

Saint-Venant és a lokális hatások elve

Saint Venant élete

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant 1797. augusztus 23-án született a franciaországi Villiers-en-Bière-ben, a Fortoiseau nevű kastélyban (Seine-et-Marne megye) egy tekintélyes arisztokrata család gyermekeként. Édesapja jól ismert gazdálkodó volt. Igen nagy gondossággal nevelte fiát, akinek a matematika iránti fogékonysága már egészen fiatal korában megmutatkozott.

Elemi tanulmányait Bruges-ben, egy líceumban végezte, majd 1813-ban – tizenhat éves korában – sikeresen felvételizett a párizsi *École Polytechnique*-be. Végig osztályelső volt főiskolai tanulmányai alatt.



1814 márciusának végén, amikor a Napóleon ellen harcoló szövetséges csapatok Párizshoz közeledtek, mozgósították az intézet diákjait is. Saint-Venant diákokból álló csapatát az egyik Párizs melletti erődbe küldték előrsnek, ő azonban megtagadta a szolgálatot, azzal az indoklással, hogy „*lekiismeretem tiltja, hogy a bitorlóért¹ harcoljak...*”. Társai igen rossznéven vették ezt a kijelentését, árulónak nevezték és tiltakozásukkal elérték, hogy Saint-Venant nem tudta befejezni a főiskolát. Egyik osztálytársa, *Michel Chasles*² visszaemlékezéseiben azonban így írt erről:

„Saint-Venant olyan ember volt, aki a meggyőződéséért akár darabokra vágatni is hagyta magát... A gyávaság vádja vele szemben teljesen abszurd, ellenkezőleg, nagyon bátor volt. Március 30-án százszor több bátorságot és erélyt jelentett szembeszállni felettesei parancsaival és osztálytársai ellenkezésével, mint az ellenség szuronyaival.”

Ezt az incidenst követően Saint-Venant nyolc évig csak egy lőporgyártással foglalkozó intézetben talált asszisztensi munkát, egész 1823-ig kellett várnia, míg – hathatós családi támogatással – felvételi vizsga nélkül sikerült bejutnia az *École des Ponts et Chaussées*-ba. Tanulótársainak ellenszenvébe itt is nehézzé tette életét, két éven keresztül gyakorlatilag nem ültek mellé az előadótermekben és nem is beszéltek vele. Válasz nélkül elviselte ezeket a támadásokat, kizárólag a tanulásra koncentrált, így évfolyamelsőként fejezte be tanulmányait³.

Az egyetem elvégzése után 1830-ig a Nivernais-csatorna építkezésén dolgozott vízépítő mérnökként, majd hasonló munka következett az Ardennek-csatornánál. Szinte minden szabad idejében elméleti mechanikával foglalkozott, és ennek eredményeként 1834-ben megszületettek első önálló publikációi a szilárd testek mechanikája illetve az áramlástan

¹ Napóleon tekintették a Bourbonokhoz hű francia arisztokraták bitorlónak.

² 1793 – 1880. Francia matematikus, főleg geometriai kutatásairól ismert.

³ Nincs igazán életrajzi adat sem Saint-Venant, sem a kortársak visszaemlékezéseiben arról, hogy ezek az évek mennyire befolyásolták további életét vagy tudományos karrierjét, de igen nagy annak a valószínűsége, hogy egész sorsára és gondolkodásmódjára hatással voltak.

területén. A Tudományos Akadémiának benyújtott anyagai ismertté tették nevét a francia tudományos körökben, így 1837-ben, amikor *Gaspard-Gustav Coriolis*⁴, az *École des Ponts et Chaussées* mechanika tanára hosszabb időre megbetegedett, őt kérték fel, hogy tartson előadásokat az egyetemen szilárdságtanból. Litografált⁵ jegyzeteket készített a hallgatóknak, és ezek az oktatási vázlatok gyorsan nagyon népszerűvé váltak a hallgatók között. Tudománytörténeti érdekesség, hogy szinte a teljes akkori műszaki mechanika egészét átfogták a jegyzetek, és számos olyan új tudományos gondolatot, ötletet tartalmaztak, amiket Saint-Venant későbbi munkássága során fejtett ki részletesebben.

