



9. előadás

Kiegyenlítő számítások MSc

2018/19

Áttekintés

- Sztochasztikus folyamatok, idősorok
- Idősorok jellemzése az idő és frekvencia tartományban
- Idősor PSD becslése

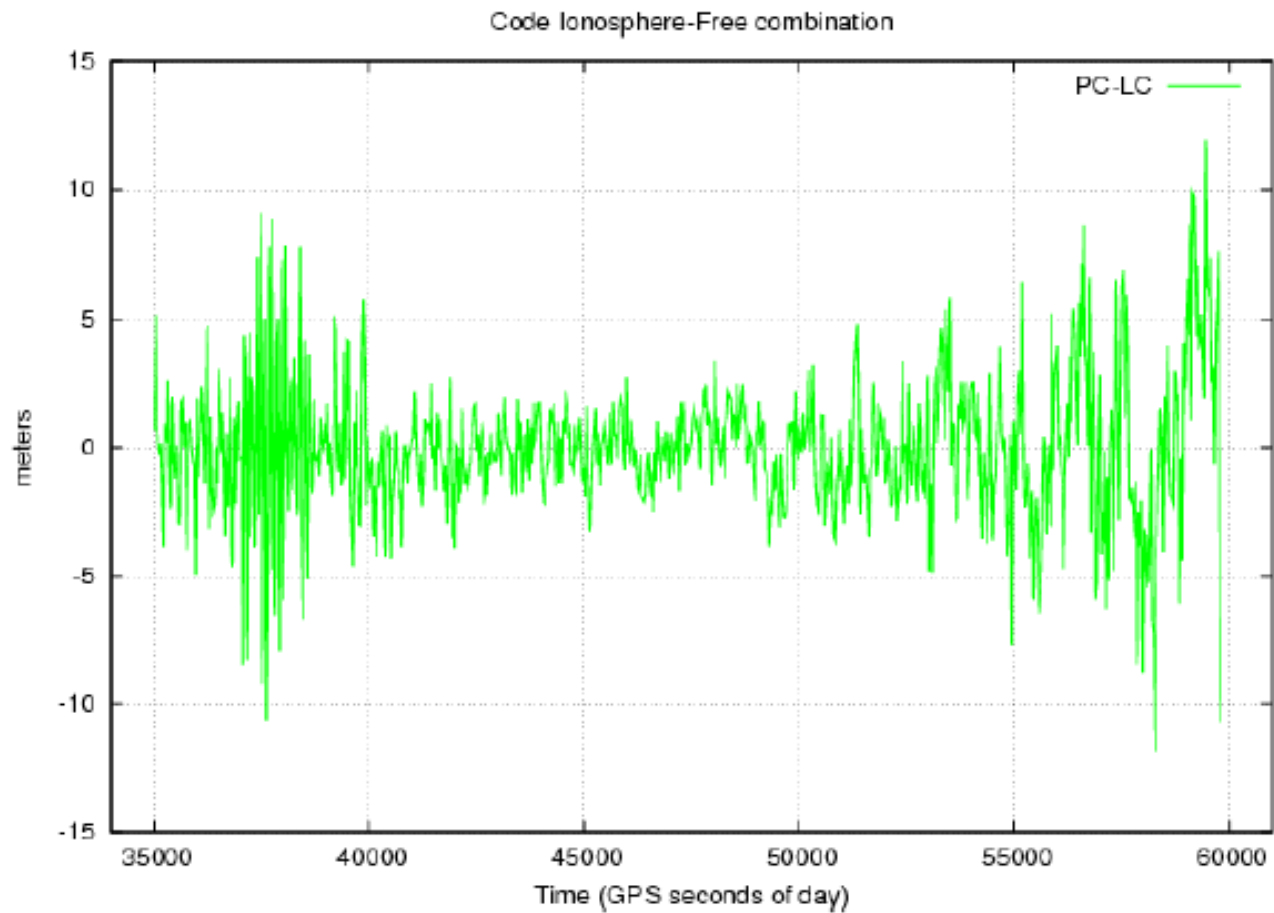
Sztochasztikus folyamatok, idősorok

- Példák folyamatosan változó mennyiségekre
- Sztochasztikus folyamatok és jellemzőik
- Stacionárius és ergodikus folyamatok
- Mintavételezés, Nyquist feltétel

Példák folyamatosan változó mennyiségekre

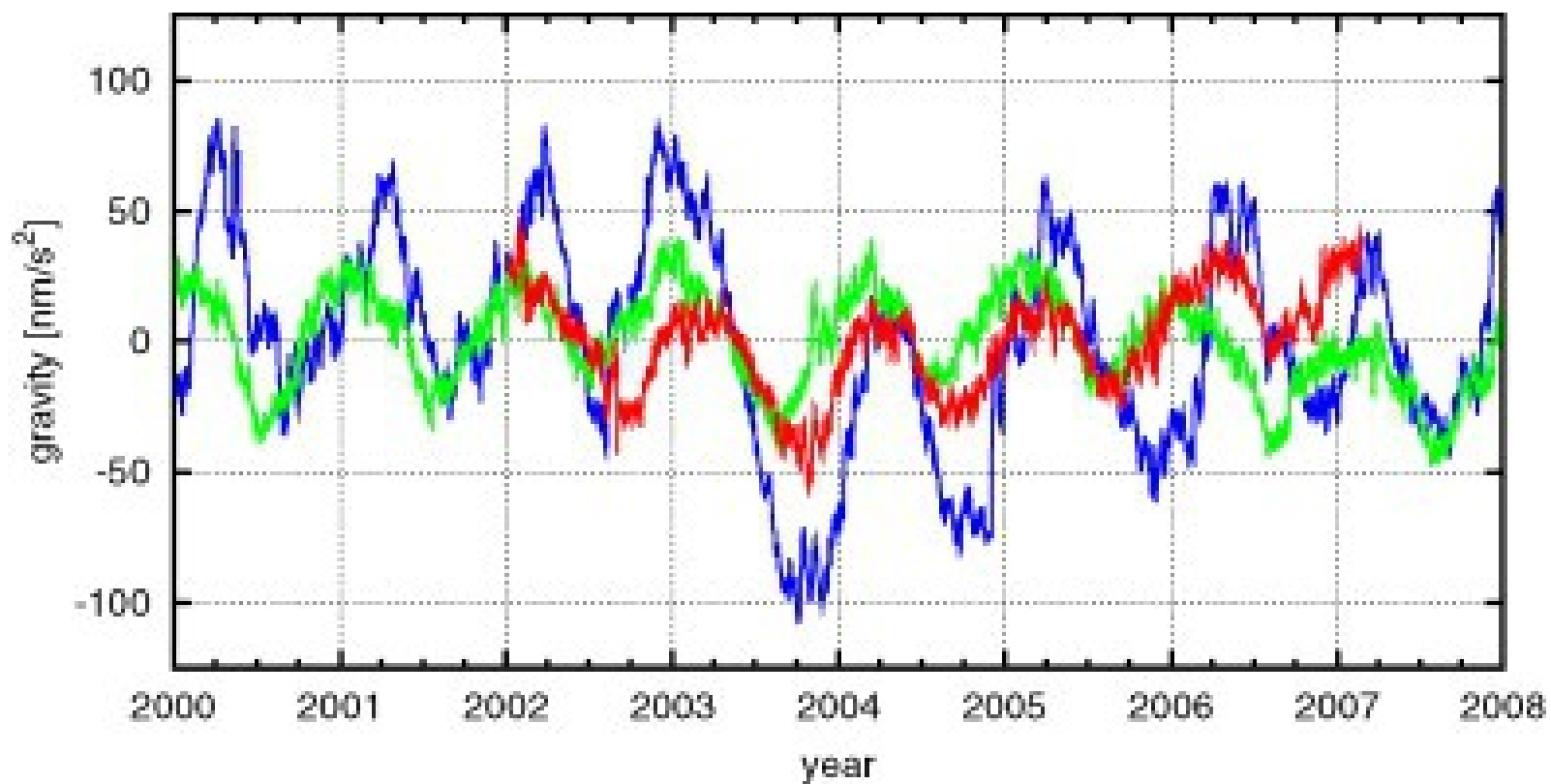
A mérési eredmények a véletlenek kívül egy vagy több folyamatosan változó fizikai jellegű mennyiségtől is függenek

- GNSS mérések (hely, idő)
- Nehézségi gyorsulás-mérés (hely, esetleg idő)
- Mérnöki szerkezetek mozgásvizsgálata (idő, esetleg teher)
- Digitális képfeldolgozás (hely)
- Térinformatikai rendszerek attribútumai (hely, idő)



Ionoszféra mentes GNSS kód mérés kombináció

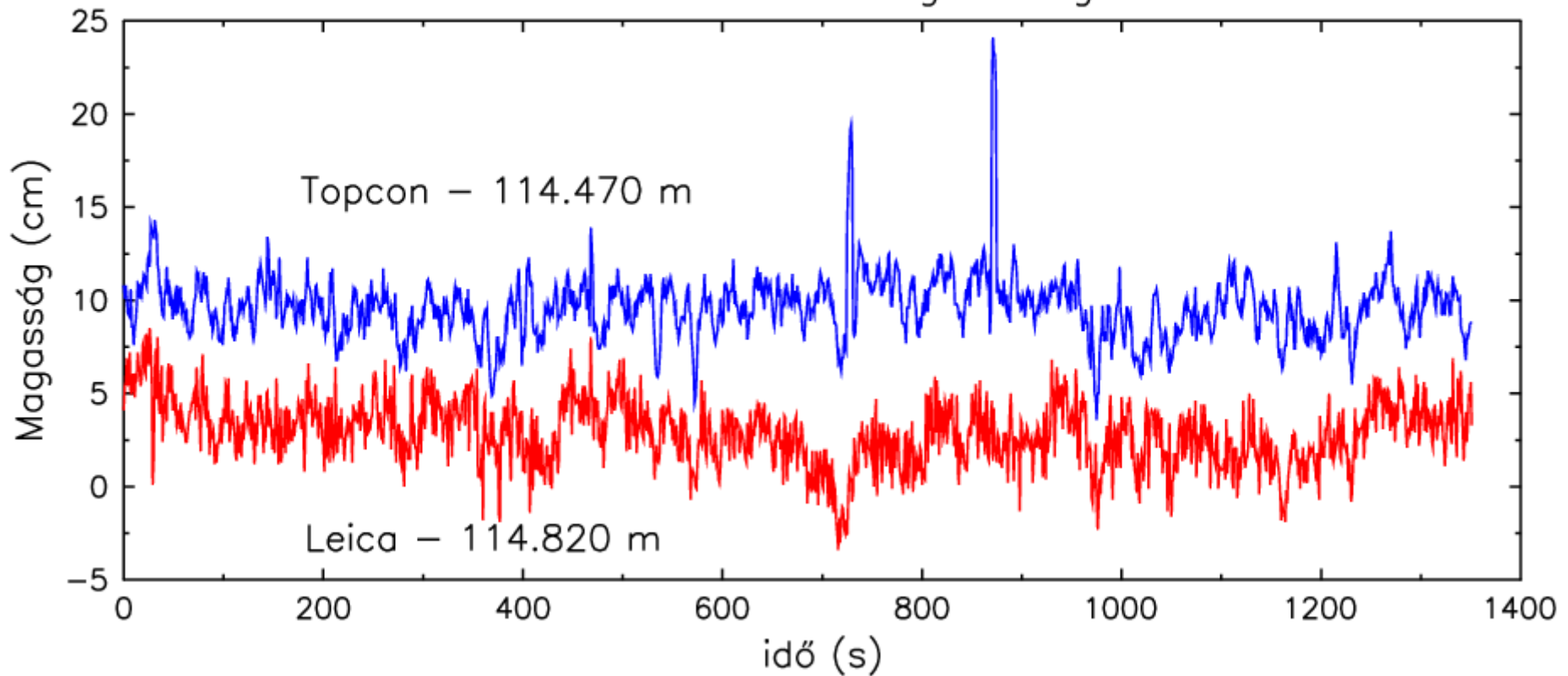
Forrás: ESA Navipedia



Maradék **nehézségi rendellenességek**
idősorai: Bad Homburg (**piros**), Medicina (**zöld**)
és Wetzell (kék) 2000–2007 között

