



6. előadás

Kiegyenlítő számítások MSc

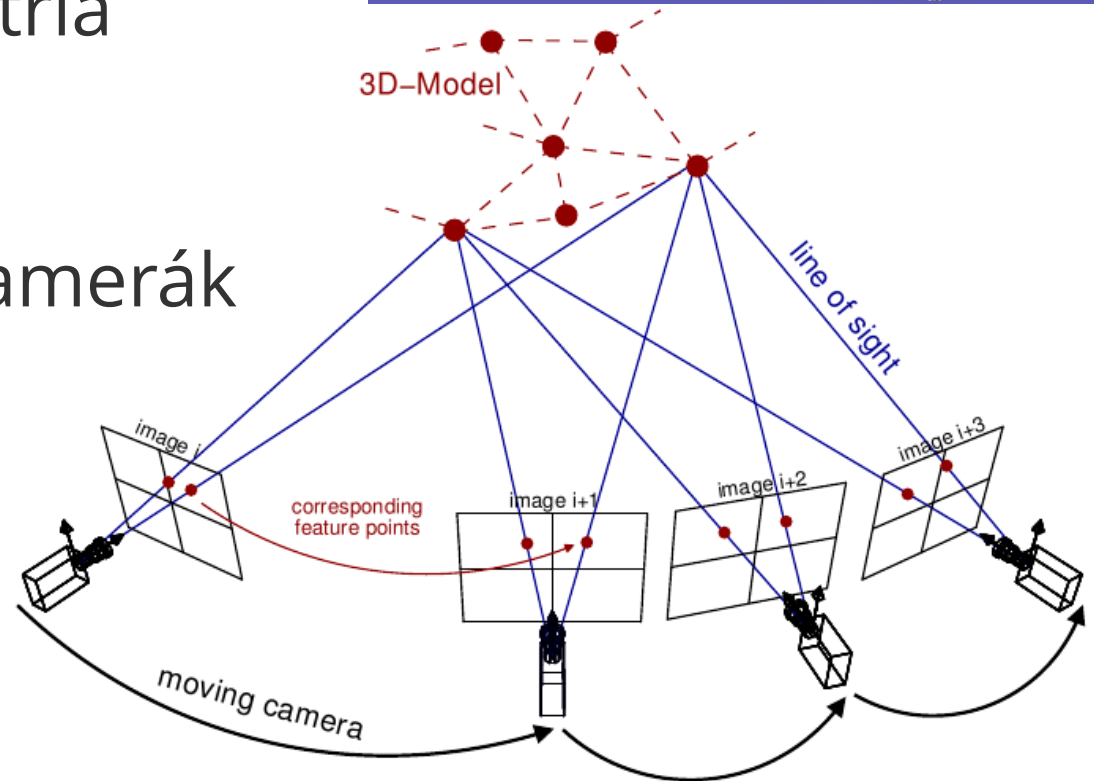
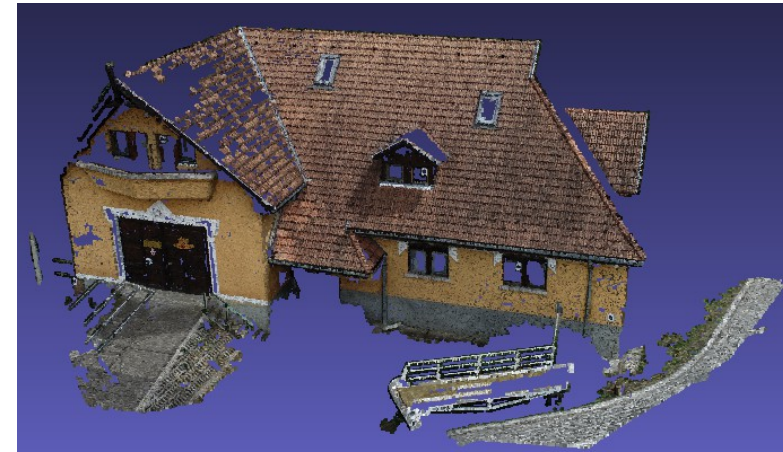
2018/19


Áttekintés

- Fotogrammetriai kiegyenlítés modellje
Tárgytér és képtér kapcsolata
- Direkt lineáris transzformáció (DLT)
szinguláris érték felbontás (SVD)
- Fotogrammetriai sugárnyaláb kiegyenlítés
Durva hibák szűrése: „data snooping”
Nagy méretű lineáris egyenletrendszer
megoldása: konjugált gradiens módszer (CG, PCG)

Automatizált fotogrammetriai feldolgozás

- SfM – Structure from Motion
 - UAV fotogrammetria
- Épületek felmérése
 - drónos és földi kamerák





Fotogrammetriai kiegyenlítés modellje

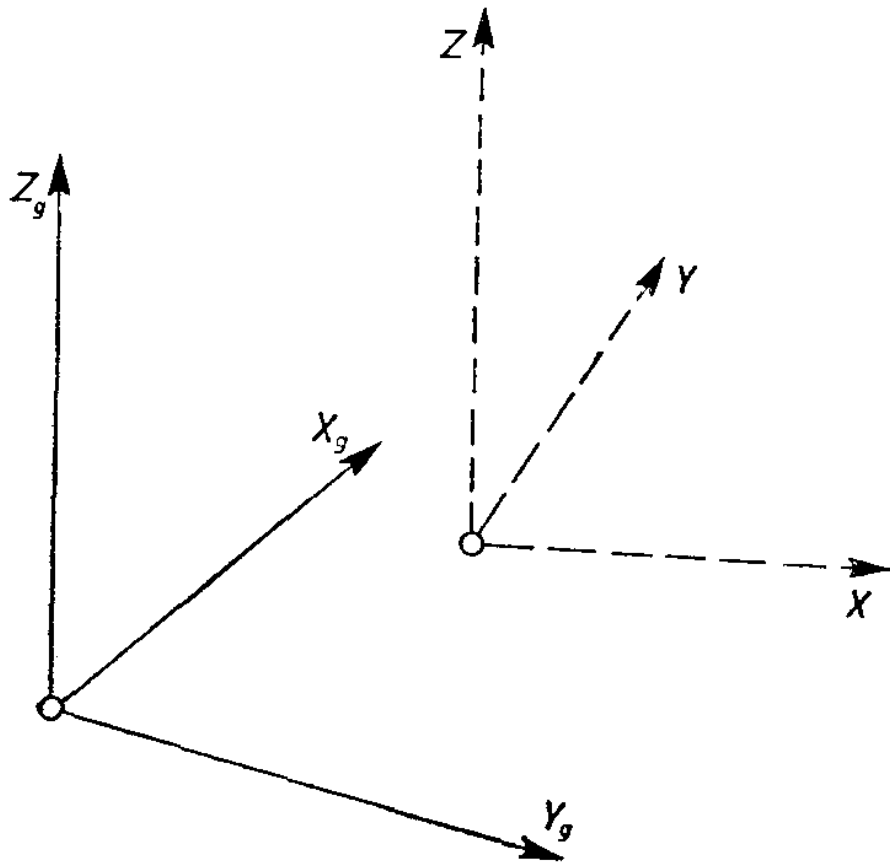
- Koordináta-rendszerek
- Belső tájékozási elemek
- Tárgytér és képtér kapcsolata



Koordináta-rendszerek

- geodéziai koordináta-rendszer
- tárgytér koordináta-rendszere
- képtér koordináta-rendszere

