2. előadás

Kiegyenlítő számítások MSc 2018/19

Áttekintés

- Statisztikai próbák, hipotézis vizsgálat
- Cramér-Rao határ
- Becslés statisztikai hatásfoka

Statisztikai próba

- Olyan teszt eljárás, amely valamely statisztikai feltevés ellenőrzését teszi lehetővé az adatrendszer (minta) alapján
  - Paraméteres próbák
  - Nemparaméteres próbák

Paraméteres próbák

- Ismert eloszlástípus esetén a mintából származó információ alapján döntünk az eloszlás ismeretlen paramétereire tett feltevés elfogadásáról
- Egymintás próba:

  egy adatrendszer van
- Kétmintás próba:

  két adatrendszer van
- Többmintás próba:

  varianciaanalízis

Nemparaméteres próbák

- Ismeretlen eloszlástípus esetén alkalmazhatók
- Illeszkedésvizsgálat:

  A mérési adatokból előállított tapasztalati sűrűségfüggvény egy adott elméleti eloszlásfüggvénnyel leírható-e?
- Függetlenség vizsgálat:

  Két külön mérési eljárásból származó adatsor függetlennek tekinthető-e?
- Homogenitás vizsgálat:

  Két külön mérési eljárásból származó adatsor azonos eloszlású-e?

Hipotézis vizsgálat

- Statisztikai hipotézis

  A megfigyelt mennyiség eloszlásának a típusára vagy az eloszlásának a paramétereire tett feltevés

- Nullhipotézis (H_0):

  Az előzetes feltevést igaznak gondoljuk

- Ellenhipotézis (H_1):

  Bármilyen, a nullhipotézissel szemben álló feltevés

Egymintás, paraméteres próba (u-próba)

- Ismert az x mennyiség eloszlása (Gauss típusú) és a mennyiség σ szórása
- A változóra vett mintában az átlag $E(x)$.
- Igaz-e, hogy az egész sokaság várható értéke, azaz az eloszlás helyparamétere T_0?
- Nullhipotézis H_0: $E(x) = T_0$
- Ellenhipotézis H_1: $E(x) \neq T_0$

Statisztikai függvény, statisztika

- A statisztika olyan számítási utasítás, amely egyetlen adatot számít ki *n* db adat alapján
- A statisztikai próba feladata:

  Meg kell találni azt a statisztikai függvényt, amelynek eloszlását H_0 fennállása esetén ismerjük
- Monte Carlo változatban:

  Meg kell határozni H_0 fennállása esetén a statisztikai függvény tapasztalati eloszlását

Egymintás u-próba statisztikai függvénye

- Legyen az u változó az $E(x)$ standardizáltja (egységnyi szórás, zérus átlag), és válasszuk ezt statisztikai függvénynek.
- Az u is Gauss-eloszlást követ:

$$u = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - T_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

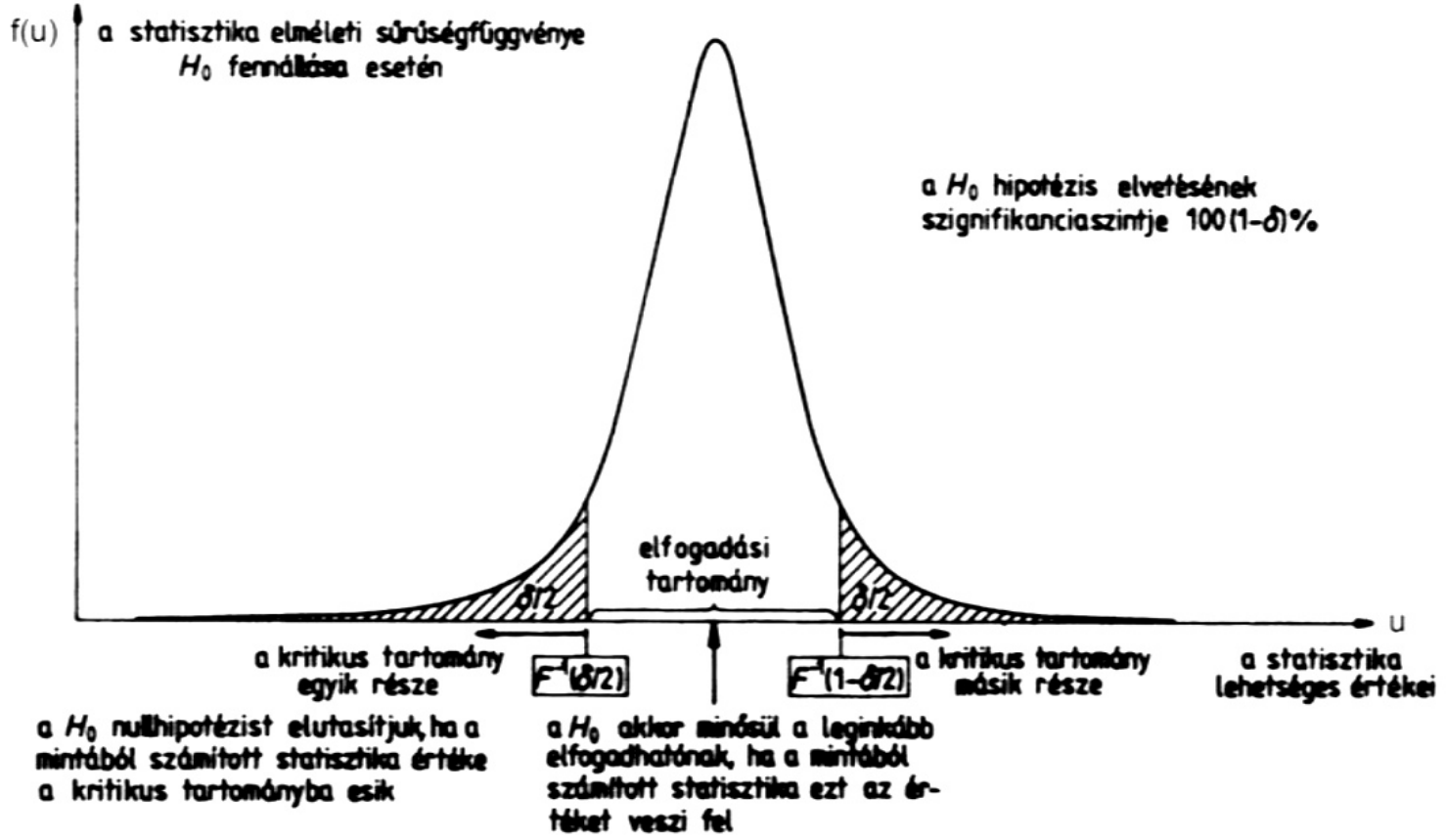
Megbízhatósági intervallum

- A $[-u_\delta, u_\delta]$ megbízhatósági intervallum kis δ valószínűség esetén nagy valószínűséggel tartalmazza az u értékét
- Az $1-\delta$ a szignifikancia szint

$$P\left(-u_\delta \le \frac{E(x)-T_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_\delta\right) = P\left(\left|\frac{E(x)-T_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le u_\delta\right) = 1-\delta$$