Forrás: Wziontek et al. (2009)

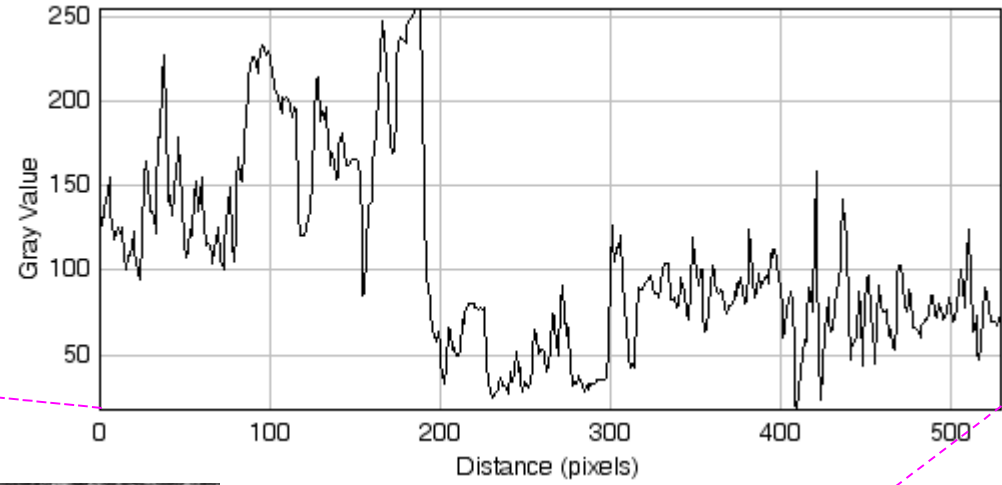
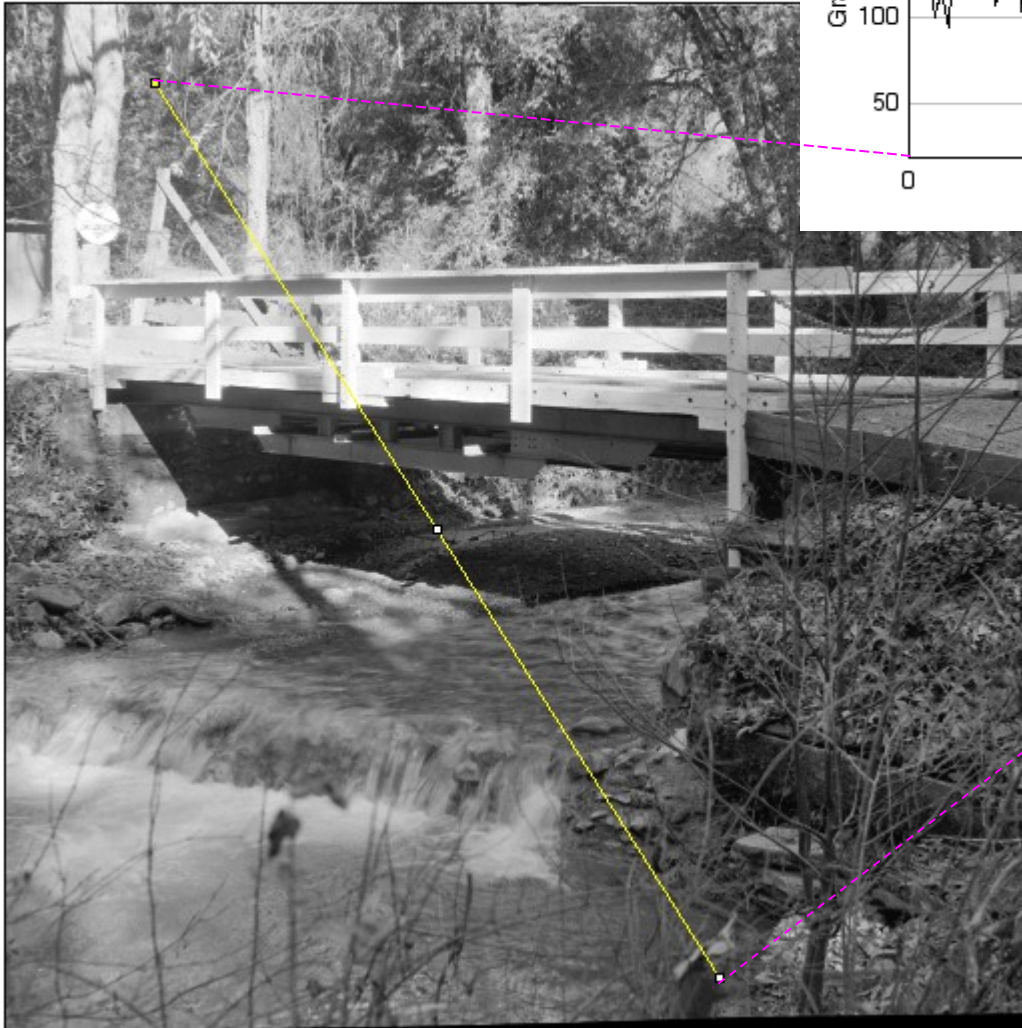
Erzsébet hid GPS mozgásvizsgálata



2010. április 26-án a Szerkezetek geodéziája gyakorlaton végzett GPS mérések az Erzsébet-híd magassági mozgásvizsgálata céljából

Forrás: Dr. Égető Csaba (2010)

512x512 pixels; 8-bit; 256K



A sztochasztikus folyamatok

- a mérési eredmény értékét a véletlenül kívül más tényezők is befolyásolják:

például a híd *egy pontjának* magasságát befolyásolják a hídon áthaladó autók

- definíció: $\xi(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T$.

Ω : eseménytér, ω elemi események halmaza

- A sztochasztikus folyamatok realizációja:

ω rögzített, t befutja a T halmazt:

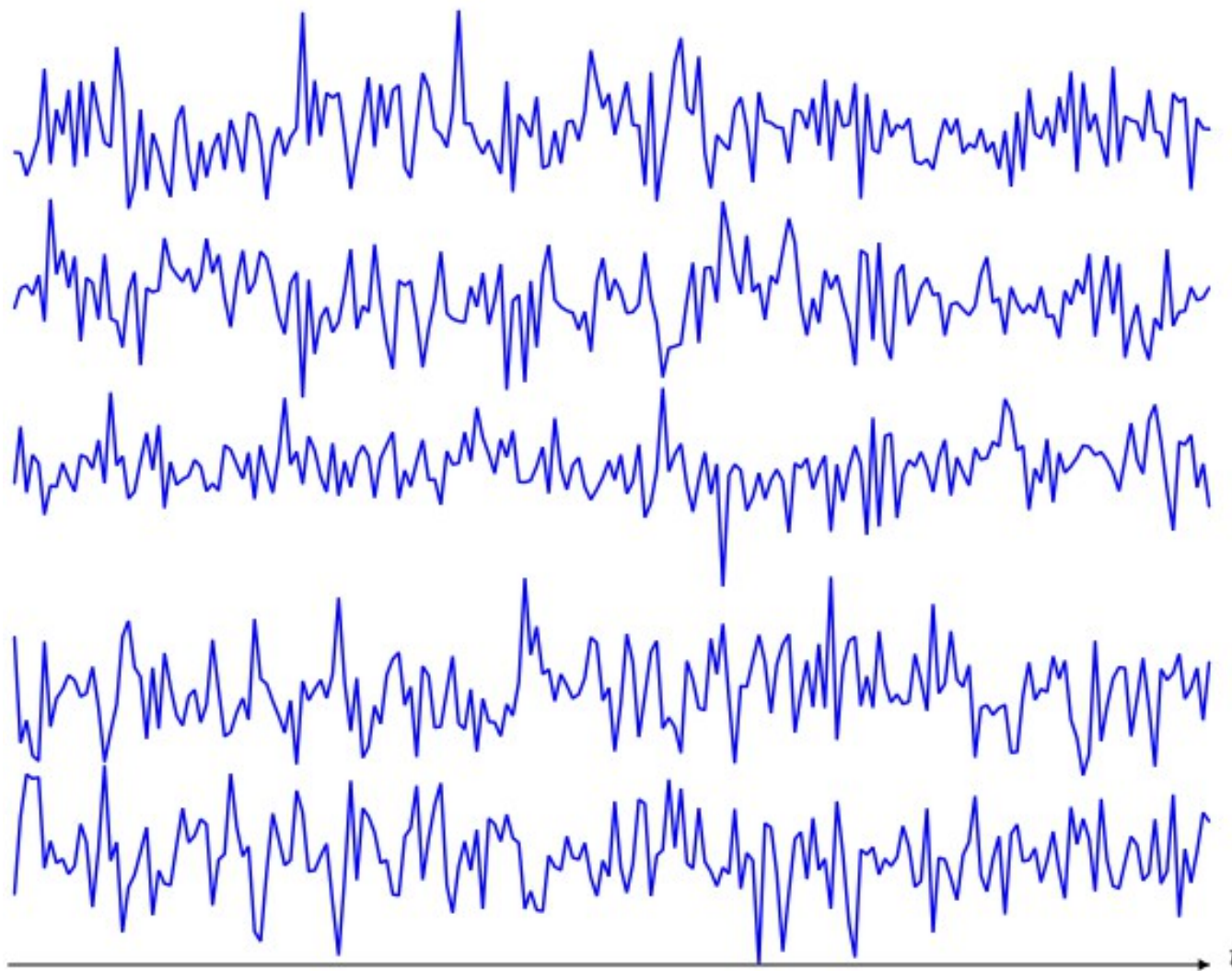
$\xi(t)$ függvény

pl. egy autó áthaladásakor a híd egy pontjának magassága
(t az autó helyzete)

- rögzített t_0 : $\xi(\omega, t_0)$ valószínűségi változó:

az autó kiválasztott helyzetéhez tartozó magasságok több áthaladás esetén

Realizációk



sztochasztikus folyamat 5 különböző realizációja

Különböző típusok

- t vektorváltozó: $\xi(\omega, t)$ véletlen mező

pl. két autó helyzetét vizsgáljuk: $t = (t_1, t_2)$

- ξ vektorfüggvény:

$\xi(\omega, t)$ sztochasztikus vektorfolyamat – pl. a híd két pontját vizsgáljuk egy időben egy autó áthaladásakor