Tudományos jelentősége mellett pedagógiaileg is fontos volt Saint-Venant oktatási tevékenysége: azt hangoztatta, hogy a gyakorlati mérnöki munkában is szükség van a magas szintű elméleti tudásra, nem elegendő a mérnökök képzését tapasztalati képletek bemagolására korlátozni. Az oktatásban mindig az alapos elméleti képzés és a gyakorlati tapasztalatok közötti harmonikus egyensúlyt tartotta a legfontosabbnak, előadói stílusában pedig egyenes folytatója volt a *Henri Navier*⁶ által elkezdett képzési módszereknek⁷.

Az egyetemen tartott előadásai mellett gyakorlati feladatokkal is foglalkozott ezekben az években. A párizsi városi hatóságok felkérésére többféle építőmérnöki feladat tervezésében és kivitelezésében is részt vett, ezzel párhuzamosan pedig a mezőgazdasággal kapcsolatos vízügyi feladatok (öntözés, talajvízcsökkentés, stb.) is érdekelní kezdtek. Olyan érdekes munkái jelentek meg erről az utóbbi témaköréről, hogy a *Francia Mezőgazdasági Társaság* aranyéremmel tüntette ki, továbbá 1850-52 között meghívták a versailles-i *Agronómiai Intézetbe* a mechanika előadójának. Természetesen fő érdeklődési területe továbbra is az elméleti mechanika maradt, és így 1843-tól kezdve már rendszeresen küldte a különböző mechanikai témákról szóló jelentéseit a Tudományos Akadémiának.

Az 1860-as években az akkori idők ismert matematikusa, *Moigno*⁸ abbé egy nagy – összefoglaló jellegű – mechanikai enciklopédia írására kérte fel több tudós kollégáját. A könyv „*Leçons de Mécanique Analytique, Statique*” címmel végül 1868-ban jelent meg, benne a rugalmasságtannal foglalkozó utolsó két fejezet (616-723 oldalig) Saint-Venant műve. A dolog érdekessége, hogy később kiderült, eredetileg *Moigno* több külföldi – angol és német – kutatót felkért ezen fejezetek megírására, de mindenhol elutasító és szemrehányó válaszleveleket kapott, amikben a külföldi kollégák értetlenségüket fejezték ki a fölött, hogy miért nem Saint-Venant-t, a szerintük kiemelkedő tudású kollégát kérik fel erre a feladatra. Angliából az egyik „tömör” válasz mindössze annyi volt, hogy „*Saint-Venant, a legilletékesebb személy, ott van az Önök közvetlen közelében. Konzultáljanak vele, hallgassanak rá és kövessék a tanácsait*”. Egy németországi válaszban az állt, hogy: „A

⁴ 1792 – 1843. Francia matematikus és gépészmérnök. Nevéhez fűződik a *Coriolis-hatás* felfedezése. Ő használta először a mechanikában a „munkafogalmat” erő és elmozdulás szorzataként definiálva.

⁵ Könyomatos nyomdai sokszorosítási technika.

⁶ 1785 – 1836. Teljes nevén: *Claude-Louis Marie Henri Navier*, kiváló francia mérnök, lásd a róla készült életrajzot.

⁷ Nem véletlen, hogy jegyzetei is *Navier* híres könyvére, az 1826-ban megjelent „*Résumé des Leçons de Mécanique*” c. munkára épültek, annak anyagát fejlesztette-módosította előadásában.

⁸ 1804 – 1884. *Francois Napoleon Marie Moigno*, francia jezsuita pap, egyetemi tanár, korának ismert matematikusa, *Cauchy*, *Arago* és *Ampere* jó barátja. Elsősorban tudományszervezési és tanári munkájáról ismert. Több tudományos enciklopédia szerkesztője, híres volt rendkívüli memóriájáról (pl. 127 jegyre ismerte fejből a π értékét...).

