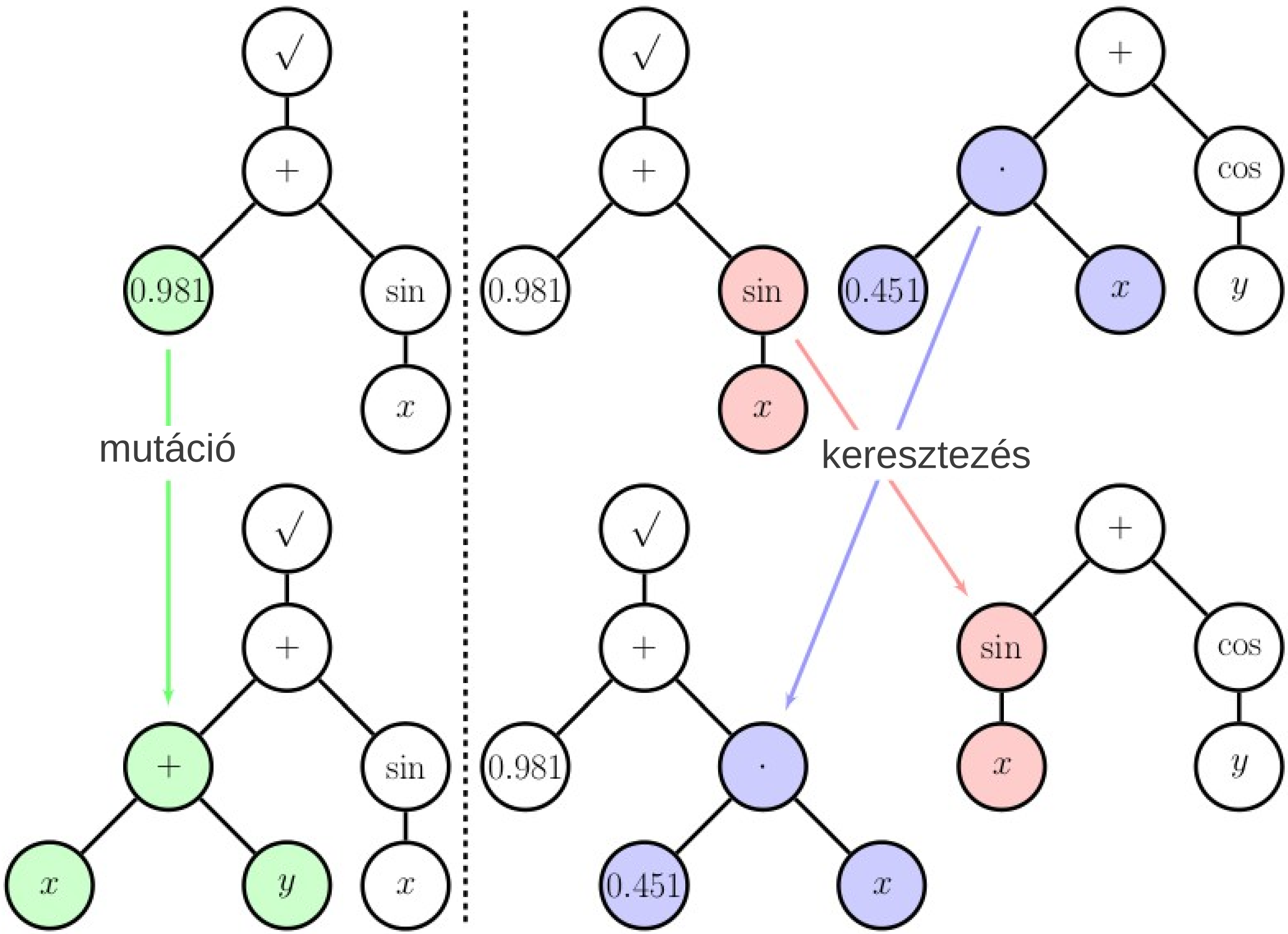
Matematikai kifejezések fái





$$\left(2.2-\left(\frac{X}{11}\right)\right)+\left(7*\cos(Y)\right)$$

Genetikus algoritmus

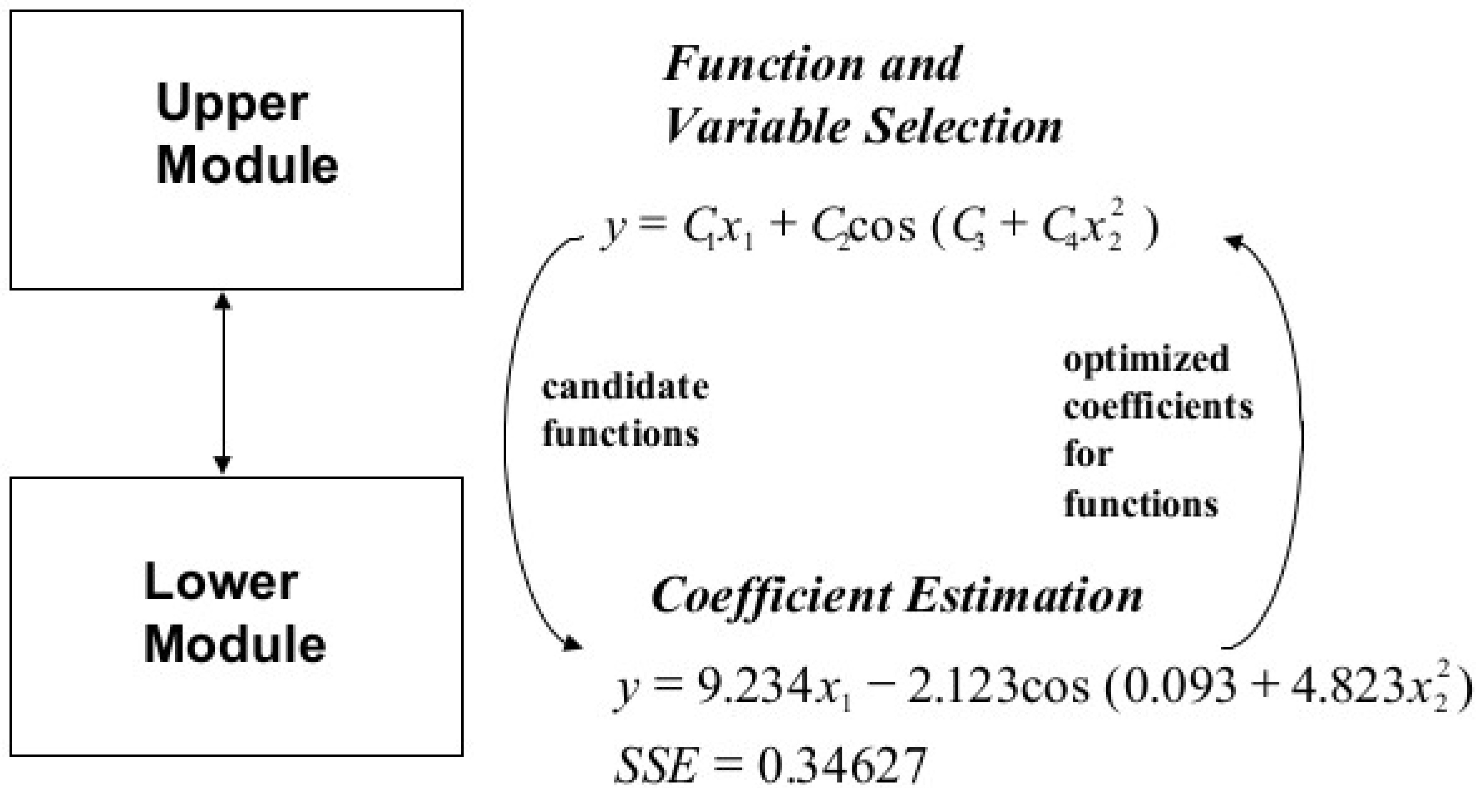


Hierarchikus genetikus algoritmus

- mindegyik kifejezés fa egy „kromoszóma” (egyed, amelyik „mutálódhat” és „kereszteződhet” egy másik „kromoszómával”)
- kell egy „rátermettség” függvény: ez megmondja, hogy egy kifejezés mennyire jól adja vissza az adatokat (pl. átlag négyzetes hiba)

  egy második genetikus algoritmus határozza meg egy kifejezés fa optimális együtthatóit

Hierarchikus GA (Gulsen and Smith, 1998))



