A nehézségi erőtér meghatározása inverziós módszerekkel

Fizikai geodézia és gravimetria

MSc

2018/19

Miről lesz szó?

- inverziós módszerek
  - a nehézségi erőtér paraméteres felbontása (bázisfüggvények, paraméterek)
  - LKN paraméterbecslés
  - az erőtér paraméteres szintézise

Az inverziós módszerek alapgondolata

- A nehézségi erőtér $W(x)$ potenciálfüggvényét alkalmas $B(x, x_k)$ bázisfüggvények segítségével a következő alakban írjuk fel:

$$W(x) = \sum_k c_k B(x, x_k)$$

a c_k-k egyelőre ismeretlen inverziós együtthatók, amelyeket inverzióval határozunk meg

Az inverziós együtthatók meghatározása

- *i*-vel jelölt mérési pontokban ismerjük a $W(x_i)$ potenciál értékét és az x_k pontok (bázispontok) helyzetét ismerve (túlhatározott) lineáris egyenletrendszert állíthatunk fel a c_k együtthatók kiszámítására (inverzió) és optimális becslést végzünk ($e(x_i)$ eltérések normája minimális)

$$W(x_i)+e(x_i)=\sum_k c_k B(x_i,x_k)$$

$$W \approx \mathbf{Bc}$$

Az inverziós együtthatók meghatározása

- ismeretlenek vektora: **c** = [c_1, c_2, …]
- a mérések vektora: **W** = [W(x$_1$), W(x$_2$), …]
- a bázisfüggvények mátrixa:

$$B=\begin{bmatrix} B\left(x_1,x_1\right) & B\left(x_1,x_2\right) & \cdots \\ B\left(x_2,x_1\right) & B\left(x_2,x_2\right) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\|e\|^2=\|\mathbf{Bc}-W\|^2=\min \qquad c=\left(B^T B\right)^{-1} B^T W$$

Szintézis

- A nehézségi erőtér $W(x)$ potenciálfüggvényét tetszőleges x helyen a $B(x, x_k)$ bázisfüggvények segítségével kiszámíthatjuk:

$$W(x) = \sum_k c_k B(x, x_k)$$

a c_k-k a meghatározott inverziós együtthatók

Az inverziós megoldások különböző szempontjai

- A bázisfüggvények megválasztása
  - gömbfüggvények (gömbi koordináták), speciálisan megválasztott függvények, pl. kovariancia függvény
  - két- ill. háromváltozós polinomok (síkkoordináták)
- Az együtthatók megválasztása
  - LKN kollokáció: pontbeli adatokhoz rendelt súlyok
  - gömbi radiális bázisfüggvények súlyai (SRBF)
- Az alappontok megválasztása
  - zérus helyzet (egy argumentum: $B(x)$)
  - speciális pontrendszer (pl. Reuter-rács), vagy adatpontok (LKN kollokáció), vagy maszkonok (tömegpontok)
  - optimális ponteloszlás becslése is az inverzió tárgya

Az inverziós megoldások különböző szempontjai

- A mérések megválasztása
  - potenciálkülönbségek (geopotenciális érték)
  - nehézségi rendellenességek
  - függővonal-elhajlás összetevők
  - Eötvös-tenzor elemei (második potenciál deriváltak)
- Az inverziós módszerek egyik nagy előnye, hogy bármilyen típusú mérést közvetlenül bevonhatunk a meghatározásba

Az inverziós módszerek előnyei

- Mindenfajta, nehézségi erőtérre vonatkozó mérés felhasználható
- Szabatos LKN kiegyenlítést végezhetünk a paraméterekre (inverziós együtthatókra)
  - az adatok összes hibajellemzőjét figyelembe vehetjük
  - a megoldás (becslés) az összes hibajellemzőt szolgáltatja az inverziós együtthatókra
  - az együtthatókból levezetett bármilyen további mennyiség hibajellemzőit is meghatározhatjuk hibaterjedéssel

Az inverziós módszerek hátrányai

- Gyakran nagyméretű egyenletrendszer megoldásához vezet (főleg az LKN kollokáció)
- Gyakran szükséges a megoldás regularizálása a megoldandó egyenletrendszer rosszul kondicionált volta miatt
  - a regularizációs paraméter gondos megválasztására van szükség
  - a megfelelő paraméter helyes választásától függ a jó megoldás elérése (pl. α paraméter a Tikhonov-féle regularizáció esetén):

$$c = \left(B^T B + \alpha I\right)^{-1} B^T W$$

Legkisebb négyzetes (LKN) kollokáció

- bázisfüggvény = kovariancia függvény
  - a kovariancia függvény illeszkedik az erőtér statisztikai szerkezetéhez (fokvarianciák)
- bázispontok = mérési pontok
  - a mérési pontok számával azonos számú ismeretlen együtthatót kell meghatározni (nagy a számításigény)
- nem mért pontokban becsüljük az erőtér valamely jellemzőjét: ez a LKN predikció
- probléma: a predikált erőtér kovariancia függvénye nem egyezik a felhasznált adatok kovariancia függvényével (= „megtagadja saját modelljét”)

Kovariancia függvény

- térben / felületen eloszló mennyiség (pl. Δ*g*) statisztikai jellemzésére szolgál: Δ*g*(*φ*, *λ*)
- Mi a Δ*g*-k átlagos nagysága ? (*σ* egységgömb, *M*{·} az átlagolás)

$$M\left\{\Delta g\right\} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma} \Delta g \; d\sigma = 0$$

  - ez a mérőszám nem jó

- a szórásnégyzet (**variancia**) már megfelelő:

$$\operatorname{var}\left\{\Delta g\right\} = M\left\{\Delta g^2\right\} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma} \Delta g^2 \; d\sigma$$

- variancia négyzetgyöke a **szórás**

$$\mathrm{rms}\{\Delta g\} = \sqrt{\mathrm{var}\{\Delta g\}} = \sqrt{M\{\Delta g^2\}}$$

  - pl. a teljes földfelszínre a Δ*g*-k szórása ±35 mGal
- a variancia fogalmának általánosítása a **kovariancia** (autokovariancia) **függvény** :
  - a Δ*g*·Δ*g'* szorzat átlagos értéke a P és P' pontok *r* távolsága függvényében

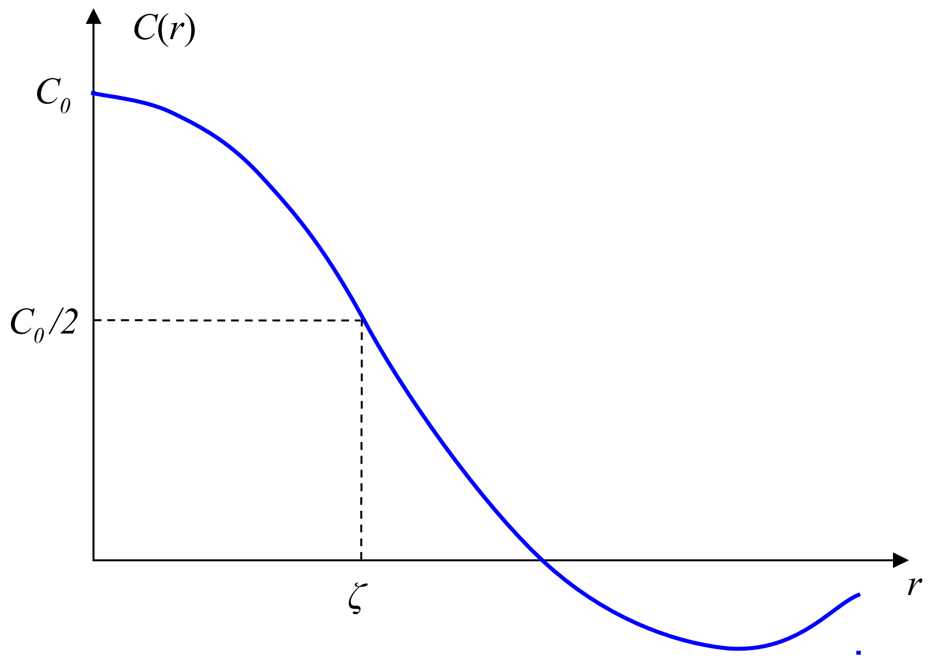
$$C^{\Delta g}(r) = \mathrm{cov}_r\{\Delta g\} = M\{\Delta g \cdot \Delta g'\}_{r=PP'}$$

  - az *r* = 0 értékű kovariancia a variancia:

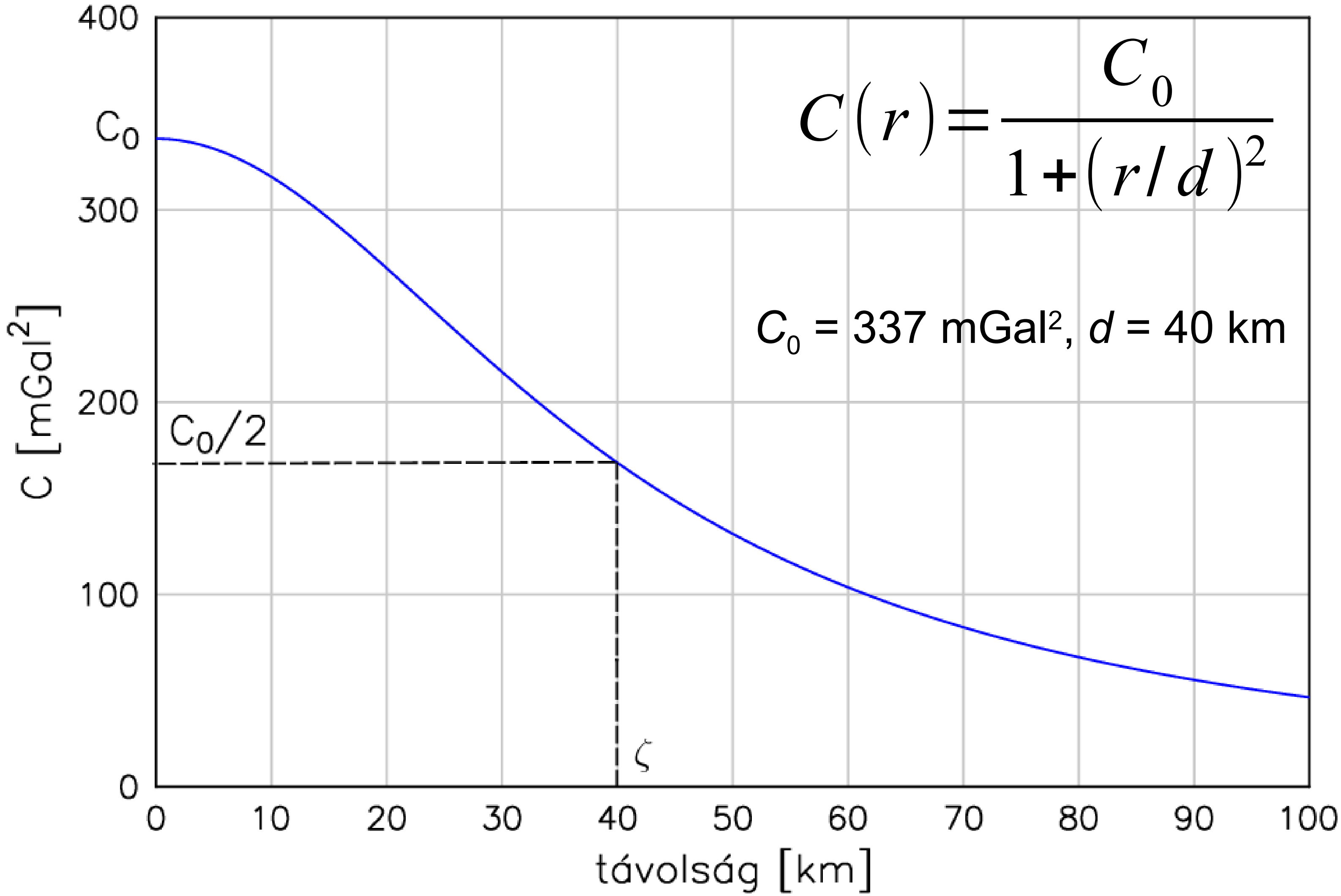
$$C^{\Delta g}(0) = \mathrm{var}\{\Delta g\} = M\{\Delta g^2\}$$

Mit mutat a kovariancia függvény?