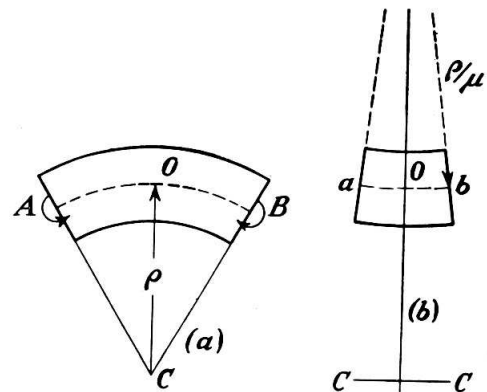
Francia Akadémia hibát, igen nagy hibát követ el, ha nem nyit ajtót az ilyen szintű matematikai tehetségnek...”.

Nagyon valószínű, hogy ezek a külföldi vélemények is szerepet játszottak abban, hogy 1868-ban Saint-Venant-t a Tudományos Akadémia végre megválasztotta tagjai közé és munkát adott neki a mechanikával foglalkozó részlegében. Haláláig megtartotta ezt a posztot, és mindvégig rendkívüli szorgalommal és munkabírással látta el kutatói feladatait. 1886. január 2-án, életének 89-ik évében St Ouenben (Loir et Chere megye) ragadta el a halál. Még élete utolsó napján is az egyik cikkén dolgozott.

Tudományos munkásságának fontosabb adatai

Saint-Venant mechanikai szempontból igazán jelentős első alkotása az 1837-ben elkezdett egyetemi jegyzetsorozat⁹ volt. Rendszerezte, összefoglalta és sokszor módosította-javította a nagy elődök illetve kortársak elméleti mechanikával foglalkozó munkáit, és egy mai szemmel nézve is jól használható anyagot adott a hallgatóság kezébe. Pontosította például a Cauchy¹⁰ által bevezetett feszültségfogalom matematikai definícióját¹¹, bemutatta, hogyan lehet húzás-nyomás kombinációjával tiszta nyírást előállítani, bevezette a rugalmasságtani számításokba a Poisson-tényező¹² használatát, rendszeresítette a rutinszerű főfeszültség-számítást a mechanikai vizsgálatoknál, stb.

Az 1840-es években kezdett publikálni kifejezetten rúdszerkezetekkel foglalkozó részletesebb munkákat. Először (1843-ban) egy görbült rudak vizsgálatával foglalkozó tanulmányt küldött az Akadémiának, ezután pontosította-javította Navier helyenként hibás levezetését¹³ az áramlásban alapvető differenciálegyenletéről, majd ezt 1847-től 1857-ig több olyan munka követte, amelyekben részben hajlítási kérdésekkel, részben pedig csavarással foglalkozott. Ő volt az első, aki részletesen megvizsgálta a hajlítás Bernoulli-Navier-elméletében¹⁴ alkalmazott hipotézisek pontosságát, nevezetesen az egyes keresztmetszetek sík lapokként történő elfordulásának kérdését és az elforduló keresztmetszetek semleges tengelyre való



⁹ Jegyzeteinek teljes címe: *Cours lithographié: Leçons de mécanique appliquée faites par intérim par M. de St Venant, Ingénieur des ponts et chaussées.*

¹⁰ 1789 – 1856. Teljes nevén: *Augustin Louis Cauchy*, nagy francia matematikus, lásd a róla készült életrajzot.

¹¹ Erről maga *Cauchy* is elismerően nyilatkozott, és a továbbiakban ő is Saint-Venant definícióját használta.

¹² 1781 – 1840. *Siméon-Denis Poisson* kiváló francia matematikus, nagyon sokat foglalkozott elméleti mechanikai kérdésekkel is, lásd a róla készült életrajzot.

¹³ Tudománytörténeti érdekesség, hogy *Stokes* (Saint-Venanthoz hasonlóan) két évvel később ugyancsak a pontos levezetést adta meg.

¹⁴ Lásd a róluk szóló életrajzot illetve ugyanott a klasszikus gerendamodell kialakulását bemutató részt.

merőlegességének hatását. A jobboldalt látható ábra Saint-Venant egyik munkájából való, és ahhoz a szövegrészhez kapcsolódik, ahol a szerző bebizonyította, hogy az eredeti feltevések szigorúan véve csak tiszta hajlítás esetén teljesülnek.

