

Fizikai geodézia és gravimetria / 12.
**VONATKOZTATÁSI RENDSZER PARAMÉTEREINEK
MEGHATÁROZÁSA g MÉRÉSEK ALAPJÁN.**

Geodéziai vonatkoztatási rendszernek (*Geodetic Reference System = GRS*) a geodéziai földmodellt matematikailag meghatározó mennyiségek (paraméterek) (mint, pl. a vonatkoztatási felület a mérete, f lapultsága, a Föld tömegét jellemző kM geocentrikus gravitációs állandó, a Föld ω forgási szögsebessége, stb.) számszerű értékcsorát nevezzük. Meghatározása geometriai és fizikai jellegű mérési eredmények együttes feldolgozásával lehetséges

Korlátozódjunk a nehézségi erőter potenciál gömbfüggvény-sornak csak az első néhány tagjára. A legegyszerűbb eset a $k=0$ értékhez tartozó központos (centrális) erőter lenne, de ez még túl durva közelítés a földi szintfelületek alakjára, ezért a gyakorlatban elfogadott legegyszerűbb esetben $k=2$ -ig összegezzük a sor tagjait. Így jutunk a *Clairaut* által levezetett, és róla elnevezett **Clairaut-féle szintszferoidokra**. Ezek

$$U_2 = \frac{kM}{r} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 P_2(\sin \psi) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \psi = \text{állandó} \quad (1)$$

egyenletében az U normálpotenciál függvénynek a 0. és a 2. fokú gömbfüggvény tagja szerepel.

Jó közelítéssel, ennek r szerinti parciális differenciálhányadosa abszolút értékeként kapjuk meg az U_2 potenciálfüggvényhez tartozó normál nehézségi erőter *térerősségét* a

$$\gamma \approx \left| \frac{\partial U_2}{\partial r} \right| = \frac{kM}{r^2} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 P_2 \sin \psi \right] - \omega^2 r \cos^2 \psi . \quad (2)$$

gömbfüggvényt sor alakban. Írjuk fel az (1) és a (2) összefüggéseket az egyenlítőn ($\psi = 0^\circ$, $r = a$, $\gamma = \gamma_e$) és a pólusokon ($\psi = 90^\circ$, $r = b$, $\gamma = \gamma_p$):

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{kM}{a} \left(1 + \frac{1}{2} J_2 \right) + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \\ U &= \frac{kM}{b} \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 J_2 \right] \\ \gamma_e &= \frac{kM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \right) - \omega^2 a^2 \\ \gamma_p &= \frac{kM}{b^2} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{b} \right)^2 J_2 \right] \end{aligned} \right\}$$

amelyben a $b = a(1-f)$ helyettesítéssel a normál nehézségi erőteret meghatározó összesen 8 mennyiség

$$(U, \gamma_e, \gamma_p, kM, J_2, a, f \text{ és } \omega)$$

szerepel. Itt f a szintszferoid $f = (a - b) / a$ geometriai lapultsága.

Fejezzük ki az első három egyenletből kM -et, U -t és J_2 -t, és írjuk be ezek kifejezését a negyedikbe, amit végül oldjunk meg f -re. Így az

$$f = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \quad (3)$$

nevezetes alakra, a szintszferoidok **Clairaut-féle összefüggésére** jutunk. Ennek jelentősége abban van, hogy lehetőséget nyújt valamely szintszferoid f geometriai lapultságának meghatározására az ω forgási szögsebesség és a szferoid a egyenlítői félátmérőjének ismeretében, a normál nehézségi térerősség γ_p sarki és γ_e egyenlítői értéke, vagyis *fizikai jellegű mennyiségek alapján*.

A (3) jobb oldali első tagjában az egyenlítői centrifugális és nehézségi térerősség arányát szokás m -mel és a második tagot pedig β -val jelölni. Ez utóbbi

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \quad (4)$$

arányszámot *nehézségi lapultságnak* nevezzük.

Itt jegyezzük meg, hogy használjuk még a potenciál gömbfüggvény-sora 2.-fokú, nullarendű

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2} \quad (5)$$

együtthatójára a *sztatikai lapultság*, és tehetetlenségi nyomatékok

$$\frac{C - A}{C} \quad (6)$$

arányszámára a *dinamikai lapultság* elnevezéseket is.

