5. előadás

Kiegyenlítő számítások MSc 2018/19

Áttekintés

- GNSS mérések feldolgozása
- Egész értékű legkisebb négyzetes eljárások
- Csoportos és szekvenciális kiegyenlítés

GNSS mérések feldolgozása

- Szatellita geodéziai hálózatok kiegyenlítése
- Funkcionális és sztochasztikus modell
- Mérések és kovariancia mátrixok
- Feldolgozó szoftverek

Szatellita geodéziai hálózatok kiegyenlítése

- GNSS rendszerek
  - NAVSTAR GPS (USA)
  - GLONASS (orosz)
  - GALILEO (EU)
  - BEIDOU 1, 2/COMPASS (Kína)
- mérések
  - abszolút geocentrikus helyzet (navigációs, PPP /RTK)
  - relatív (koordináta különbségek, SD, DD, RTK /hálózati)
- lépései
  - előzetes feldolgozás (szűrések, fiktív mérések képzése)
  - hálózat kiegyenlítés (RTK/PPP-nél elmarad – Kálmán szűrés)

Modell

- áltávolság-mérések (*P* kód- vagy *Φ* fázistávolság) (nemlineáris) közvetítő egyenletei

$$L = f(X)$$

L a mérések vektora

X a paraméterek vektora:

- az álláspontok koordinátái
- a műhold pályaszámításhoz szükséges paraméterek (perturbációk, földforgás paraméterek)
- jelterjedést befolyásoló légköri és egyéb hatások
- műhold és vevő paraméterek (óraállás, fáziscentrum külpontosság, ...)

A közvetítő egyenletek linearizálása

- az ismeretlenek előzetes X_0 értékei helyén Taylor-sorba fejtéssel linearizálunk

$$f(X_0+\delta x)=f(X)_{X=X_0}+\sum\left(\frac{\partial f(X)}{\partial X}\right)_{X=X_0}\delta x+\ldots$$

- a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk
- mátrixos alakban felírva a lineáris közvetítőegyenletek:

$$\underset{n\times 1}{b}=\underset{n\times m}{A}\;\underset{m\times 1}{x}+\underset{n\times 1}{v}$$

- minden esetben iteratív megoldás szükséges

Lineáris mérési kombinációk

- két frekvencián mérünk: L1 és L2 (19 és 24 cm)
- kombinálással mesterséges frekvenciát képzünk:

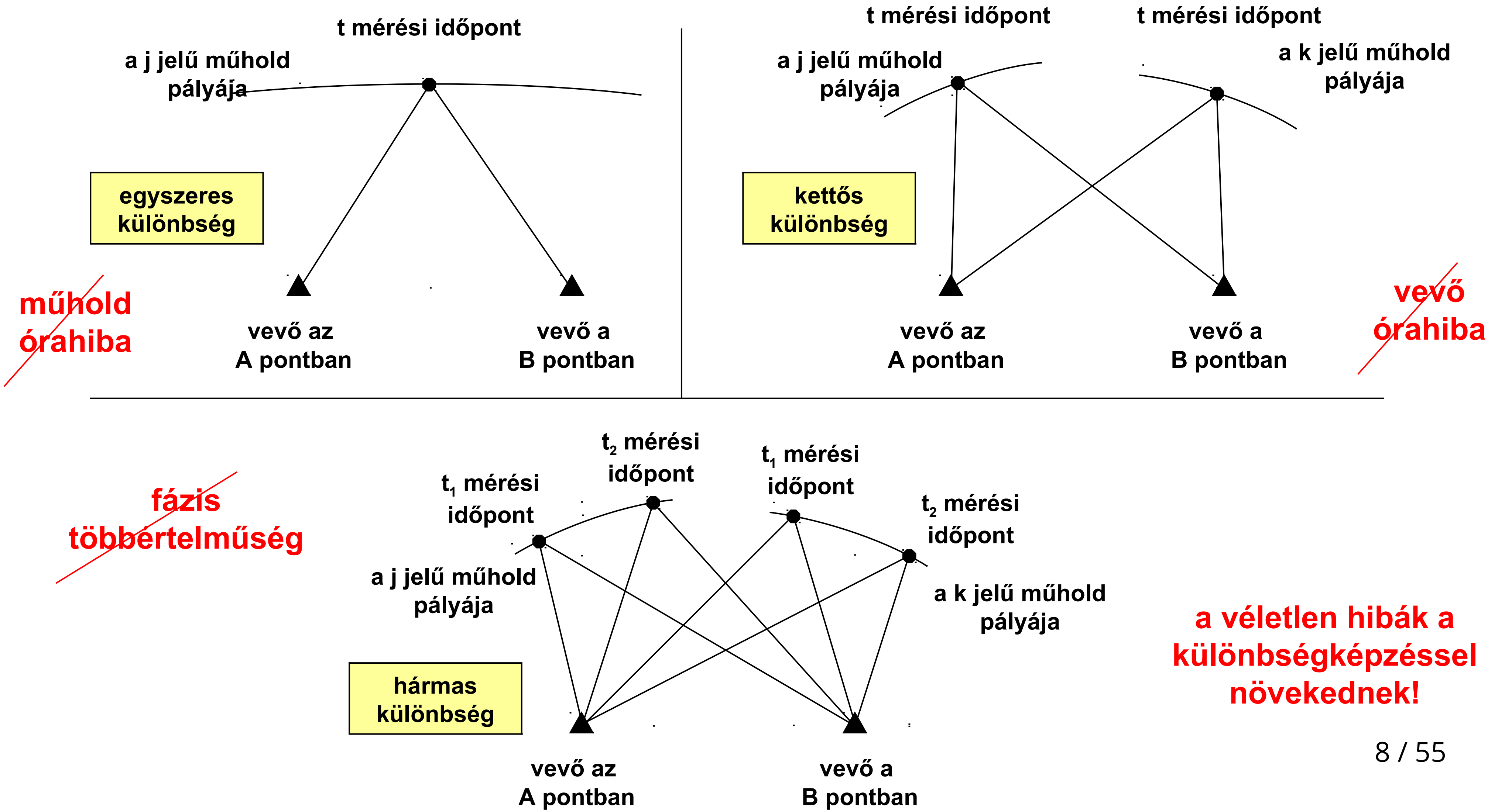
$$f_{n,m} = n\, f_1 + m\, f_2$$

$$\lambda_{n,m} = \lambda_1\, \lambda_2 \,/\, (n\, \lambda_2 + m\, \lambda_1)$$

n	m	λ [cm]	név	hatása
1	-1	86,4	L5, wide lane	iono/tropo hatás min.
1	1	10,7	L6, narrow lane	mérési zaj min.
77	-60	5,4	L3, iono free	~ionoszf. mentes
60	77	∞	L4, geom. free	távolság mentes

Relatív helymeghatározás különbségképzéssel

- egyszeres, kettős és hármas különbségek



a véletlen hibák a különbségképzéssel növekednek!

A sztochasztikus modell

- mérésekhez tartozó sztochasztikus modell (a priori kovariancia mátrix) szükséges a kiegyenlítéshez
- a különböző mérési típusokat (kód, fázis), az időben egymást követő méréseket általában (jobb híján) egymástól független azonos szórású v.v.-nak tekintjük:

$$M = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

- ez a modell pontosítható, mert vevőfüggő időbeli korreláció tapasztalható az egymást követő mérési epochák és mérési frekvenciák között (Bóna P. 2000)

Vevőfüggő korrelációk

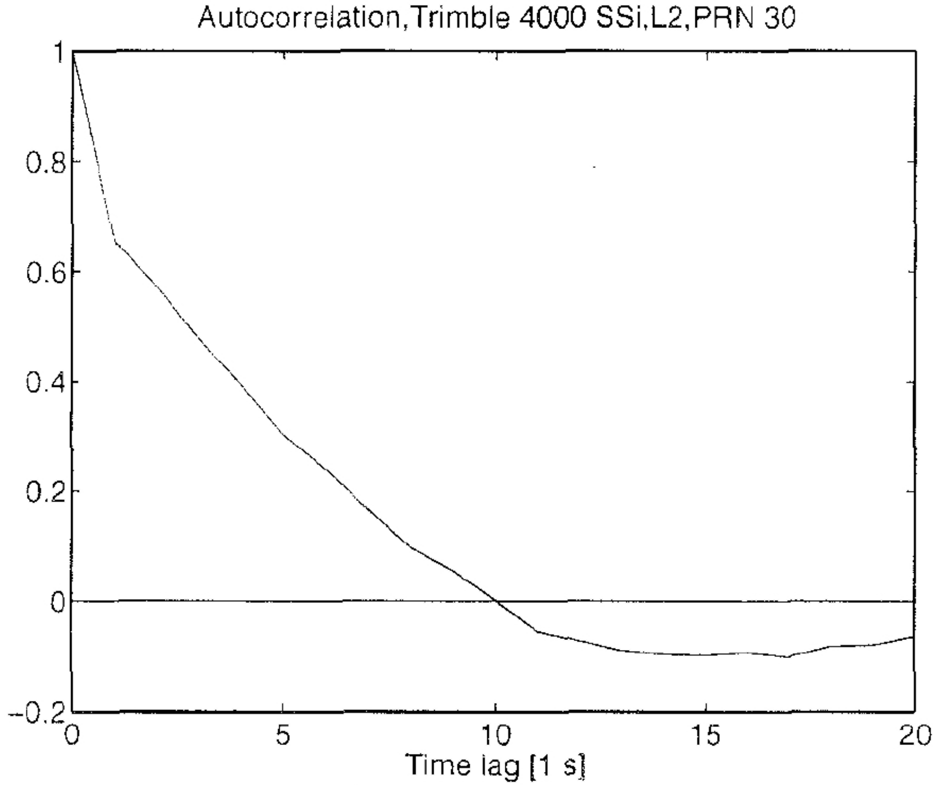


FIGURE 13. Autocorrelation for Trimble 4000 SSi L2 observation.