Geodéziai koordináta rendszer és a tárgyter koordináta-rendszere

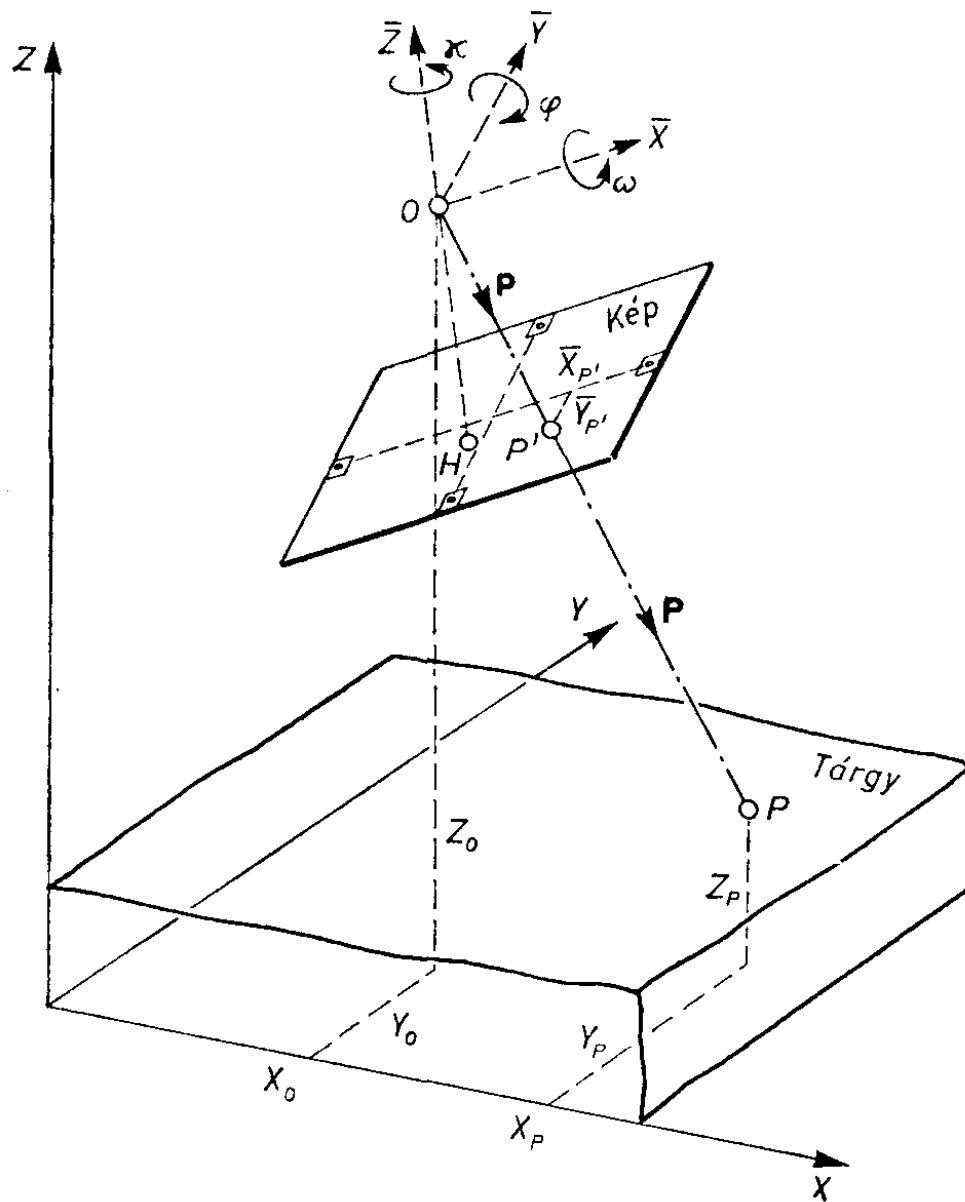


- kapcsolatuk: 2D síkbeli hasonlósági transzformációval és Z irányú eltolással

$$\begin{pmatrix} X_{gP} \\ Y_{gP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{gK} \\ Y_{gK} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_P \\ X_P \end{pmatrix}$$

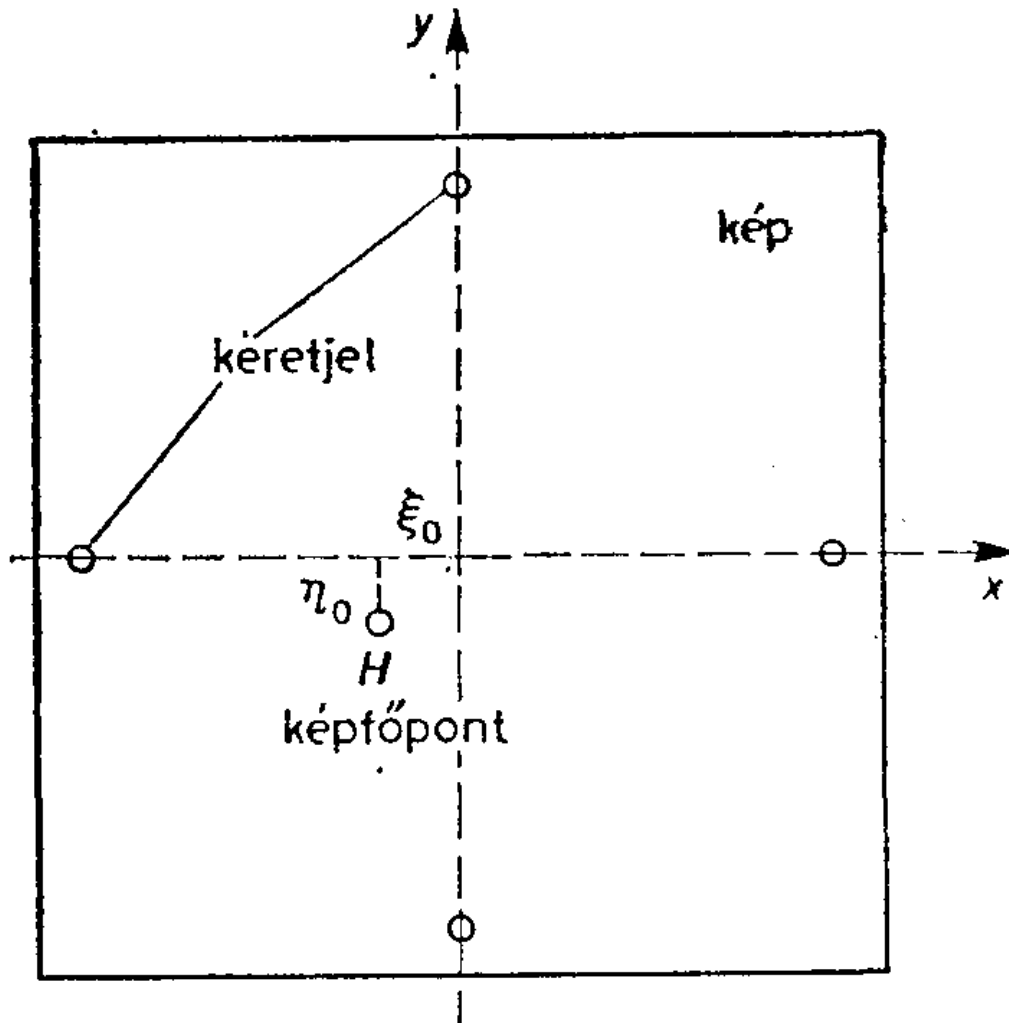
$$\begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{gP} - X_{gK} \\ Y_{gP} - Y_{gK} \end{pmatrix}$$

A tárgyter és képtér koordináta- rendszere



- ω, φ, κ forgatási szögek
- O vetítési középpont X_0, Y_0, Z_0 koordinátái
- külső tájékozási elemek

Belső tájékozási elemek



- H képfőpont koordinátái (ξ_0, η_0)
- $c = z$ képsík pontjainak z koordinátája
- (ξ_0, η_0, c) : belső tájékozási elemek

Tárgytér és képtér kapcsolata

- kapcsolat a tárgy- és képkoordináták között

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{P'} - \xi_0 \\ \bar{Y}_{P'} - \eta_0 \\ -c \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P - X_0 \\ Y_P - Y_0 \\ Z_P - Z_0 \end{bmatrix}$$

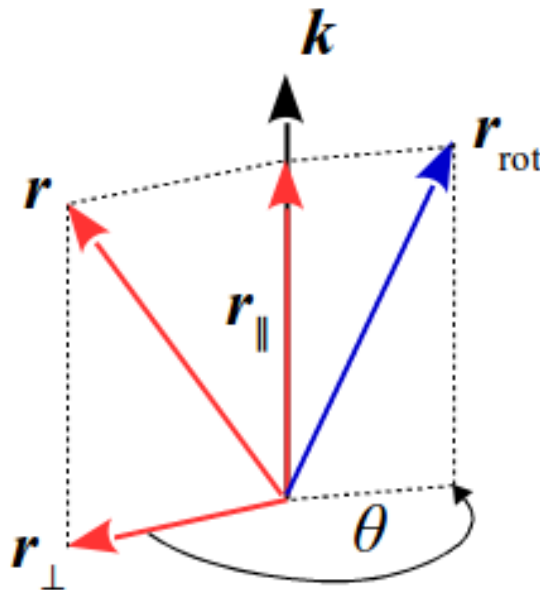
- forgatási mátrix

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ -\cos \varphi \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ \sin \varphi & -\sin \omega \cos \varphi & \cos \omega \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Másik lehetőség: Rodrigues forgatási képlete

- \mathbf{k} forgástengely irányú egységvektor
- θ forgatási szög
- \mathbf{r} vektor elforgatása:

$$\mathbf{r}_{\text{rot}} = \mathbf{r} \cos \theta + (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \sin \theta + \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) (1 - \cos \theta)$$



Tárgytér és képtér kapcsolata

- P tárgytérbeli és P' képkoordinátáinak a kapcsolata a k méretarány tényező kiküszöbölése után:

$$\bar{X}_{P'} = \xi_0 - c \frac{r_{11}(X_P - X_0) + r_{21}(Y_P - Y_0) + r_{31}(Z_P - Z_0)}{r_{13}(X_P - X_0) + r_{23}(Y_P - Y_0) + r_{33}(Z_P - Z_0)} = \xi_0 - c \frac{S_{XP}}{N_P}$$

$$\bar{Y}_{P'} = \eta_0 - c \frac{r_{12}(X_P - X_0) + r_{22}(Y_P - Y_0) + r_{32}(Z_P - Z_0)}{r_{13}(X_P - X_0) + r_{23}(Y_P - Y_0) + r_{33}(Z_P - Z_0)} = \eta_0 - c \frac{S_{YP}}{N_P}$$