$\xi(\omega, t)$ véletlen vektormező – pl. a híd két pontját vizsgáljuk egy időben két vagy több autó áthaladásakor

- *diszkrét és folytonos* sztochasztikus folyamatok
- A sztochasztikus folyamatok jellemzői:

Első, másod, harmad...rendű *eloszlásfüggvények*

Térátlag

Auto- és keresztkorreláció függvények

Eloszlásfüggvények

- $\xi(\omega)$ valószínűségi változót *eloszlásfüggvénye* jellemzi
- $\xi(\omega, t)$ jellemzéséhez ezzel szemben ismerni kell

$\xi(t_1)$ eloszlásfüggvényét,

$[\xi(t_1), \xi(t_2)]$ együttes eloszlását,

$[\xi(t_1), \xi(t_2), \xi(t_3)]$ együttes eloszlását,

$[\xi(t_1), \xi(t_2), \xi(t_3), \dots]$ együttes eloszlását

a t értékek *minden véges részhalmazára!*

- ezeket első-, másod-, ... rendű eloszlásfüggvények írják le

Első-, másod-, harmad-, stb. rendű eloszlásfüggvények

- $F_1(x_1, t_1) = P[\xi(t_1) \leq x_1]$ elsőrendű,
- $F_1(x_1, t_1; x_2, t_2) = P[\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2]$ másodrendű, ... stb.

eloszlásfüggvények írják le a sztochasztikus folyamatot

Térátlag

- valószínűségi változó *várható értékével* analóg mennyiség
- $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots$ minták alkalmas f függvényének a *térátlaga*:

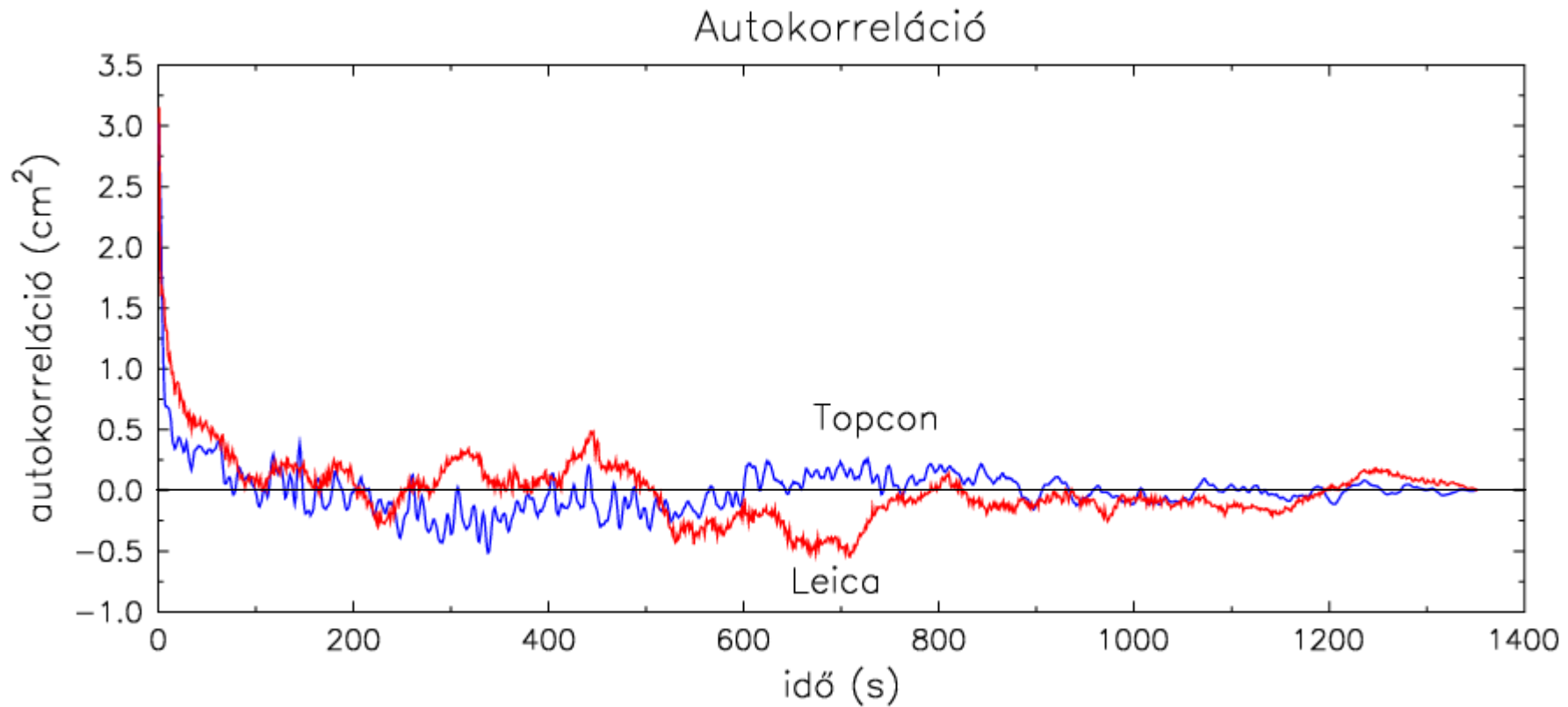
$$M\{f\} = M\{f[\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dF_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$$

Auto- és keresztkorreláció függvények

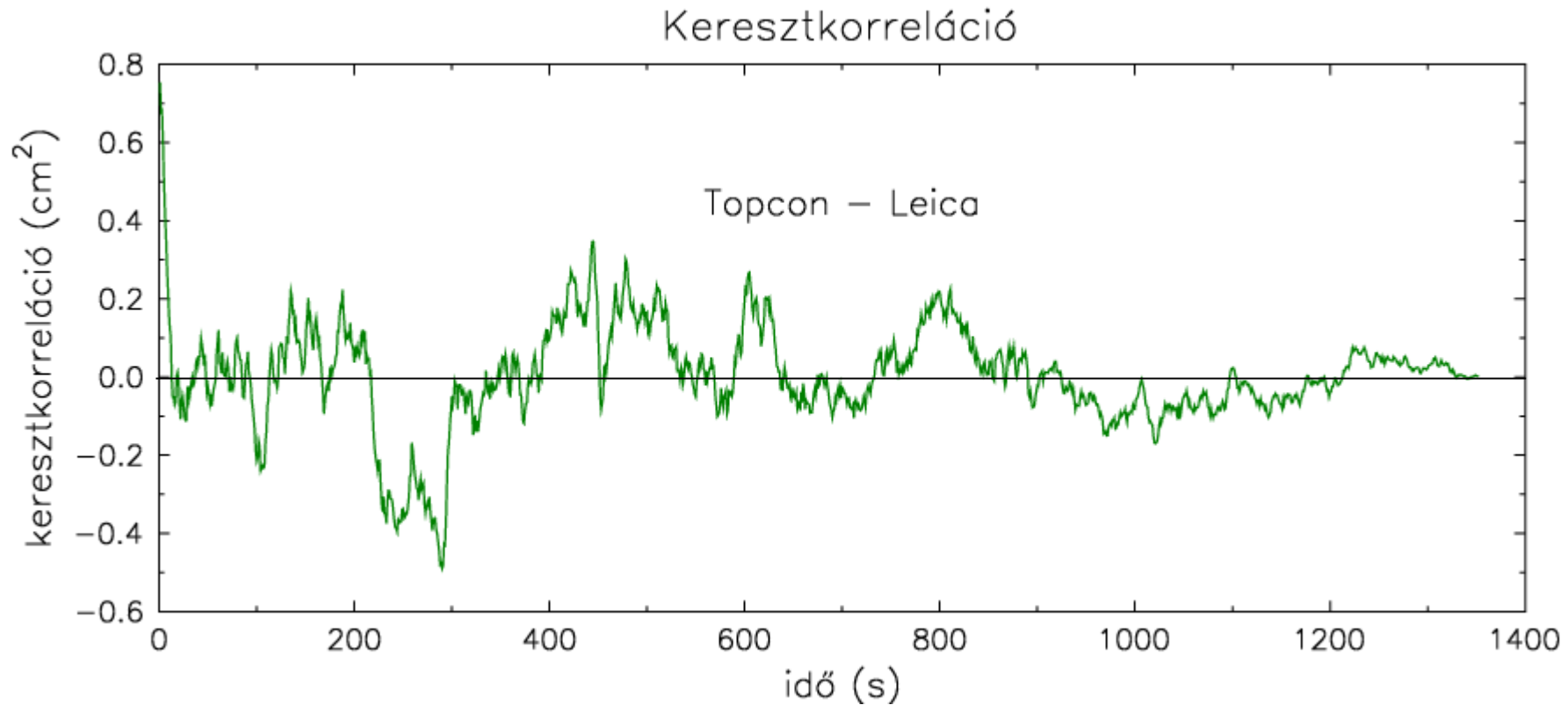
- $r_{xx}(t_1, t_2) = M[\xi(t_1) \cdot \xi(t_2)]$ *auto-*,
- $r_{xy}(t_1, t_2) = M[\xi(t_1) \cdot \eta(t_2)]$ *keresztkorreláció*

függvények jellemzik a sztochasztikus folyamatot

Tapasztalati autokorreláció



Tapasztalati keresztkorreláció



A sztochasztikus folyamatok néhány fontos fajtája

- *Stacionárius* folyamatok
- *Ergodikus* folyamatok: bármelyik realizáció meghatározza a folyamatot statisztikai szempontból
- Gyakran alkalmazott sztochasztikus folyamat típusok:

Gauss folyamat

(az eloszlások minden rögzített t értékre *Gauss* eloszlásúak),

Markov folyamat,

Poisson folyamat,

Wiener folyamat.