Forrás: Peter Bona (2000): Precision, Cross Correlation, and Time Correlation of GPS Phase and Code Observations, GPS Solutions, 2000, Volume 4, Number 2, Pages 3-13

TABLE 6

Correlation between the observation types, Leica 500

	L1	*L2*	*C1*	*P2*
L1		**0.54**	0.03	0.07
L2			**−0.15**	**−0.37**
C1				**0.12**
P2				

TABLE 2

Time lag where the autocorrelation becomes about zero

	L1	*L2*	*C1*	*P1*	*P2*
Ashtech	1	4	20	3	3
Dassault-Sercel	1	1	3	14	14
JPS	1	4	6	5	5
Leica 500	1	1	—	—	—
Trimble 4000 SSi	1	10	1	—	20
Leica CRS 1000	1	1	20	—	45
Trimble 4700/ MS 750	1	1	1	—	1

Ismétlés: hibaterjedés

- A hibával terhelt mennyiségek (Λ_i , n db.) **függvényei** (f_i , s db.) is hibával terheltek
  - A hibák terjedésének módját a hibaterjedés törvénye fejezi ki
- $U_i = f_i\,(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$, $\qquad i = 1, \ldots, s$
- Parciális deriváltak F mátrixa:

$$\underset{(s,n)}{F^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \Lambda_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Lambda_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_s}{\partial \Lambda_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_s}{\partial \Lambda_n} \end{bmatrix}$$

- Függvények N kovariancia mátrixa a mérések M kovariancia mátrixából számítható:

$$\underset{(s,s)}{N} = \underset{(s,n)}{F^T}\ \underset{(n,n)}{M}\ \underset{(n,s)}{F}$$

Lineáris kombinációk kovariancia mátrixa

- hibaterjedéssel számítható
- pl. a wide-lane kombinációra

$$M_{\mathrm{WL}} = D_{\mathrm{WL}} M \; D_{\mathrm{WL}}^{T} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \sigma_{\mathrm{WL}}^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

ahol

$$D_{\mathrm{WL}} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}$$

Egyszeres különbségek kovariancia mátrixa

- hibaterjedéssel számítható

$$M_{\mathrm{EK}} = D_{\mathrm{EK}} M \ D_{\mathrm{EK}}^{T} = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \sigma_{\mathrm{EK}}^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

ahol

$$D_{\mathrm{EK}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- a kétszeres különbségek M_{KK} kovariancia mátrixa már nem átlós mátrix

GNSS-hálózatok közvetett kiegyenlítése

- mérési eredmény a két vevőállomás által vett jelek kiértékelése során meghatározott vektor (ΔX, ΔY, ΔZ) összetevői
- a sztochasztikus modell az M kovariancia mátrix (és esetleg az m_{0v} súlyegység középhiba)

$$M = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{yz} & m_{xz} \\ & m_{yy} & m_{yz} \\ & & m_{zz} \end{bmatrix}$$

Súlymátrix számítás

- hálózati súlyegység m_{0h} középhiba tetszőlegesen vehető fel az egész hálózatra egységesen

- a P súlymátrix (Q súlykoefficiens mátrix)

$$P = m_{0h}^2 M^{-1} = m_{0h}^2 \left(m_{0v}^2 Q \right)^{-1}$$

A vektormérések javítási egyenlete

- vektor közvetítőegyenlete $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_V - \mathbf{x}_K$
- K : kezdőpont, V : végpont
- az i-edik vektor javítási egyenlet mátrixa:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- az egyenletrendszer hasonló a szintezési hálózatok javítási egyenletrendszeréhez
- csak a P súlymátrixon keresztüli függ

Az egyszerre mért vektorok kiegyenlítése

- 2-nél több vevő dolgozik együtt
- számítható vektorok száma:

vevők száma	2	3	4	5	7	*n*
független vektorok száma	1	2	3	4	6	n-1
vektorok száma	1	3	6	10	21	$n(n-1)/2$
vektorok/vevők	0,5	1	1,5	2	3	$(n-1)/2$

Feldolgozandó vektorok kiválasztása

- maximálisan lehetséges közös mérések száma alapján
- legrövidebb lehetséges bázisvonalak alapján
- előre definiált bázisvonalak
- STAR stratégia (csillag elrendezés referencia bázissal)

Pontosság, megbízhatóság meghatározása

- kiegyenlített mennyiségek kovarianciamátrixa
- abszolút és relatív hiba- ill. konfidencia ellipszoidok
- kiegyenlítés eredményeinek statisztikai elemzése
- durvahiba szűrés, súlyegység középhiba teszt, data-snooping

Hibaellipszoid

- *P* pont kovarianciamátrixa:

$$\underset{(3,3)}{M} = \begin{bmatrix} \mu_X^2 & c_{XY} & c_{XZ} \\ c_{XY} & \mu_Y^2 & c_{YZ} \\ c_{XZ} & c_{YZ} & \mu_Z^2 \end{bmatrix}$$