- külső tájékozás, j -edik kép $X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j}, \omega_j, \varphi_j, \kappa_j$
- tárgypontr koordinátái X_h, Y_h, Z_h

Tárgytér és képtér kapcsolata

- A tárgykoordinátákat $P(x, y, z)$ -vel, a képkoordinátákat $P'(u, v, -d)$ -vel jelölve

$$u - u_0 = -d \frac{r_{11}(x - x_0) + r_{12}(y - y_0) + r_{13}(z - z_0)}{r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)}$$

$$v - v_0 = -d \frac{r_{21}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) + r_{23}(z - z_0)}{r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)}$$

- Az egyenletekben kigyűjtjük az x, y, z -t tartalmazó tagokat
→ *direkt lineáris transzformáció*

Direkt lineáris transzformáció (DLT)

$$u = \frac{L_1 x + L_2 y + L_3 z + L_4}{L_9 x + L_{10} y + L_{11} z + 1}$$

$$v = \frac{L_5 x + L_6 y + L_7 z + L_8}{L_9 x + L_{10} y + L_{11} z + 1}$$

- standard 3D DLT egyenletek

11 DLT paraméter: L_1, L_2, \dots, L_{11}

kibővíthetők további, pl. objektív elrajzolási paraméterekkel (L_{12}, \dots, L_{16})

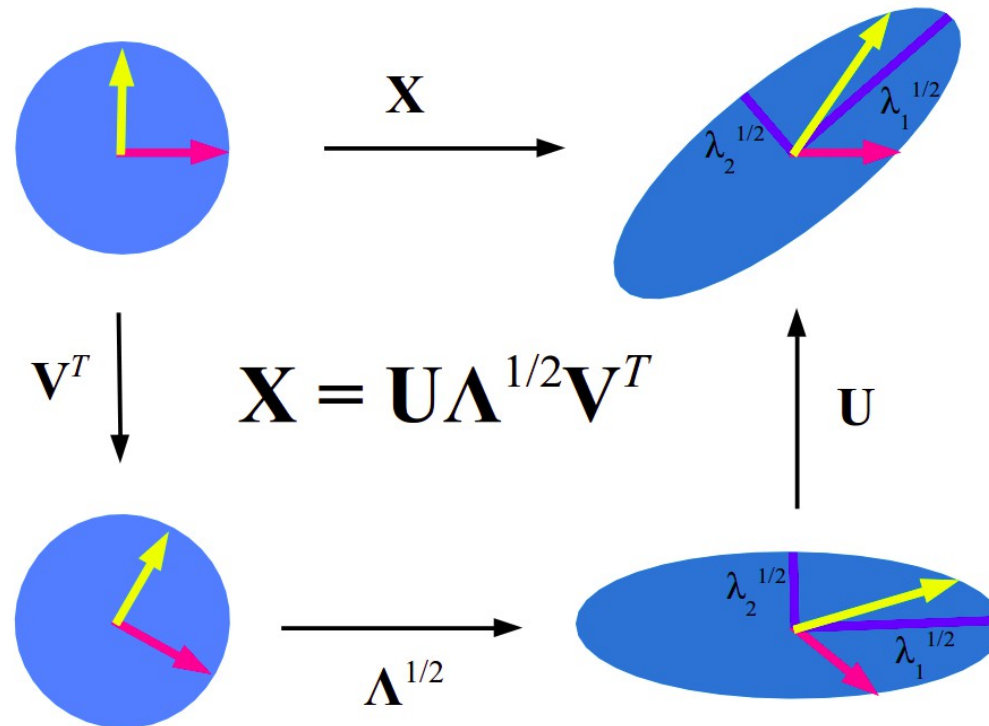
nem kalibrált kamerák felhasználhatók

Kamera kalibráció és tárgypont rekonstrukció DLT-vel

- kamera kalibrációhoz legalább 6 illesztőpont szükséges (a 11 L_1, \dots, L_{11} DLT paraméter meghatározásához)
- megoldás **SVD** eljárással
- durva hiba szűrés
- tárgypont rekonstrukció $m \geq 2$ kép alapján
- az L_1, \dots, L_{11} paraméterekből a hagyományos belső és külső tájékozási ismeretlenek is kiszámíthatók (az L_{12}, \dots, L_{16} paraméterekből az objektív elrajzolás)

Szinguláris érték felbontás (SVD, Singular Value Decomposition)

- a sajátérték-sajátvektor felbontás általánosítása téglalap alakú mátrixokra: forgatás (\mathbf{V}^T), skálázás ($\mathbf{\Lambda}^{1/2}$), forgatás (\mathbf{U}) műveletekre bontás



Kapcsolat sajátérték felbontással

- szimmetrikus \mathbf{A} mátrix felbontható ortogonális \mathbf{U} mátrixszal és a sajátértékekből álló átlós $\mathbf{\Lambda}$ mátrixszal

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$$

- tetszőleges $\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$ mátrixból kétféleképpen is szimmetrikus mátrixot készíthetünk: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ és $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$
- a szimmetrikus mátrixok felbonthatók sajátértékek szerint

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}^T$$

SVD felbontás

- Bármely r rangú \mathbf{X} mátrix felbontható ortogonális \mathbf{U} és \mathbf{V} mátrixokkal és a **szinguláris értékekből** álló átlós $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ mátrixszal

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \sqrt{\lambda_r} \end{bmatrix}$$

SVD felbontás két változata

$$\begin{matrix} \mathbf{X} \\ n \times m \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{U} \\ n \times n \end{matrix} \begin{matrix} \Lambda^{1/2} \\ n \times m \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{V}^T \\ m \times m \end{matrix}$$

||

$$\begin{matrix} \mathbf{X} \\ n \times m \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{U} \\ n \times r \end{matrix} \begin{matrix} \Lambda^{1/2} \\ r \times r \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{V}^T \\ r \times m \end{matrix}$$

SVD tulajdonságai

- a kétfajta sajátvektor rendszer egymásból számítható

$$\mathbf{U}_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \mathbf{X} \mathbf{V}_m \quad m = 1, \dots, r$$

SVD tulajdonságai

- a legjobb k -ad rangú közelítése \mathbf{X} -nek

$$\mathbf{X}_k = \sum_{m=1}^k \sqrt{\lambda_m} \mathbf{U}_m \mathbf{V}_m^T \quad k \leq r$$

- a közelítés négyzetes hibája

$$\varepsilon_k^2 = \sum_{m,n} |x(m,n) - x_k(m,n)|^2$$

$$\varepsilon_k^2 = \sum_{m=k+1}^r \lambda_m$$

Pszeudo inverz és SVD kapcsolata

- bármely téglalap alakú \mathbf{X} mátrixra létezik

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T$$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2+}_{(m,m)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1/2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r^{-1/2} & \vdots & 0 \\ \vdots & & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$

LKN paraméterbecslési probléma megoldása SVD-vel

- minimalizáljuk az alábbi hiba normát

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$$

- LKN megoldás \mathbf{x} -re az \mathbf{A} mátrix SVD felbontásával (pseudoinverz)

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$$

$\|\mathbf{x}\|_{\min}$ minimális normájú megoldás

LKN paraméterbecslési probléma megoldása SVD-vel

- minimalizáljuk az alábbi hiba normát

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$$

- LKN megoldás \mathbf{x} -re az \mathbf{A} mátrix SVD felbontásával (pseudoinverz)

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$$

$\|\mathbf{x}\|_{\min}$ minimális normájú megoldás

Súlyozott LKN probléma megoldása SVD-vel

- minimalizáljuk az alábbi hiba normát

$$(\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{y})$$

- LKN megoldás \mathbf{x} -re a $\mathbf{P}_0 \mathbf{A}$ mátrix SVD felbontásával,

$$\mathbf{P}_0^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{V}^T)^{-1} (\mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{\Lambda}^{1/2})^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y}$$

+

Numerikusan stabil megoldás,
ellentétben a hagyományos
normálegyenletekkel



Sugárnyaláb kiegyenlítés áttekintése

- előzetes kiegyenlítés
- funkcionális modell
- közvetítő egyenletek
- javítási egyenletek
- speciális esetek

Előzetes kiegyenlítés

- mérési eredmények: műszerkoordináták
- képkoordináták: síkbeli Helmert v. affin transzformációval
- korrekciók: objektívelrajzolás, refrakció, földgörcbületi hatás

Funkcionális modell

- kapcsolat a tárgy- és képkoordináták között

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{P'} - \xi_0 \\ \bar{Y}_{P'} - \eta_0 \\ -c \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_P - X_0 \\ Y_P - Y_0 \\ Z_P - Z_0 \end{bmatrix}$$

- forgatási mátrix

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \kappa & \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \phi \cos \kappa & \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \phi \cos \kappa \\ -\cos \phi \sin \kappa & \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \phi \sin \kappa & \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \phi \sin \kappa \\ \sin \phi & -\sin \omega \cos \phi & \cos \omega \cos \phi \end{bmatrix}$$