Részletes számításokat végzett a *Poisson-hatás* következményeinek érzékeltetésére, kimutatta, hogy például egy eredetileg négyszög alakú keresztmetszet milyen módon torzul a hajlítás során. Pontos, bár elég bonyolult matematikai modellt alkotott a *hajlítással egyidejű nyírás* hatásának figyelembevételére. Megjegyezzük, hogy az 1850-es évek végén már ismerte (és nagyra értékelte) *Zsuravszkij*¹⁵ ugyanezen feladatra vonatkozó közelítő modelljét¹⁶ is, amely egyébként a gyakorlati problémák megoldása során többnyire egyszerűbben használható.

Míg korábban kizárólag az egyenes hajlítás hatásával foglalkoztak a mérnökök illetve a kutatók, Saint-Venant általánosította a feladatot, és egyensúlyi egyenletek felhasználásával megadta a ma *ferde hajlításnak* nevezett igénybevétel vizsgálatának úgynevezett általános módszerét. Elsőként vizsgálta gerendatartóknál a hajlításból keletkező elfordulások alapján számítható eltolódásokat, megteremtve ezzel a *nyomatéki terhek módszere*¹⁷ néven ismert elmozdulás-számítási eljárást.

Vizsgálta *konzolok nagy eltolódásait* (zárt képletet adott meg sorok segítségével különböző terhek esetére), és nagyon részletes tanulmányt írt a *Hooke-modelltől eltérő anyagú* hajlított gerendák keresztmetszeti feszültségeloszlásának vizsgálatára. Feltételezte például, hogy húzás esetén a normálfeszültség

$$\sigma = A \left[1 - \left(1 - \frac{y}{a} \right)^m \right]$$

módon, míg nyomásnál a

$$\sigma_1 = B \left[1 - \left(1 - \frac{y}{a_1} \right)^{m_1} \right]$$

képlettel számítható, ahol A, B, a, a_1, m és m_1 ismertnek feltételezett paraméterek, y pedig a keresztmetszet egy pontjának az eredeti (lineárisan rugalmas állapotban feltételezett) semleges tengelytől mért távolságát jelöli. A további vizsgálatot az egyszerűség kedvéért egy b szélességű és h magasságú négyszög keresztmetszetre korlátozta¹⁸, és a nemlineáris esethez tartozó semleges tengely y_1 és y_2 távolságait az alábbi két feltételből határozta meg:

$$y_1 + y_2 = h, \quad \int_0^{y_1} \sigma dy = \int_0^{y_2} \sigma_1 dy$$

Ezek ismeretében a belső feszültségek egyensúlyozó nyomatékainak számításához az előbb felírt feszültségi összefüggéseket használta. Részletesebben megvizsgálta azt a speciális

¹⁵ 1821 – 1891. *Dimitrij Ivanovics Zsuravszkij*, orosz híd- és vasútépítő mérnök. A hajlítással egyidejű nyírófeszültség számítására vonatkozó közelítő képletét csapolt faszerkezetű hídgerendák vízszintes csúsztatófeszültségeinek vizsgálatából vezette le 1844-ben.

¹⁶ *Zsuravszkij* vonatkozó munkáját 1856-ban kiadták franciául is (*Ann. ponts et chaussées, Vol. 12. pp. 328, 1856*).

¹⁷ Megjegyezzük, hogy ez az eljárás a gyakorlatban csak később, *Otto Mohr* (1835 – 1918, német mérnök és egyetemi tanár) munkássága nyomán várt széles körben elterjedté.

¹⁸ Elvileg természetesen a további gondolatmenet tetszőleges alakú keresztmetszetre is levezethető.