Felhasználásukkal a szintszferoidok néhány összefüggése (az f geometriai lapultság 10^{-3} nagyságrendjéig és a $\psi \approx \varphi$ közelítéssel) a *normál nehézségi térerősség* a szintszferoid felszínén a φ földrajzi szélesség függvényében:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi + \dots), \quad (7)$$

ahol a nehézségi lapultság

$$\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = -\frac{3}{2} J_2 + 2m + \dots ; \quad (8)$$

a szferoidi *helyvektor hossza*

$$r = a (1 - f \sin^2 \varphi + \dots), \quad (9)$$

ahol

$$f = \frac{a - b}{a} = \frac{3}{2} J_2 + \frac{m}{2} + \dots \quad (10)$$

a szintszferoid geometriai lapultsága.

Végül a szintszferoidokra felírható az

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{\gamma_e} - \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} = \frac{5}{2} m + \beta \\ kM &= \gamma_e a^2 \left(1 - f + \frac{3}{2} m + \dots\right) \\ U &= \frac{kM}{a} \left(1 + \frac{f}{3} + \frac{m}{3} + \dots\right) \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

három alapösszefüggés a benne szereplő hét meghatározó mennyiség

$$(kM, U, \gamma_e, \gamma_p; a, f \text{ és } \omega)$$

között. Így 4 kiinduló mennyiség ismeretében a földmodell fennmaradó további 3 jellemzője a (11) három összefüggése felhasználásával kiszámítható.

A 4 kiinduló mennyiség közül az $\omega = 7,292116 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ és az $a = 6378245 \times 10^6 \text{ m}$ felvétele kézenfekvő, hiszen pl. a Föld forgási szögsebességét csillagászati mérésekből nagyon pontosan ismerjük. Ugyanakkor vegyük észre, hogy a (3) Clairaut-féle összefüggésben ugyanazok a γ_e és β ismeretlenek szerepelnek, mint a normál nehézségi gyorsulás (7) képletében! Így az f lapultság meghatározására vonatkozó feladatunkat visszavezethetjük a g normálképlet együtthatóinak meghatározására.

Ennek megfelelően, ha elegendő számú φ földrajzi szélességű pontban ismerjük a g nehézségi gyorsulás mérésekkel meghatározott és a szferoid felszínére redukált értékét, akkor a (7) összefüggést közvetítő egyenletként alkalmazva a γ_e és a β a legkisebb négyzetek alapelveinek felhasználásával meghatározhatók.

Ennél a számításnál fontos alapkövetelmény hogy a kiegyenlítésbe bevont g értékek ne tartalmazzanak szabályos hibát, ezért ha a földfelszínen különböző tengerszint feletti h magasságokban mértük a g értékeket, akkor ezeket át kell számítanunk (redukálni kell) a szintszferoid felületére. A szintszferoid feletti magasságokat viszont nem ismerjük, ezért helyette csak az ezt jól közelítő tengerszintre tudjuk átszámítani a méréseinket.

A g értékek átszámítása előtt viszont tisztáznunk kell, hogy mit is értünk h magasságban a terepszinten meghatározott g érték tengerszinti megfelelőjén. Ezzel kapcsolatosan két felfogás létezik:

1.) A g tengerszinti megfelelőjén azt az értéket értjük, amelyet a fizikai földfelszín alatt, a tömegek belsejében "a tengerszintig nyúló kút alján" mérnénk – miközben minden tömeg az eredeti helyzetében maradna.

2.) A g tengerszinti megfelelőjén azt a g értéket képzeljük, amelyet úgy mérnénk, hogy a tengerszint feletti tömegeket eltávolítanánk (dózerokkal eltüntetnénk).

Az első elgondolásnak megfelelő átszámítás során három lépésben jutunk eredményre: először Bouguer-redukcióval eltávolítjuk a tömegeket a földfelszín és a tengerszint között, ezt követően Faye-redukcióval levisszük a pontot a tengerszintre, majd egy harmadik lépésben ismét Bouguer redukciót alkalmazva visszaállítjuk a tömegeket az eredeti helyzetükbe:

$$g_P = g_P - \delta g_B + \delta g_F - \delta g_B = g_P - 2\delta g_B + \delta g_F. \quad (12)$$

A második elgondolás szerinti átszámítás során csak az előző két lépést kell elvégeznünk, tehát egy Bouguer és egy Faye-redukciót kell számítanunk:

$$g_{P'} = g_P - \delta g_B + \delta g_F. \quad (13)$$

Az 1. elképzelés hibája, hogy a meghatározandó felületen kívül nem lehetnek tömegek (a geoid felülete metszhet bele a tömegekbe), – ez a Laplace-egyenlet megoldásánál alapfeltevés volt, de a második felfogás szerinti redukció sem jó, mert ez viszont eltünteti a geoid feletti tömegeket, így meghamisítja a Föld össztömegét.