Közvetítő egyenletek

- P tárgyterbeli és P' képkoordinátáinak a kapcsolata = a sugárnyaláb kiegyenlítés közvetítő egyenletei:

$$\bar{X}_{P'} = \xi_0 - c \frac{r_{11}(X_P - X_0) + r_{21}(Y_P - Y_0) + r_{31}(Z_P - Z_0)}{r_{13}(X_P - X_0) + r_{23}(Y_P - Y_0) + r_{33}(Z_P - Z_0)} = \xi_0 - c \frac{S_{XP}}{N_P}$$

$$\bar{Y}_{P'} = \eta_0 - c \frac{r_{12}(X_P - X_0) + r_{22}(Y_P - Y_0) + r_{32}(Z_P - Z_0)}{r_{13}(X_P - X_0) + r_{23}(Y_P - Y_0) + r_{33}(Z_P - Z_0)} = \eta_0 - c \frac{S_{YP}}{N_P}$$

- 9 paraméter
- külső tájékozás, j -edik kép $X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j}, \omega_j, \phi_j, \kappa_j$
- tárgypontr koordinátái X_h, Y_h, Z_h

Javítási egyenletek

- $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l}$
- sorbafejtéssel linearizáljuk
- a paraméterek célszerű csoportosítása:

1. kép

$$X_{01}, Y_{01}, Z_{01}, \omega_1, \varphi_1, K_1$$

1. új pont

$$X_1, Y_1, Z_1$$

s. kép

$$X_{0s}, Y_{0s}, Z_{0s}, \omega_s, \varphi_s, K_s$$

r. új pont

$$X_r, Y_r, Z_r$$

A sugárnyaláb-kiegyenlítés speciális esetei

- térbeli hátrametszés ($s = 1, r \geq 3$)
- térbeli előmetszés ($s = 2$, ismert külső tájékozású képen t számú ismeretlen pont meghatározása)
- térbeli kettős pontkapcsolás ($s = 2$ kép $2 \cdot 6 = 12$ ismeretlen külső tájékozási paramétereinek és t számú ismeretlen pontnak a meghatározása $r \geq 4$ számú illesztőpont kép- és tárgytérbeli koordinátái alapján)
- a képek belső tájékozása is meghatározandó, csak közelítőleg ismert

Különleges szempontok

- a sugárnyaláb-kiegyenlítés **iterációt** igénylő eljárás
- igen nagy méretű egyenletrendszer megoldása lehet szükséges
konjugált gradiens módszer
- minden iterációs lépésben **hibaszűrést** kell végezni
data-snooping eljárás
iteratív robusztus becsléssel (*RANSAC*)

Sugárnyaláb kiegyenlítés belső tájékozással együtt

- Meghatározandó pontok: $\mathbf{P} = (X, Y, Z)^T$
- Lefényképezzük különböző kamerákkal, melyek helyzetét, tájékozását és torzulásait kameránként 9 paraméter írja le: $\mathbf{R}, \mathbf{t}, f, k_1, k_2$
- Kimérjük a $\mathbf{p} = (x, y)^T$ képkoordinátákat
- Előzetes kamera paraméterek és mért pont koordináták ismertek
- Feladat: végleges pont koordináták és kamera paraméterek becslése

Funkcionális modell

- A felmért pontokat a képsíkokra vetítjük

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \mathbf{P} + \mathbf{t}$$

$$\mathbf{q} = - \begin{pmatrix} Q_x / Q_z \\ Q_y / Q_z \end{pmatrix}$$

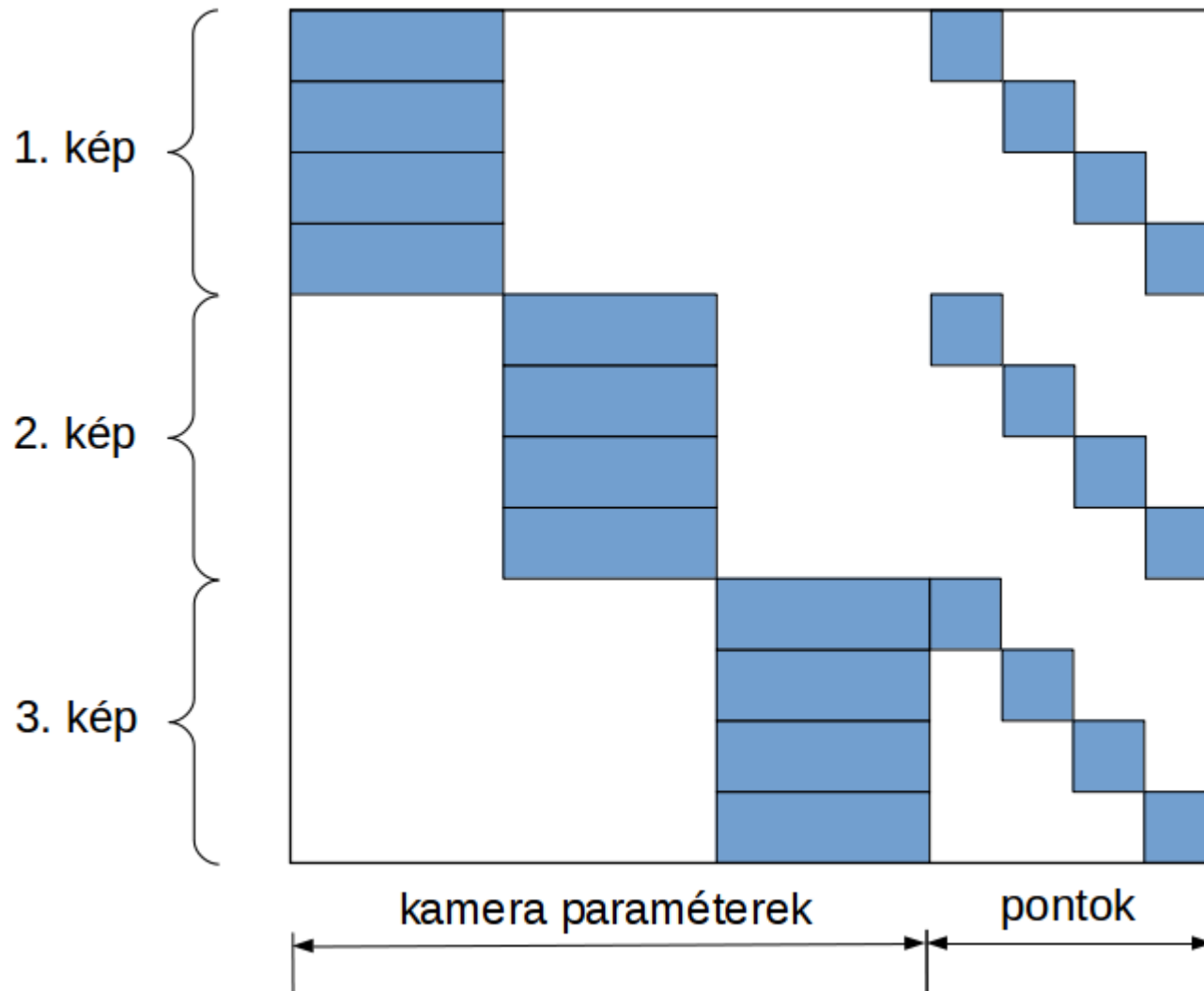
$$\bar{\mathbf{p}} = f (1 + k_1 \|\mathbf{q}\|^2 + k_2 \|\mathbf{q}\|^4) \mathbf{q}$$

- A mért és vetített koordináták eltéréseit LKN értelemben minimalizáljuk

$$\|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}\| \rightarrow \min$$

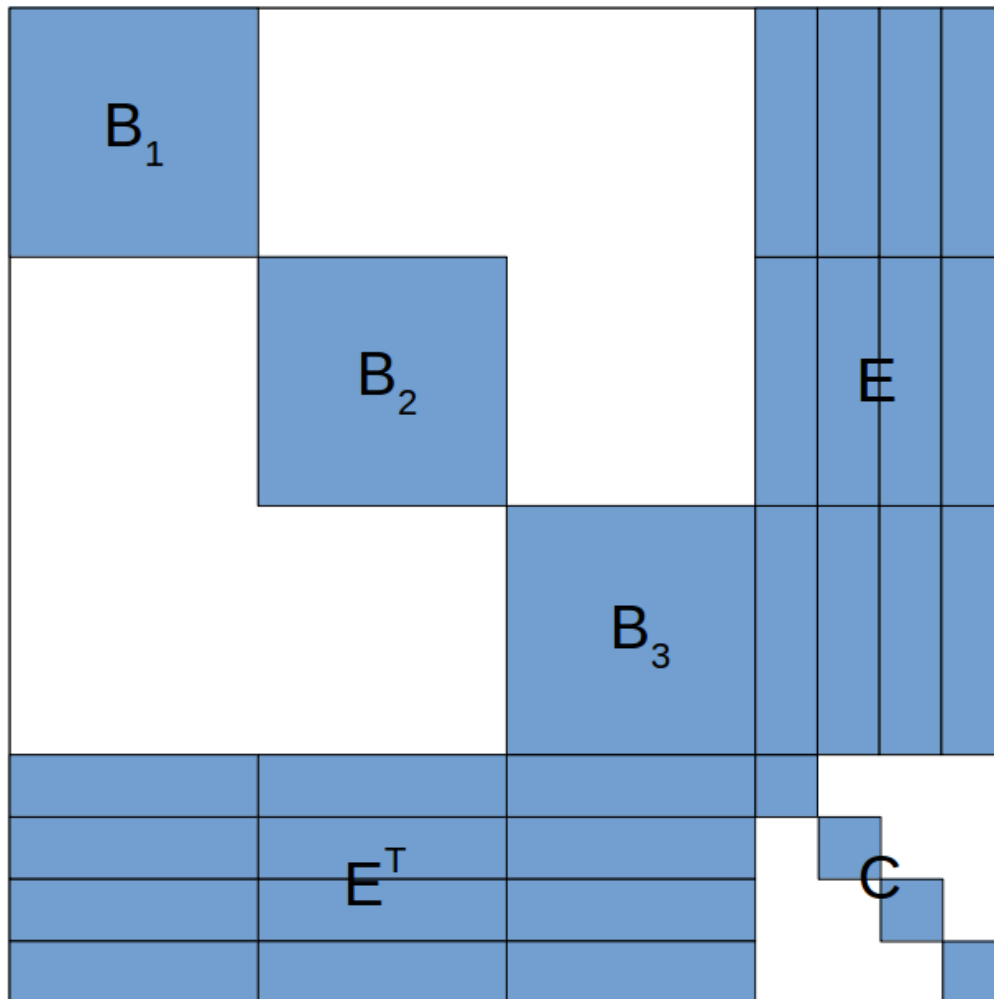
Alakmátrix (Jacobi mátrix)