- a kovariancia függvény Δg és $\Delta g'$ statisztikai korrelációját méri, vagyis azt, hogy mennyire azonos előjelűek és nagyságúak egy adott *r* távolságban levő Δg értékek



Hirvonen kovariancia függvénye



Kovariancia függvény modellezése

- Az egyváltozós kovariancia függvényt általában bázisfüggvények rendszere (P_n Legendre polinomok) szerint haladó végtelen sorba fejtjük
  - e sorfejtés együtthatói a σ_n fokvarianciák

$$B(x,x_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi R^2}}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\sigma_n P_n(x,x_k)$$

Más mérési típusok felhasználása

- a T potenciálzavarral ($T = W - U$) függvénykapcsolatban álló mennyiségeket vizsgálunk:
  - N geoidmagasság
  - Δg nehézségi rendellenességek
  - (ξ, η) függővonal-elhajlások

$$N = \frac{T}{\gamma} \qquad \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T \qquad \xi = \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \qquad \eta = -\frac{1}{\gamma r \sin \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

Magyarországi példák

asztrogeodéziai geoidmegoldás számítása függővonal-elhajlás adatokból

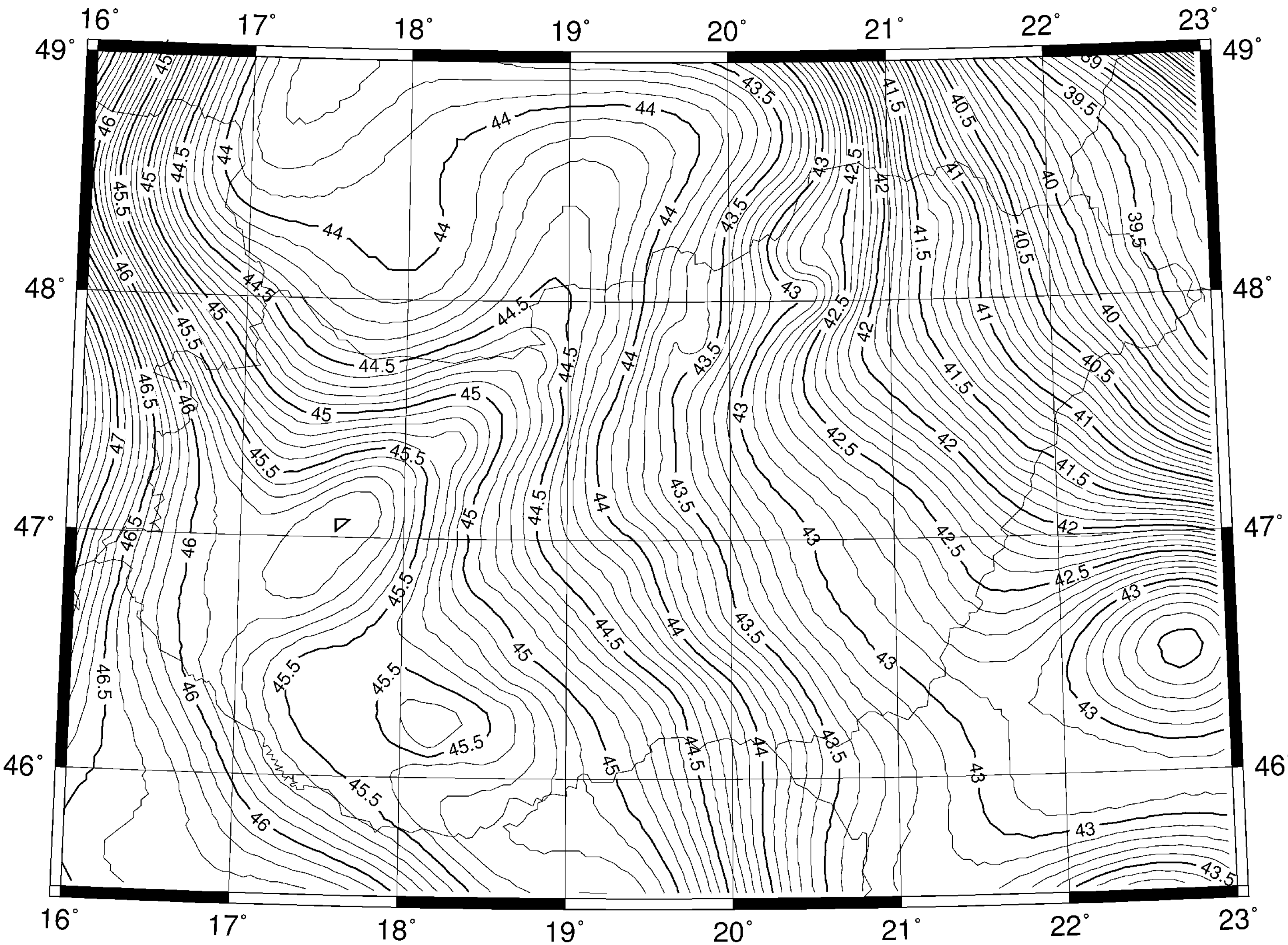
geoidszámítás gyors kollokációval nehézségi rendellenességekből

nehézségi rendellenességek számítása Eötvös-inga mérésekből

illesztett asztrogravimetriai, gradiometriai, GPS/szintezési kvázigeoid megoldás

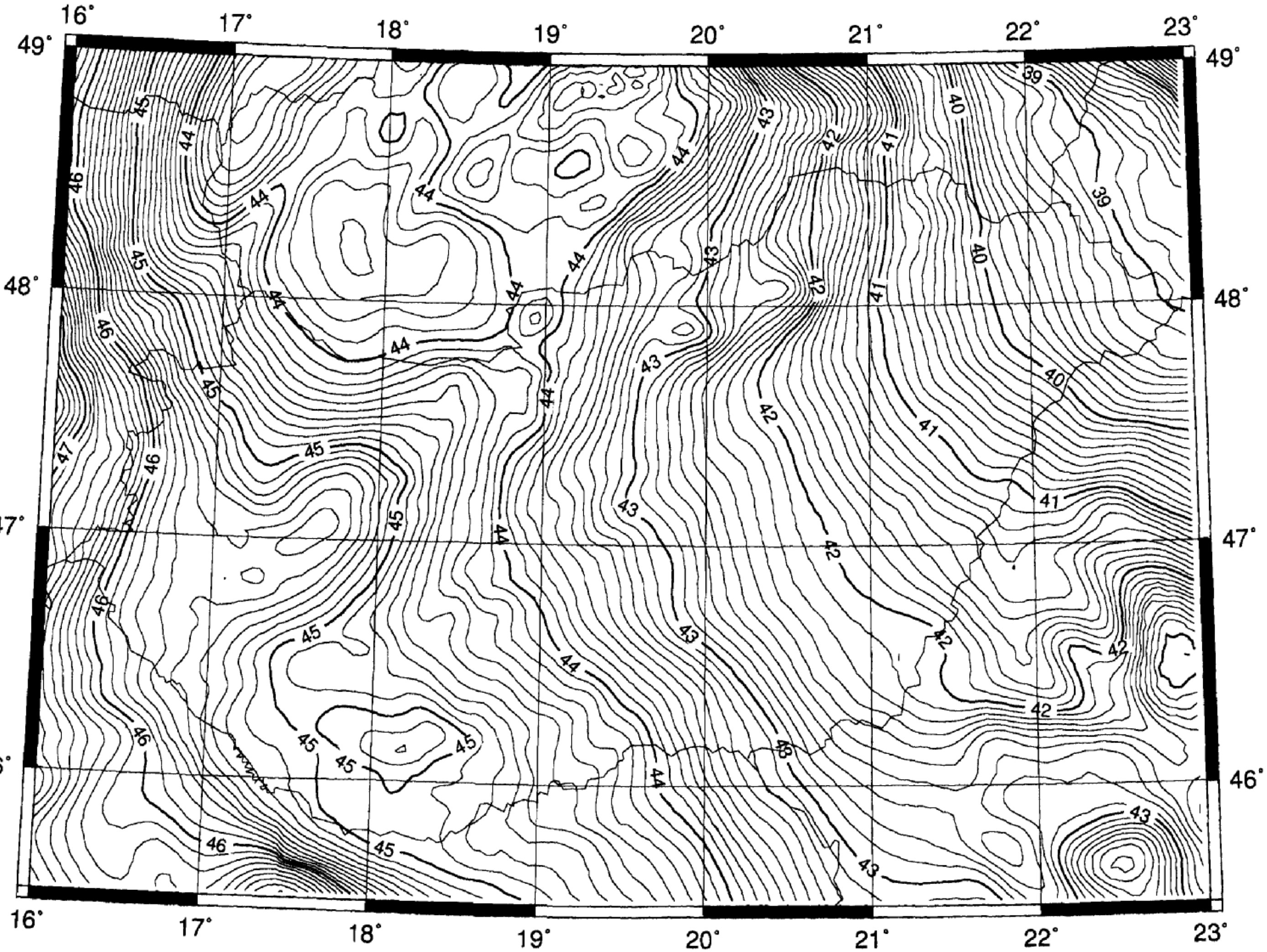
asztrogeodéziai és GPS/szintezési megoldás EGM2008-as geopotenciál modellel