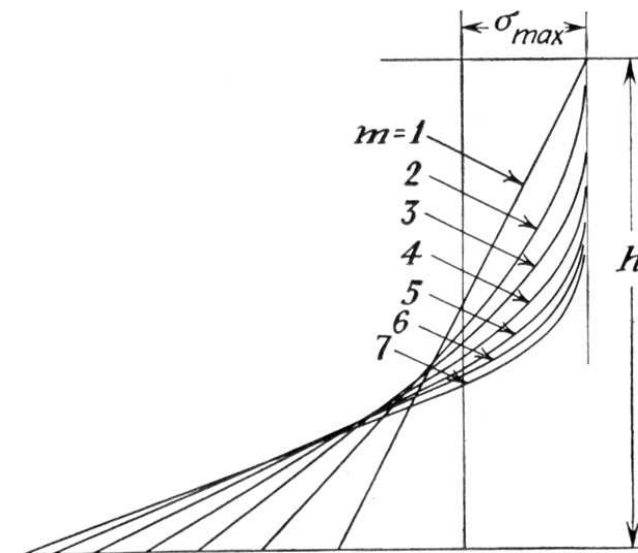
esetet, amikor $y_1 = a$ (és így $A = \sigma_{\max}$)¹⁹. Ebben az esetben feltételezte, hogy a két feszültségi görbe $y = 0$ esetén azonos tangenssel rendelkeznek, vagyis (kicsiny feszültségértékek esetén) a rugalmassági modulus azonosnak tekinthető húzás vagy nyomás esetén. Ezt követően további egyszerűsítést követően a két függvényt azonosnak tekintette (vagyis $m = m_1$, $a = a_1$, $A = B$) és így sikerült levezetnie, hogy a keresztmetszetben keletkező belső nyomaték és a maximális normálfeszültség között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$M = \alpha b h^2 \sigma_{\max} / 6,$$

ahol α az m paraméter értékétől függő konstans. Amikor m értéke növekszik, α szintén nő. Határértéke 1,5 lesz, itt a pozitív és negatív feszültségek egyaránt konstans megoszlásúak lesznek:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	
α	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{27}{30}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{81}{56}$	$\frac{35}{24}$	$\frac{22}{15}$	= 1.467

Ha $m_1 = 1$, akkor a nyomott tartományban a *Hooke-modellt* követi az anyag. Az ábra a feszültségeloszlások néhány esetét ábrázolja (most csak az m változik).



A következő táblázat egy ilyen esetben m különböző értékeihez tartozó semleges-tengely távolságokat illetve a feszültségi maximumok arányait mutatja:

m	1	2	3	4	5	6	7	∞
$ \sigma_{\min} /\sigma_{\max}$	1	1.633	2.121	2.530	2.887	3.207	3.500	∞
$y_1:y_2$	1	1.225	1.414	1.581	1.732	1.871	2.000	∞
α	1	1.418	1.654	1.810	1.922	2.007	2.074	3

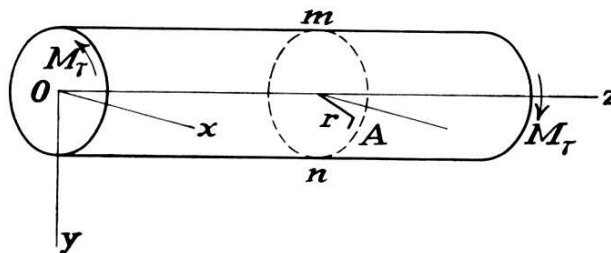
¹⁹ Saint-Venant a σ_{\max} feszültséget tekintette pozitívnak.

Érdekes megjegyeznünk, hogy $m = 6$ esetén a feszültségeloszlás erősen közelít a *Mariotte-modell*²⁰ értékéhez, míg $m = \infty$ esetén a *Galilei-modell*hez²¹ jutunk.

A műszaki mechanikával foglalkozók körében ma is jól ismertek Saint-Venant *csavarási feladatokhoz*²² kapcsolódó megoldásai. Először 1853-ban adott be az Akadémiának egy ezzel foglalkozó nagy összefoglaló jelentést, amit az Akadémia egy négytagú bizottságnak (*Cauchy*, *Poncelet*²³, *Piobert*²⁴ és *Lamé*²⁵ voltak a tagjai) adott ki véleményezésre. A bizottság egészen kiváló munkának értékelte művét, és 1855-ben az Akadémia költségén meg is jelentette.