Egymintás u-próba

- Ha a H_0 nullhipotézis igaz, akkor az u nagy $1-\delta$ valószínűséggel esik a $[-u_\delta, u_\delta]$ megbízhatósági intervallumba, azaz kis δ valószínűséggel a kritikus tartományba

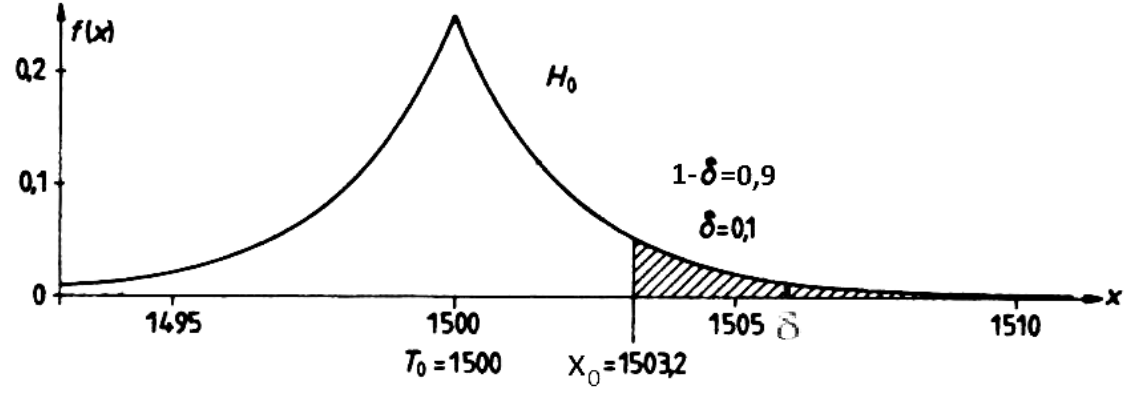


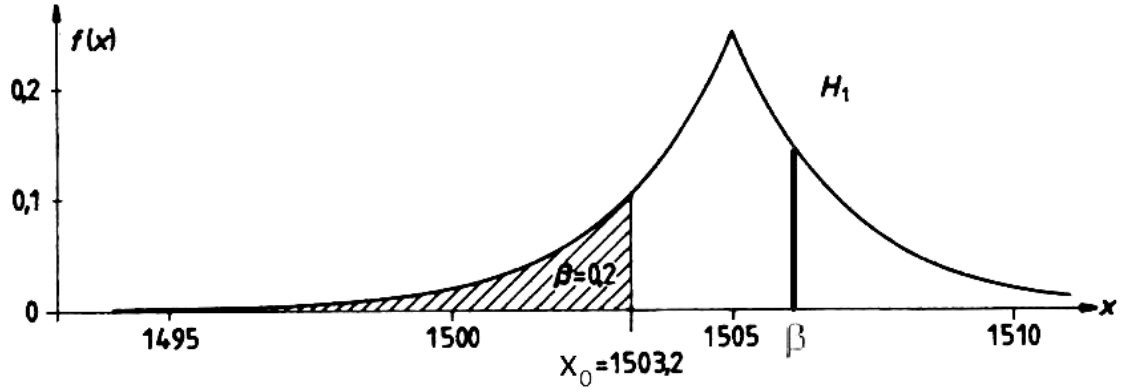
Döntés

- Ha u a kritikus tartományban van, akkor a H_0 nullhipotézist elvetjük, ha azonban u a megbízhatósági tartományon belül van, akkor elfogadjuk
- H_0 hibás elvetése: *elsőfajú hiba*
- H_0 hibás elfogadása: *másodfajú hiba*
- Helytelen azt mondani, hogy „a próba alapján a H_0 nullhipotézist $1-\delta$ szignifikanciaszinten elfogadjuk”
  - Ez azt sejteti, hogy a nullhipotézis elfogadása nagy biztonsággal történt, holott épp ellenkezőleg! A másodfajú hiba valószínűsége ilyenkor igen nagy lehet.
- Helyesen: „x eltérése T_0-tól nem annyira lényeges, hogy a nullhipotézist $1-\delta$ szignifikanciaszinten elvethessük”

Hibás döntések

- H_0 hibás elvetése a kritikus tartományban: *elsőfajú hiba*
- H_0 hibás elfogadása a konfidencia tartományban: *másodfajú hiba*





- H_0 elfogadása annál nagyobb kockázattal jár, minél nagyobb az $1-\delta$.

Cramér-Rao határ

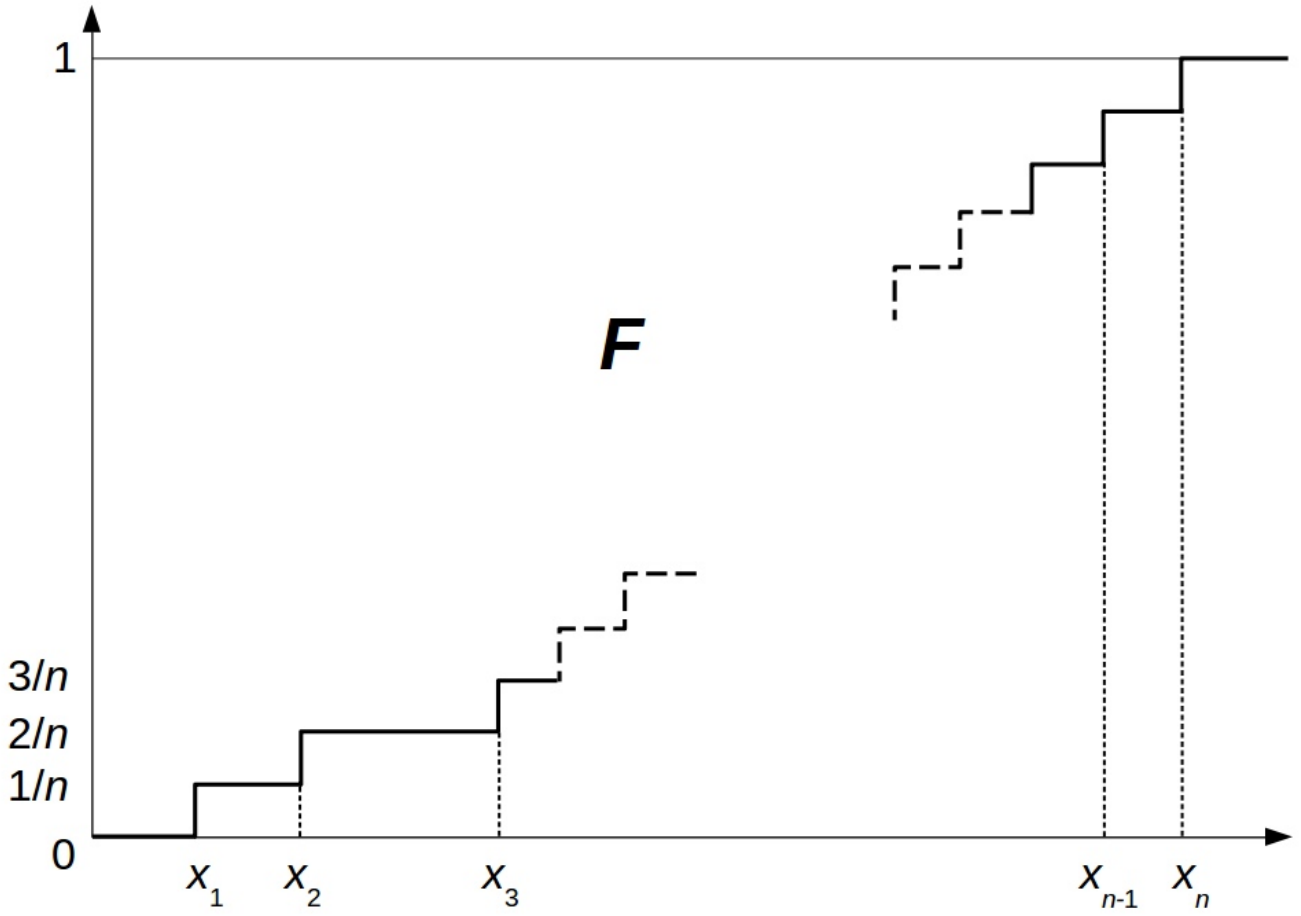
- Az IC-függvény
  - mi a durva hibájú adatok torzító hatása?
  - mi egy mintaelem befolyása a becslésre?
- Becslések aszimptotikus szórása
  - mérések számának növelése mit eredményez?
- Minimális aszimptotikus szórás: a Cramér-Rao határ
  - létezik legkisebb szórású becslés?
- A Cramér-Rao határ különböző eloszlástípusokra