A Bouguer redukció:

$$\delta g_B = 2k\pi\rho h = -0.0419 \rho h[\text{m}] \cdot 10^{-3} [10^{-6} \text{m/s}^2], \quad (14)$$

A Faye-redukció:

$$\delta g_F = -0.3086 h[\text{m}] \cdot 10^{-3} [10^{-6} \text{m/s}^2], \quad (15)$$

A (13) szerinti redukció $\rho = 2670 \text{kg/m}^3$ átlagos földkéreg sűrűség esetén a (14) és a (15) összevonásával:

$$g_{P'} = g_P + 0.1967 \cdot h. \quad (16)$$

Ezekkel a redukált g értékekkel már végrehajtható a kiegyenlítés (bár még ezek is tartalmaznak kis szabályos hibát, mivel nem a szferoidra, hanem a tengerszintre redukáltunk).

A közvetítő egyenletek:

$$\gamma_i = g_{P'_i} + v_i = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi_i). \quad (17)$$

Előzetes értékeket veszünk fel:

$$\begin{aligned} \gamma_e &= \gamma_0 + \delta\gamma_e & \gamma_0 &= 9.78030 \\ \beta &= \beta_0 + \delta\beta & \beta_0 &= 0.005300 \end{aligned}$$

A közvetítő egyenleteket a linearizálás céljából sorbafejtjük:

$$\gamma_i = (\gamma_i)_0 + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \gamma_e} \delta\gamma_e + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \beta} \delta\beta, \quad (18)$$

ebből:

$$g_i + v_i = \underbrace{\gamma_0 (1 + \beta_0 \sin^2 \varphi_i)}_{(\gamma_i)_0} + \underbrace{(1 + \beta_0 \sin^2 \varphi_i)}_{a_i} \delta\gamma_e + \underbrace{(\gamma_0 \sin^2 \varphi_i)}_{b_i} \delta\beta. \quad (19)$$

A javítási egyenletek:

$$v_i = a_i \delta\gamma_e + b_i \delta\beta + l_i. \quad (20)$$

A megoldás:

$$\begin{bmatrix} \delta\gamma_e \\ \delta\beta \end{bmatrix} = \mathbf{x} = -(\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \mathbf{l} \rightarrow \gamma_0, \beta \rightarrow f. \quad (21)$$

Mintaszámitás:

FI (i) [fok-pe-mp]	h(i) [m]	g(i) [m/s ²]
66-29-54.0	88.0	9.823600
59-46-18.0	75.0	9.818990
54-59-06.0	79.0	9.814780
49-00-42.0	114.0	9.809560
45-28-42.0	116.0	9.805640
43-46-48.0	48.0	9.805010
35-52-48.0	0.0	9.798870
29-51-30.0	115.0	9.792950
27-28-00.0	15.0	9.791710
21-01-24.0	11.0	9.786860
15-36-30.0	381.0	9.783060
06-56-00.0	7.0	9.781340
a	= 6378245.000	[m]
OMEGA	= .7292116E-04	[1/s]
GAMMAe0	= 9.78030	[m/s ²]
BETA0	= .005300	

red. g(i)	A(i)	B(i)	L(i)
9.8237731	1.00445718	8.22501607	.0001196283
9.8191375	1.00395667	7.30139320	-.0001400018
9.8149354	1.00355505	6.56027334	.0001341951
9.8097842	1.00301988	5.57269921	.0000512073
9.8058682	1.00269424	4.97179679	.0007824906
9.8051044	1.00253718	4.68196069	.0000101153
9.7988700	1.00182056	3.35954247	-.0007642851
9.7931762	1.00131367	2.42416242	-.0000280042
9.7917395	1.00112750	2.08061607	-.0004120998
9.7868816	1.00068211	1.25872660	.0000897542
9.7838094	1.00038368	0.70802750	.0002432590
9.7813538	1.00007723	0.14251815	-.0002982824

A*A MATRIX:

12.05132780	47.43049519
47.43049519	265.29097340

A*L VEKTOR:

-.0002110399
.0018149428

AZ ISMERETLENEK:

d GAMMA = .000149949478
d BETA = -.000033650300

A VONATKOZASI RENDSZER PARAMETEREI:

a	=	6378245.000	[m]		
OMEGA	=	.7292116E-04	[1/s]		
GAMMAe	=	9.780450	[m/s ²]		
BETA	=	.005266350			
f	=	.003403060		1/f	= 293.85
kM	=	.3986040E+15	[m ³ /s ²]	M	= .5974E+25 [kg]
U	=	.6263744E+08	[m ² /s ²]		