Asztrogeodéziai geoid

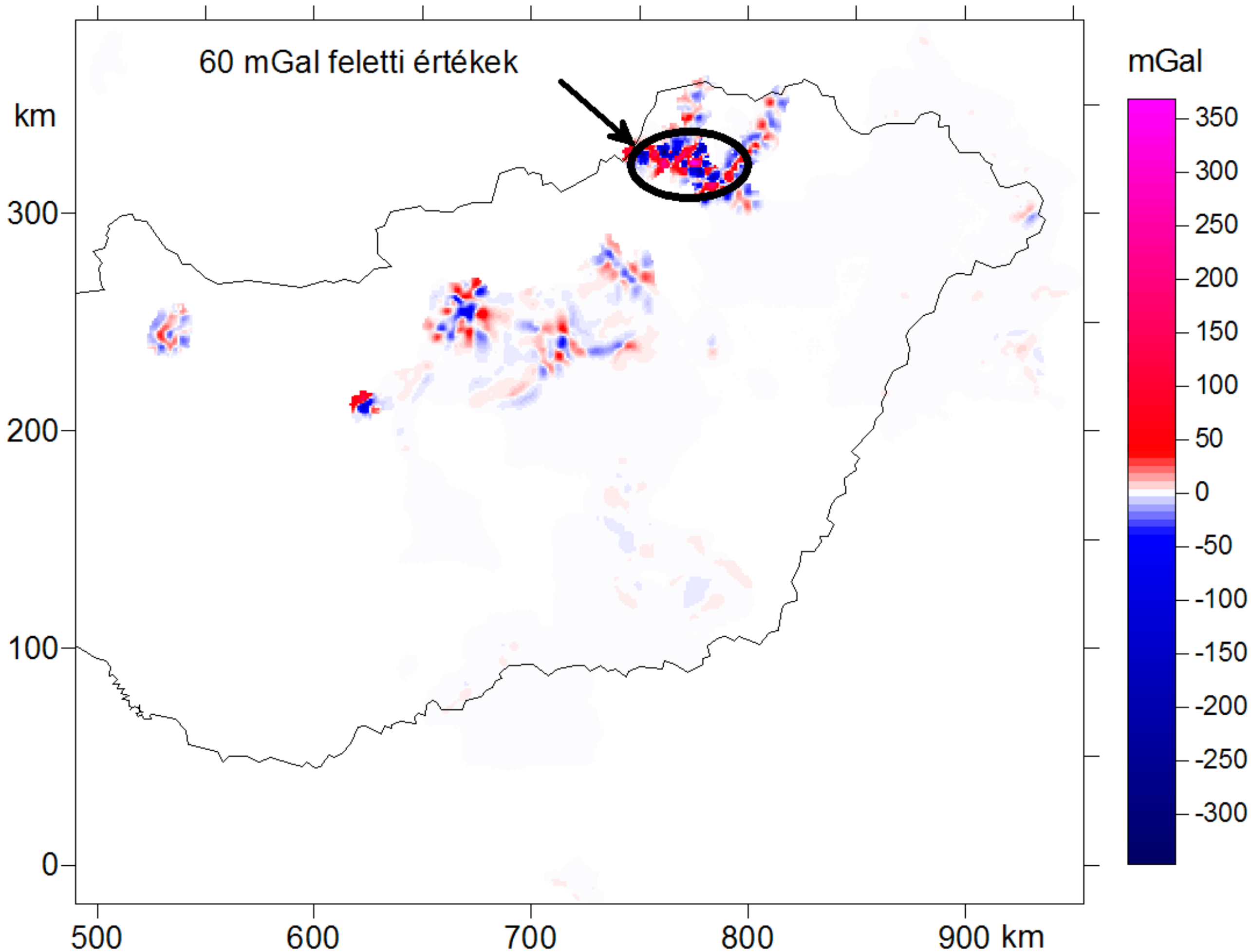


OGPS 340 szintezett pontján az illeszkedés ±14 cm-es szórással

Geoid gyors kollokációval



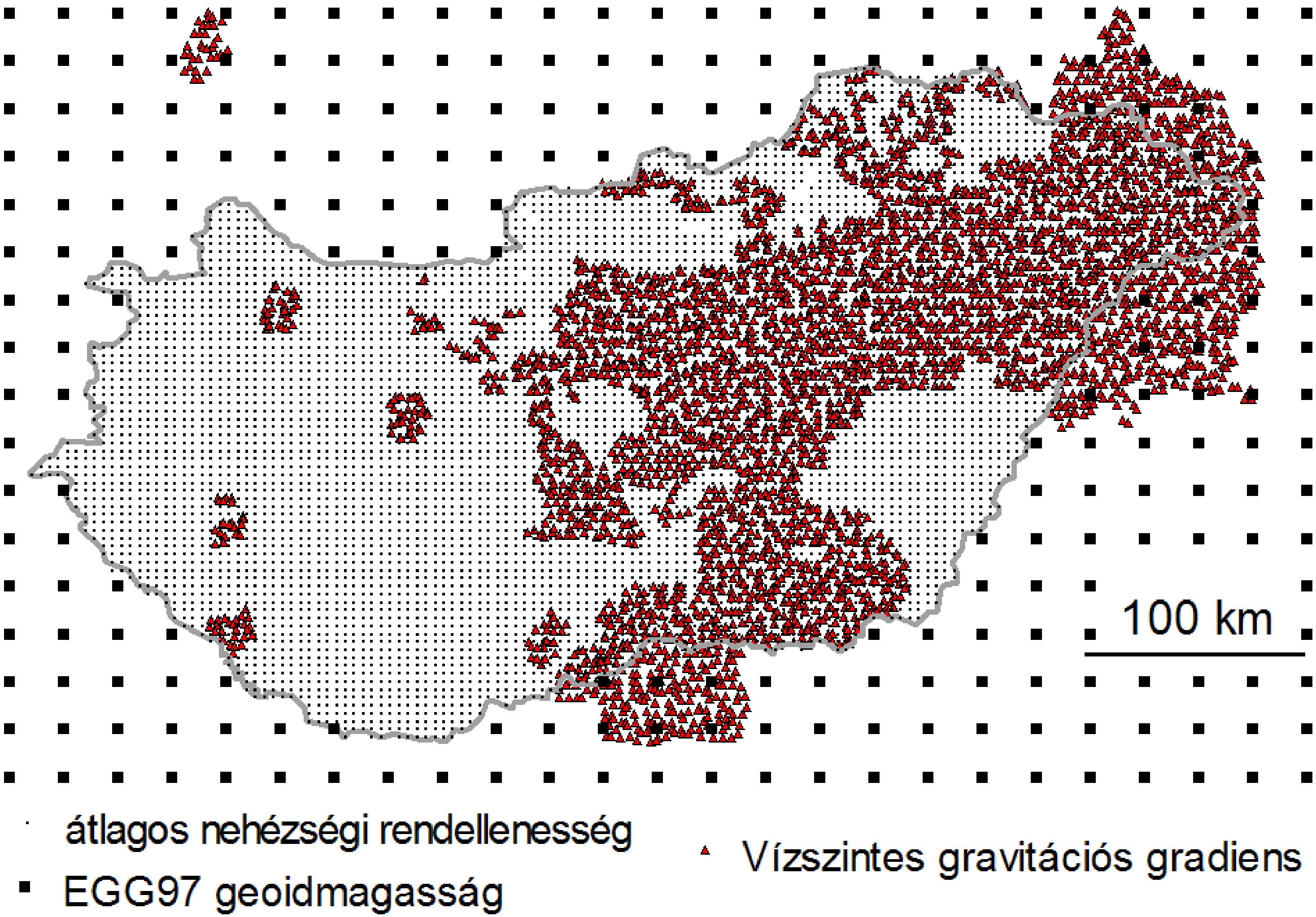
Nehézségi rendellenességek



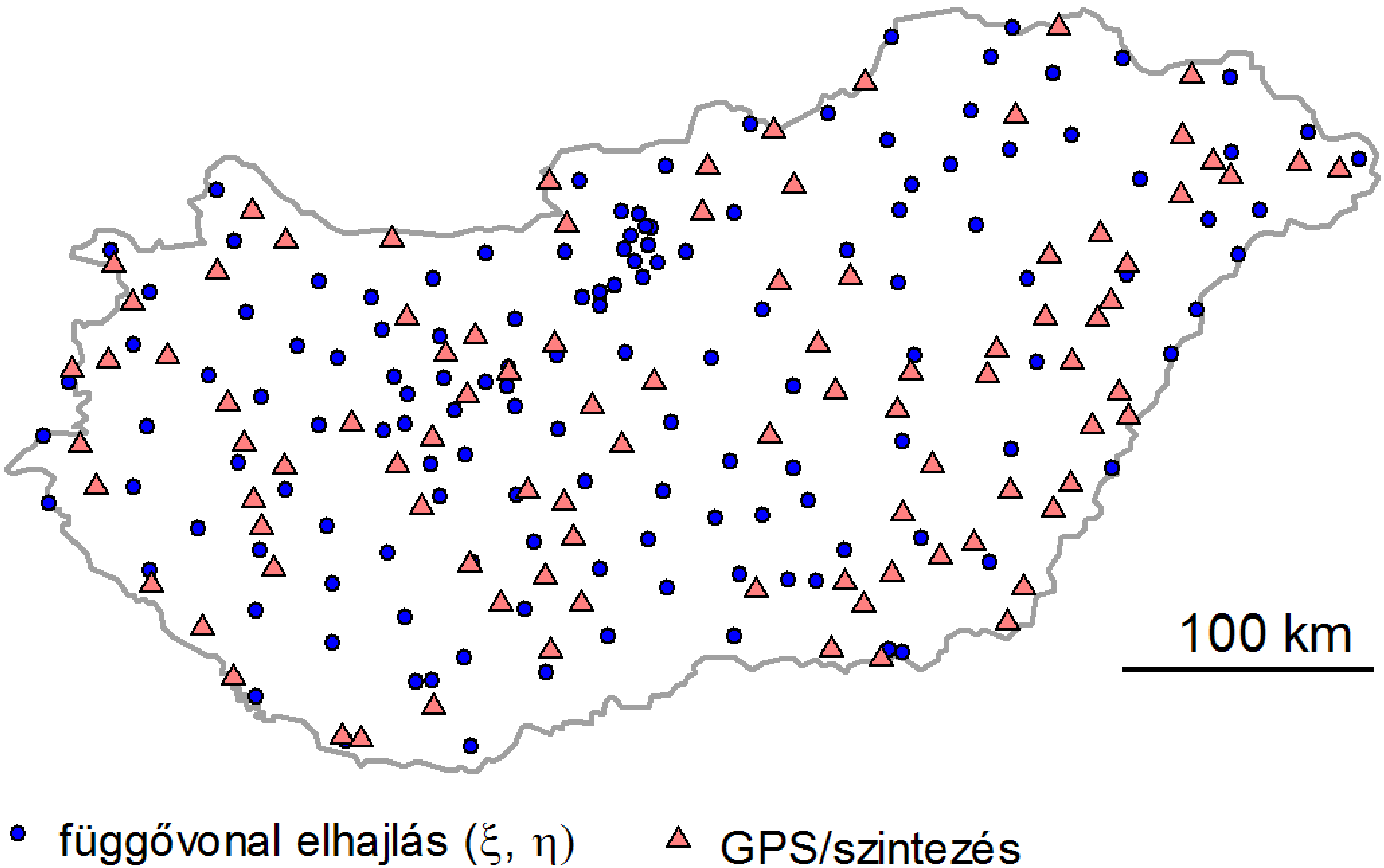
HGTUB2007 magyarországi kvázigeoid megoldás

- illesztett asztrogravimetriai, gradiometriai, GPS/szintezési kvázigeoid megoldás
- GPM98CR / GGM02CB geopotenciális modell (720 fokig)
- felhasznált adatok:
  - 6678 átlag szabadlevegő nehézségi rendellenesség 2’×3’ méretű blokkokra
  - 276 (2 × 138) asztrogeodéziai függővonal elhajlás
  - 7452 Eötvös-inga nehézségi gradiens összetevő
  - 95 GPS/szintezési pont
  - 267 EGG97 kvázigeoid magasság (az országon kívül)
  - DTM adatok: SRTM3

Adatok


100 km
átlagos nehézségi rendellenesség
EGG97 geoidmagasság
Vízszintes gravitációs gradiens

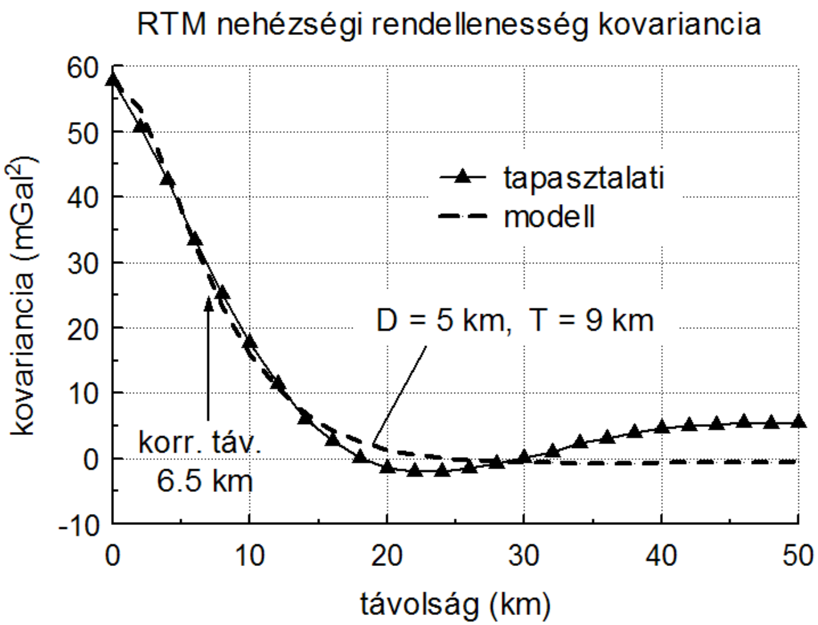
Adatok

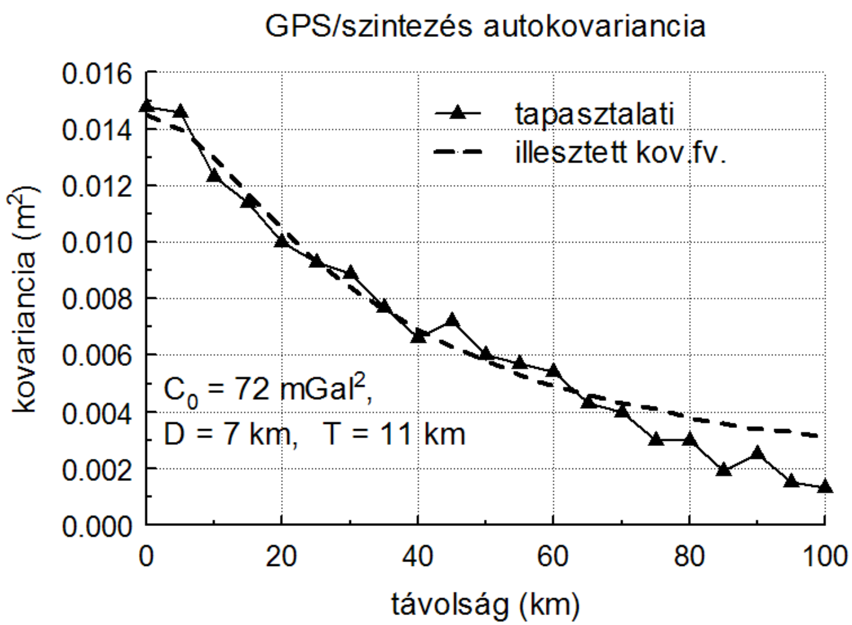


Kovariancia függvények

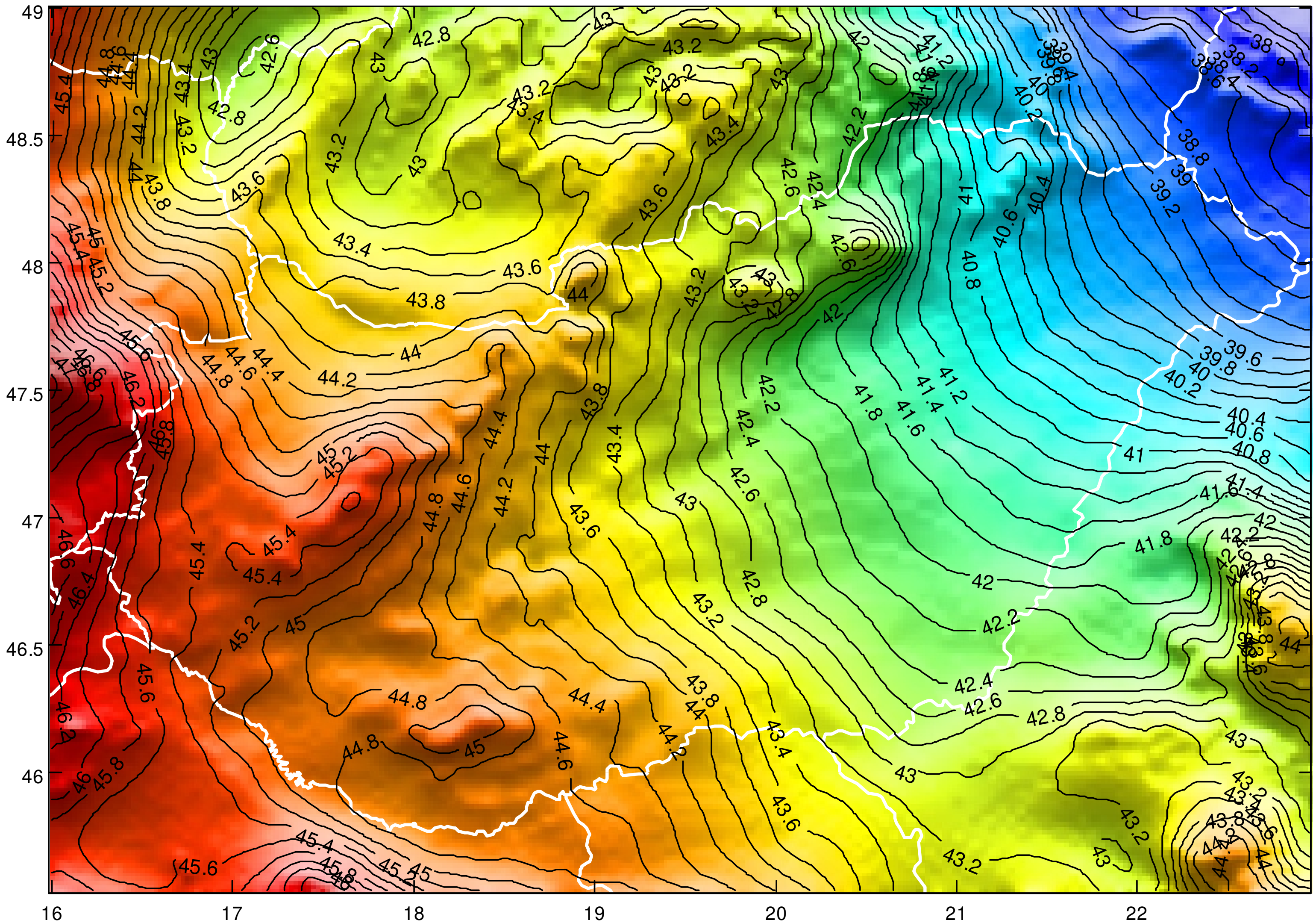
- Térbeli logaritmikus kovariancia modell (Forsberg, 1987)

$$C(\Delta g^{h_1}, \Delta g^{h_2}) = -C_0 \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \ln\left(D_i + h_1 + h_2 + \sqrt{s^2 + (D_i + h_1 + h_2)^2}\right)$$