Stacionárius folyamatok

- A folyamathoz tartozó *eloszlások* egyike sem változik meg akkor, ha t helyébe $t + t_0$ lép időponttól független jellemzés adható
- n -edrendű eloszlások csupán $n-1$ számú *különbségtől* függenek:

$$\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_1 = t_3 - t_1, \dots, \tau_{n-1} = t_n - t_1$$

Stacionárius folyamatok

- Stacionárius folyamatok térátlagai állandók
- Korrelációfüggvények csak a $\tau = t_i - t_k$ különbségektől függenek:

$$r_{xx}(\tau) = M[\xi(t) \cdot \xi(t + \tau)]$$

$$r_{xy}(\tau) = M[\xi(t) \cdot \eta(t + \tau)]$$

Mintavételezés

- Mintavételezés folytonos sztochasztikus folyamatokból

Dirac-féle delta „függvény”

Nyquist feltétel

Dirac-féle delta „függvény”

- $\delta(t)$ delta „függvény” (disztribúció) jellemzői

$t = 0$ -nál *végtelen* nagy a függvény értéke

$t \neq 0$ -nál *zérus* a függvény értéke

integrálja a teljes számsíakra: $1, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

a folytonos $f(t)$ függvény helyettesítési értékét

adja meg:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

analógia: *tömegpont*

Mintavételezés

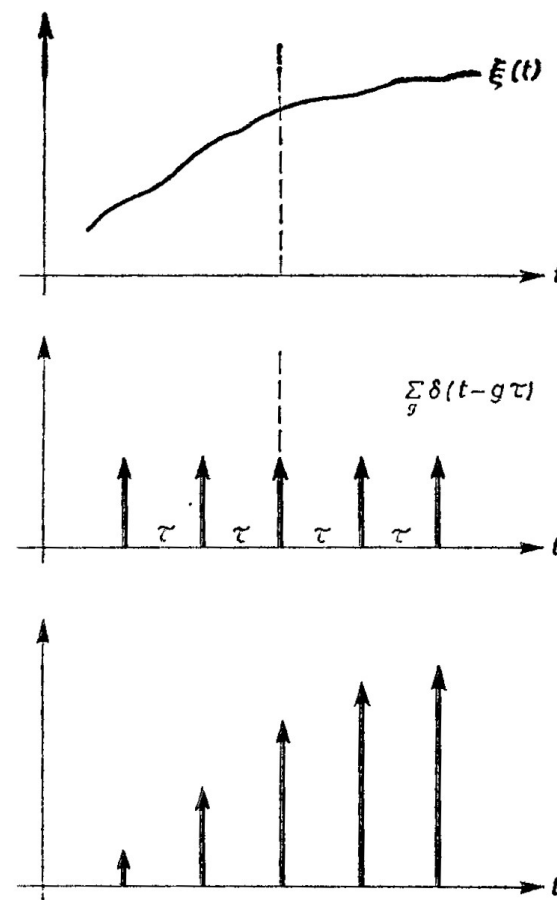
- A $\xi(t)$ realizációra történő mintavételezés Dirac delta sorozattal való szorzással történhet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) \delta(t - T) dt =$$
$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} \xi(g \cdot \tau) \cdot \delta(t - g \cdot \tau) = \xi_m(g \cdot \tau)$$

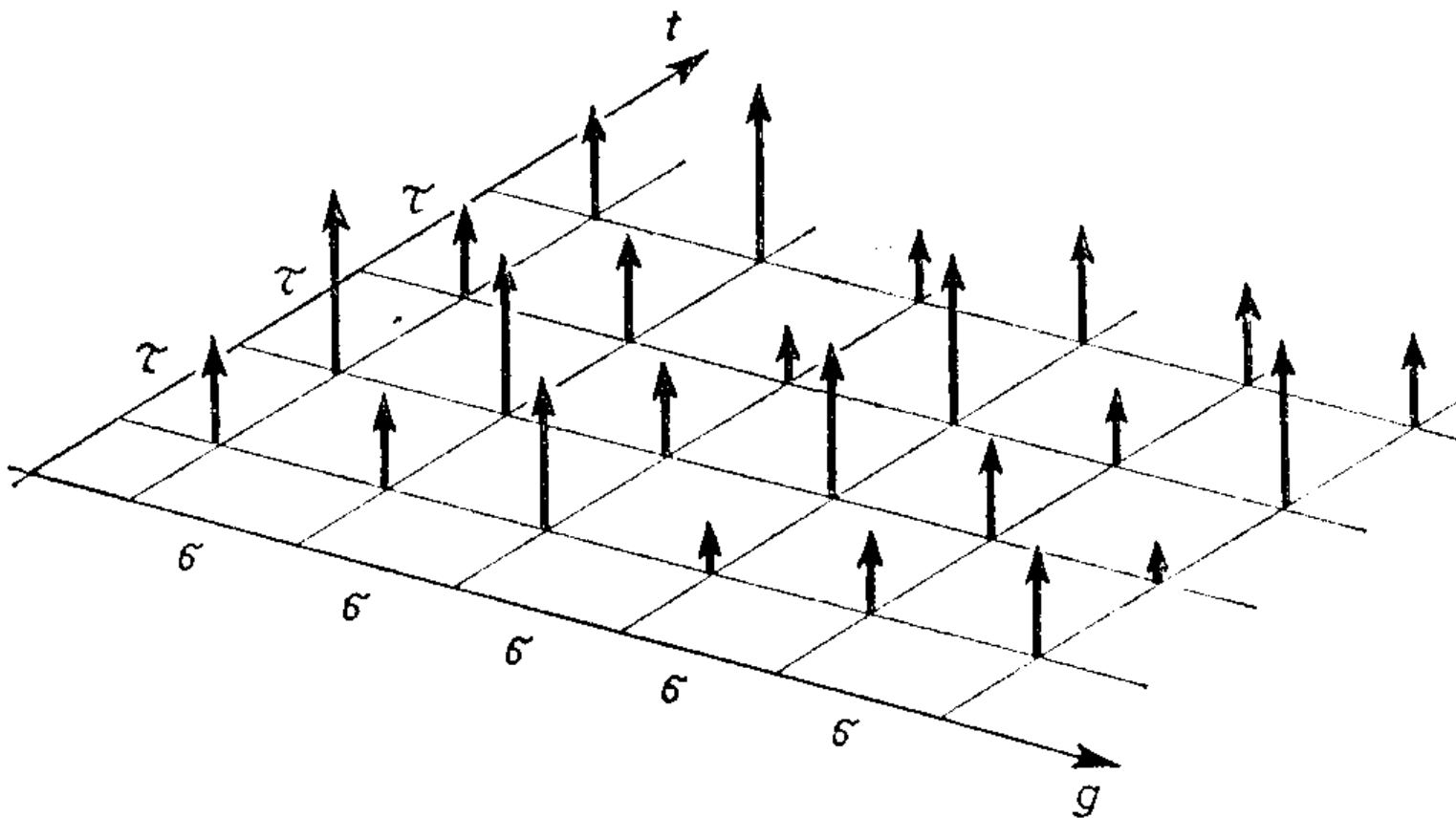
τ mintavételi távolság

g egész szám

δ Dirac-féle delta „függvény”



Két változós mintavételezés



Nyquist feltétel

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{iut} dt$$

$i = \sqrt{-1}$

$$F(u) = 0, \text{ ha } u > u_h$$

Fourier-transzformált
(frekvenciaspektrum)

sávkorlátos függvény,
 u_h határfrekvencia

Nyquist feltétel:

$$\tau \leq \frac{1}{2u_h}$$

Az előforduló legnagyobb frekvencia minden periódusára legalább *két* mintavételi helynek kell esnie.

Nyquist-feltétel következményei

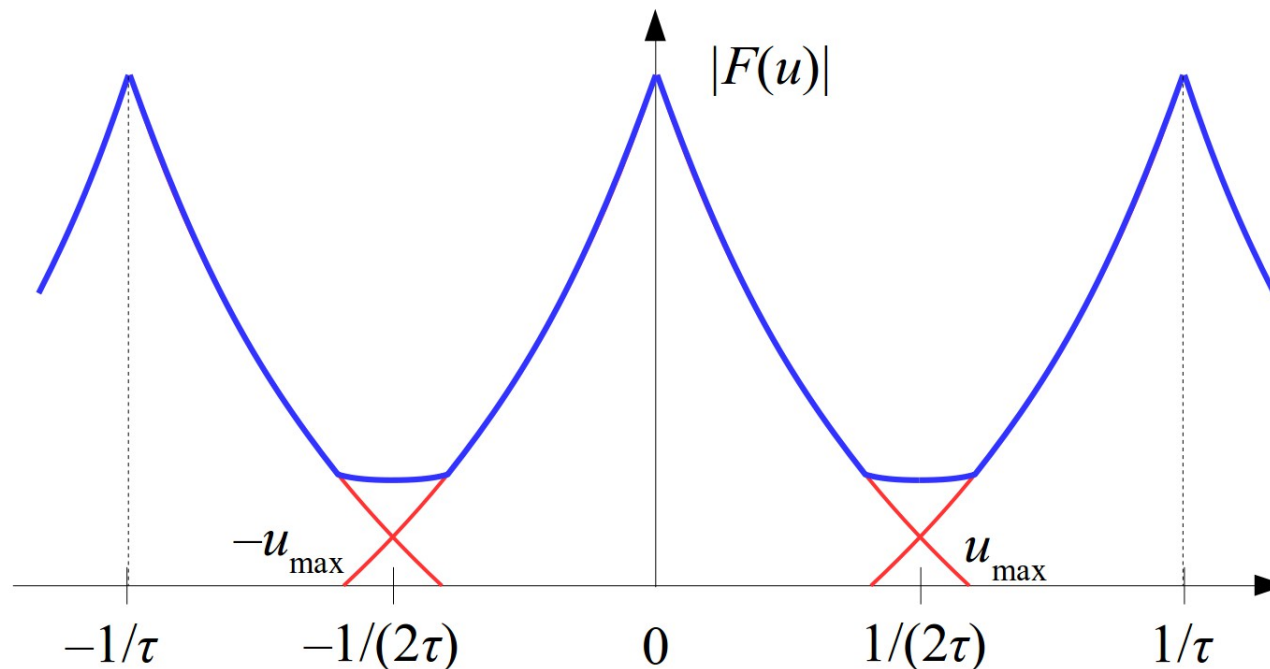
- Ismeretlen analóg jelet mintavételezés előtt a Nyquist-frekvenciának megfelelő *aluláteresztő szűrővel kell szűrni* (azaz a magas frekvenciás részt le kell vágni)
- Adatrendszer *ritkítása* csak aluláteresztő szűrés mellett megengedett

Nyquist feltétel a szerepe a frekvencia tartományban

- Akkor nincs jeltorzulás (átlapolódás, aliasing), ha

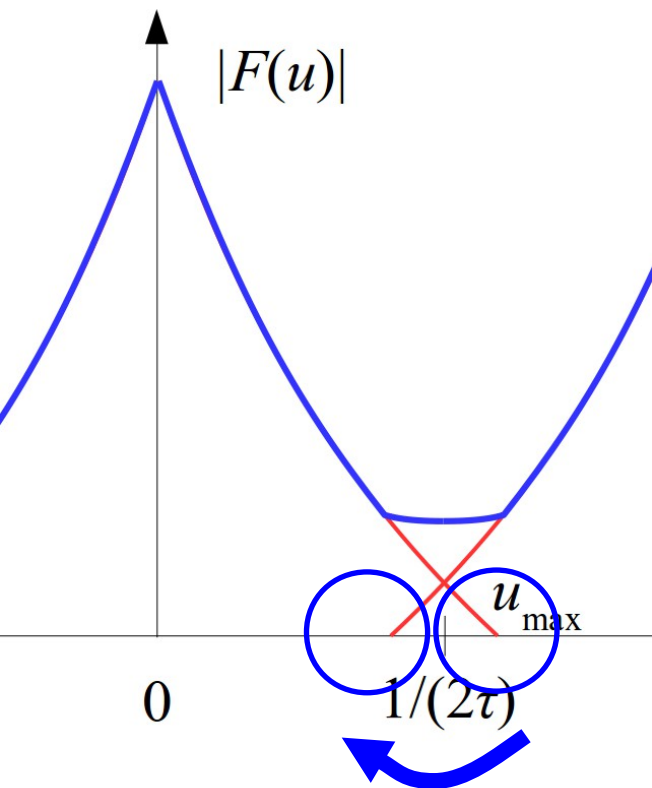
$$u_{\max} \leq \frac{1}{2\tau}$$

τ : mintavételi időköz



Átlapolódás (aliasing)

- Az átlapolódott magas frekvenciájú összetevők *hamis alacsony frekvenciás jelet* adnak



Idősor PSD becslése

- Sztochasztikus folyamat frekvencia összetevői
- Teljesítménysűrűség spektrum (PSD)