Az *IC*-függvény (hatásgörbe)

- Milyen mértékben módosítja egyetlen x adat a helyparaméter becslés T eredményét?
- a válasz függ:
  - a becslés algoritmusától (legyen ez is T)
  - az aktuális F eloszlástól
  - az adat x értékétől
- $IC(x, F, T)$ *hatásgörbe* (*i*nfluence *c*urve, IC-görbe, IC-függvény) adja meg a választ

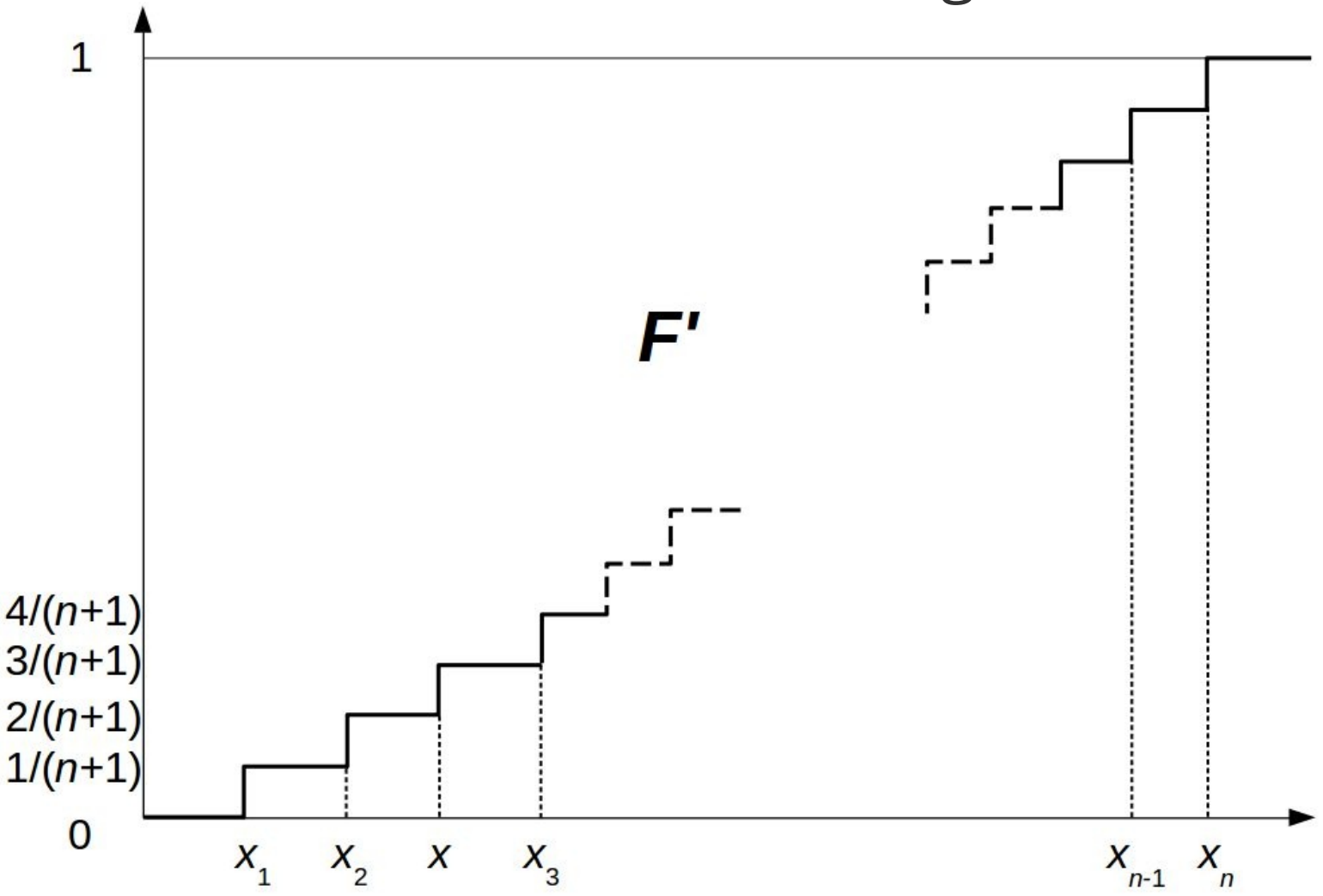
Diszkrét eloszlásfüggvény

- *n* elemű sorbarendezett minta: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- a minta értékeknél 1/*n* ugrás



Diszkrét eloszlásfüggvény

- egy új *x* értékkel bővített minta: $x_1, x_2, \ldots, x, \ldots, x_n$
- a minta értékeknél $1/(n+1)$ ugrás