- főtengely-transzformáció

$$\underset{(3,3)}{M}\;\underset{(3,1)}{s} = \lambda \underset{(3,1)}{s}$$

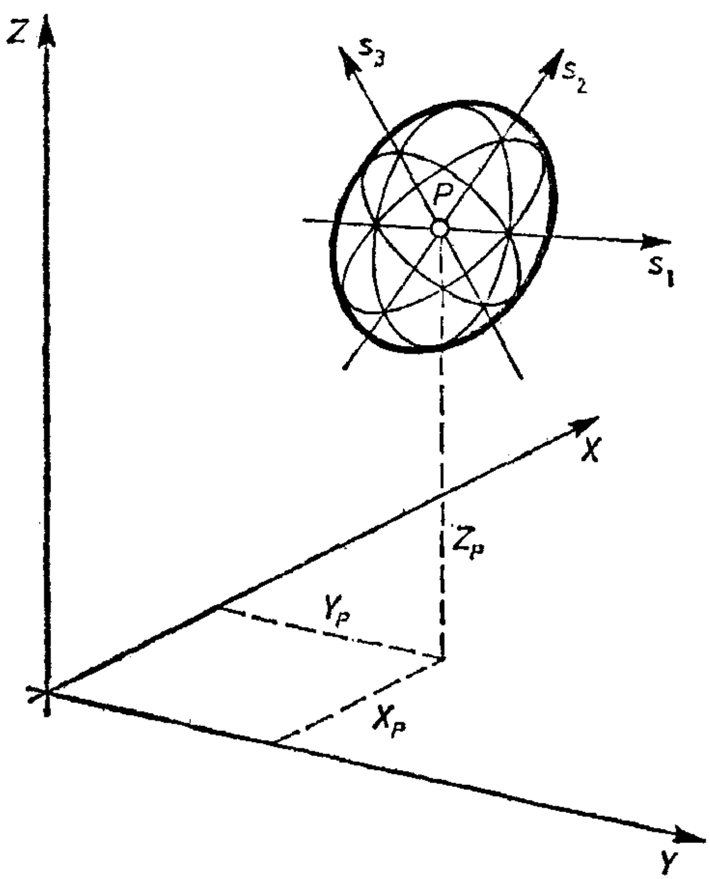
- karakterisztikus egyenlet gyökei a λ_1, λ_2, λ_3 sajátértékek

$$\begin{vmatrix} \mu_X^2-\lambda & c_{XY} & c_{XZ} \\ c_{XY} & \mu_Y^2-\lambda & c_{YZ} \\ c_{XZ} & c_{YZ} & \mu_Z^2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Hibaellipszoid

- A főtengelyekhez tartozó kovarianciamátrix
- hibaellipszoid egyenlete:

$$M_{SZ} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$



$$\frac{g^2}{\lambda_1} + \frac{h^2}{\lambda_2} + \frac{i^2}{\lambda_3} = 1$$

Ponthiba, közepes ponthiba

- *P* ponthiba $$P = \sqrt{\mathrm{Sp}\ M} = \sqrt{\mu_X^2 + \mu_Y^2 + \mu_Z^2} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$
- *K* közepes ponthiba $$K = \frac{P}{\sqrt{3}}$$
- *D* determináns

$$D = |M| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

GNSS-feldolgozó szoftverek

- Bernese 5.0, 5.2 (Berni Egyetem Csillagászati Tanszék, Svájc)
- GIPSY-OASIS (JPL, Caltech, USA)
- GAMIT-GLOBK (MIT, USA)
- GPSTk (ARL, Texasi Egyetem, USA, www.gpstk.org)
- RTKLIB (T. Takasu, www.rtklib.com)
- gLAB (ESA, gAGE/UPC, gage.upc.edu/gLAB)

Bernese 5 szoftver

- Berni Egyetem Csillagászati Tanszéke által fejlesztett, tudományos igényű GNSS feldolgozó program (v5.2: 432 326 programsor)

  http://www.bernese.unibe.ch
- LKN kiegyenlítés (GPSEST)
- automatizált feldolgozás (BPE)
- megoldások kombinálása (ADDNEQ2; szekvenciális kiegyenlítés)
- hibaszűrési algoritmusok (RNXSMT, CODSPP, MAUPRP)

Egész értékű kiegyenlítés

- Az ismeretlenek (egy része) csak egész érték lehet
  - GNSS fázisciklus többértelműségek
- megoldási eljárások
  - egészre kerekítés (IR)
  - lépésenkénti egészre kerekítés (IB)
  - egész értékű legkisebb négyzetek (ILS)
  - többértelműségek dekorrelációja
  - hányados vizsgálat (ratio test)

Paraméterbecslés

- Ismeretlen fázisciklus többértelműségek a vektora a kettős különbségek linearizált egyenletében:

$$y = Aa + Bb + r$$

- a: egész értékű paraméter vektor
- b: valós értékű paraméter vektor
- A, B: ismert együttható mátrixok
- r: véletlen zaj (Gauss-eloszlású, Q_{yy} kovariancia mátrixszal)

Lebegőpontos (float) megoldás

- Első lépésben az a fázisciklus többértelműségek egész szám jellegét figyelmen kívül hagyva becsüljük a paramétereket és kovariancia mátrixukat a legkisebb négyzetek módszerével:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Q_{\hat{a}\hat{a}} & Q_{\hat{a}\hat{b}} \\ Q_{\hat{b}\hat{a}} & Q_{\hat{b}\hat{b}} \end{bmatrix}$$