Autokovariancia és PSD

A PSD tulajdonságai

Idősor PSD-je

- A PSD becslésének különböző eljárásai

periodogram

paraméteres módszerek

nem paraméteres módszerek

Sztochasztikus folyamat frekvencia összetevői

- folytonos jel Fourier transzformáltja: frekvencia összetevőkre bontás

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi ift} dt$$

- idősor esetében (diszkrét időpontok) a spektrum periódusos

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-2\pi ifn} \quad -1/2 \leq f \leq 1/2$$

- idősor rekonstrukciója:

$$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2\pi ifn} df$$

Sztochasztikus folyamat frekvencia összetevői

- sztochasztikus folyamatra egyik sincs értelmezve ($x(t)$ nem korlátos):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi ift} dt \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-2\pi ifn}$$

- a helyes megközelítés: $(f_0 - 1/2df, f_0 + 1/2df)$
frekvenciasávhoz tartozó *jel energia*
- f_0 körüli Φ_{f_0} sáváteresztő szűrő, jel energia df -el
arányos: $S_x(f_0) df = \text{var}(\Phi_{f_0} * x)$

Teljesítménysűrűség spektrum

$$S_x(f_0) df = \text{var}(\Phi_{f_0} * x)$$

- $S_x(f_0)$: *Power Spectral Density* (PSD)
energiaspektrum, teljesítménysűrűség spektrum
- PSD *mértékegysége*: sztochasztikus folyamat („jel”) variancia osztva frekvenciával
- vagy négyzetgyök PSD: sztochasztikus folyamatot jellemző mennyiség mértékegysége / (négyzetgyök frekvencia)

pl. ha gyorsulás, a négyzetgyök PSD: $\text{m/s}^2 / \text{Hz}^{1/2}$

Stacionárius folyamat PSD

- a (kétoldali) PSD az alábbi határértékként írható fel (mivel f -et $-\infty$ -től $+\infty$ -ig változtathatjuk)

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x_T(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \right\}$$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Ha x valós, akkor $S_x(f)$ az f -nek páros függvénye, ezért csak az $f \geq 0$ -ra kell megadnunk az értékeit (egyoldali PSD, azaz $2S_x(f)$ az $f \geq 0$ -ra)

Autokovariancia és PSD

- az autokovariancia függvény (ACF) és a PSD pontosan ugyanazt az információt tartalmazza:

$$S_x(f) = F\{R_x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-2\pi ift} dt$$

a PSD az ACF Fourier transzformáltja

- inverz transzformált:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{2\pi ift} df$$

A PSD tulajdonságai

- a sztochasztikus folyamat variancia az ACF-ből számítható:

$$R_x(0) = E \{ x(t) x(t) \} = \text{var}(x) = \sigma_x^2$$

- $t = 0$ -t behelyettesítve

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^0 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

- a PSD alatti terület a sztochasztikus folyamat *varianciája*

Fehér zaj PSD

- Folytonos jel esetén a fehér zaj autokovariancia függvénye a Dirac-féle delta függvény (disztribúció) számszorosa, $s^2 \delta(t)$.
- a fehér zaj PSD-je:

$$S_W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_W(t) e^{-2\pi ift} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \delta(t) e^{-2\pi ift} dt = s^2$$

a PSD alatti terület végtelen!

a folytonos fehér zaj fizikai értelemben fikció

a fehér zaj eloszlása nem definiált (többféle lehet)

Idősor PSD

- diszkrét idősor PSD-je DFT-k határértéke:

$$S_x(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} E \left\{ \left| \sum_{n=-N}^N x_n e^{-2\pi ifn} \right|^2 \right\}$$

- *realizációkra* vett $E\{\cdot\}$ átlagolás szükséges
- Alternatív definíció az *autokovariancia* függvény segítségével:

$$S_x(f) = \sum_{n=-N}^N R_x(n) e^{-2\pi ifn} \quad -1/2 \leq f \leq 1/2$$

PSD becslése

- véges számú ismert adatunk van
- olyan függvényt akarunk meghatározni, amely több ismeretlentől függ: több ismeretlen mint ahány egyenlet – *rosszul kondicionált inverz feladat*
 - a jó PSD becslés hozzáértést kívánó „mesterség”
- N db. mintánk van a sztochasztikus folyamatból
- valódi PSD helyett a valódi PSD és a sinc^2 (szinusz kardinális) függvény konvolúcióját kapjuk
- a PSD pontos kijavítása (dekonvolúció) lehetetlen
- helyette közelítő, „regularizált” megoldást adunk

PSD becslési módszerei

- periodogram (periodogram(x))

- paraméteres módszerek

Burg (pburg(x,n))

MESE (Maximum Entropy Spectral Estimation)
(pyulear(x,n))

előfehérítés (prewhitening)

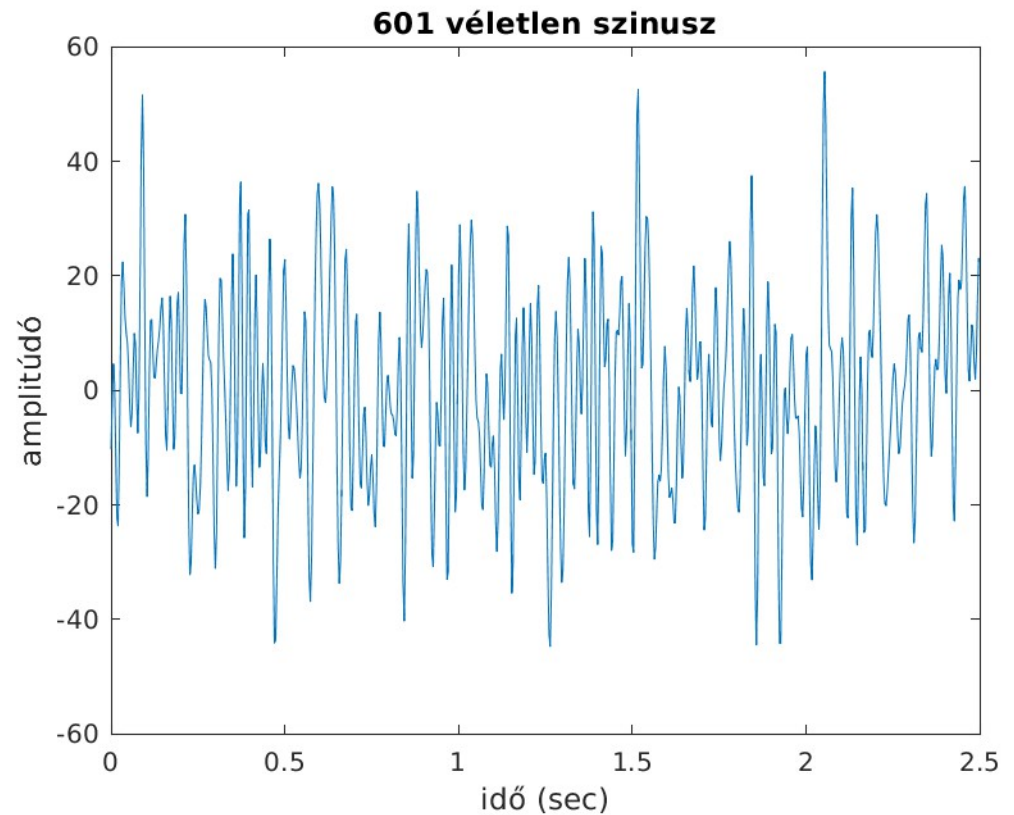
- nem paraméteres módszerek

Welch (szekció átlagolás)

multitaper (DPSS, szinuszos)

601 véletlen szinuszhullám alkotta jel

```
% 601 véletlen szinusz összege
ss = 300; % mintavételi frekvencia (Hz)
Ts = 2.5; % 2.5 sec jel
nsa = Ts*ss; % minták száma
nsi = 600 % véletlen szinuszok
ti = [0:(nsa-1)]/ss; % időegyenés
frq = 50*rand(1,600); % frekvencia
phs = 2*pi*rand(1,600); % fázis
xsi = zeros(1,nsa);
for i=1:nsi
    xsi = xsi+sin(2*pi*frq(i)*ti+phs(i));
end
% véletlen szinusz -25 dB-en, 62 Hz-en
a601 = 10^(-25/10);
xsi = xsi+a601*sin(2*pi*62*ti);
figure(1);
plot(ti,xsi);
xlabel('idő (sec)');
ylabel('amplitúdó');
title('601 véletlen szinusz');
```



600 db, $0 < f < 50$ Hz véletlen frekvenciájú és fázisú,
egységnyi amplitúdójú szinuszhullám
1 db, $f = 62$ Hz-es, -25 dB szinuszhullám

PSD periodogram becslése

- átlagolást elhagyjuk:

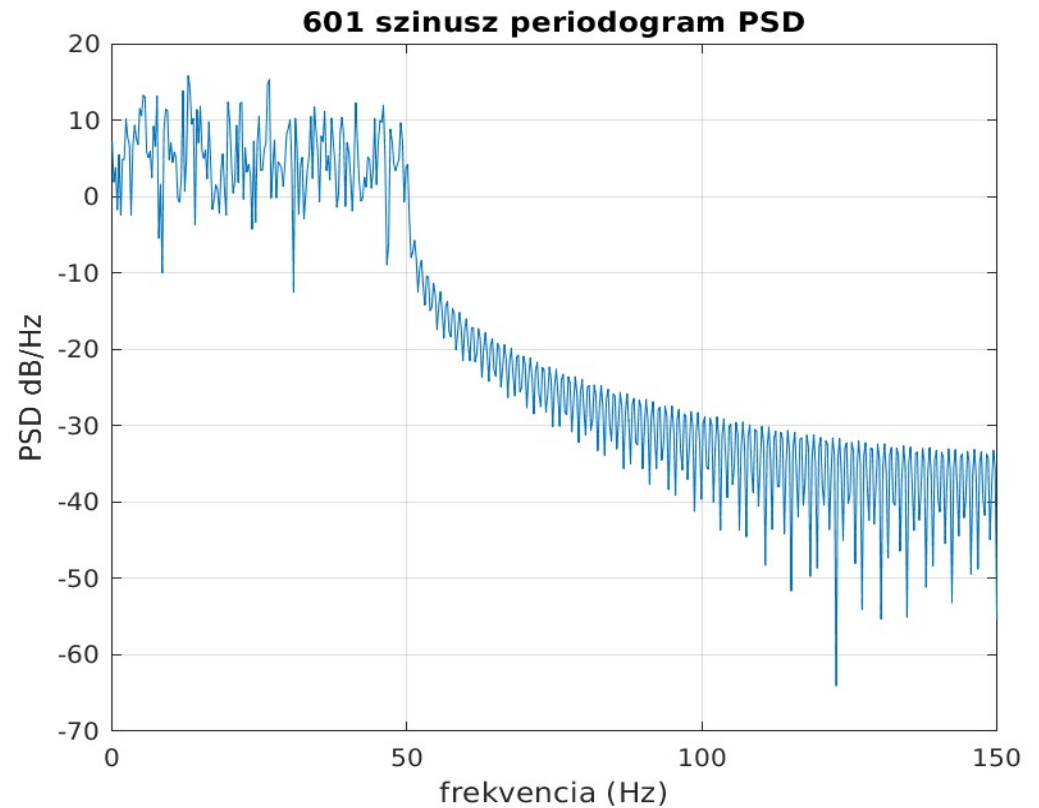
$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2$$