Megváltozott eloszlásfüggvény

1) eredeti ***F*** eloszlásfüggvényt $n/(n+1)$-el szorozzuk

2) x értékig 0-t, utána $1/(n+1)$-et hozzáadunk

$$\boldsymbol{F}'=\frac{n}{n+1}\boldsymbol{F}+\frac{1}{n+1}H(x)$$

3) legyen n nagy érték, $t = 1/(n+1)$ kis érték

$$\boldsymbol{F}'=(1-t)\boldsymbol{F}+t\,H(x)$$

$H(x)$ a Heaviside (egységugrás) függvény x-ben

Az *IC*-függvény definíciója

$$IC(x, F, T) = \lim_{t \to 0} \frac{T[(1-t) \cdot F + t \cdot H(x)] - T(F)}{t}$$

$H(x)$ az egységugrás (Heaviside) függvény

- Az IC-függvény megadja egyetlen, x értékű járulékos észlelésnek a T értékváltozásában megnyilvánuló hatását
- $T(F)$ az eredeti F eloszlás alapján becsült T paraméter
- $[(1-t) \cdot F + t \cdot H(x)]$ a megváltozott eloszlás
- t a járulékos észlelés részaránya a többi adathoz képest

A becslés értékének változása

- nagy n esetén közelítőleg ΔT értékkel változik meg a T becslés értéke, ha az F-eloszlásfüggvényű eloszlásból származó n elemű mintánkhoz még egyetlen x értékű észlelést is figyelembe veszünk ($t = 1/n$):

$$IC(x, F, T) = \frac{\Delta T}{1/n}$$

$$\Delta T = \frac{IC(x, F, T)}{n}$$

Az *IC*-görbe alkalmazása

- Közvetlen számszerű információt ad arról, hogy a durva hibájú adatok milyen mértékben torzítják az adott algoritmus szerint számított hely (vagy skála) paraméter becslés értékét (rezisztencia)
  - a számtani átlag IC-függvénye x-szel egyenlő (nem rezisztens)
- a minta egy x értékű eleme milyen mértékben vesz részt a helyparaméter becslés értékének kialakításában (robusztusság)

Helyparaméter becslés

- becslés súlyozott átlaggal

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)}$$

- átrendezve kapjuk a becslést jellemző ψ függvényt

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot (x_i - T) = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i - T) = 0$$

IC-függvény számítása a ψ-függvényből

- becslés integrál megfelelője $f(x)$ sűrűségfüggvényre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-T)\, f(x)\, dx = 0$$

- $f(x)$ helyére beírva a módosult $g(x)$ sűrűségfüggvényt

$$g(x) = (1-t)\cdot f(x) + t\cdot\delta(x-x_0)$$

kapjuk

$$(1-t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-T)\cdot f(x)\, dx + t\cdot\psi(x_0-T) = 0$$

IC-függvény számítása a *ψ*-függvényből

- Az IC-függvény a dT/dt -nek $t \longrightarrow 0$ helyen felvett értéke, amit t szerinti differenciálás után átrendezéssel kaphatunk meg

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\psi(x_0 - T) - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - t) \cdot f(x)\, dx}{(1 - t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x - T) \cdot f(x)\, dx + t \cdot \psi'(x_0 - T)}$$

- A $t \longrightarrow 0$ határátmenetben megkapjuk az IC-függvényt (hatásgörbét)

IC-függvény számítása a *ψ*-függvényből

- Az IC-függvény a helyparaméter becslésére, $S = 1$ skálaparaméterrel, $T = 0$ helyparaméterrel

$$IC(x, F, T) = \frac{\psi(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x) \cdot f(x)\, dx}$$

A leggyakoribb érték számításának ψ-függvénye

- Az általánosított leggyakoribb érték integrálformulája:

$$M_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(k\varepsilon)^2 + (x - M_k)^2} f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k\varepsilon)^2 + (x - M_k)^2} f(x)\,dx}$$

A leggyakoribb érték számításának ψ-függvénye

- Az integrálformulából következik az általánosított leggyakoribb érték számításának ψ-függvénye:

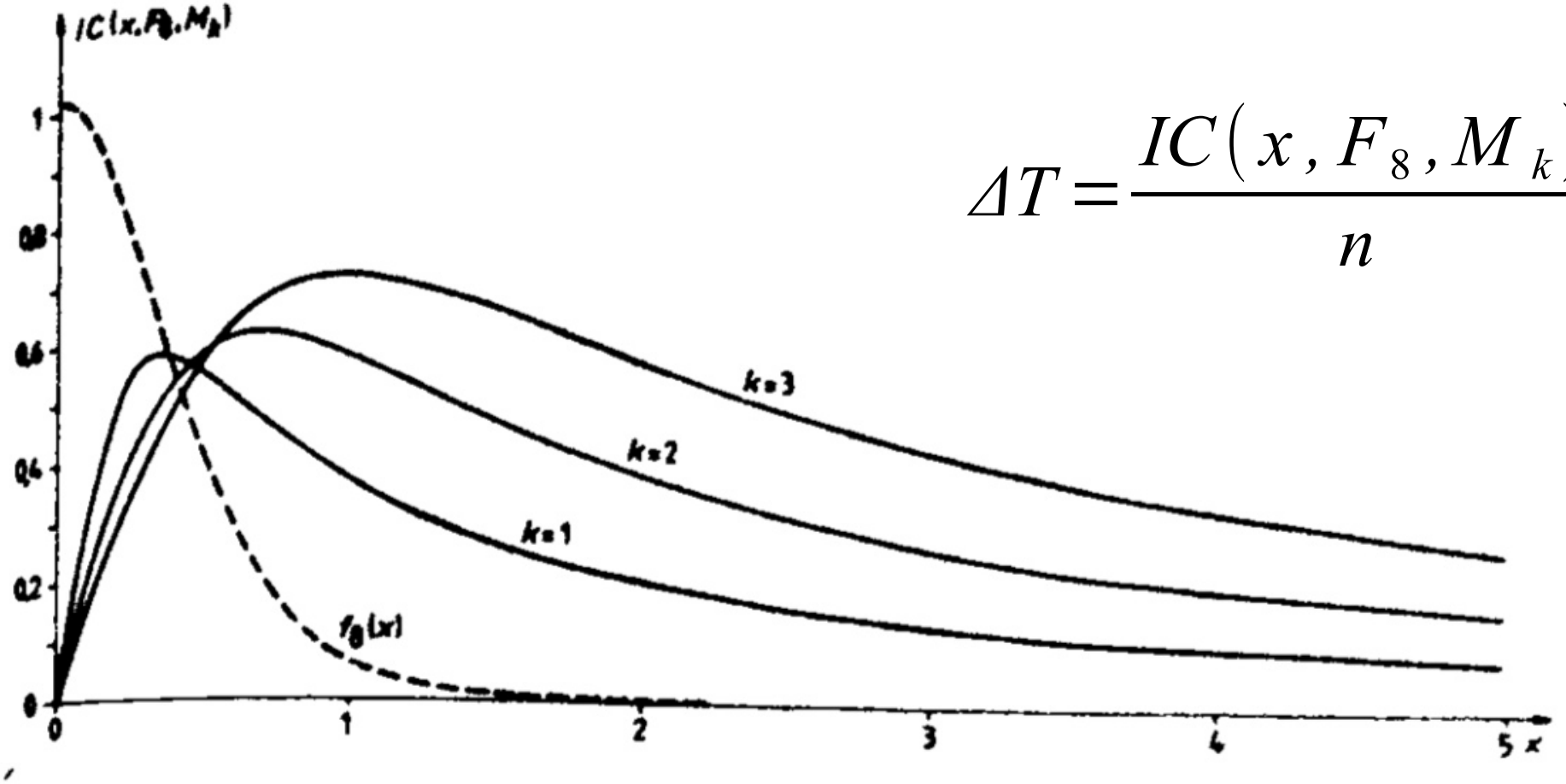
$$\psi(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