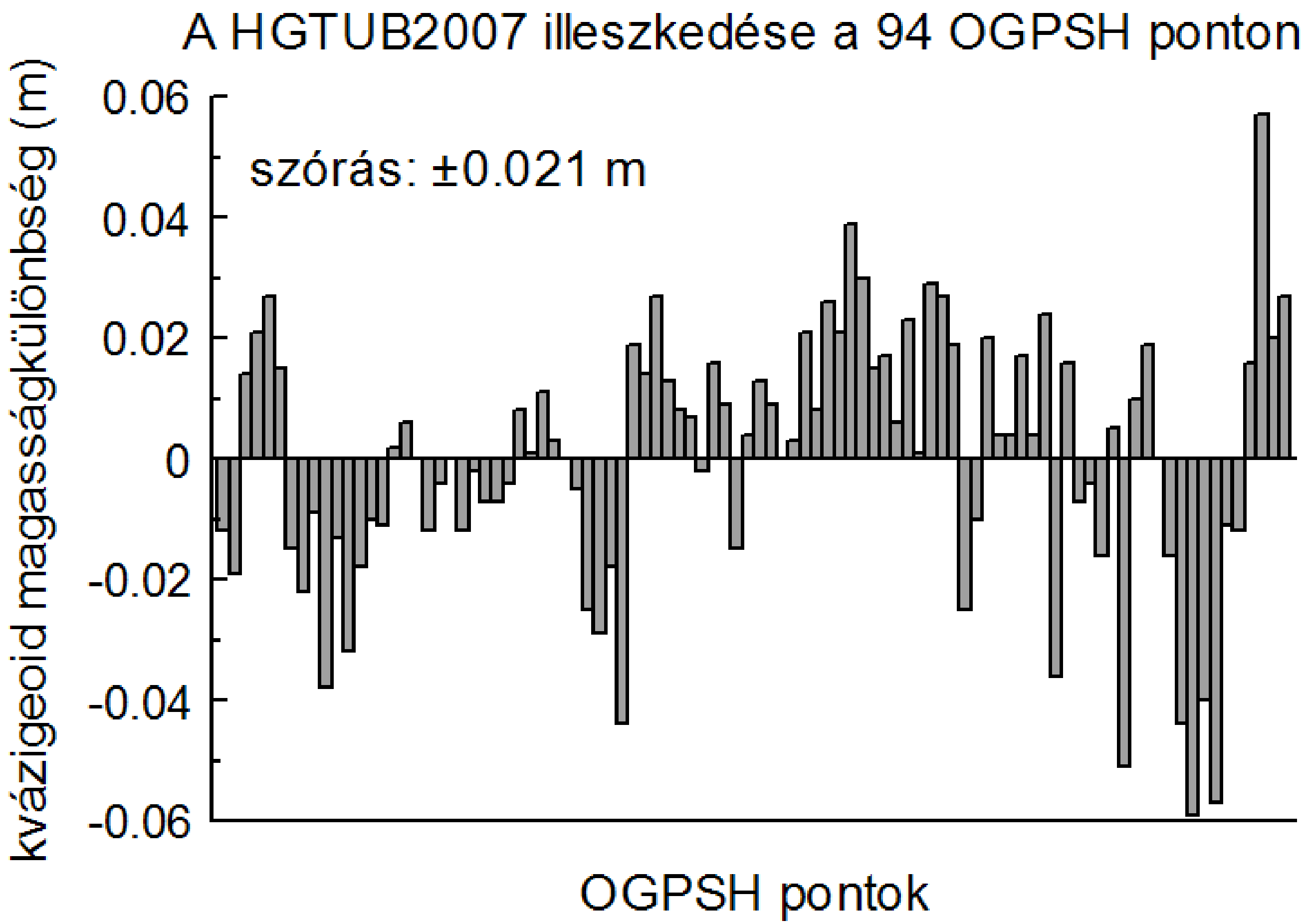


HGTUB2007 kvázigeoid undulációk

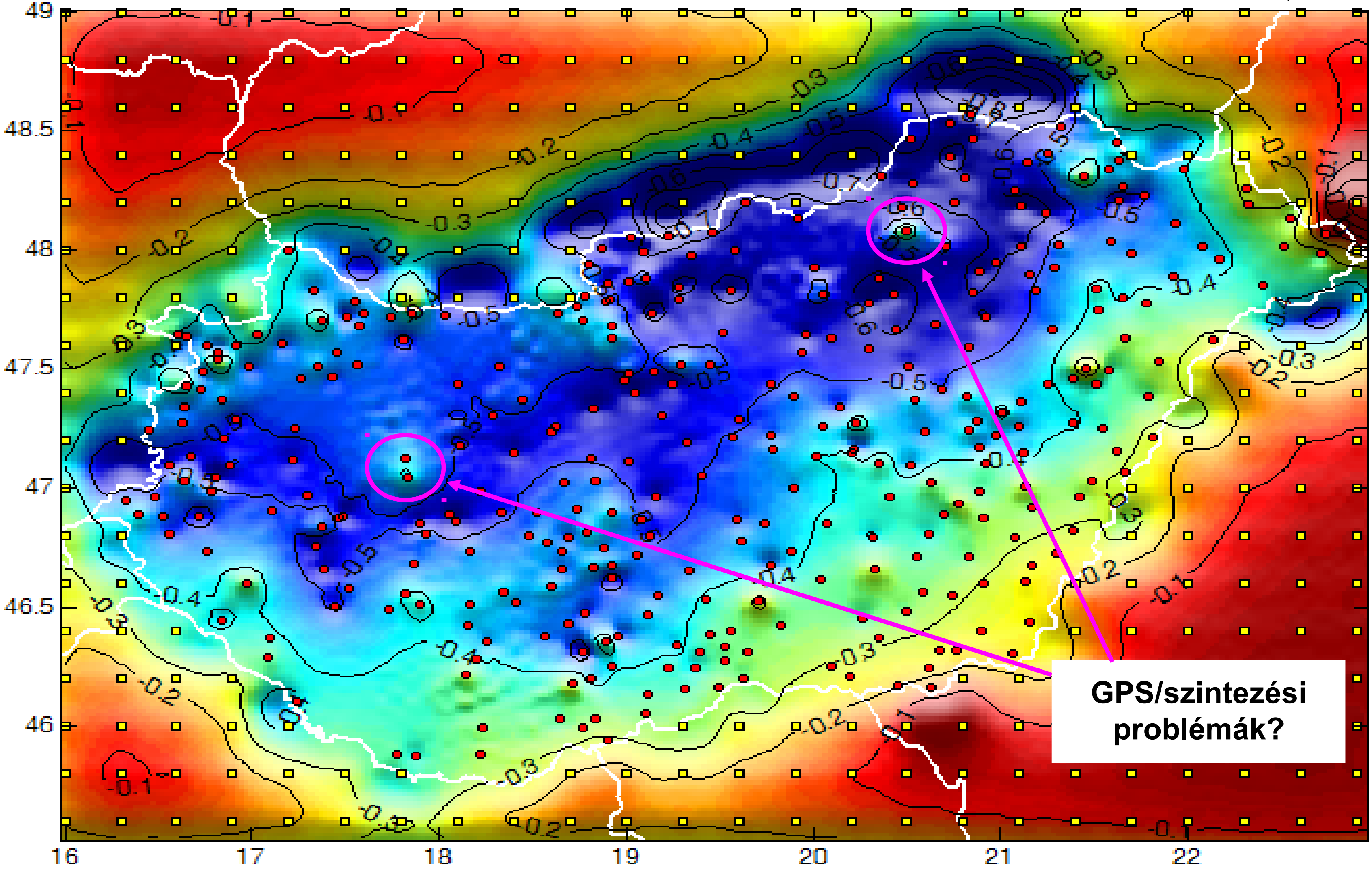


A kvázigeoidmegoldás illeszkedése

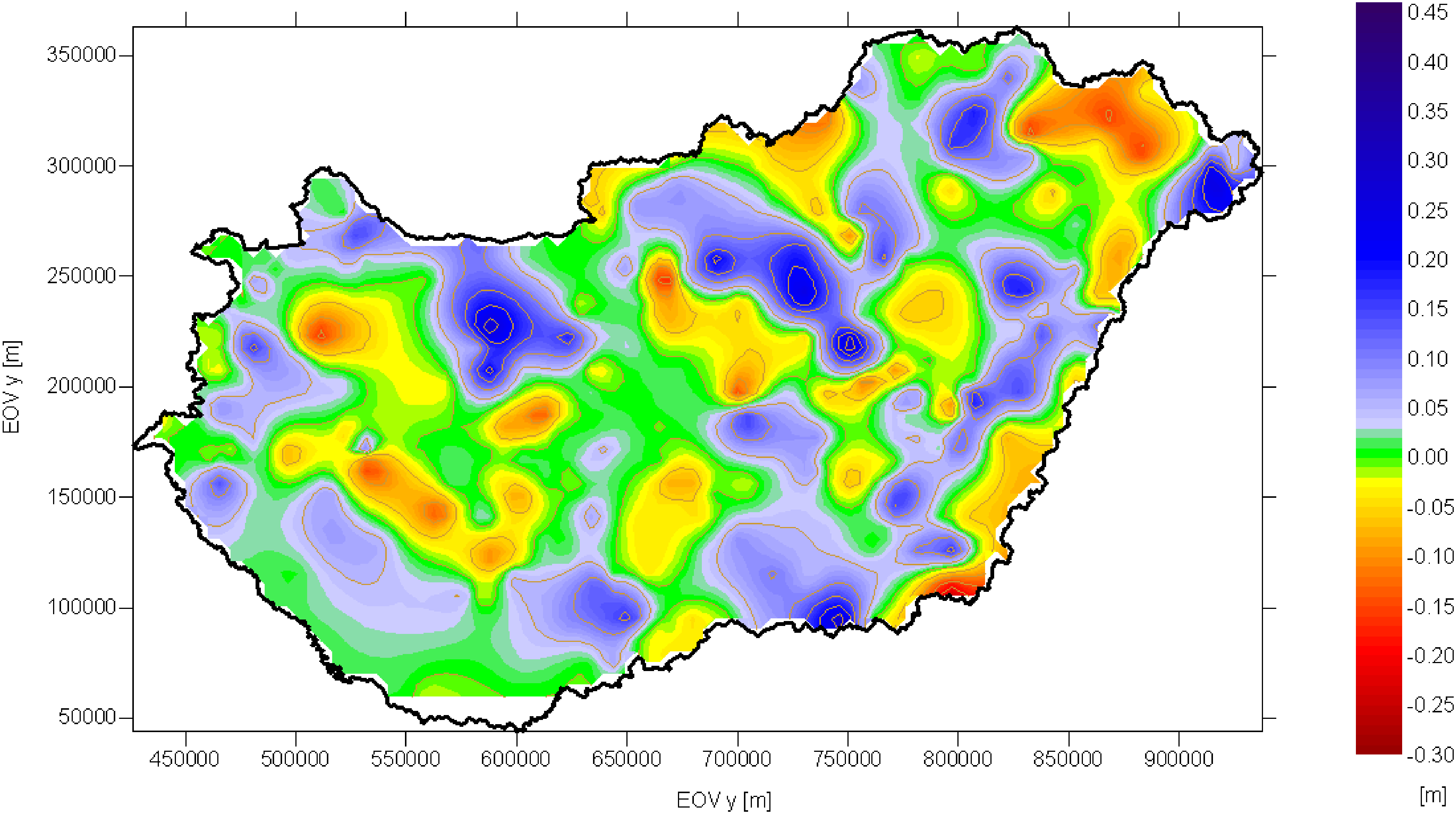
- az OGPSH pontjaira: ± 2.1 cm (eltérések szórása), ± 6 cm (max/min)
- az EUVN pontjaira (7 db): ± 4.2 cm (eltérések szórása)