- az adatsort átszámoztuk zérus kezdő indexszel
- Fourier transzformált magnitúdó (négyzet)
- ACF becslés Fourier transzformáltja

$$\hat{R}_x(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-1-n} x_k x_{k+n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

periodogram PSD becslés

```
% periodogram PSD becslés  
figure(2);  
periodogram(xsi,[],[],ss);  
xlabel('frekvencia (Hz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz periodogram PSD');
```



Periodogram jellemzői

- *torzítatlan* becslés a PSD-re
- *inkonzisztens* becslés:

$$\text{var} [\hat{S}_x(f)] = S_x(f)^2$$

- a becslés szórása megegyezik a becsült értékkel és nem csökken N növelésével, mert a becslésenkénti szabadsági fok: 2

→rendkívül *zajos*

Periodogram torzítása

- Az ún. *spektrális szivárgás* torzítja
- A torzítás lényege: a valódi PSD helyett a periodogram annak módosított változatát számítja ki, mert egy adott frekvenciájú jel összetevő energiájának egy része „elszivárog” a szomszédos frekvenciákra
- A torzítás csökkenthető az eredeti jel amplitúdójának módosításával (*tapering*, lesimítés)
- Nagy dinamikájú jelek esetében komoly probléma lehet

A PSD nem paraméteres becslési módszerei

- A periodogram becslés varianciáját időbeli *átlagolással* lehet csökkenteni

$$\text{var} [\hat{S}_x(f)_K] = \frac{S_x(f)^2}{K}$$

Welch módszere (szekció átlagolás)

- A PSD torzítását több *simító függvénnyel* végzett átlagolással lehet csökkenteni (*multitapering*)

ortogonális ablakrendszerek: DPSS, szinuszos

Átlagolás (simítás) hatása

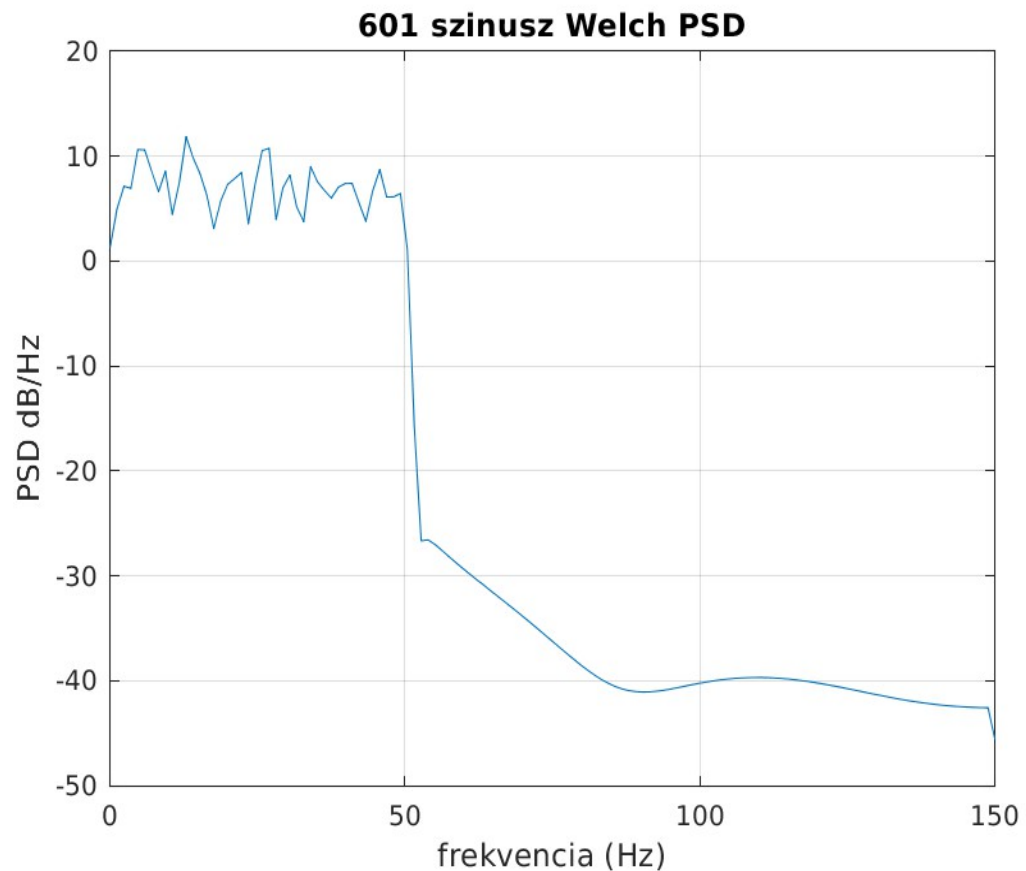
- A simítással (átlagolással) csökken a variancia (zaj), de *csökken a felbontás is!*
- helyes egyensúly: *felbontás* \leftrightarrow *zaj*

Welch szekció átlagolás

- Az eredeti idősort K db. egyenlő hosszúságú, egymást (általában 50%-ban) átfedő szekcióra bontjuk és mindegyikből egy-egy spektrumot számítunk ki
- Ezek az adatsorok egymástól közel függetlenek, és így a PSD egy-egy független becslését adják, melyeket átlagolunk
- a spektrális szivárgás csökkentése érdekében mindegyik szekciót megfelelő függvénnel ablakoljuk (*tapering*)

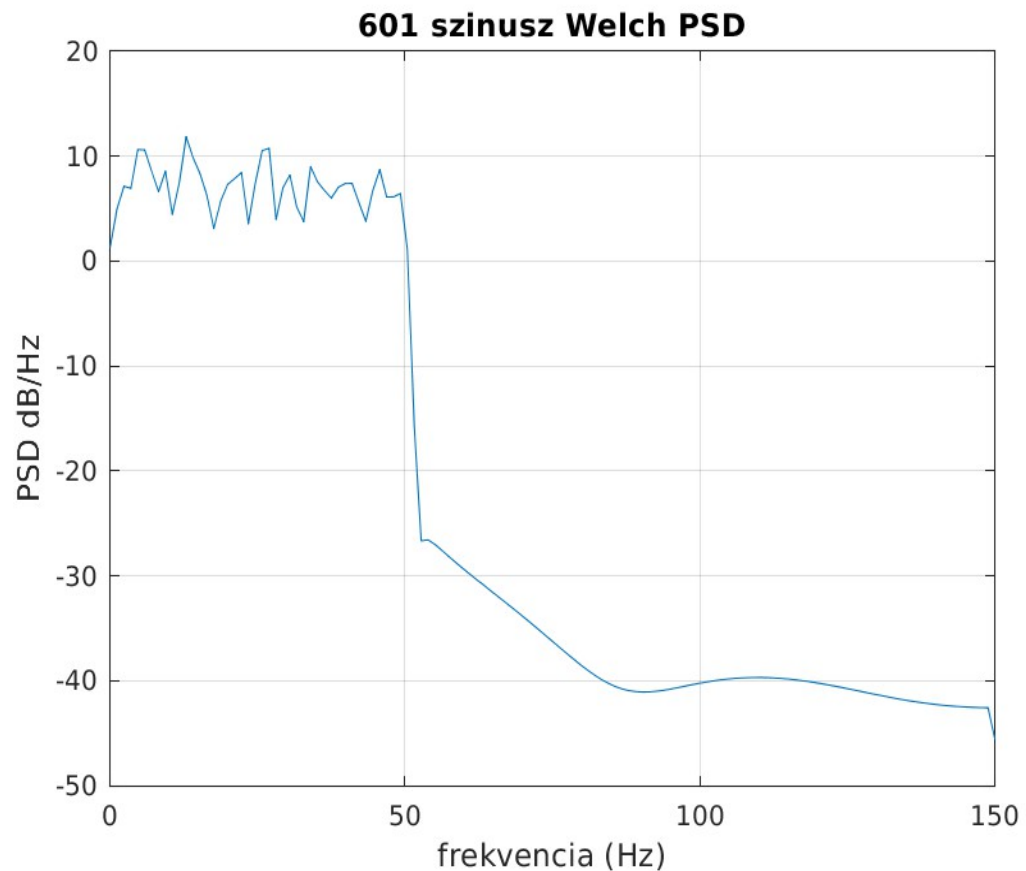
Welch PSD becslés

```
% Welch PSD becslés  
figure(3);  
pwelch(xsi,250,[],[],ss);  
xlabel('frekvencia (Hz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz Welch PSD');
```



Welch PSD becslés

```
% Welch PSD becslés  
figure(3);  
pwelch(xsi,250,[],[],ss);  
xlabel('frekvencia (Hz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz Welch PSD');
```



Simító függvény alkalmazása

- spektrális szivárgás hatását lehet csökkenteni úgy, hogy az adatokat egy $w(n)$ súlyfüggvénnyel (simító függvény, *taper*) beszorozzuk:

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N w(n) x_n e^{-2\pi ifn} \right|^2$$

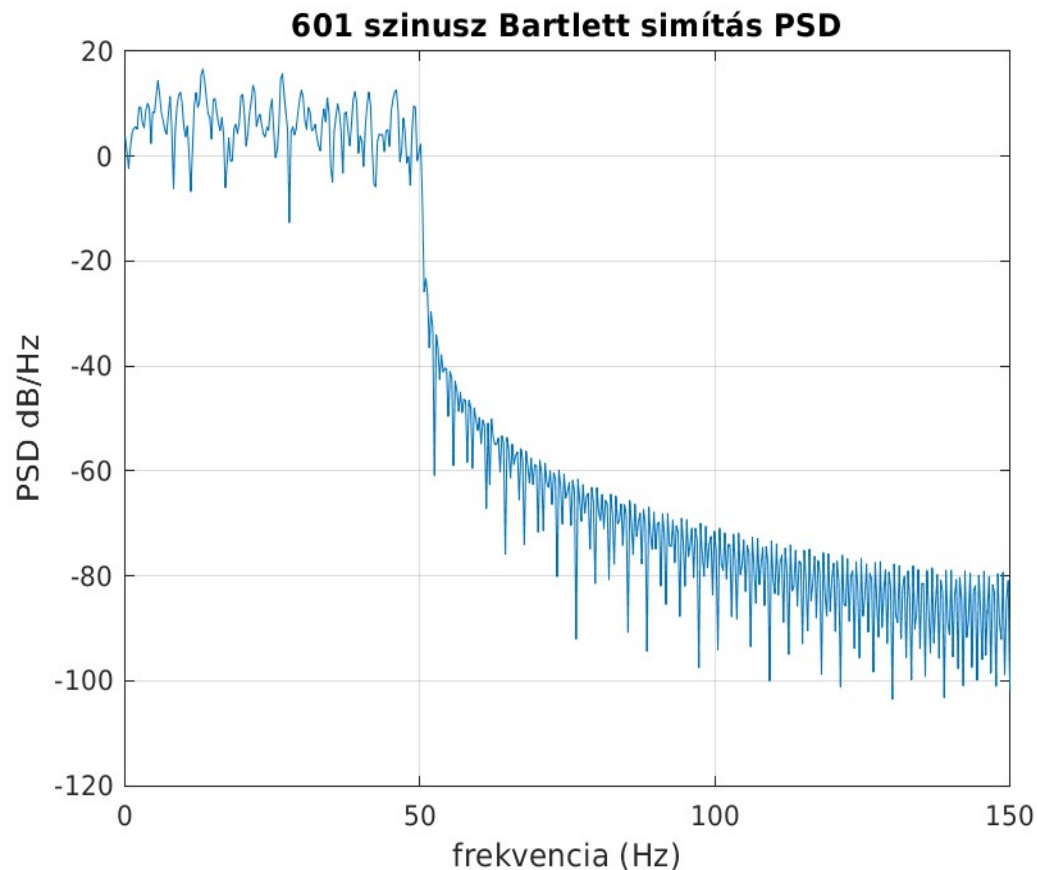
- a PSD becslés várható értéke:

$$E \left\{ \hat{S}_x(f) \right\} = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f') W(f' - f) df'$$