A leggyakoribb érték számításának *IC*-függvénye

- Az általánosított leggyakoribb érték *IC*-függvénye:

$$IC\left(x, F, M_k\right) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(k\varepsilon\right)^2 - y^2}{\left[\left(k\varepsilon\right)^2 + y^2\right]^2} f\left(y\right) dy} \cdot \frac{x}{\left(k\varepsilon\right)^2 + x^2}$$

Az általánosított leggyakoribb érték *IC*-függvénye



$$\Delta T = \frac{IC\left(x, F_8, M_k\right)}{n}$$

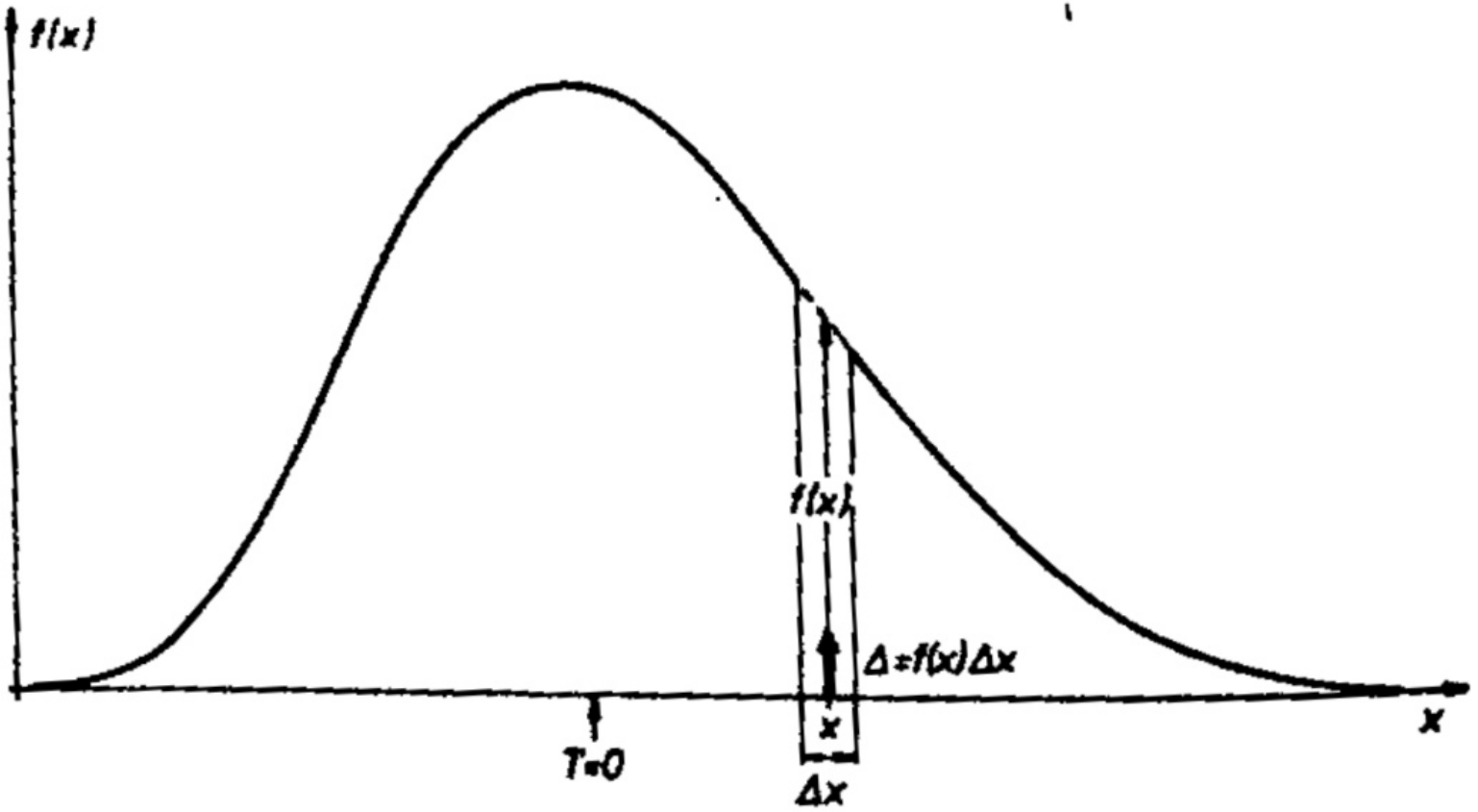
Ha $k = 2$, az $x = 5$ értékű adathoz az *IC*-függvény értéke kb. 0.2.
Ha $n = 100$, akkor ez az adat 0,002-vel módosítja a *T* értékét

A számtani átlag *IC*-függvénye *x*. Ezért ez az adat 0,05-tel módosítja az *E* átlag értékét (25-szörös hatás)

Becslések aszimptotikus szórása

- a becslés eloszlásának véges a σ szórása (ez becslésekre igen gyakran teljesül)
- aszimptotikus szórásnégyzet: $A^2 = \sigma^2 \cdot n$
- adott egy folytonos $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel jellemzett eloszlás
- valamely x érték körül nagyon szűk Δx intervallumba a vsz. változó értéke $f(x) \cdot \Delta x$ valószínűséggel esik

Sűrűségfüggvény



- az intervallumba esés valószínűsége $\Delta = f(x) \cdot \Delta x$

Δx intervallum hatása

- Az IC-görbe definíciójából következik, hogy a Δ valószínűséggel fellépő x jó közelítéssel ΔT értékkel járul hozzá a T értékének a kialakításához:

$$\Delta T = IC\left(x\,,\,F\,,\,T\right)\cdot\Delta$$

Áttérés *n* elemű mintára

- A valószínűségi változó egész értéktartományát felosztjuk n db Δ valószínűségű intervallumra
- Mivel $\Delta = 1/n$ kicsi, $n \longrightarrow \infty$
  - Tetszőleges mintából szerkesztett empirikus eloszlásfüggvény nagyon közel lesz $F(x)$-hez (matematikai statisztika alaptétele)
  - az intervallumok x_i helyei n elemű mintát adnak