- Szerkezete: ritka mátrix (pl. 3 kép, 4 pont)



Normálegyenletrendszer együtthatómátrixa (Hesse-mátrix)

- Szerkezete: ritka mátrix (3 kép, 4 pont)



$$H = \begin{bmatrix} B & E \\ E^T & C \end{bmatrix}$$

Sugárnyaláb kiegyenlítés: SfM feldolgozási példa

- LadyBug kamera teszt adatok

képek száma: 49 ($49 \cdot 9 = 441$ paraméter)

pontok száma: 7776 ($7776 \cdot 3 = 23328$ paraméter)

összes paraméter: 23769

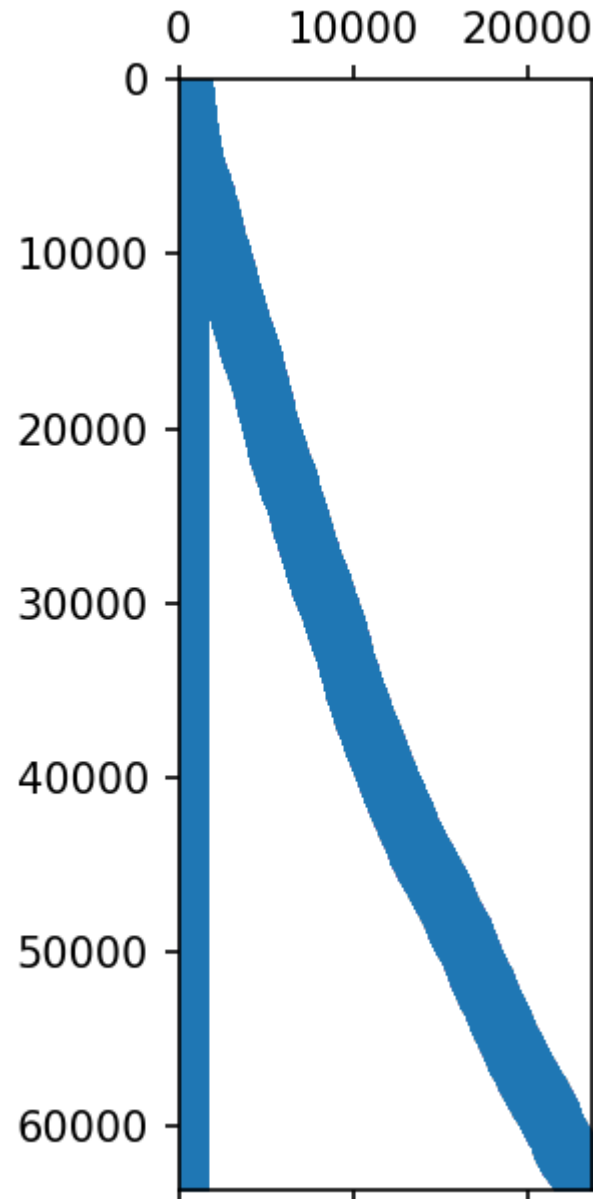
mérési javítások száma: 63686 (egy pont több képen is látszik)

Alakmátrix mérete: $23969 \cdot 63686 = 1\ 513\ 852\ 534$

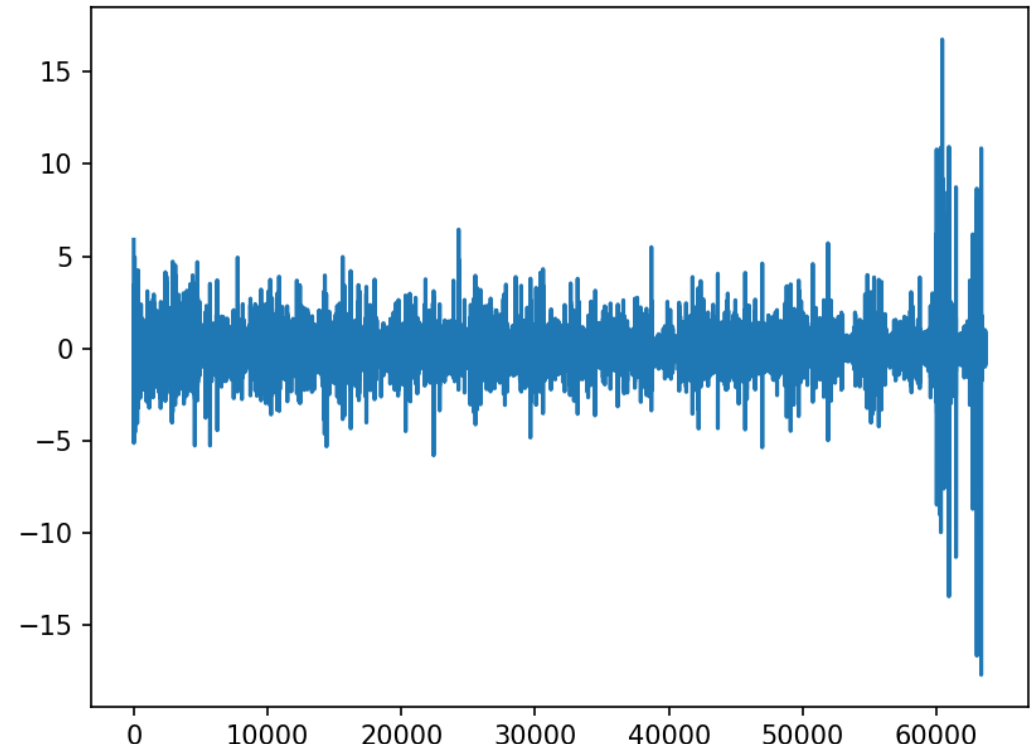
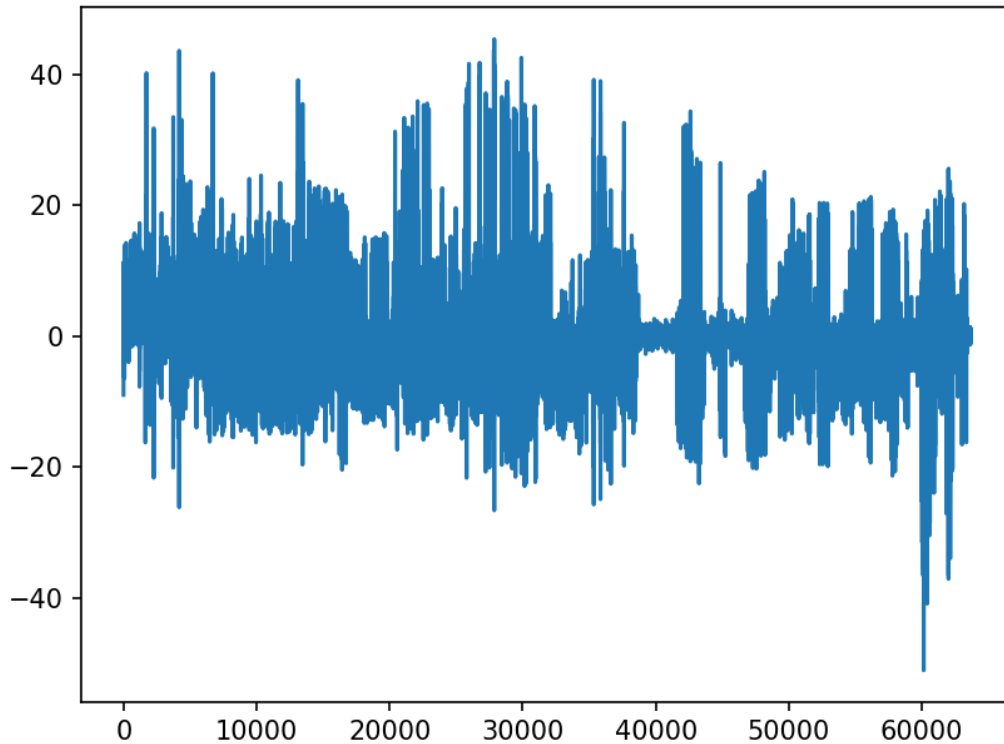
tárolás: ritka mátrix

megoldás: konjugált gradiens módszer

Alakmátrix nem zérus elemei



Javítások kezdetben és a kiegyenlítés után





Durva hibák kimutatása a kiegyenlítés eredményeinek statisztikai elemzésével

- valamennyi mért mennyiség *együttes* vizsgálatával
- a mérések *egyenkénti* vizsgálatával („data snooping”)