Asztrogravimetriai és GPS/szintezésre „illesztett” megoldások eltérése



OGPSH szintezett magasság - hivatalos EOV HGPS magasság

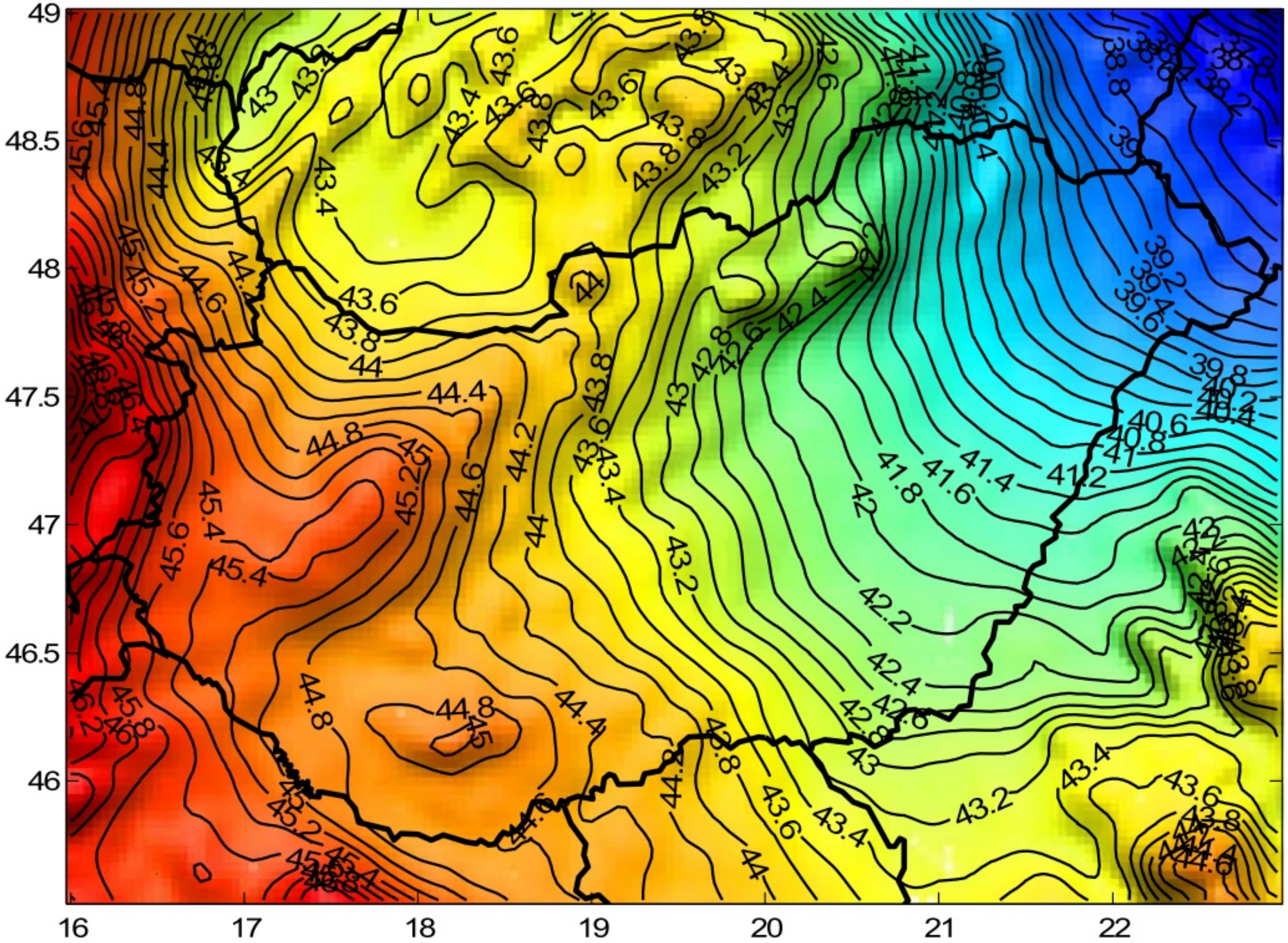


Horváth Tamás, FÖMI

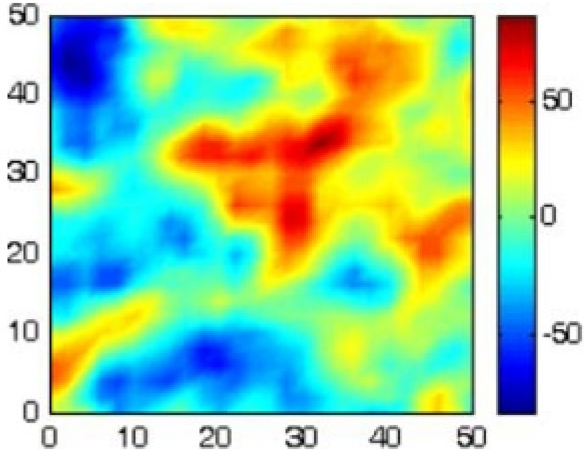
5. Asztrogeodéziai és GPS/szintezési megoldás EGM2008 modellel

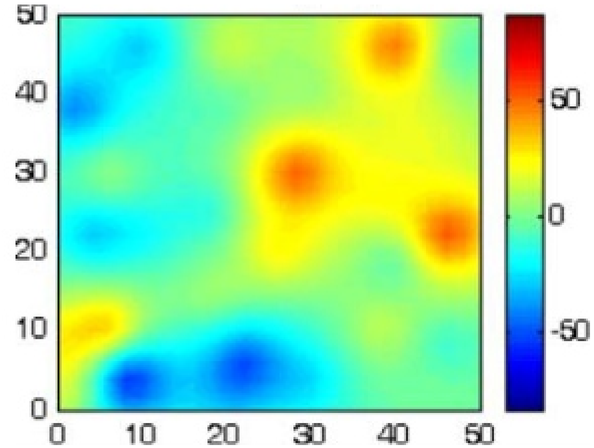
- Szűcs Eszter (2009) diplomamunkája
- felhasznált adatok:
  - 138 pontbeli (ξ, η)
  - 340 szintezett OGPSH pontbeli unduláció
  - EGM2008 geopoteciál modell (2160 fokig és rendig, 4 802 666 C_{nm} és S_{nm} együttható)
- N számítása 2'×3' felbontású rácsra

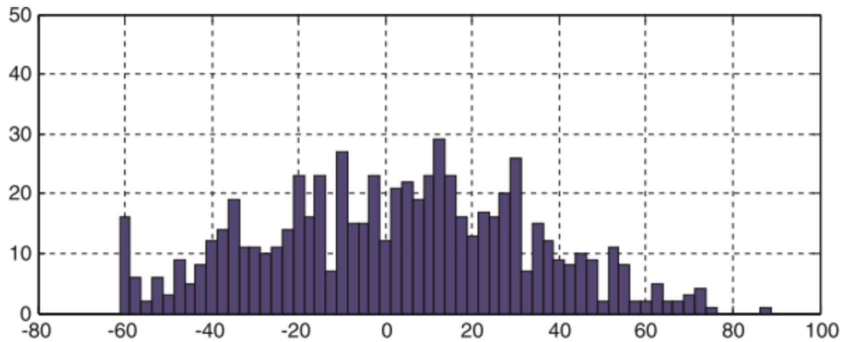
Az elkészült asztrogeodéziai megoldás

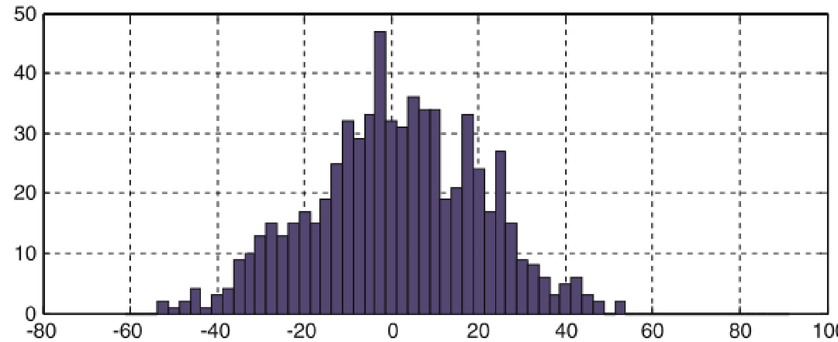


Probléma: LKN kollokáció túlzott simító hatása









eredeti jel

LKN kollokált jel

C. Kotsakis

Erőtér modellezés gömbi radiális bázisfüggvényekkel

- Tetszőleges *F* erőtér mennyiség becslésének funkcionális modellje

$$F(r_i)+e(r_i)=\sum_{k=1}^{K} x_k B(r_i, r_k)$$

- $F(r_i)$ mérés $e(r_i)$ mérési hibák (javítások) segítségével az x_k inverziós paraméterek becsülhetők – lineáris egyenletrendszer keletkezik
  - ez akkor igaz, ha az r_k bázisfüggvények helye adott
    - szabályos rácson vagy szabálytalan ponteloszlásban
  - ha az r_k bázisfüggvények helye is ismeretlen, nemlineáris az egyenletrendszer

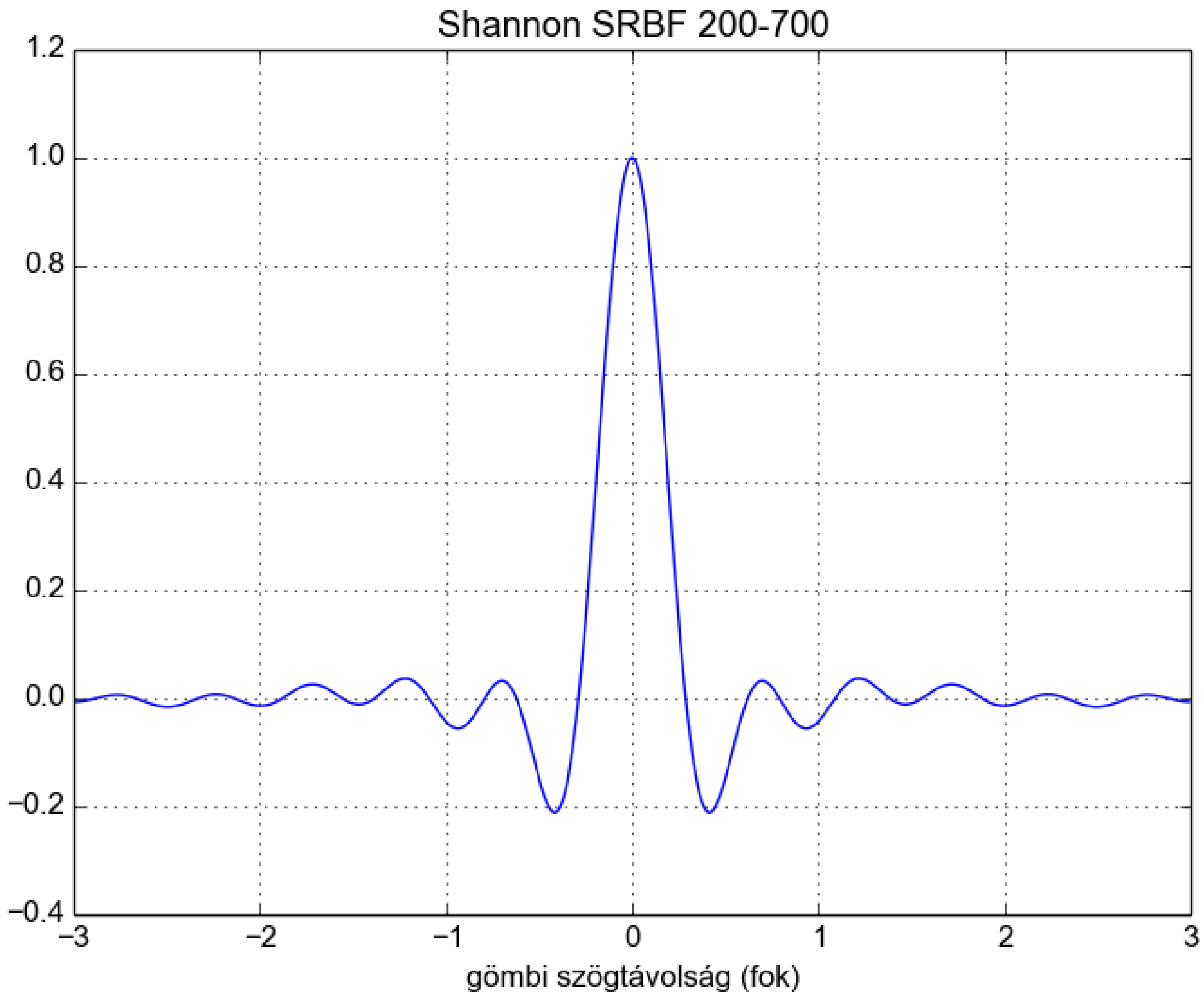
Gömbi radiális bázisfüggvények (SRBF)

- A nehézségi erőtér regionális modellezését teszik lehetővé
- lokalizált harmonikus függvények:

$$B(r_i, r_k) = \sum_{n=N_{min}}^{N_{\max}} (2n+1) \left(\frac{r_k}{r_i}\right)^{n+1} b_n \, P_n(\hat{r}_i \cdot \hat{r}_k)$$

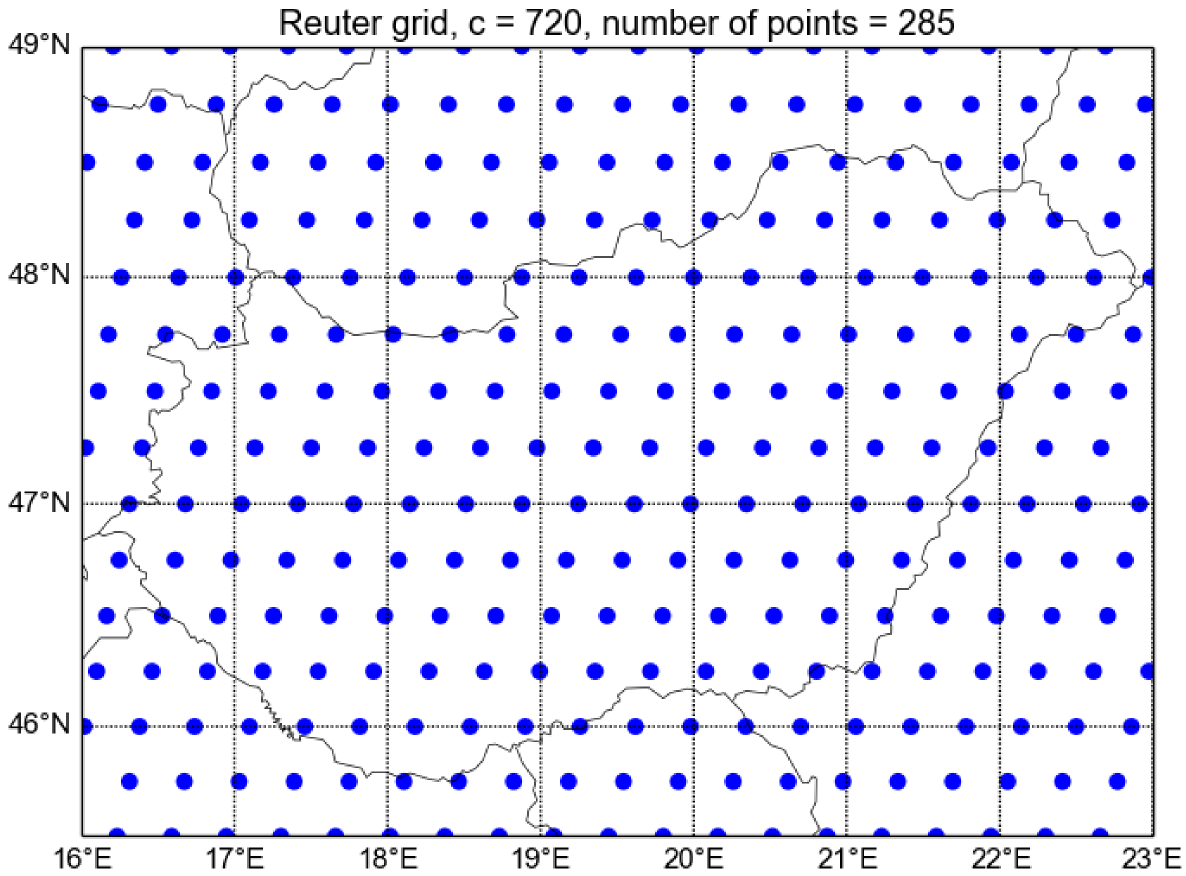
- r_k hely és a b_n együtthatók szabadon megválaszthatók
  - r_k = adatpontok és a b_n = fokvarianciák: LKN kollokáció
  - b_n = 1 minden n-re: Shannon RBF
  - tömegpontokkal (ún „maszkon”) való erőtér modellezés
  - szoros kapcsolatban vannak a gömbfüggvényekkel