A *j*-edik mintaelem okozta eltérés szórása

- A ΔT_j eltérés empirikus szórásnégyzete, mivel az adott mintavételkor j-edik elemként az $x_1, \ldots, x_n$ értékeket azonos valószínűséggel kaphatjuk meg:

$$D^2_{n;j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{IC(x_i)}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} [IC(x_i)]^2$$

Az összes mintaelem okozta eltérés szórása

- Az n db mintaelem ΔT_j hatásai összegződnek, az azonos eloszlású valószínűségi változók összegének szórására vonatkozó tétel szerint:

$$D_n^2 = n \cdot D_{n;\,j}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} [IC(x_i)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [IC(x_i)]^2 \cdot f(x) \cdot \Delta x$$

Az aszimptotikus szórásnégyzet

- Az összefüggés integrál alakba átírva

$$D_n^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} [IC(x)]^2 f(x) dx$$

- Az aszimptotikus szórásnégyzet, A^2

$$A^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [IC(x)]^2 f(x) dx$$

(mivel általánosan a definíció $A^2 = \sigma^2 \cdot n$)

A helyparaméter-becslés aszimptotikus szórása

- A helyparaméter-becslés korábban kapott IC-függvényét beírva

$$A^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) f(x) dx}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x) f(x) dx\right]^2}$$

(a szórás $\sigma = A/\sqrt{n}$)

A Cramér-Rao határ

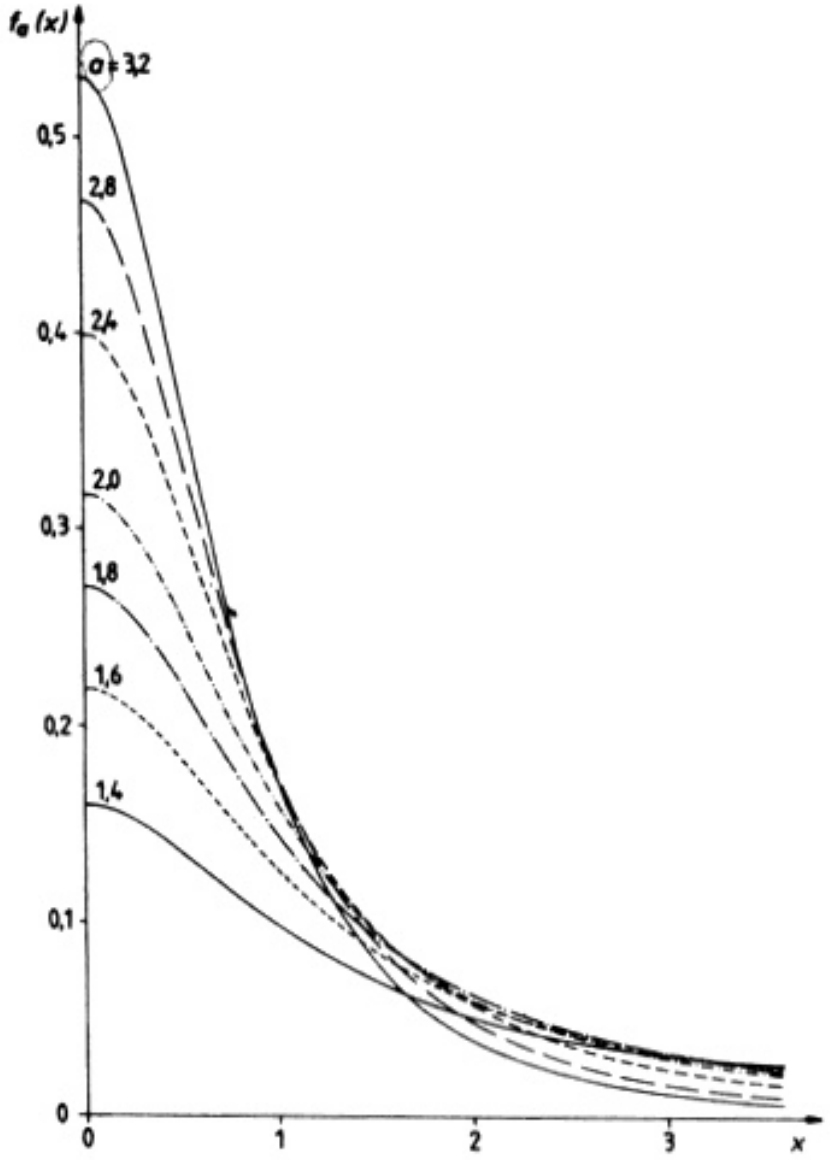
- A $\psi(x)$ -szel jellemzett becslés aszimptotikus szórásnégyzete mindig nagyobb a Cramér-Rao határnál (minimális aszimptotikus szórásnégyzetnél):

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) f(x)\, dx}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x) f(x)\, dx\right]^2} \geq \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \cdot f(x)\, dx}$$

(a nevezőben az ún. Fisher-információ van; az összefüggés levezetését lásd a Steiner könyvben)

Az $f_a(x)$ szupermodell

- a : típusparaméter
- $a \longrightarrow \infty$: Gauss-eloszlás
- $a = 2$: Cauchy-eloszlás
- $a = N + 1$:
  N szabadságfokú
  Student-eloszlás



Minimális aszimptotikus szórások

Eloszlástípus vagy szupermodell	Cramér-Rao határ
általános $f(x)$	$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 \cdot f(x)\,dx\right]^{-1/2}$
Gauss $f_G(x)$	1
Laplace $f_L(x)$	1
Cauchy $f_C(x)$	$\sqrt{2}$
szupermodell $f_a(x)$	$\sqrt{\frac{a+2}{a(a-1)}}$

A becslés statisztikai hatásfoka

- Az abszolút és relatív hatásfok
- A becslés robusztussága

A becslés abszolút hatásfoka

- Az e abszolút hatásfok a Cramér-Rao határhoz viszonyított aszimptotikus szórásnégyzet az adott becslési eljárásra (viszonyszámként $e \leq 1$ vagy százalékban kifejezve $e \leq 100\%$)

$$e = \frac{A_{\min}^2}{A^2}$$

- Az aktuális $f(x)$ -hez tartozó optimális eljárással csak e -szer annyi adat kell ugyanakkora pontossághoz

A hatásfok jelentősége

- „A hatásfok ismerete döntő fontosságú gyakorlati munkánkban, hiszen egy 1-nél lényegesen kisebb e hatásfok gyakorlatilag azt jelenti, hogy *adataink* $100(1-e)\%$ *-át eltékozoltuk*" (Steiner)

Két becslés relatív hatásfoka

- Ha két becslés aszimptotikus szórásai A_1, illetve A_2, akkor a második becslésnek az elsőhöz viszonyított relatív hatásfoka

$$e_{\text{rel}} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

- Ez azt adja meg nagy mintaelemszámokra, hogy a második becsléssel n_2 adatszám esetén elért pontosságot mennyi adattal érnénk el az elsővel: $n_1 = e_{\text{rel}} \cdot n_2$