Egész megoldások becslése

- Az S leképezési függvénnyel becsüljük az $\check{a}$ megoldást:

$$\check{a} = S\left(\hat{a}\right)$$

- különböző lehetőségek
  - egészre kerekítés (IR)
  - lépésenkénti egészre kerekítés (IB)
  - egész értékű legkisebb négyzetek (ILS)
- elfogadási teszt (pl. hányados vizsgálat, ratio test)

Fix megoldás

- A többértelműségeket egész számokként rögzítjük
- A többi paramétert újra becsüljük a rögzített egész értékű paramétereket felhasználva:

$$\check{b} = \hat{b} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}\hat{a}}^{-1} (\hat{a} - \check{a})$$

- Kovariancia mátrixot is becsüljük:

$$Q_{\check{b}\check{b}} = Q_{\hat{b}\hat{b}} - Q_{\hat{b}\hat{a}} Q_{\hat{a}\hat{a}}^{-1} Q_{\hat{a}\hat{b}}$$

Egész értékű legkisebb négyzetek módszere (ILS)

- A többértelműségeket egész számokként becsülve, a minimum feltétele:

$$\check{a} = \min_{z \in \mathbb{Z}^n} \left(\hat{a} - z\right)^T Q_{\hat{a}\hat{a}}^{-1} \left(\hat{a} - z\right)$$

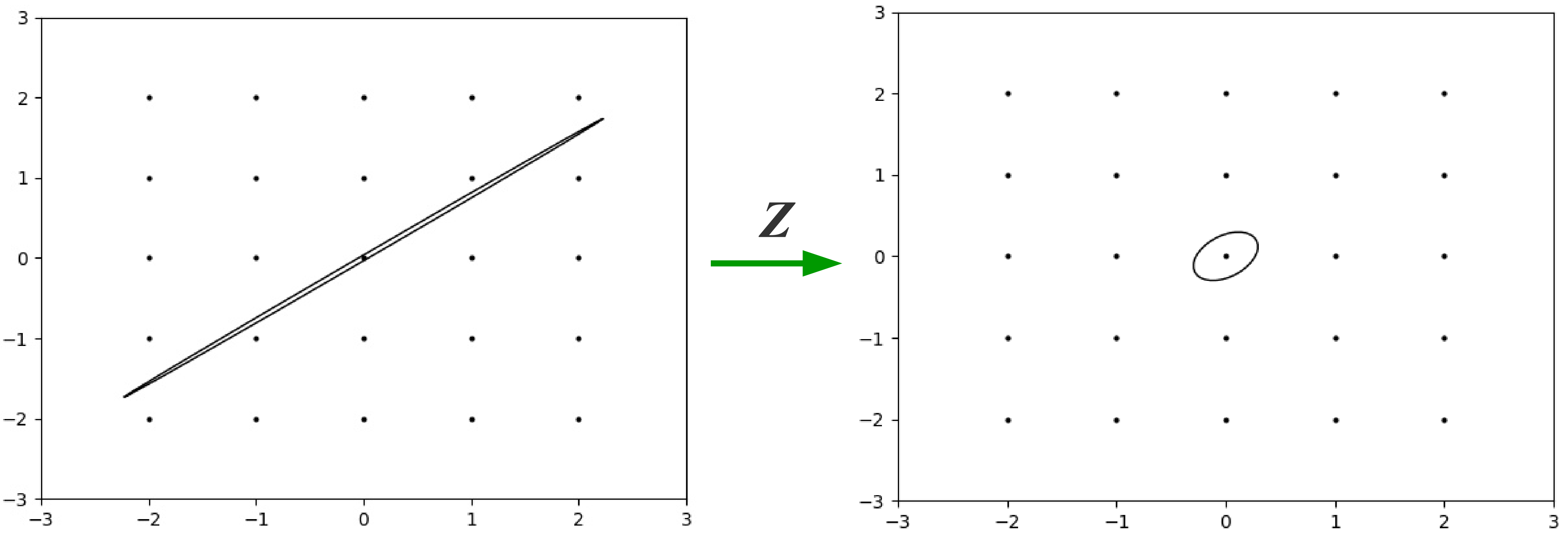
- A minimumot adó paraméter vektort az egész értékű rácspontokon történő kereséssel kapjuk meg a $\hat{z} = Z^T \hat{a}$ középpontú, $Q_{\hat{z}\hat{z}}$ kovariancia mátrixszal megadott n-dimenziós hiper-ellipszoid belsejében:

$$F(z) = \left(\hat{z} - z\right)^T Q_{\hat{z}\hat{z}}^{-1} \left(\hat{z} - z\right) \leq \chi^2, \qquad z \in \mathbb{Z}^n$$

- A χ^2 paraméter határozza meg a keresési ellipszoid méretét. Az az egész értékű z rácsopont a megoldás a hiper-ellipszoid belsejében, melyre $F(z)$ minimum.