Shannon RBF
(Nmin = 200, Nmax = 700)



Reuter rács

- A gömbfelszínen homogén ponteloszlás
- A rács *c* paramétere a felbontást jellemzi



SRBF erőtér modellezés előnyei

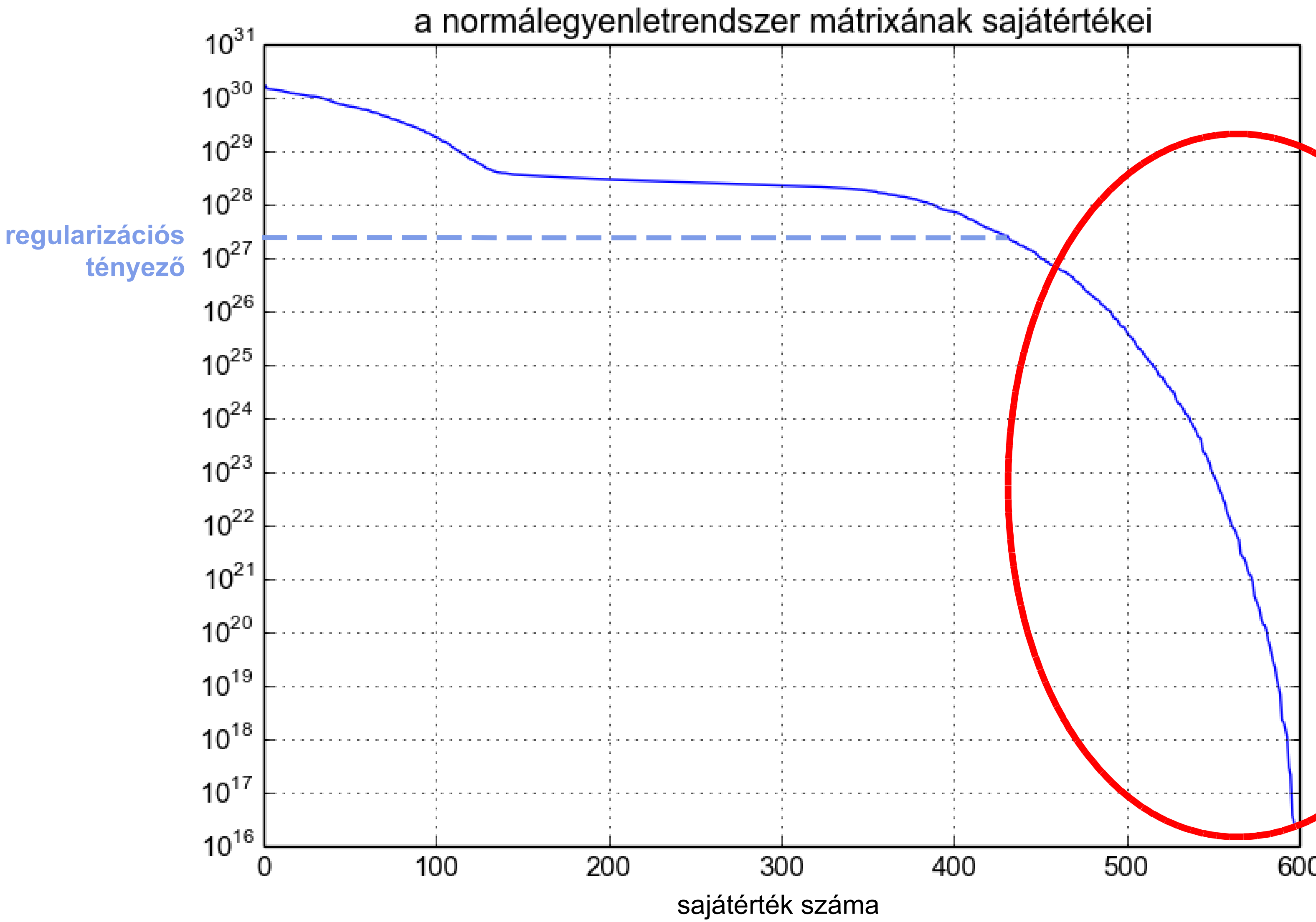
- paraméterbecslés a mérési adatok teljes hibajellemzőinek figyelembe vételével, a kiegyenlítő számítások szigorú eszköztárával
- a lokális bázisfüggvények helyzete, távolsága, spektrális jellemzői adaptálhatók a rendelkezésre álló adatok felbontásához és jellemzőihez
- a bázisfüggvények *xk* paramétereiből közvetlenül gömbfüggvény együtthatókat kaphatunk (pl. fokvarianciák számíthatók!)
- különböző típusú erőtér adatok kombinálhatók (GPS, szintezés, geopotenciális értékek, nehézségi rendellenességek, függővonal-elhajlás összetevők, Eötvös-inga mérések, mesterséges holdas mérések, GRACE, GOCE)
- az ismeretlenek száma azonos a bázisfüggvények számával (LKNK: az adatok számával azonos)

Regularizáció

- Tikhonov-féle regularizáció
  - regularizációs tényező kiinduló becslése
  - iteratív finomítás
- Cél: fizikailag értelmes megoldás meghatározása

$$\|e\|^2 + \|\mathbf{\Gamma c}\|^2 = \|\mathbf{Bc} - W\|^2 + \|\mathbf{\Gamma c}\|^2 = \min$$

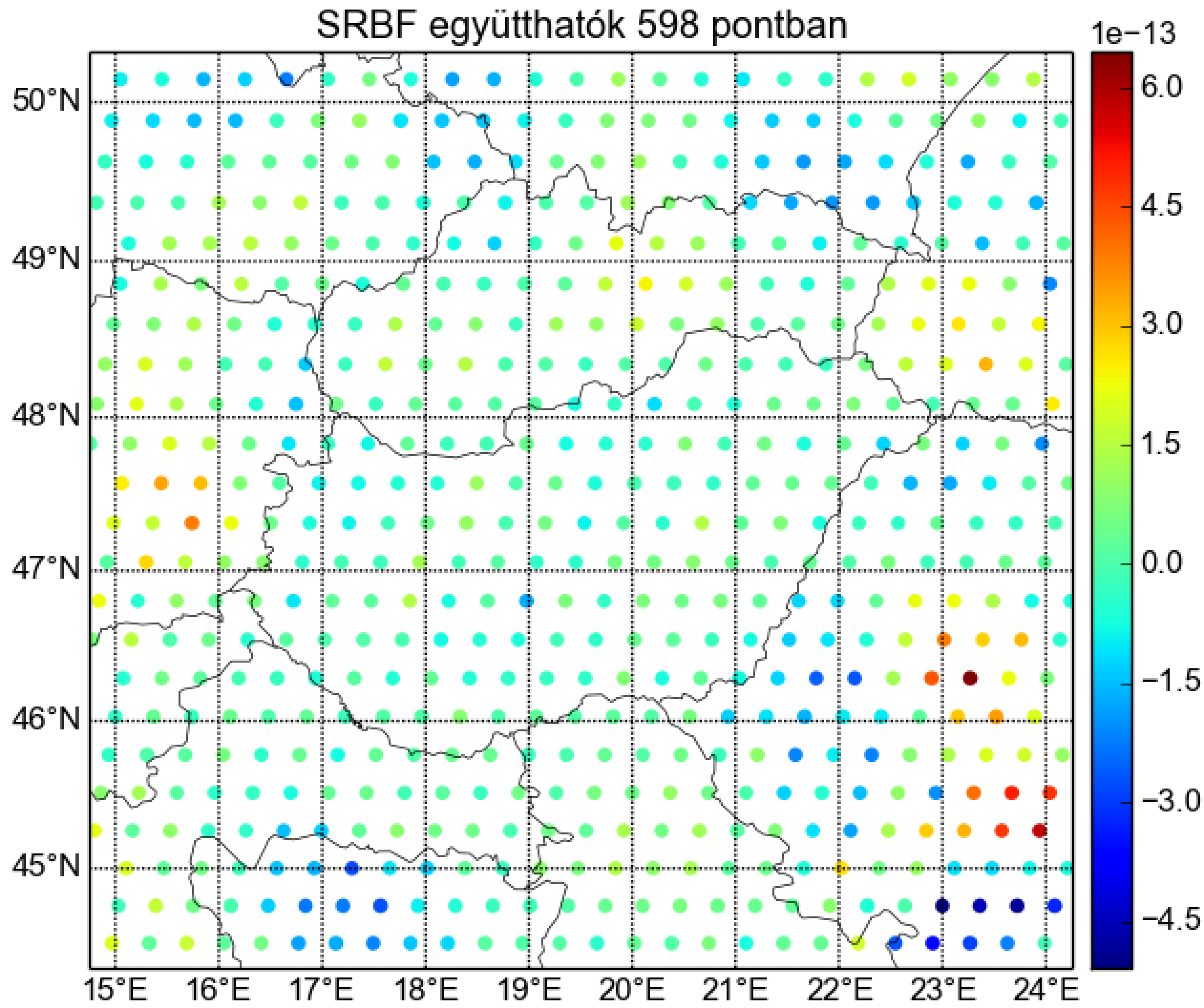
Miért szükséges a regularizáció?



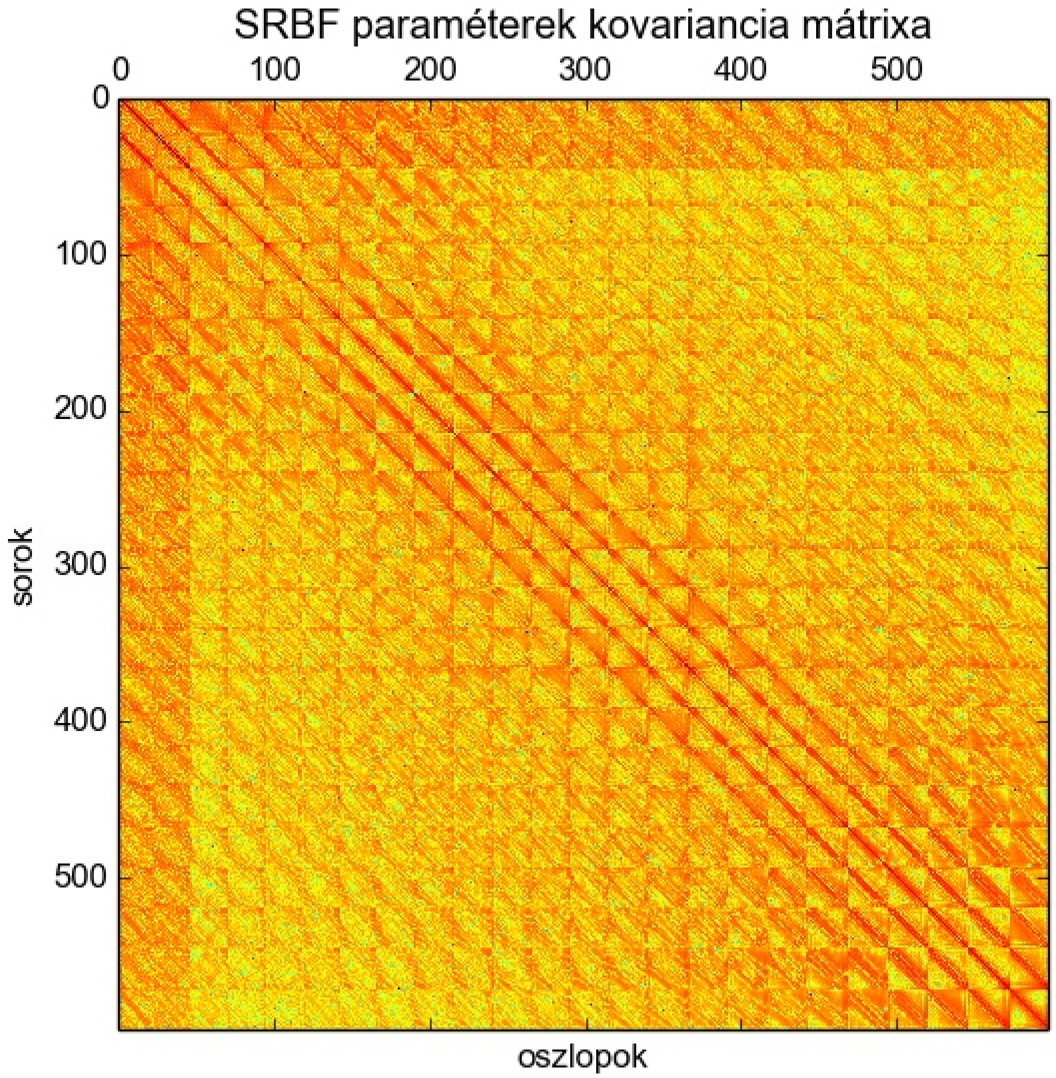
A mérések relatív súlyainak meghatározása