Becslések aszimptotikus szórása *T*-re szimmetrikus *f*(*x*)-eknél

becslési algoritmus	aszimptotikus szórás
medián	$A_{\mathrm{med}} = \frac{1}{2 \cdot f\left(\mathrm{med}\right)}$
számtani átlag	$A_{\mathrm{E}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E\right)^2 f\left(x\right) dx}$
leggyakoribb érték $k = 1$	$A_{\mathrm{M}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n_1\left(\varepsilon\right)}}$
leggyakoribb érték $k = 2$	$A_{\mathrm{M}} = 2\,\varepsilon \frac{\sqrt{n_1\left(2\,\varepsilon\right) - n_2\left(2\,\varepsilon\right)}}{2\,n_2\left(2\,\varepsilon\right) - n_1\left(3\,\varepsilon\right)}$
megjegyzés: $i = 1$ esetén a súlyok, $i = 2$ esetén a súlynégyzetek átlaga lesz az $n_i(k\varepsilon)$	$n_i\left(k\varepsilon\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\left(k\varepsilon\right)^2}{\left(k\varepsilon\right)^2 + \left(x - M\right)^2}\right]^i f\left(x\right) dx$

Adatszámtöbblet

- Cramér-Rao határral kifejezve:

$$\text{adatszámtöbblet} = 100 \cdot \left[\frac{A^2}{A_{min}^2} - 1 \right] \%$$

- Az $f_a(x)$ szupermodellre az aszimptotikus szórás

$$A_{min} = \frac{a+2}{a(a-1)}$$

Adatszámtöbblet

- Az $f_a(x)$ szupermodellre, *medián* képzéssel:

$$\text{adatszámtöbblet} = 100 \cdot \left[\frac{\pi\, a\,(a-1)\,\Gamma^2\left(\frac{a-1}{2}\right)}{4\,(a+2)\,\Gamma^2(a/2)} - 1 \right] \%$$

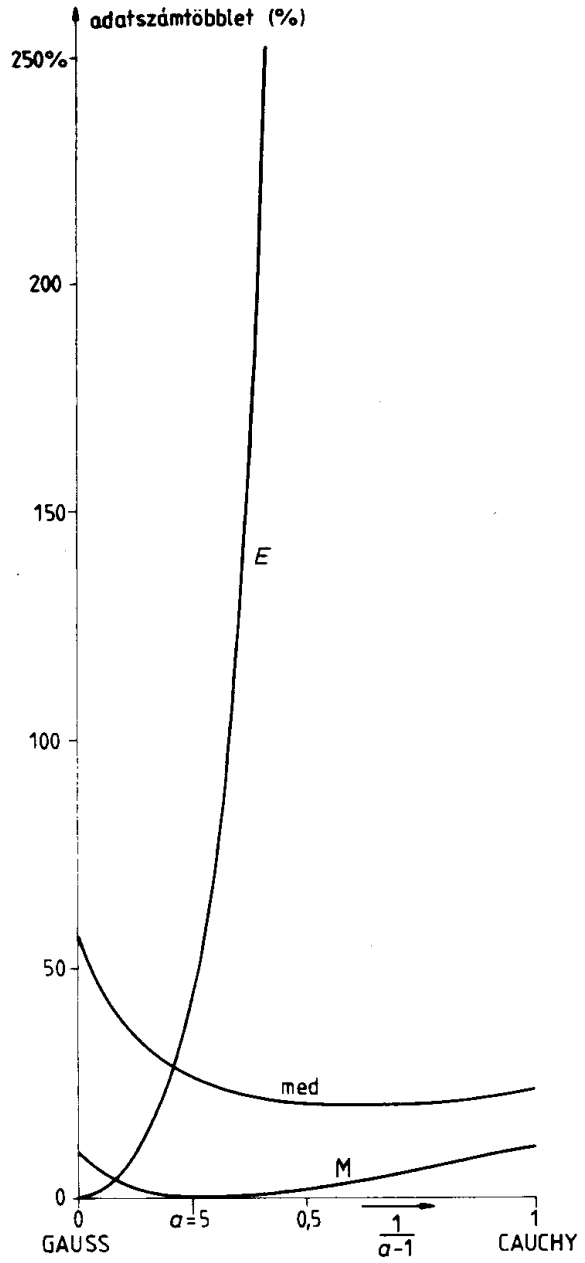
- Az $f_a(x)$ szupermodellre, *átlag*képzéssel:

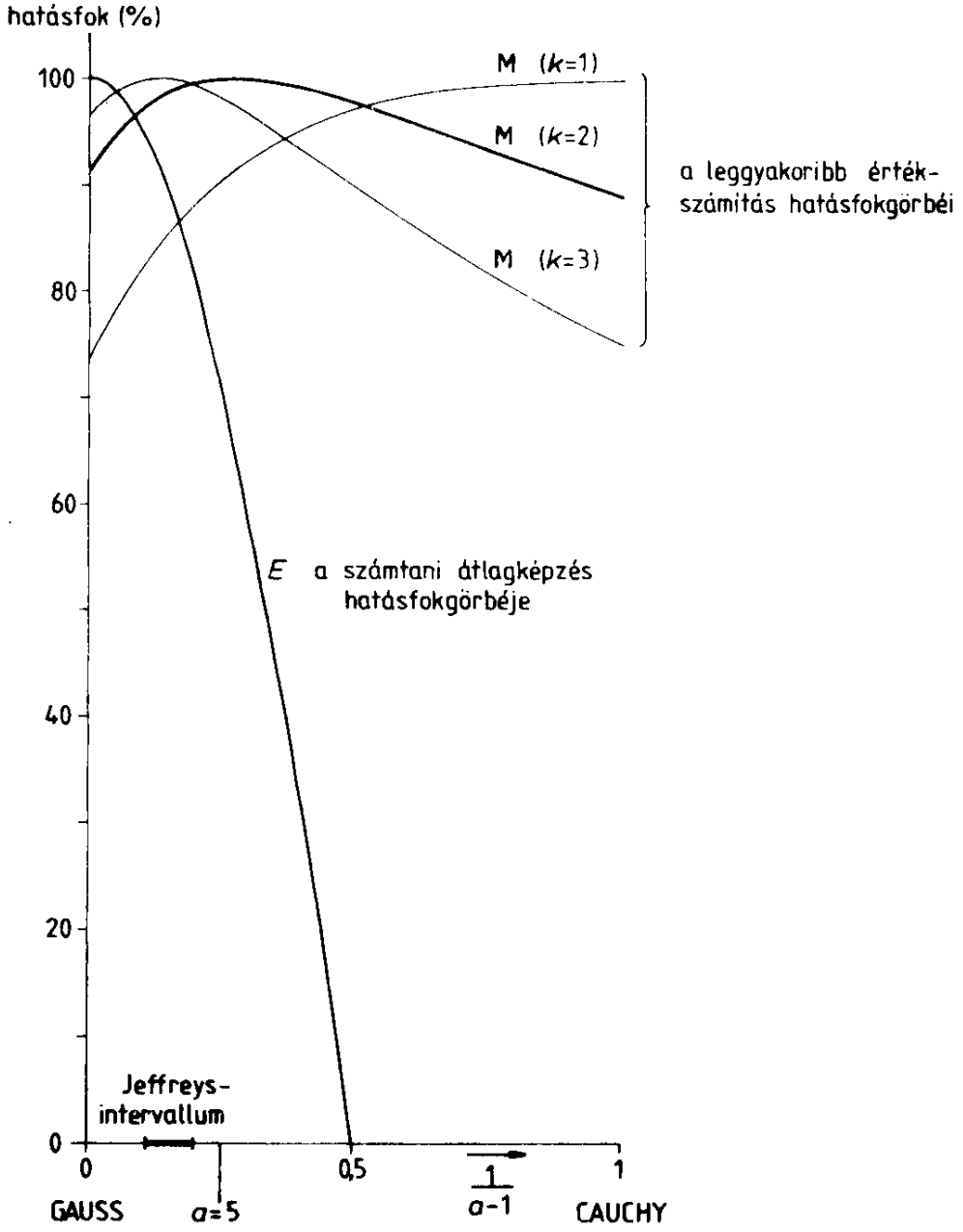
$$\text{adatszámtöbblet} = 100 \cdot \left[\frac{a\,(a-1)}{(a-3)(a+2)} - 1 \right] \%$$