- ahol
$$W(f) = \frac{1}{N} \left| F \{ w(n) \} \right|^2$$

Bartlett (háromszög) simító függvény PSD becslés

```
% Periodogram PSD, Bartlett simítással  
figure(1);  
periodogram(xsi,bartlett(length(xsi)),[],ss);  
xlabel('frekvencia (Hz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz Bartlett simítás PSD');
```



Ortogonalis simítás (multitapering)

- A simító függvények túl kis súlyt adnak az idősor kezdetén és végén levő adatoknak

megoldás: *ortogonalis* simító függvény rendszer

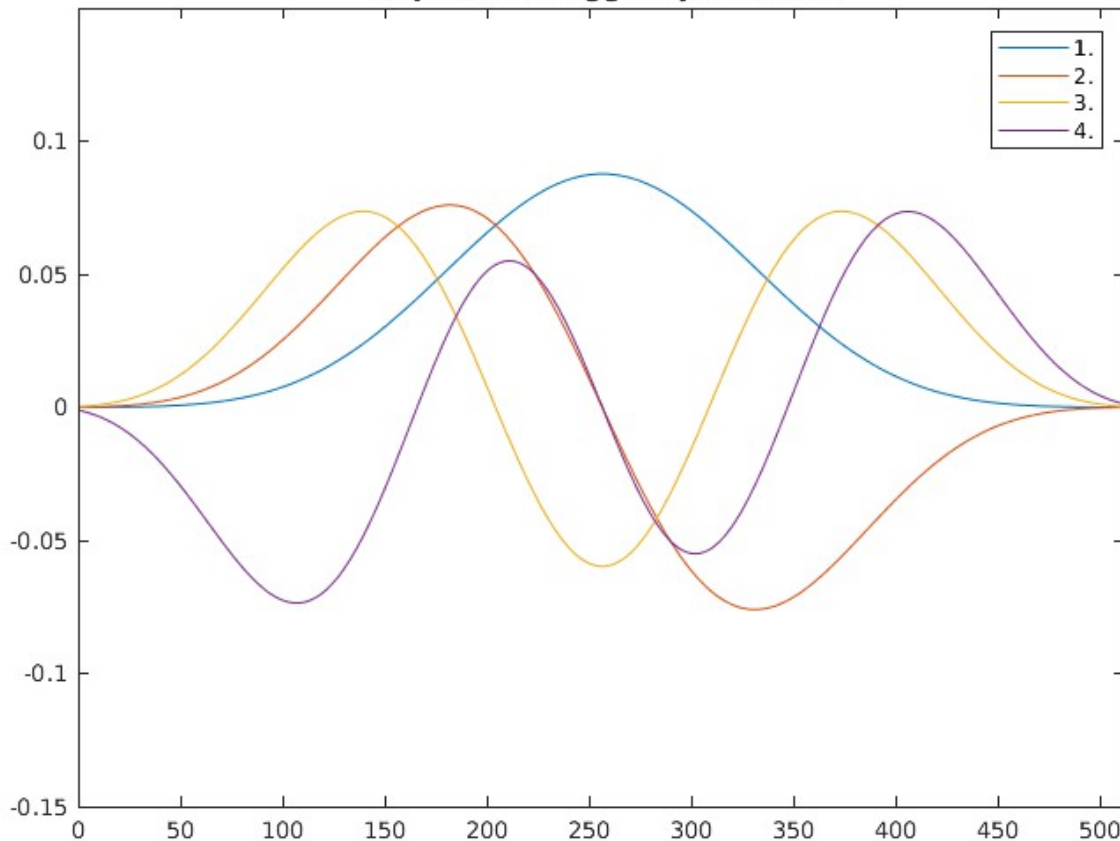
- az egyes simító függvényekkel súlyozott spektrumokat átlagoljuk
- A gyakorlatban alkalmazott ortogonalis függvénycsaládok:

Slepian-féle, nyújtott szferoidikus függvények (*DPSS*, Discrete Prolate Spheroidal Sequence)

minimális torzítású *szinuszos* simító függvények (Riedel és Sidorenko, 1995)

Slepián-féle simító függvények

Slepián-féle függvények MW=4



- A diszkrét DPSS függvények az alábbi szimmetrikus Toeplitz mátrix sajátvektorai

$$S[k, l] = \frac{\sin[2\pi W T(k-l)]}{\pi(k-l)}$$

$$k, l = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

- ahol M az elemek száma, W a levágási frekvencia (Hz) és T a mintavételi időköz (s)

maximális energia koncentrációjú vektor (sorozat)
egy megadott $[-W, W]$ frekvencia sávban

Octave (Matlab) program

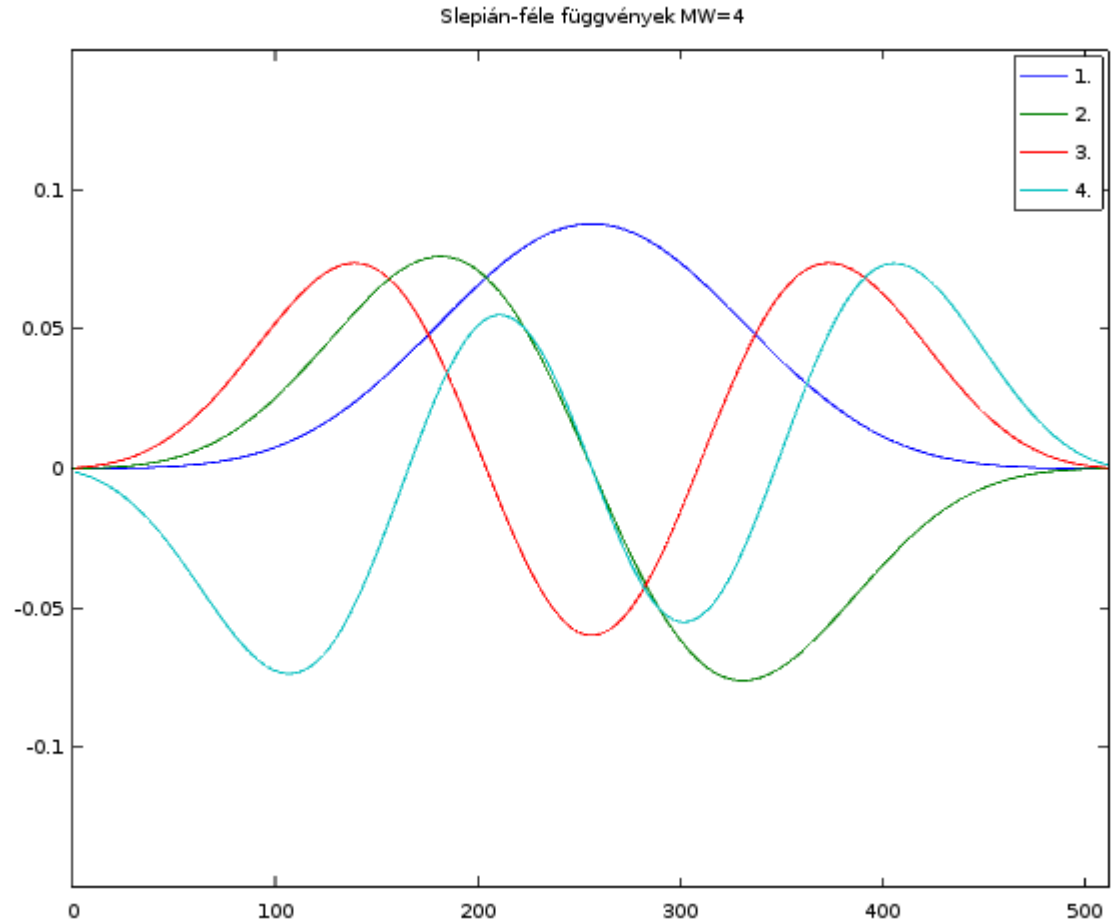
```
% Slepian-féle függvények számítása
M = 512;
NW = 4;
W = NW/M;
w = dpssw(M,W);
plot(-w)
axis([0 512 -0.10 0.10])
title('Slepian-féle függvények MW=4')
axis([0 512 -0.15 0.15])
legend('1.', '2.', '3.', '4.')
```

```
function w = dpssw(M,W)
```

```
% DPSSW - M hosszúságú DPSS sorozat számítása
%      W levágási frekvenciához
```

```
k = (1:M-1);
s = sin(2*pi*W*k)./(pi*k);
c0 = [W,s];
A = toeplitz(c0);
[V,D] = eigs(A,4); % a 4 legnagyobb sajátérték
w = V;
```

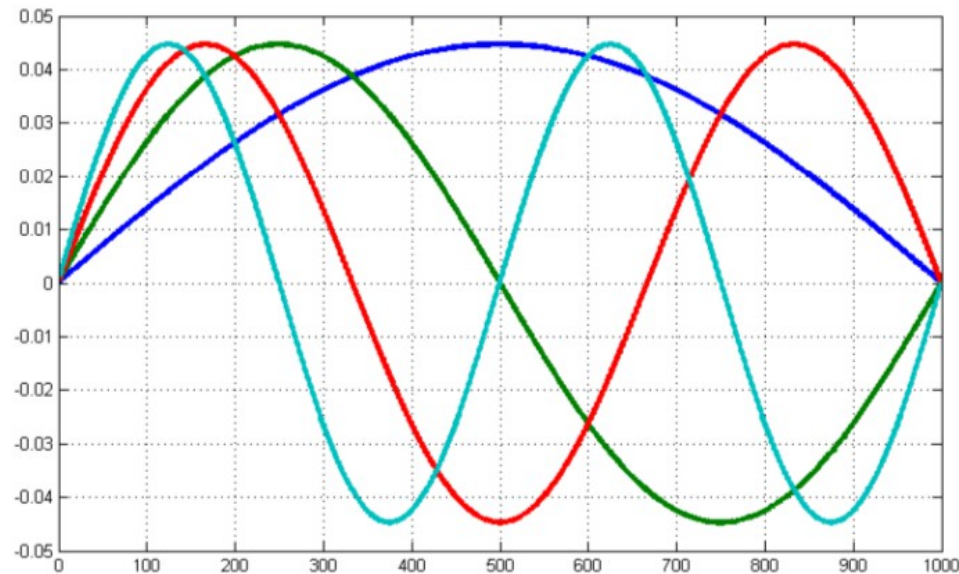
$$S[k, l] = \frac{\sin[2\pi W T(k-l)]}{\pi(k-l)}$$