Valamennyi mért mennyiség együttes vizsgálata

- a súlyegység m_0 (*a posteriori*) középhibája segítségével történik
- m_0 a \mathbf{P} súlyok számításához használt c arányossági tényező becslésének tekinthető
- μ_0 *a priori* súlyegység középhibával való azonosságát vizsgáljuk

A súlyegység középhibája

- μ (becsült) mérési középhiba
- p súly (kiegyenlítés előtt)

$$p = \frac{c^2}{\mu^2}$$

c a súlyegység *a priori* középhibája

- kiegyenlítés után m_0 *a posteriori* középhiba

$$m_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i v^2}{n-1}$$

Lehetséges nullhipotézisek és alternatívák

a)

$$H_0: c^2 = \mu_0^2$$

$$H_a: c^2 > \mu_0^2$$

b)

$$H_0: \frac{c^2}{\mu_0^2} = 1$$

$$H_a: c^2 > \mu_0^2$$

Statisztika, döntések

a)

nincs durva hiba:

$$\bar{\chi}_f^2 = f \frac{m_0^2}{\mu_0^2} = \frac{\mathbf{v} * \mathbf{P}\mathbf{v}}{\mu_0^2}, \quad f = n - r$$
$$\bar{\chi}_f^2 < \bar{\chi}_{\alpha, f}^2 = \bar{\chi}_{1-p, f}^2$$

χ^2 eloszlás

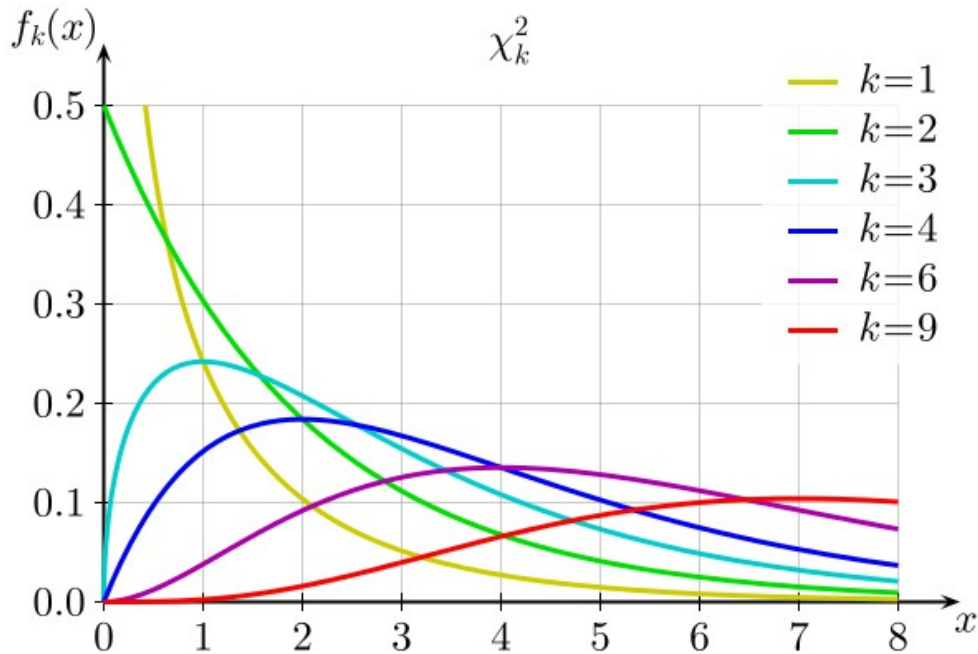
b)

nincs durva hiba:

$$\bar{F} = \frac{m_0^2}{\mu_0^2}$$
$$\bar{F} < \bar{F}_{\alpha, f, \infty} = \bar{F}_{1-p, f, \infty}, \quad f = n - r$$

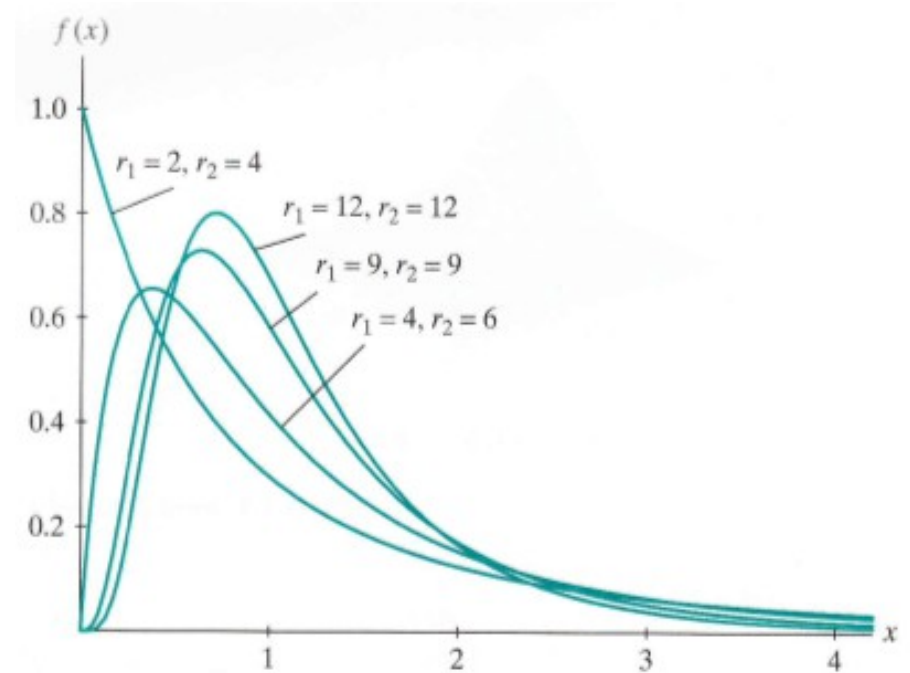
F-eloszlás

χ^2 és F eloszlás



$\chi^2(k)$ eloszlás

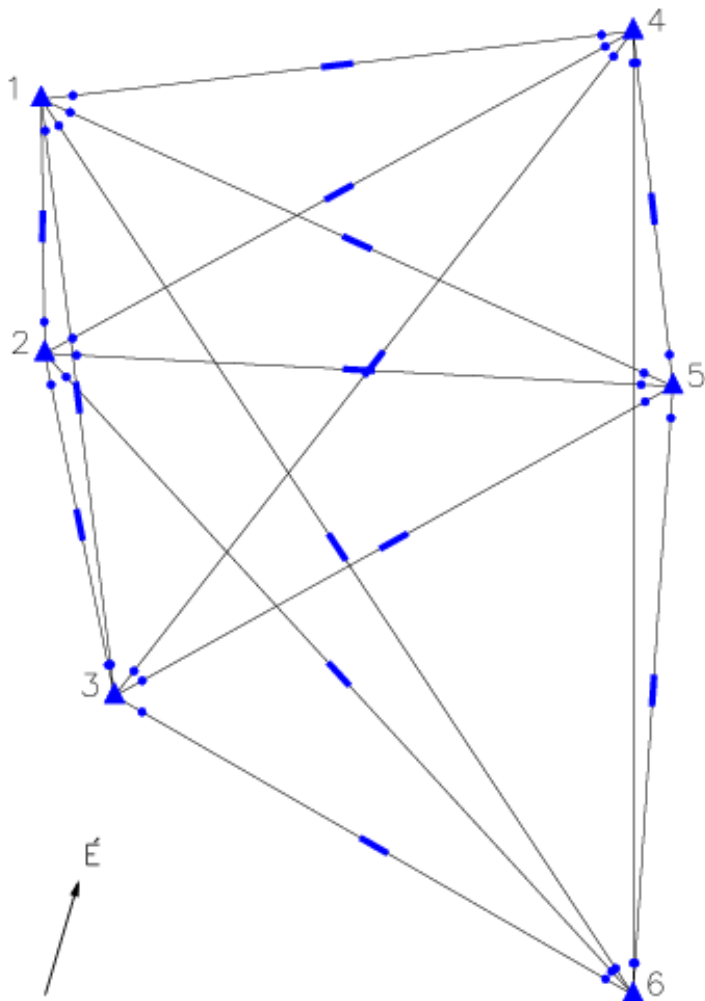
χ^2 - eloszlású a független normális eloszlású változók **négyzetösszege** (pl. mérési javítások négyzetösszege)