Leggyakoribb értékek aszimptotikus szórásai az $f_a(x)$ szupermodellre

	a	1/(a-1)	A (k = 2)
Cauchy	2	1	1,5000
	2,5	0,6667	1,1251
	3	0,5	0,9236
	4	0,3333	0,7080
	5	0,25	0,5917
	6	0,2	0,5173
	10	0,1	0,3694
	40	0,0256	0,1699
	100	0,0101	0,1057
Gauss	∞	0	1,0466

Adatszámtöbblet és hatásfok különböző becslésekre az $f_a(x)$ szupermodellre

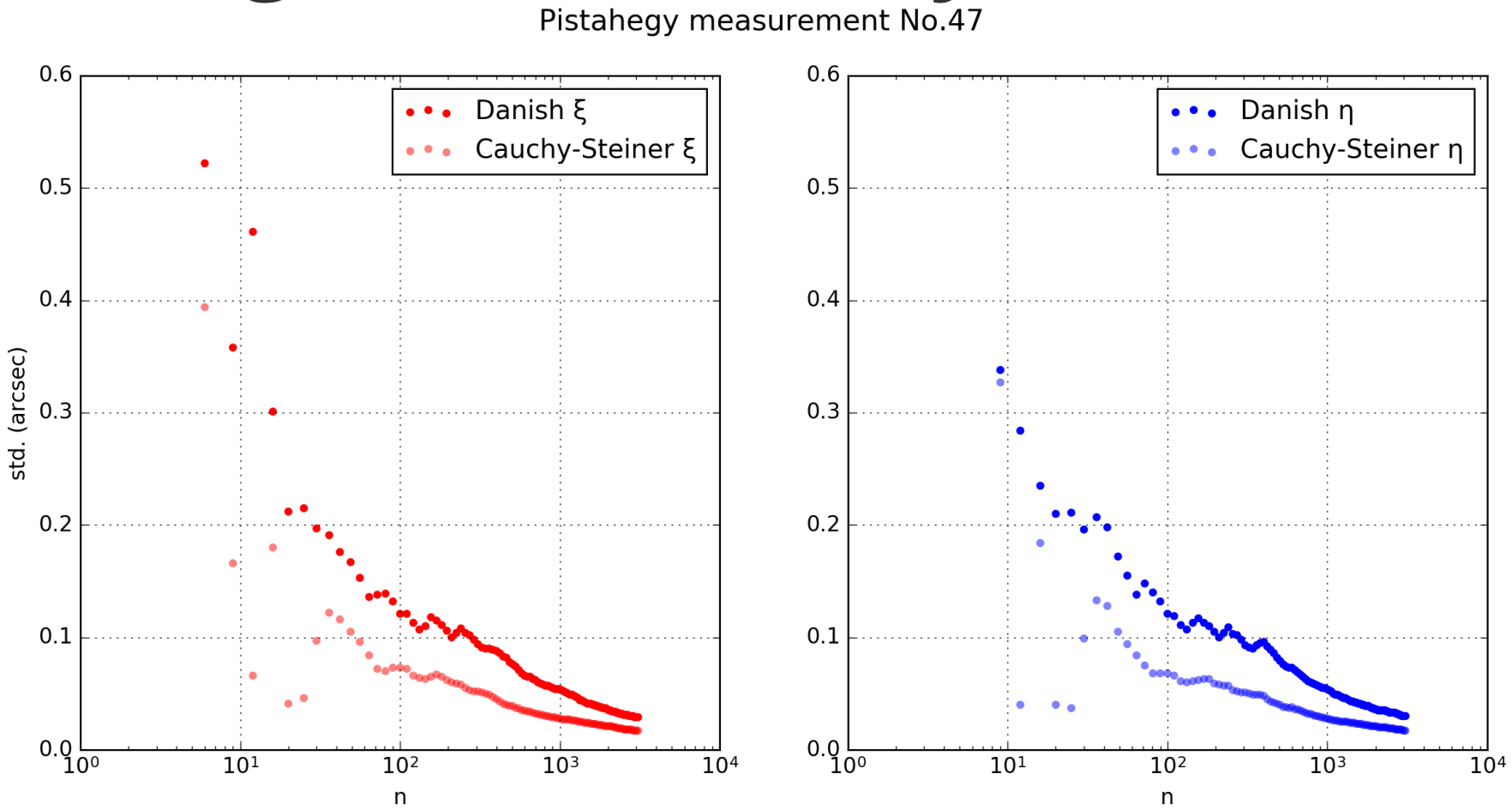




Robusztusság

- Valamely *becslés* akkor nevezhető robusztusnak, ha az eloszlástípusok széles tartományán a gazdaságossága csak jelentéktelen mértékben csökken
- Egy statisztikai *algoritmus* akkor robusztus, ha az anyaeloszlásban bekövetkező kicsiny eltérés a becslések eloszlásában is csak kis eltérést eredményez

Gyakorlati példa: QDaedalus feldolgozás eredményei



A dán módszer és a leggyakoribb érték alapján történő függővonal-elhajlás becslések szórásainak összehasonlítása a mérések száma függvényében. A becslések hatásfoka jelentősen eltér egymástól
(Tóth-Völgyesi, 2017)

A két becslés relatív hatásfoka

- 3080 mérésből a dán módszer aszimptotikus szórása 1.64, a leggyakoribb érték szerintié pedig 0.94, . A relatív hatásfoka a két módszernek 3.0, ami azt jelenti, hogy *ugyanolyan pontosság* eléréséhez a dán módszerrel *háromszor annyi ideig* kellene mérni