Szinuszos simító függvények

- ortogonális szinuszos függvénycsalád:

$$v_k(N; n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi(k+1)(n+1)}{N+1} \quad k, n = 0, 1, \dots, N-1$$



PSD becslése

- ortogonális szinuszos függvénycsalád:

$$v_k(N; n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi(k+1)(n+1)}{N+1} \quad k, n = 0, 1, \dots, N-1$$

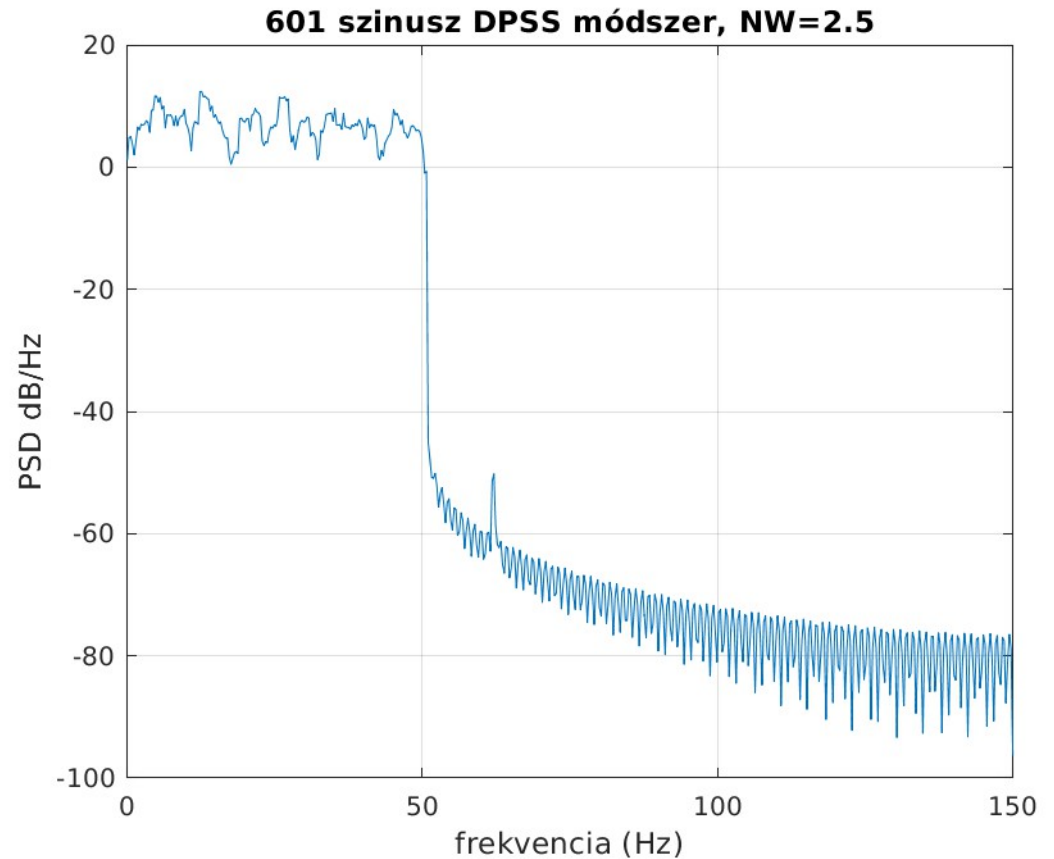
- multitaper PSD becslés:

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \mu_k \left| \sum_{n=0}^{N-1} v_k(N; n) x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2}{\sum_{k=0}^{K-1} \mu_k}$$
$$\mu_k = 1 - k^2 / K^2$$

- ahol

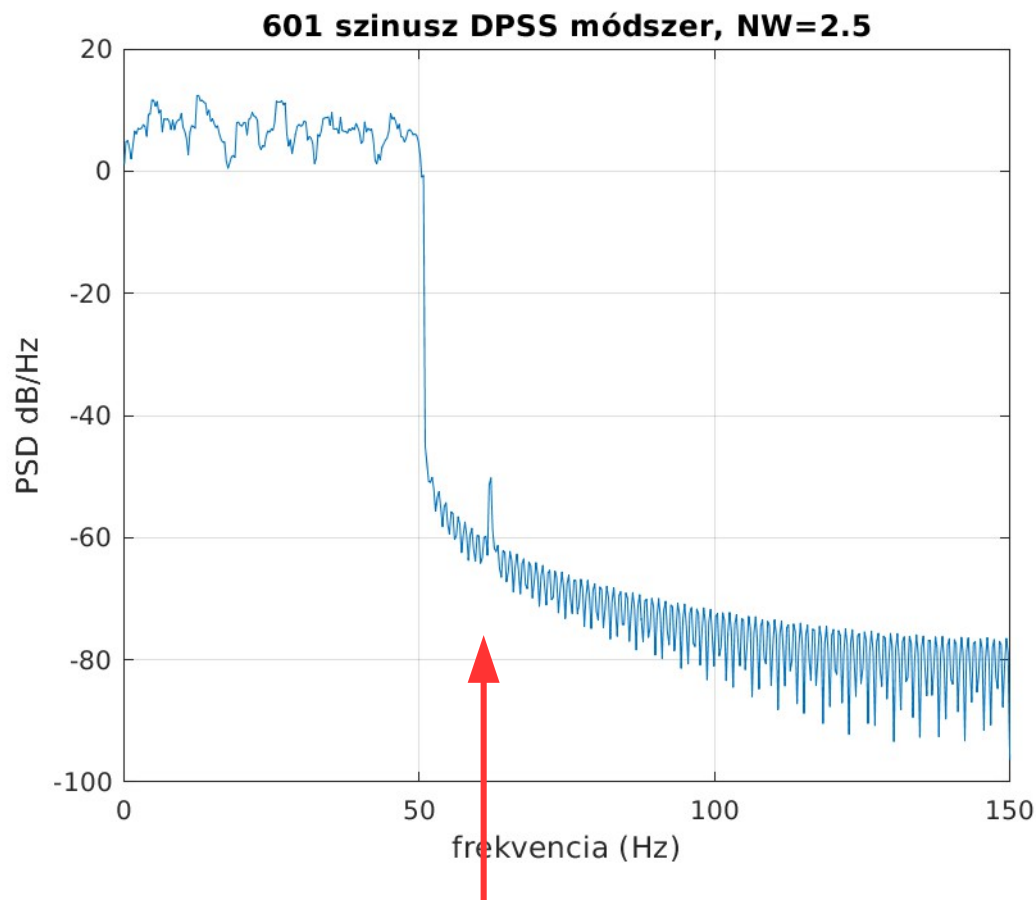
DPSS multitaper PSD becslés

```
% Thomson multitaper módszer PSD becslés  
figure(3)  
pmtm(xsi,2.5,[],ss);  
xlabel('frekvencia (Hz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz DPSS módszer, NW=2.5');
```



DPSS multitaper PSD becslés

```
% Thomson multitaper módszer PSD becslés
figure(3)
pmtm(xsi,2.5,[],ss);
xlabel('frekvencia (Hz)');
ylabel('PSD dB/Hz');
title('601 szinusz DPSS módszer, NW=2.5');
```



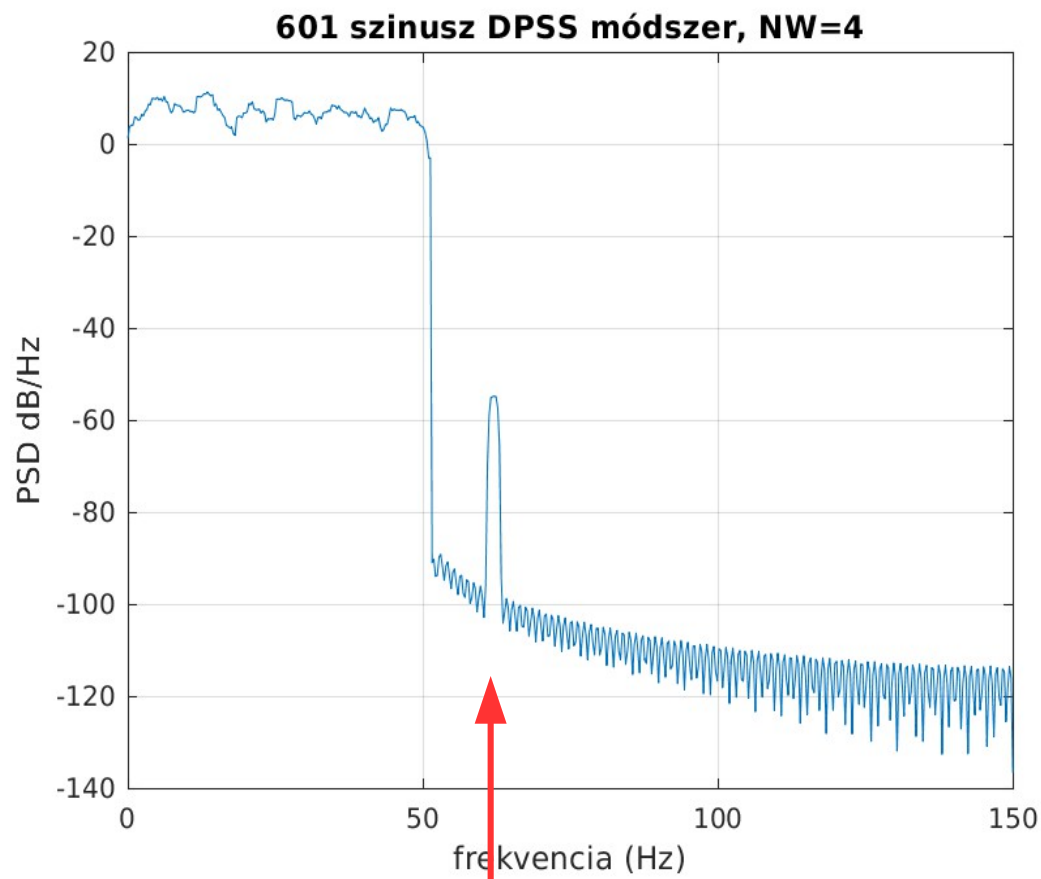
most már látható a **62 Hz**-es gyenge szinuszos jel a PSD-ben!

DPSS multitaper PSD becslés

```
%% Thomson multitaper módszer PSD becslés
NW = 4
figure(3)
pmtm(xsi,Nw,[],ss);
xlabel('frekvencia (Hz)');
ylabel('PSD dB/Hz');
title('601 szinusz DPSS módszer, NW=4');
```

Az NW idő – fél sávszélesség szorzat adja meg a multitaper becslés frekvencia felbontását.

A PSD becsléshez a pmtm eljárás $2NW-1$ simító függvényt használ.



még jobban látható a **62 Hz**-es gyenge szinuszos jel a PSD-ben!

Tananyag, szakirodalom

- Detrekői 2.5, 3.7
- Pap Gy., Szűcs G. (2013): Sztochasztikus folyamatok. Tankönyvtár
- Pintér József (2007): A spektrálanalízisről. Statisztikai Szemle, 85(2), 130-156.
- Percival, D. B., and A. T. Walden. Spectral Analysis for Physical Applications. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993.