Dekorreláció

- A hiper-ellipszoid elnyúlt alakja miatt a keresés sokáig tart
- Dekorrelációval (***Z*** - transzformáció) az elnyúlt alak megszüntethető és a keresés gyors lesz



Példa

- Az eredeti kovariancia mátrix erősen korrelált

$$Q = \begin{bmatrix} 4.9718 & 3.8733 \\ 3.8733 & 3.0188 \end{bmatrix}$$

- korrelációs együttható: $r = 0.9998$

Z mátrix

- három lépéses Gauss transzformációval a korreláció lecsökkenthető

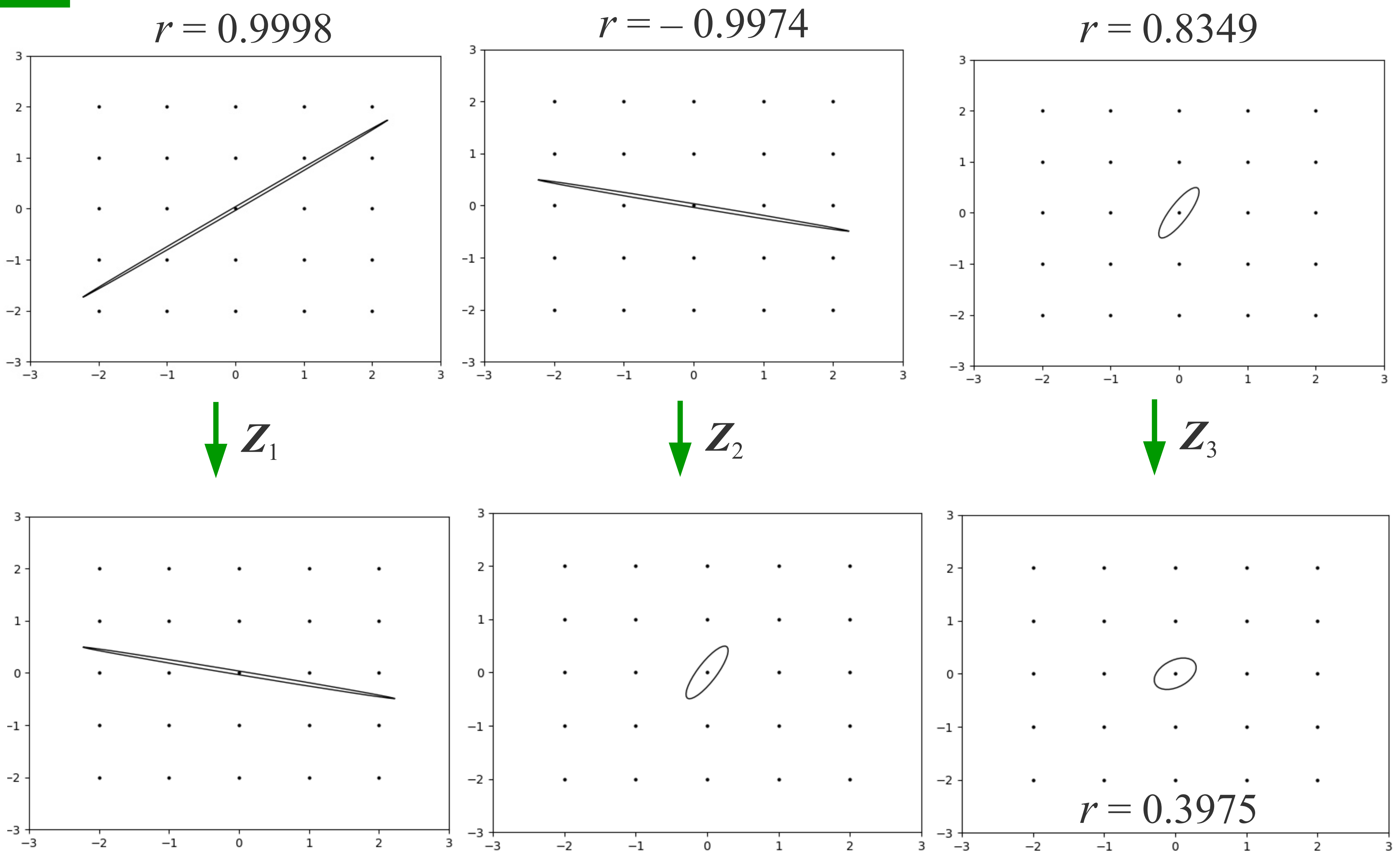
$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = Z_1 Z_2 Z_3 = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Q_z = Z\,Q\,Z^T = \begin{bmatrix} 0.0868 & 0.0347 \\ 0.0347 & 0.0878 \end{bmatrix}$$

- korrelációs együttható: $r = 0.3975$

Lépésenkénti transzformáció



Csoportokban történő kiegyenlítés

- Alapelve, módszerei
- Folyamatos csoportképzés, szekvenciális kiegyenlítés
- Csoportos kiegyenlítés alkalmazása a geodéziában
- GNSS mérések szekvenciális kiegyenlítése

Csoportokban történő kiegyenlítés

- A mérések egyidejű kiegyenlítése helyett csoportokra bontva végezzük azt
- Okok:
  - megoldandó normálegyenlet méretének csökkentése
  - különböző időben elvégzett mérések (mozgásvizsgálat, on-line mérési és feldolgozási módszerek
  - durva hibák kimutatása utáni, durva hibás mérések kihagyásával történő kiegyenlítés