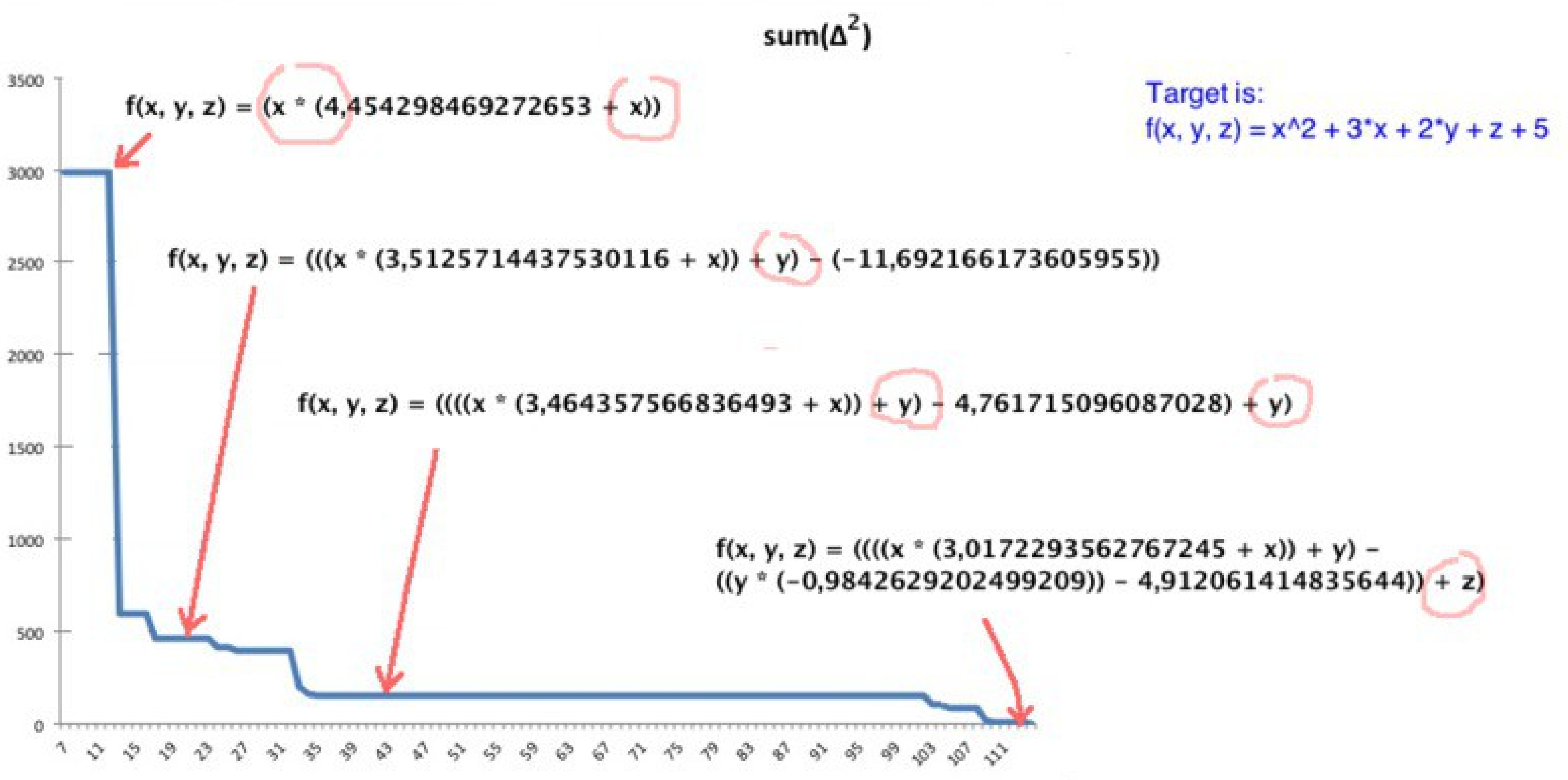
Példa

- Határozzuk meg szimbolikus regresszióval azt az $f(x, y, z)$ függvényt mely az alábbi értékeket adja:

x	y	z	f(x,y,z)
26	35	1	830
8	24	-11	130
20	1	10	477
33	11	2	1217
37	16	7	1524

- megengedett műveletek: ADD MUL SUB

Átlagos négyzetes hiba



Szakirodalom

- Detrekői (1991) Kiegyenlítő számítások, 11. fejezet
- Madsen K, Nielsen H B, Tingleff O (2004): Methods for Non-linear Least Squares Problems, Infomatics and Mathematical Modelling, TU Denmark
- Gulsen M, Smith A E, Tate D M (1995): A genetic algorithm approach to curve fitting, Int. J. Prod. Res. 33(7), 1911-1923
- Worm T, Chiu K (2013): Prioritized Grammar Enumeration: Symbolic Regression by Dynamic Programming, Proc. GECCO '13, 1021-1028, ACM

Vizsga

- 60 perc, 5 kérdés, 50 pont, megadott témakörökből
- minimum: 25 pont, a tárgy sikeres teljesítéséhez legalább 50 pont kell (HF + ZH + vizsga)
- témakörök, kérdések: oktatas.epito.bme.hu
- Időpontok: 2019.01.02., 09., 16. 10^{00}