- A mérések relatív súlytényezőinek iteratív becslése
  - VCE: Variance Component Estimation (Koch és Kusche, 2002)
  - a regularizációs tényező is meghatározható súlytényezőként

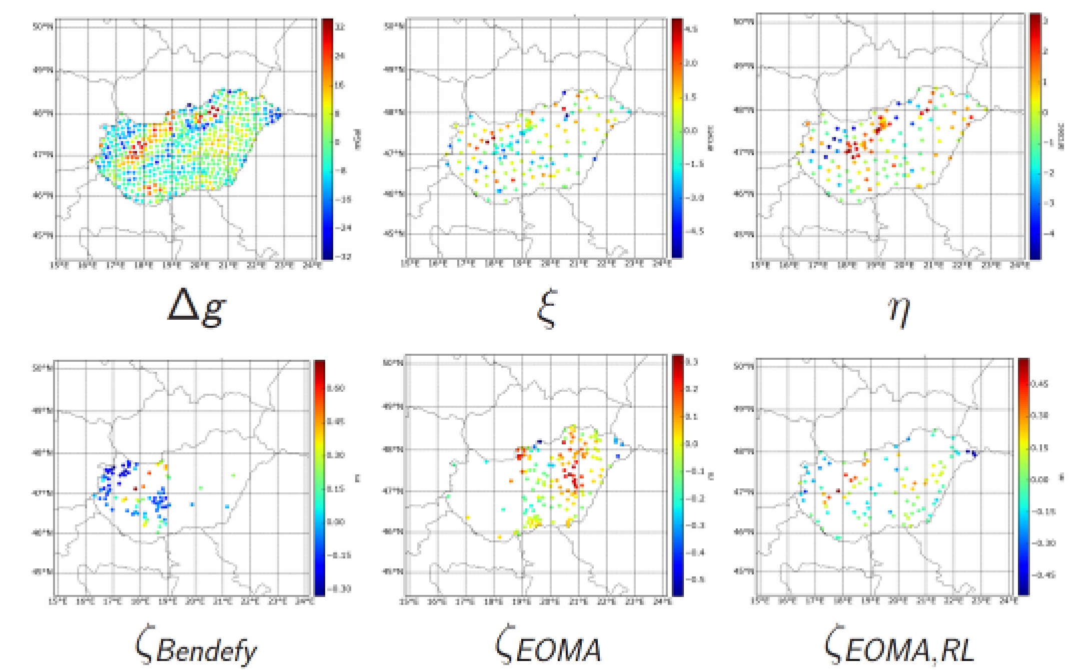
A meghatározott paraméterek



A paraméterek kovariancia mátrixa

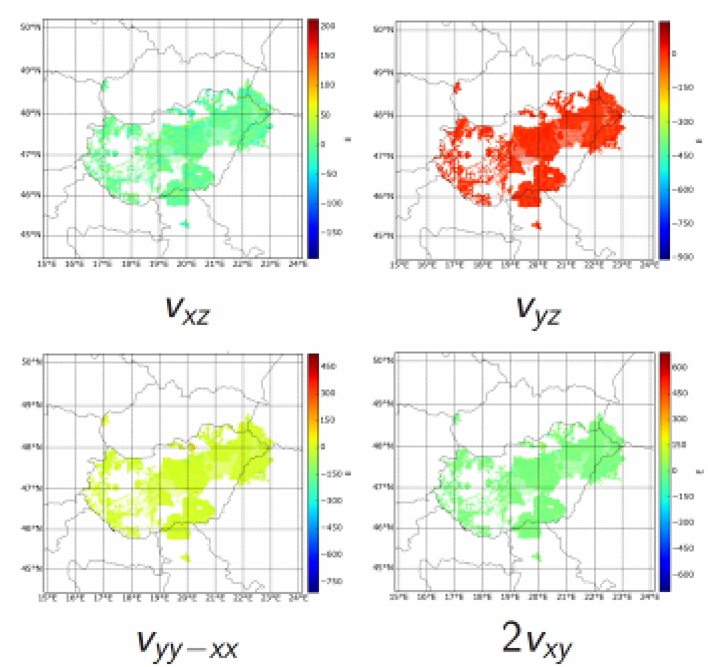


Bemenő adatok (összesen: 154 477)



- nehézségi rendellenesség
- függővonal-elhajlás
- GNSS/szintezés

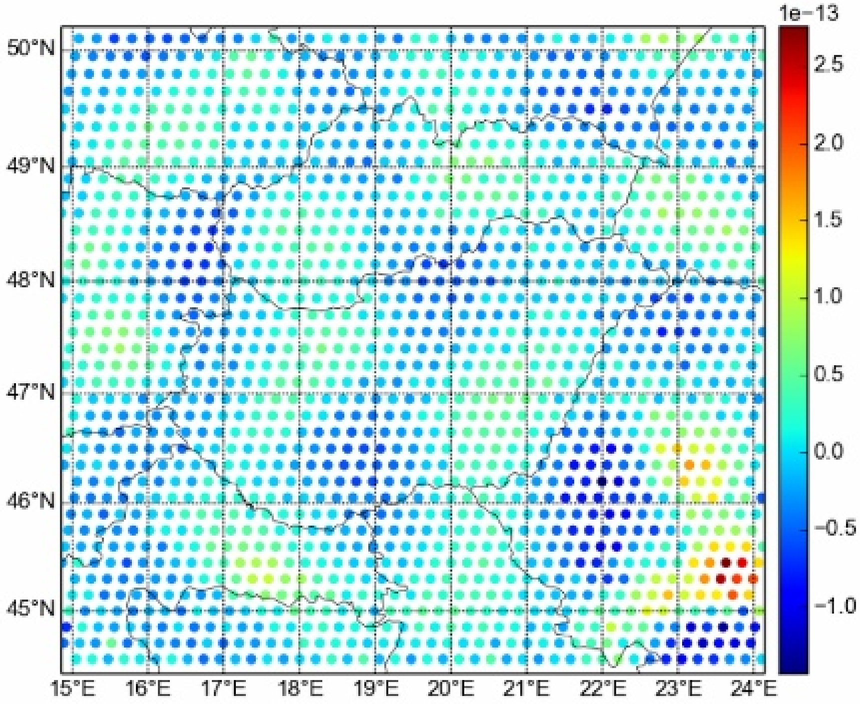
- Eötvös-inga mérések
- vízszintes és görbületi gradiensek



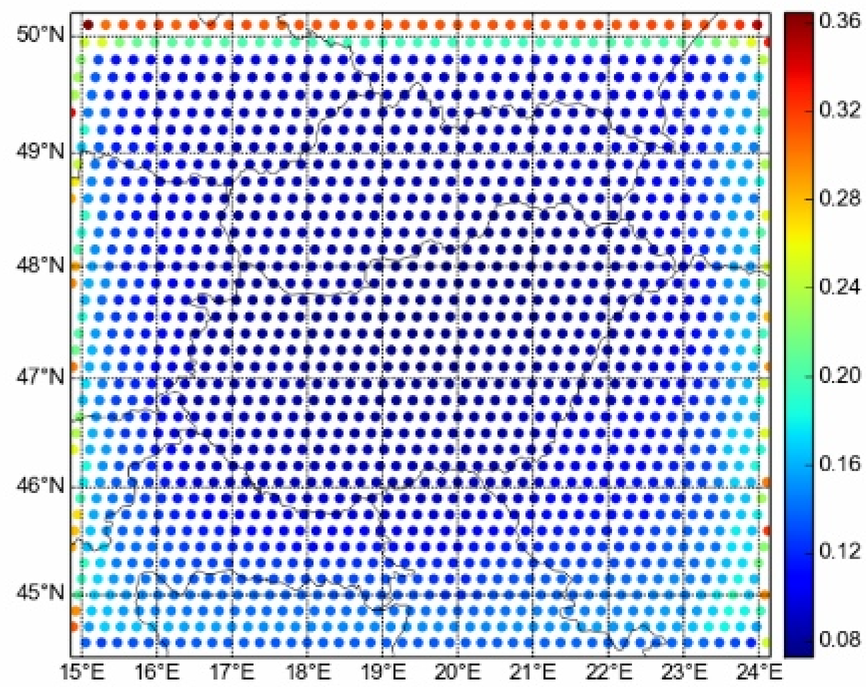
Adatok redukciója

- EGM2008
- EIGEN-6C4 (Förste et al. 2014)
- GOCE DIR R5 és EGM2008
- ERTM2160 nagyfelbontású DTM az RTM redukció elvégzéséhez (Hirt et al. 2014)