Csoportonkénti kiegyenlítés elve

- feltételi, javítási, kényszerfeltételi vagy normálegyenleteket csoportokra választják szét
- a csoportokat külön-külön dolgozzák fel
- alapfeltétel: a csoportonkénti kiegyenlítés ugyanarra az eredményre vezessen mint az együttes kiegyenlítés:

$$v_1^T P_{11} v_1 + v_2^T P_{22} v_2 + \cdots + v_k^T P_{kk} v_k = \min$$

Kétcsoportos módszer

- az egyenletek valamely meglevő csoportjához egy további csoportot vonnak hozzá
- a két csoport együttesen alkotja az új csoportot
- ehhez kerül hozzá a harmadik csoport, stb. = ismételt kétcsoportos módszer
- a csoportok összevonásakor az egyes csoportok kovariancia- (súly-) mátrixát a terjedési törvények felhasználásával képezzük

Csoportképzés típusai

- folyamatos csoportképzés
  - 2., 3., ..., k-adik csoporthoz tartozó normálegyenletet mindig az 1. csoporthoz tartozóval vonják össze
  - Példa: mozgásvizsgálat, on-line mérésfeldolgozás, szekvenciális kiegyenlítés: i. csoportból (i+1)-dik
- összekapcsolásos csoportképzés
  - az 1. csoportot egymástól független blokkok alkotják, amelyek között a kapcsolatot a 2. csoport blokkjai biztosítják
  - Példa: különböző országok geodéziai hálózatainak együttes kiegyenlítése

Folyamatos csoportképzés

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{1. cs.} & \text{2. cs.} & \text{3. cs.} & & k\text{. cs.}
\end{array}
$$

$$
N = \begin{bmatrix}
N_{11} & N_{12} & N_{13} & & N_{1k} \\
N_{21} & N_{22} & N_{23} & & N_{2k} \\
N_{31} & N_{32} & N_{33} & & N_{3k} \\
 & & & & \vdots \\
N_{k1} & N_{k2} & N_{k3} & \cdots & N_{kk}
\end{bmatrix}
$$

Összekapcsolásos csoportképzés

- 1. csoport: belső (saját) ismeretlenek egymástól független N_{ii} blokkok
- 2. csoport: külső (közös) ismeretlenek

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \phantom{N_{aa}} & \phantom{N_{bb}} & \text{1. cs.} & \text{2. cs.} \end{array} \\
N = & \left[\begin{array}{ccc|c}
N_{aa} & 0 & 0 & N_{a2} \\
0 & N_{bb} & 0 & N_{b2} \\
0 & 0 & N_{cc} & N_{c2} \\
\hline
N_{2a} & N_{2b} & N_{2c} & N_{22}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

A továbbiakban megvizsgált esetek

- Folyamatos csoportképzés közvetítő egyenletekkel (II. kiegy. csoport)
  - Együttes és csoportonkénti kiegyenlítés összehasonlítása
- Normálegyenletek összeadása (stacking)
  - Alkalmazás GNSS mérések feldolgozása esetében

Folyamatos csoportképzés közvetítő egyenletekkel

- először *n* db. mérés és feldolgozása:

$$v_1 = A_1 x_1 - l_1$$

$$x_1 = \left(A_1^T P_{11} A_1 \right)^{-1} A_1^T P_{11} l_1 = N^{-1} n$$

- másodszor *s* db. mérés (független az elsőtől)

$$v_2 = A_2 x_2 - l_2$$

$$\left(A_1^T P_{11} A_1 + A_2^T P_{22} A_2 \right) x_2 - \left(A_1^T P_{11} l_1 + A_2^T P_{22} l_2 \right) = 0$$

együttes normálegyenlet, x_2 az új paraméter becslés, ezt kell meghatározni x_1 segítségével

Normálegyenlet átalakítása

- y paraméter vektor bevezetése az együttes normálegyenletbe:

$$\left(A_1^T P_{11} A_1 + A_2^T P_{22} A_2\right) x_2 - \left(A_1^T P_{11} l_1 + A_2^T P_{22} l_2\right) = 0$$

$$\left(A_1^T P_{11} A_1\right) x_2 - A_1^T P_{11} l_1 + A_2^T P_{22}\left(A_2 x_2 - l_2\right) = 0$$

$$\boxed{N x_2 - A_1^T P_{11} l_1 + A_2^T y = 0}$$

$$y = P_{22}\left(A_2 x_2 - l_2\right)$$

- 0-ra rendezve az y-ra vonatkozó egyenletet:

$$\boxed{A_2 x_2 - l_2 - P_{22}^{-1} y = 0}$$

A megoldandó egyenletrendszer (ld. Detrekői, 5.300)

$$\begin{bmatrix} N & A_2^T \\ A_2 & -P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T P_{11} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{matrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{matrix} \right.$$

a bal oldali hipermátrixot kell invertálni (figyeljük meg a szerkezetét: folyamatos csoportképzésről van szó)