$F(r_1, r_2)$ eloszlás

F- eloszlású a normális eloszlású mintákból képzett **négyzetösszegek hányadosa**

Hipotézisvizsgálat: Sóskúti geodéziai hálózat



- 29 iránymérés
- 14 távmérés
- 43 mérés
- 28 fölösmérés ($f = 28$)

$$\mu_0 = 1.000$$

$$m_0 = 1.022$$

$$\bar{\chi}_f^2 = f \frac{m_0^2}{\mu_0^2} = 29.24$$

Döntés a durva hiba jelenlétéről

$p = 0.95$ konfidenciaszinthez a χ^2 eloszlás táblázatából

$$\bar{\chi}_{0.95, 28}^2 = 41.3 \quad \text{és} \quad 29.24 < 41.3$$

az eltérés nem elég nagy ahhoz, hogy a hipotézist ezen a szinten elutasíthassuk

$p = 0.90$ konfidenciaszinthez a χ^2 eloszlás táblázatából

$$\bar{\chi}_{0.90, 28}^2 = 37.9 \quad \text{és} \quad 29.24 < 37.9$$

a hipotézist ismét nem utasíthatjuk el az eltérés alapján

2. táblázat

A χ^2 -eloszlás táblázata (folytatás)

szf	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,995
1	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	7,879
27	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	49,6
28	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	51,0
29	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	52,3

A mérések egyenkénti vizsgálata (‘data snooping’, Baarda, 1968)

- a mennyiség w_i standardizált javítása segítségével történik:
 - vagy a v javítás és a javítás m_{vi} szórásának (középhibájának) a hányadosa
 - vagy a v javítás és a javítás μ_{vi} szórásának (középhibájának) a hányadosa
- m_{vi} ill. μ_{vi} a \mathbf{Q}_{vv} súlykoefficiens mátrix főátlójában levő q_{vivi} elemekből és m_0 ill. μ_0 -ból számítható

$$m_{vi} = m_0 \sqrt{q_{vivi}} \quad \mu_{vi} = \mu_0 \sqrt{q_{vivi}} \quad w_i = \frac{v_i}{m_{vi}} \quad w_i = \frac{v_i}{\mu_{vi}}$$

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{LL} - \mathbf{Q}_{UU} = \mathbf{Q}_{LL} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{XX} \mathbf{A}^*$$

Statisztikai próba

nullhipotézis

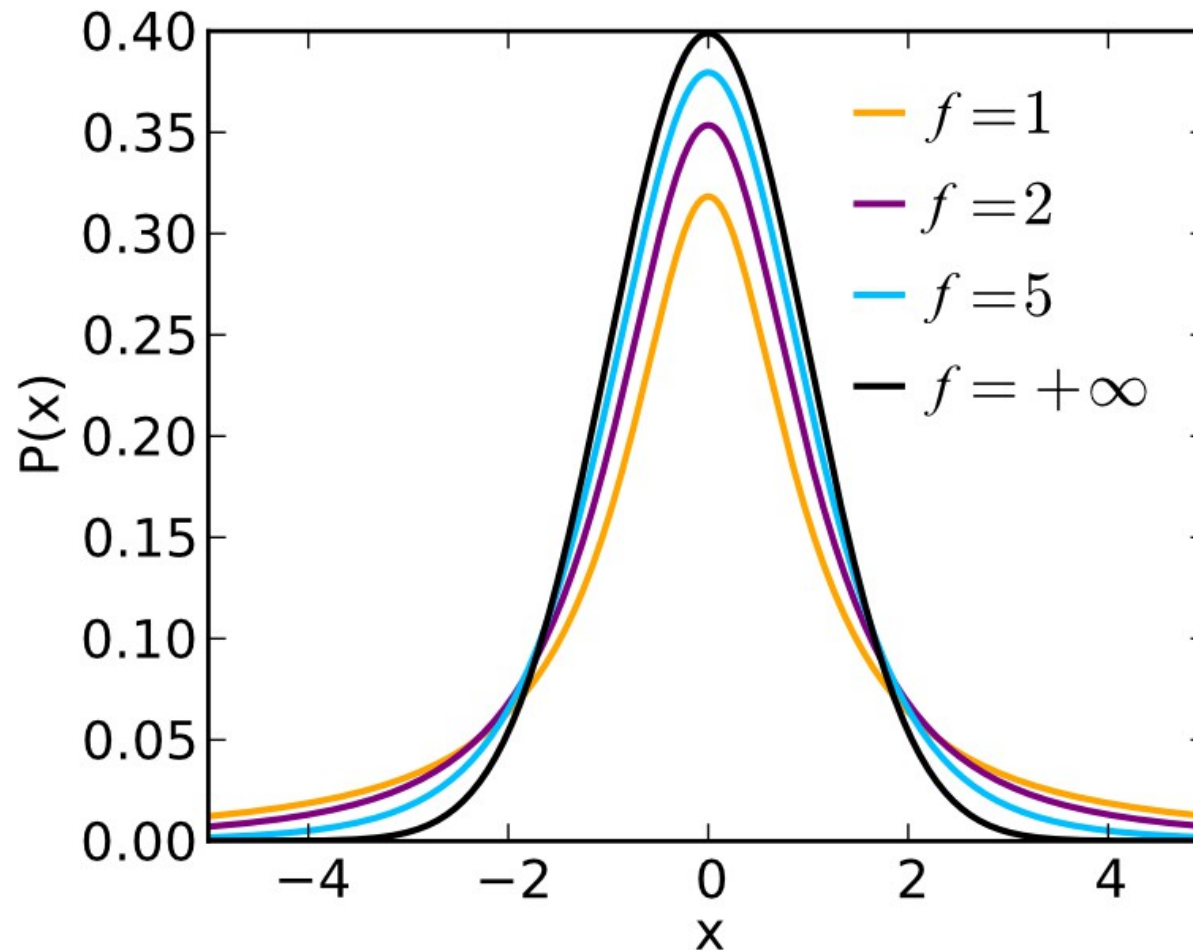
$$H_0: w_i = 0 \qquad H_a: w_i \neq 0$$

statisztika (Student t -eloszlás m_0 esetén, standard normális eloszlás μ_0 esetén)

$$|w_i| < t_{p, f}, \quad f = n - r \qquad |w_i| < u_p$$

p : konfidenciaszint f : szabadsági fok

Student t - eloszlás



$t(f)$ - eloszlású a normális eloszlású [minták átlagának](#) az empirikus szórással való [standardizáltja](#)

Data snooping példája: Sóskúti geodéziai hálózat

Az 1. ponton mért iránymérések standardizált javításai:

irányzott pont	v_i	w_i
3	1.989	2.292
4	-0.631	0.725
5	-0.705	0.804
6	-0.654	0.750

Excel INVERZ.T(1-0.95;28)

$$t_{0.95,28} = 2.048$$

2.292 > 2.048 kivágó érték

Konjugált gradiens módszer

- *Nagy méretű, ritka mátrixú* lineáris egyenletrendszerek gyakran alkalmazott, hatékony megoldási eljárása
- Variációs módszerek egyik fajtája
- Detrekői 12.3 is röviden ismerteti az eljárást

Konjugált gradiens módszer

- *Alapötlet:* megadunk egy többváltozós függvényt, amelynek *globális minimumhelye* az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldása
 - az együtthatómátrix szimmetrikus: $A = A^T$
 - az együtthatómátrix pozitív definit: $x^T Ax > 0$ bármely nem zérus $x \neq 0$ vektorra
- véges lépésben pontos megoldást ad pontos aritmetikával
 - elvileg direkt, gyakorlatban iterációs módszer
 - konvergencia sebessége a sajátértékektől függ:
prekondicionálás (PCG)

Konjugált gradiens módszer

- minimalizálandó többváltozós kvadratikus függvény

$$\theta(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$$

- minimum helye és értéke

$$x^* = A^{-1} b$$

$$\theta(x^*) = -\frac{1}{2} b^T A^{-1} b$$

Gradiens és maradék vektor

- minimalizálandó függvény gradiense

$$\nabla (\theta(x)) = Ax - b$$

- maradék vektor (azonos a negatív gradienssel)