Eredmények: paraméterek és hibáik



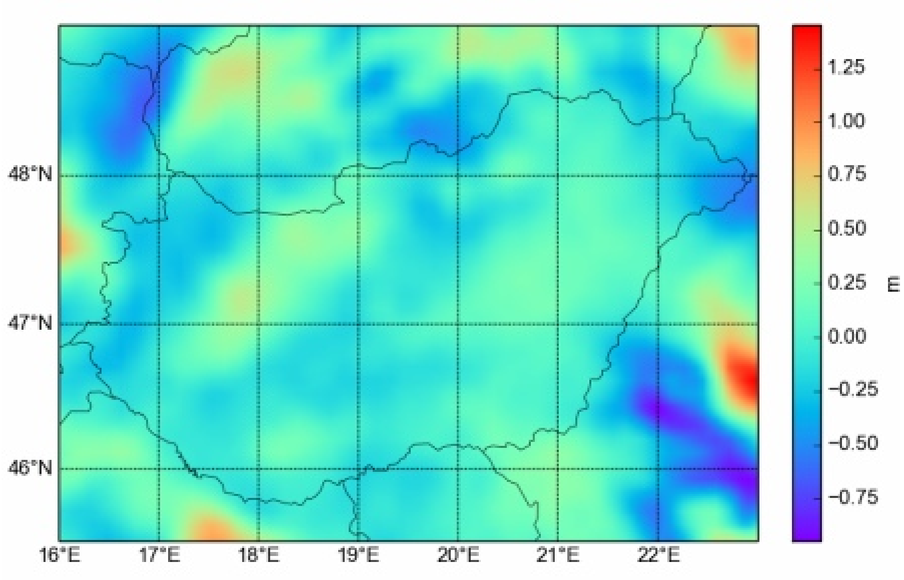
SRBF paraméterek



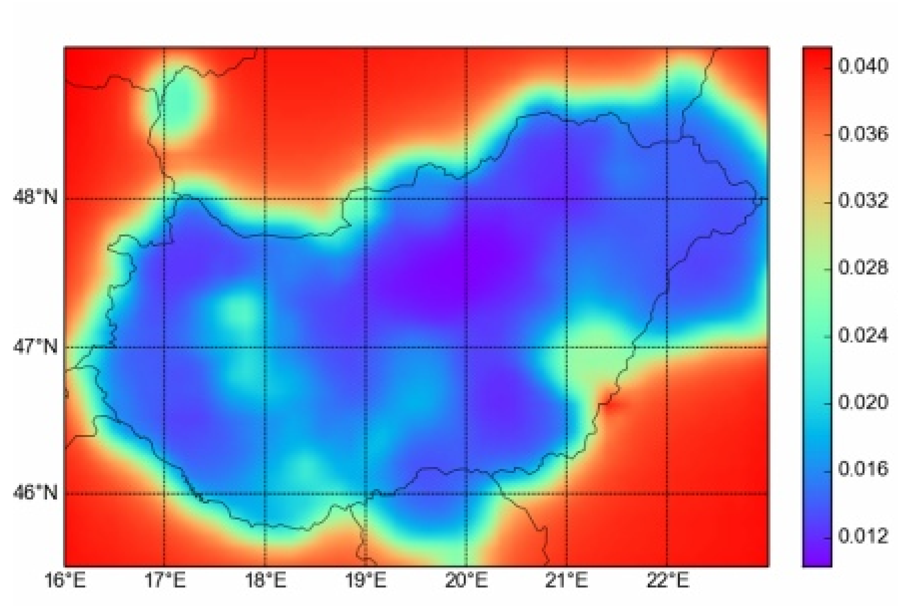
paraméterek relatív hibái

1633 paraméter

Eredmények: kvázigeoid

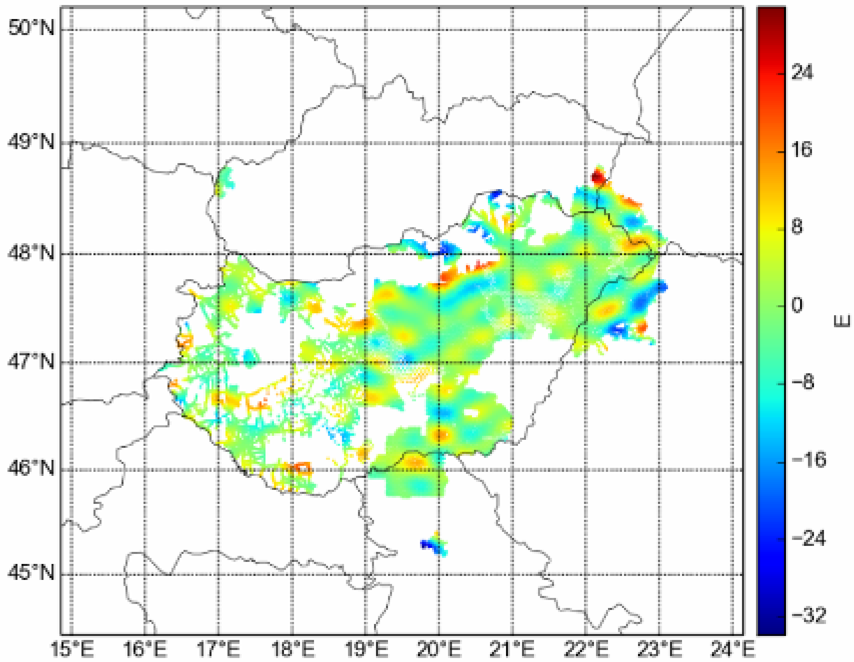


becsült maradék kvázigeoid
$(n = 200 - 1200)$

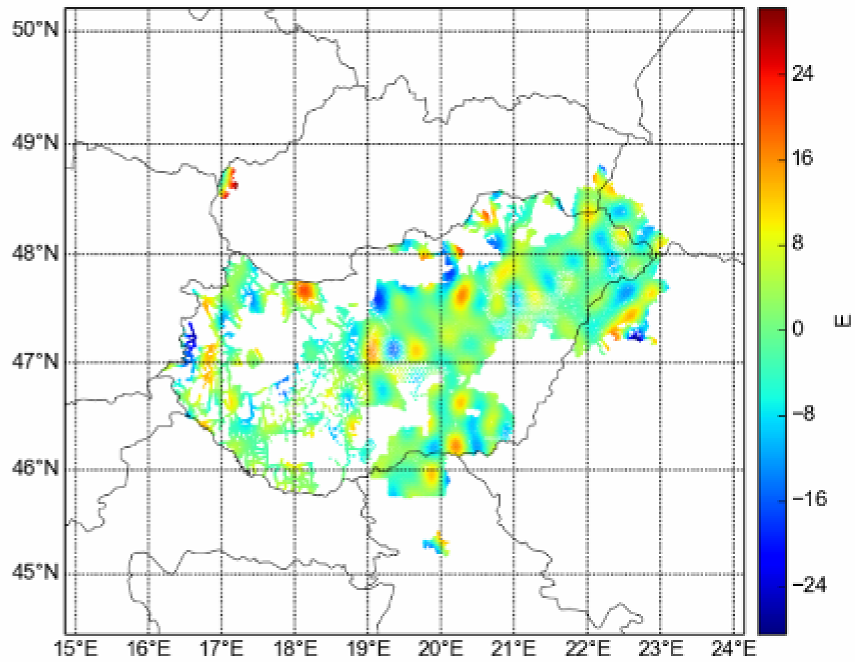


becsült kvázigeoid hibák

Eredmények: W_{xz}, W_{yz} modellezett része



v_{xz}



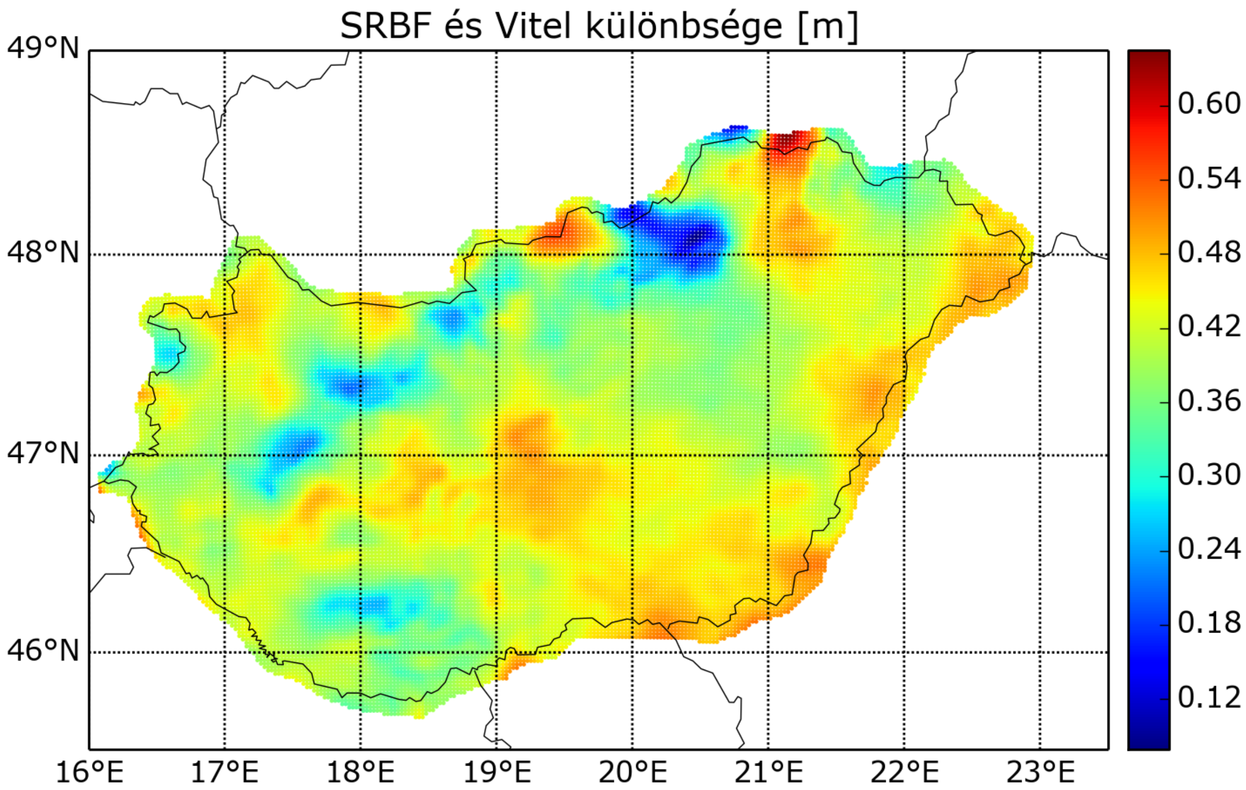
v_{yz}

GPM-ek összehasonlítása

data 200-1200 model	desc. No. unit	V_{xz} 37610 E	V_{yz} 37610 E	V_{yy-xx} 37272 E	$2V_{xy}$ 37272 E	ξ 138 arcsec	η 138 arcsec	$\zeta_{Bendefy}$ 86 meter	ζ_{EOMA} 148 meter	$\zeta_{EOMA,RL}$ 96 meter	$\zeta_{GPM OUT}$ 3598 meter	Δg 509 mGal	$\zeta_{GPM HU}$ 1024 meter
EGM2008 200-1200	std.	**±14.06**	±14.73	±28.15	±28.74	±1.827	±1.730	**±0.220**	±0.144	±0.199	±0.429	±10.44	**±0.051**
	mean	8.210	0.050	2.640	1.610	-0.252	0.382	0.433	0.515	0.501	-0.003	-1.630	0.015
	σ_{VCE}	±5.56	±6.01	±12.16	±12.47	±0.93	±0.92	±0.34	±0.23	±0.22	±0.26	±5.12	min: -0.187
	SNR	-2.87 dB	-3.44 dB	-5.88 dB	-5.76 dB	1.98 dB	2.44 dB	4.78 dB	2.53 dB	4.84 dB	7.74 dB	2.66 dB	max: 0.227
EIGEN-6C4 200-1200	std.	**±14.06**	**±14.71**	**±28.14**	**±28.73**	**±1.820**	±1.715	±0.222	**±0.134**	**±0.195**	±0.428	±10.35	**±0.051**
	átl.	8.204	0.030	2.622	1.598	-0.253	0.390	0.436	0.503	0.495	-0.004	-1.762	0.013
	σ_{VCE}	±5.55	±6.00	±12.16	±12.46	±0.93	±0.91	±0.34	±0.23	±0.23	±0.25	±5.10	min: -0.189
	SNR	-2.88 dB	-3.44 dB	-5.90 dB	-5.77 dB	1.97 dB	2.43 dB	4.44 dB	2.39 dB	4.35 dB	7.82 dB	2.65 dB	max: 0.224
GOCE R05-EGM08 200-1200	std.	**±14.06**	±14.73	±28.15	±28.74	±1.829	**±1.700**	±0.223	±0.135	**±0.195**	**±0.420**	**±10.33**	±0.056
	átl.	8.206	0.009	2.644	1.595	-0.252	0.382	0.440	0.504	0.496	-0.005	-1.705	0.013
	σ_{VCE}	±5.55	±6.01	±12.16	±12.47	±0.93	±0.92	±0.35	±0.26	±0.26	±0.25	±5.16	min: -0.206
	SNR	-2.88 dB	-3.44 dB	-5.90 dB	-5.77 dB	1.91 dB	2.30 dB	4.05 dB	1.86 dB	3.65 dB	7.92 dB	2.57 dB	max: 0.219

a három geopotenciális modellel kapott eredmények

Eltérések a VITEL 2014 pontokban



nem cm pontos geoid

Potenciálfüggvény inverziós előállítása polinomokkal

- A meghatározandó $W(x,y)$ potenciálfüggvényt kétváltozós $P_n(x)$ polinom bázisfüggvények szerint bontjuk fel B_j együtthatókkal:

$$W(x,y)=\sum_{n=0}^{P}\sum_{i=0}^{n} B_j P_i(y) P_l(x)$$

$$j=\frac{n(n+1)}{2}+i \qquad\qquad l=n-i$$

Hatványpolinomok és együtthatók

n	j	i	l	$P_i(y)P_l(x)$	B_j
0	0	0	0	1	B_0
1	1	0	1	x	B_1
	2	1	0	y	B_2
2	3	0	2	x^2	B_3
	4	1	1	xy	B_4
	5	2	0	y^2	B_5

GNSS/szintezés és függővonal-elhajlás mérések

- GNSS/szintezés:

$$W(x,y) = \gamma \; N(x,y)$$

- függővonal-elhajlás összetevők:

$$W_x(x,y) = -\gamma \; \xi(x,y)$$
$$W_y(x,y) = -\gamma \; \eta(x,y)$$

GNSS/szintezés és függővonal-elhajlás mérések

- GNSS/szintezés:

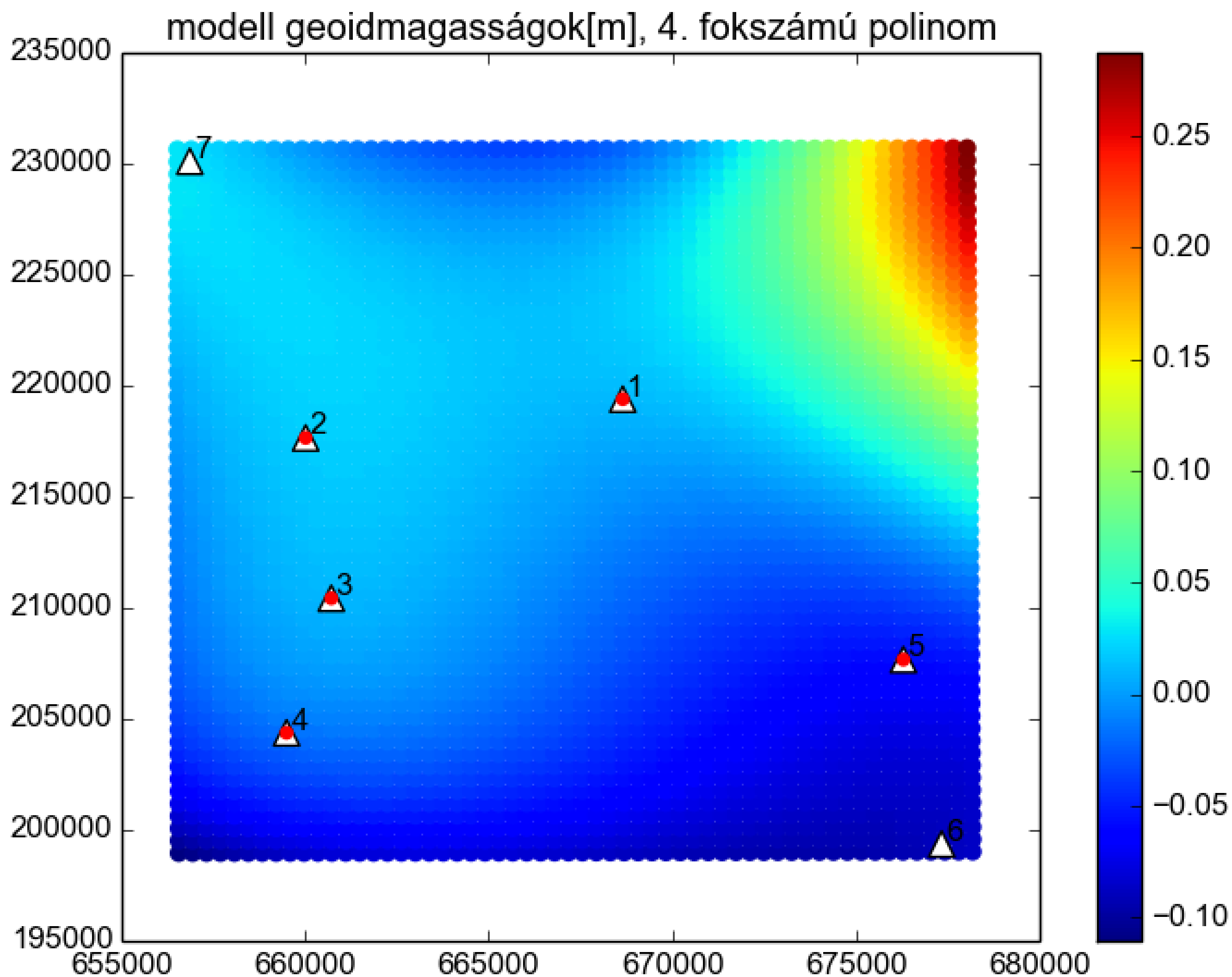
$$\gamma\ N(x,y)=\sum_{n=0}^{P}\sum_{i=0}^{n} B_j P_i(y) P_l(x)$$

- függővonal-elhajlás összetevők:

$$-\gamma\ \xi(x,y)=\sum_{n=0}^{P}\sum_{i=0}^{n} B_j P_i(y) P_l'(x)$$

$$-\gamma\ \eta(x,y)=\sum_{n=0}^{P}\sum_{i=0}^{n} B_j P_i'(y) P_l(x)$$

Példa: inverziós teszt számítás



folytatás: alkalmazott szoftverek