számunkra az x_2-re kapott megoldás lesz érdekes

Hipermátrix inverze

Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai, (5.1.25)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & G \\ H & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad |A| \neq 0$$

$$F = A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1}$$

$$G = -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}$$

$$H = -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1}$$

$$I = \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}$$

közvetlenül számítható Gauss eliminációval a blokkokon:

$$\begin{bmatrix} A & B & E & 0 \\ C & D & 0 & E \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & E \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B & -CA^{-1} & E \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} E & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & E & -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} E & 0 & A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \\ 0 & E & -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Együttható mátrix inverze

$$\begin{bmatrix} N & A_2^T \\ A_2 & -P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & -S \\ H & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

$$F = N^{-1} + S A_2 N^{-1}$$

$s \times s$ méretű mátrix

$$S = -N^{-1} A_2^T \boxed{\left(P_{22}^{-1} + A_2 N^{-1} A_2^T \right)^{-1}}$$

$$H = \left(P_{22}^{-1} + A_2 N^{-1} A_2^T \right)^{-1} A_2 N^{-1}$$

$$I = -\left(P_{22}^{-1} + A_2 N^{-1} A_2^T \right)^{-1}$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{-1} + SA_2 N^{-1} & -S \\ H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^T P_{11} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

figyelembe véve az *i* = 1. lépés eredményét:

$$x_1 = N^{-1} A_1^T P_{11} l_1$$

az *i* = 2. lépésben kapott paraméter becslés:

$$\boxed{x_2 = x_1 + SA_2 x_1 - S\, l_2}$$

A kiegyenlített paraméterek súlykoefficiens mátrixa

- az első lépésben meghatározott mátrix:

$$Q_{x1x1} = N^{-1} = \left(A_1^T P_{11} A_1 \right)^{-1}$$

- a második lépés után:

$$Q_{x2x2} = Q_{x1x1} + S A_2 Q_{x1x1}$$

Együttes és csoportonkénti kiegyenlítés összehasonlítása

- együttesen (2 db $r \times r$ méretű mátrix)

$$x_1 = \left(A_1^T P_{11} A_1\right)^{-1} A_1^T P_{11} l_1$$

$$x_2 = \left(A_1^T P_{11} A_1 + A_2^T P_{22} A_2\right)^{-1} \left(A_1^T P_{11} l_1 + A_2^T P_{22} l_2\right)$$

- csoportonkénti kiegyenlítéssel (1 db $r \times r$ méretű, 1 db $s \times s$ méretű mátrix invertálása)

$$x_1 = \left(A_1^T P_{11} A_1\right)^{-1} A_1^T P_{11} l_1$$

$$x_2 = N^{-1} x_1 + S A_2 x_1 - S\ l_2$$

minél nagyobb $r - s$, annál célszerűbb

Normálegyenletek összeadása (stacking)

- Célszerű akkor, ha sokkal több a mérés mint a paraméter (*n* ~ *s* >> *r*), és az egyes mérési sorozatok függetlenek, például GNSS mérések feldolgozása esetén (ADDNEQ2)
- *k* db. normálegyenlet (*x* közös paraméter vektor – előzetes paraméter kiküszöbölés):

$$\sum_{i=1}^{k} \left(A_i^T P_{ii} A_i \right) x - \sum_{i=1}^{k} \left(A_i^T P_{ii} l_i \right) = 0$$

Normálegyenletek összeadása

- javítási egyenletek és súlymátrix (független mérések esetén):

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k \end{bmatrix}$$

- normálegyenletek előállítása a közös x paraméter vektorra:

$$\left(A^T P\right) \cdot A \qquad\qquad \left(A^T P\right) \cdot l$$

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 & A_2^T P_2 & \cdots & A_k^T P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} A_i^T P_i A_i \qquad \begin{bmatrix} A_1^T P_1 & A_2^T P_2 & \cdots & A_k^T P_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} A_i^T P_i l_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(A_i^T P_{ii} A_i\right) x - \sum_{i=1}^{k} \left(A_i^T P_{ii} l_i\right) = 0$$

Bernese ADDNEQ2 példa

- A szűréssel elvégzett Bernese feldolgozás esetében (A245?.OUT):

Session	mérések	paraméterek
A	1707	34
B	1911	42
C	1805	44
D	1417	34

- sokkal több a mérés, mint a paraméter
- célszerű a normálegyenletek összeadása

- A szűrés nélkül elvégzett Bernese feldolgozás esetében (B245?.OUT):

Session	mérések	paraméterek
A	1746	34
B	2058	39
C	1972	37
D	1592	37

- a meghatározott paraméterek

Paraméter típus	kiegyenlített	explicit	implicit / előre kiküszöbölt
álláspont koordináták, sebességek	9	9	0
álláspontonkénti troposzféra paraméterek	15	15	0
előre kiküszöbölt param.	86	0	86
összesen	**110**	**24**	**86**

Irodalom

- Detrekői 5.8 fejezet, 9.5.4 alfejezet
- Ádám et al. (2004): Műholdas helymeghatározás, 6. rész
- Husti et al. (2000): Globális helymeghatározó rendszer (bevezetés), 6.7 fejezet