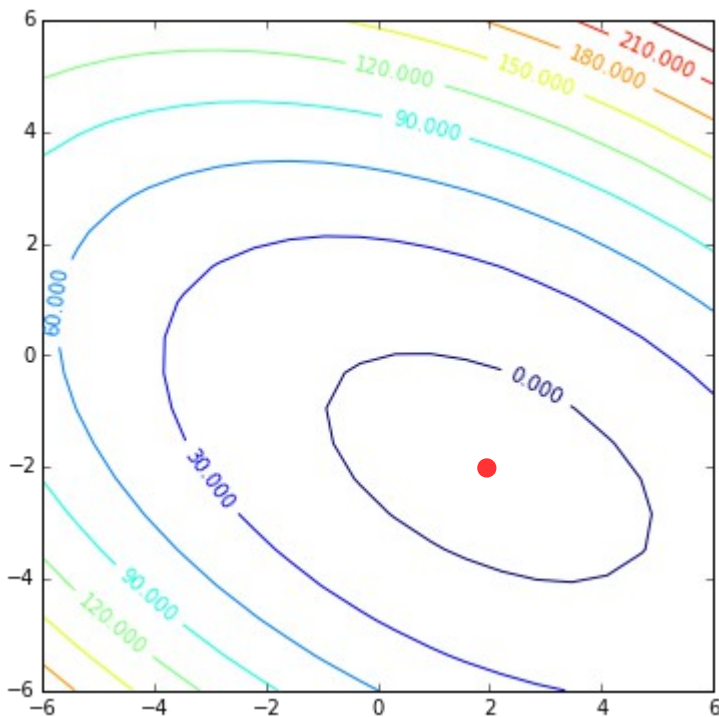
$$r = b - Ax = -\nabla \theta(x)$$

Lineáris egyenletrendszer - példa

- az egyenletrendszer és megoldása

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

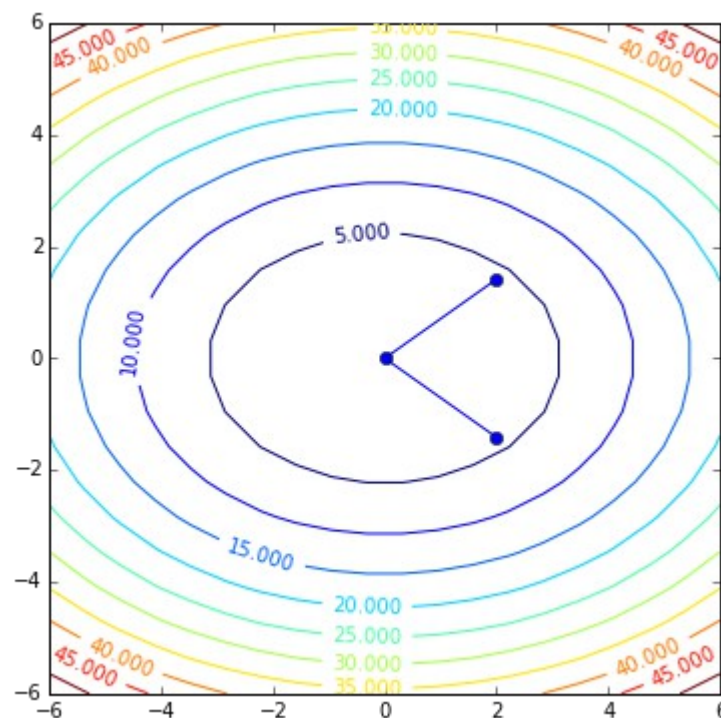
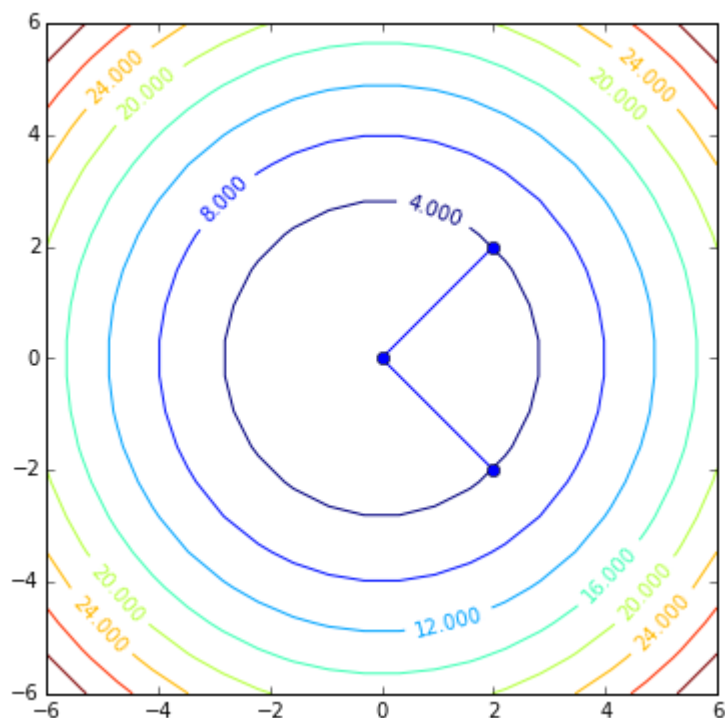
- a $\theta(x)$ kvadratikus alak szintvonalas ábrája



- általános esetben $\theta(x)$ ábrája koncentrikus hiperellipszoidokból álló izofelületeket tartalmaz

Konjugált irányok

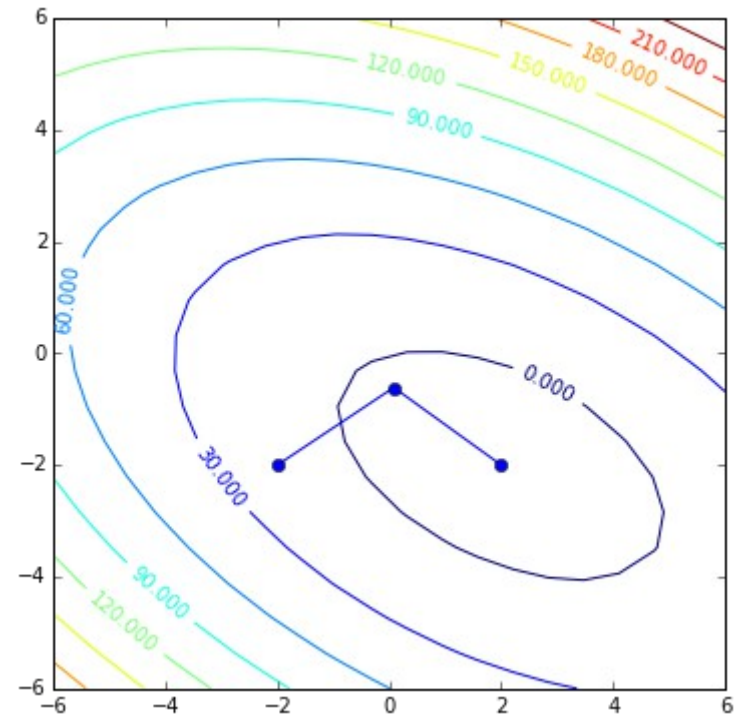
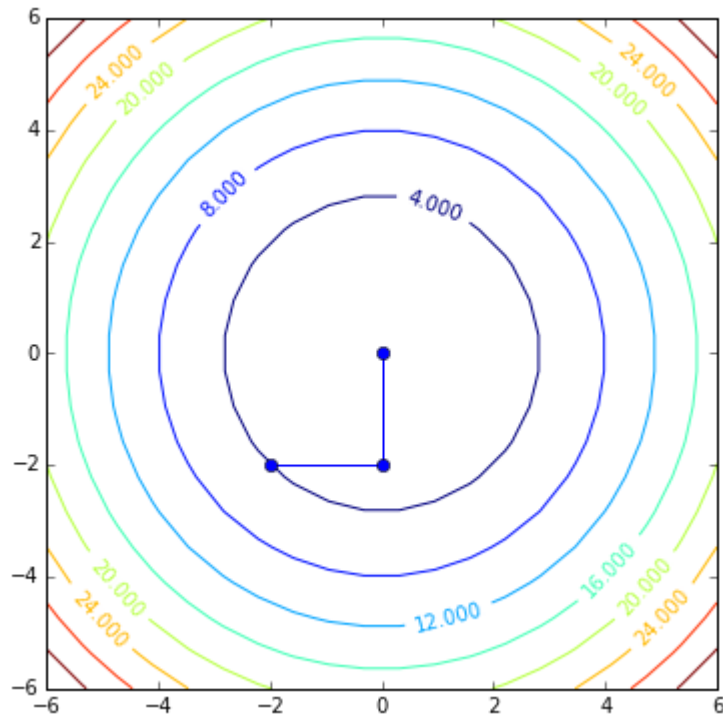
- egymásra „merőleges” irányok, zsugorítás után



- a és b A -konjugáltak, ha $a^T A b = 0$

Iteráció konjugált irányok mentén

- egymásra „merőleges” irányok mentén lépünk



- általános esetben n lépés alatt megkapjuk a megoldást, a hibavektorok irányába lépve

Néhány fotogrammetriai feldolgozó szoftver

- Eos PhotoModeller
(Standard, Scanner, UAS)
- 3DSOM
- Digicad 3D
- Pix4DMapper
- 3DSurvey
- Bundler
- COLMAP
- Regard3d
- MicMac (IGN)
- OpenDroneMap
- openMVG
- SBA (Sparse Bundle Adjustment)
- VisualSFM
- WebDLT (Molnár Bence)

Irodalom

- Detrekői 5.2.4, 9.5.3, 12.3
- Karl Kraus: Fotogrammetria. Tertia Kiadó, Budapest, 1998
- Hartley R, Zisserman A: Multiple View geometry in Computer Vision. Cambridge Univ. Press, 2003
- Faragó István, Horváth Róbert: Numerikus módszerek. Typotex, 2013