Ebben a tanulmányban nem csak a csavarással foglalkozott, hanem összefoglalta és saját kommentárjaival, módosító javaslataival látta el mindazokat az elméleti alapokat, amelyeket akkoriban a rugalmasságtanról tudtak. A gyakorlati feladatok szempontjait figyelembe véve részletesen elemezte a rugalmasságtani egyenletek megoldhatóságát és egy olyan kombinált („szemi-inverz”, „fél-fordított”) modellt ajánlott, amelyben a feszültségek és elmozdulások egy részét valamilyen módon ismertnek feltételezzük és a „maradék” részt már ezekre építve határozzuk meg. Példák sorozatán keresztül mutatta be, hogy egy gyakorló mérnök az elemi szilárdságtan közelítő megoldásait felhasználva – azokra építve – hogyan hozhat létre egy elméletileg pontos megoldást.

Vizsgáljunk meg például egy tömegerek nélküli, kizárólag csavarónyomatékkal terhelt, bal oldali végén rögzített rudat a fentiek illusztrálására.



Határozzuk meg az „mn” metszet elmozdulásait az ábrán látható koordináta-rendszerben. Jelölje az egységnyi hosszra eső elcsavaródás szögét θ , így a vizsgált keresztmetszet elfordulása θz , bármely pontjának x és y irányú eltolódásai pedig

$$u = -\theta z y, \quad v = \theta z x$$

módon számíthatók. Ha a rúd keresztmetszete kör, akkor az egyes lapok síkok maradnak a csavarás során és a tengelyirányú w eltolódás értéke zérus. Az előző két egyenlettel számítható eltolódásokat felhasználva ilyen esetben a csavarási feszültségek egyszerűen számíthatók. A laboratóriumi kísérletek már Saint-Venant korában igazolták, hogy a *körtől eltérő* keresztmetszetek esetén az egyes metszetek *nem maradnak síkok*. Ezért ő azt tételezte

²⁰ Lásd a *klasszikus gerendamodell*t bemutató ismertetést.

²¹ Lásd ugyanott.

²² *Mém. acad. sci. svants érangiers, Vol. XIV. pp. 233-560, 1855.*

²³ 1788 – 1867, *Jean-Victor Poncelet*, francia mérnök és matematikus. Gépészmérnöki fejlesztéseiről és ábrázoló geometriai munkáiról ismert.

²⁴ 1793 – 1871, *Guillaume Piobert*, robbanóanyagok viselkedésével és ballisztikával foglalkozó francia tábornok és matematikus.

²⁵ 1795 – 1870, *Gabriel Lamé*, francia matematikus, a rugalmasságtan alapfeladatainak elmozdulásmódszer típusú differenciálegyenleteit ő írta fel először.

fel, hogy ilyenkor z irányban a keresztmetszetek torzulnak, mégpedig egyformán, vagyis ez az eltolódás nem függ z -től:

$$w = \theta \phi(x, y),$$

ahol $\phi(x, y)$ egy egyelőre ismeretlen torzulási függvény. Az eddig felírt három egyenlet azt mutatja, hogy Saint-Venant az elmozdulásokat a csavarás segítségével határozta meg. Ezt követően ezeket behelyettesítette az alakváltozások és elmozdulások kapcsolatát leíró (lineáris) geometriai egyenletekbe és azt találta, hogy csak két szögtorzulás, nevezetesen γ_{xz} és γ_{yz} különbözik zérustól:

$$\gamma_{xz} = \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right), \quad \gamma_{yz} = \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right).$$

Csak a nekik megfelelő feszültségkomponensek léteznek:

$$\tau_{xz} = G \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right).$$

Ha ezeket a képleteket a Cauchy-féle egyensúlyi egyenletekbe helyettesítette, azt találta, hogy az egyensúly teljesülésének feltétele az alábbi egyenlettel fejezhető ki:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

A keresztmetszetek peremén természetesen teljesülni kell a feszültségi peremfeltételnek (n egy adott perempontnál a normálist jelenti):

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right) \cos(n, y) = 0.$$

A fentiek értelmében a tetszőleges keresztmetszetű prizmatikus rúd csavarásának vizsgálata a $\phi(x, y)$ torzulási függvény megtalálására korlátozódik. Ennek a függvénynek ki kell elégítenie a néhány sorral feljebb felírt másodrendű homogén differenciálegyenletet illetve a peremre vonatkozó előírást. Saint-Venant többféle keresztmetszetre elvégezte a függvény előállítását, például egy ellipszis alakú metszettel rendelkező rúdnál a torzulási függvény képlete:

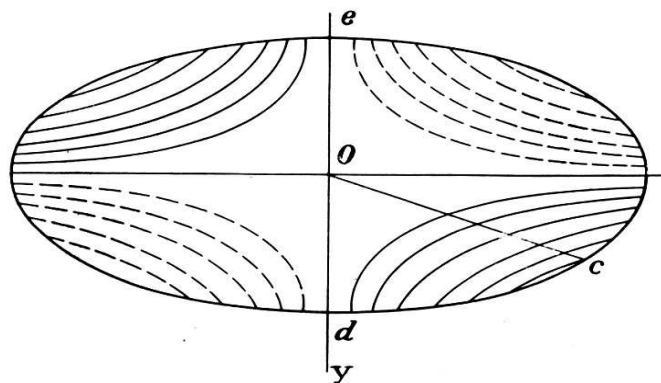
$$\phi = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x y$$

alakú lesz, ahol a és b az ellipszis féltengelyei. A feszültségek ebben az esetben:

$$\tau_{xz} = -G \theta \frac{2a^2 y}{a^2 + b^2}, \quad \tau_{yz} = G \theta \frac{2b^2 x}{a^2 + b^2}.$$

A csavarónyomaték és a fajlagos csavarási elfordulás:

$$M_t = \iint (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = \frac{\pi G \theta a^3 b^3}{a^2 + b^2} \Rightarrow \theta = \frac{M_t (a^2 + b^2)}{\pi G a^3 b^3}.$$



A feszültségekre felírt képletek segítségével kimutatható, hogy a metszeten belüli bármely Oc szakasznál (lásd az előző ábrát) a τ_{xz} / τ_{yz} feszültségarány állandó mindegyik pontra.

Ebből az is következik, hogy az egyes pontok eredő nyírófeszültsége párhuzamos a c pontnál megrajzolt érintővel. A feszültségi szélsőértékek a rövidebb főtengelyek perempontjainál (d és e) keletkeznek. Az ábrán feltüntették az öblösödés hiperbola jellegű kontúrvonalait is (a folytonos vonalak a lap síkjából kiemelkedő elmozdulásokat jelölnek).

Megjegyezzük, hogy Saint-Venant másféle mechanikai feladatok megoldására is felhasználta ezt a módszert, például a *hajlítással egyidejű nyírás* problémáját ezzel a módszerrel is megoldotta.

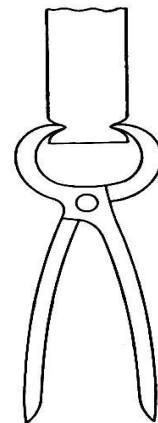
Hajlítással és csavarással foglalkozó nagy munkái után is tovább folytatta a rugalmasságtan különböző feladatainak vizsgálatát. A szó szoros értelmében újraírta Navier híres „*Résumé des leçons...*” című könyvét²⁶, az új kiadás kilencven százaléka az ő módosításaiból és megjegyzéseiből állt, lényegében összegyűjtötte és letisztázta ebben a tankönyvnek szánt műben valamennyi saját korábbi munkáját. Lefordította és 1883-ban kiadta „*Théorie de l'élasticité des corps solides*” címen *Clebsch*²⁷ európai hírű munkáját, itt kb. a könyv kétharmadát az ő kommentárjai teszik ki. A kortársak szerint ez a két könyv volt a XIX. század végén a rugalmasságtan legalapvetőbb forrásműve.

A lokális hatások elve: a Saint Venant-elv

Saint-Venant a gerendák tiszta hajlításának vizsgálata során fogalmazta meg azt a *mechanikai alapelvet*²⁸, amely máig nevét viseli. Az ilyen terhelési esetre (lásd az előző pont bevezetésénél bemutatott ábrát) kapott feszültségeloszlással kapcsolatban jegyezte meg először, hogy az itt kapott eredmény csak akkor felel meg a mechanikai alapegyenletek szigorú matematikai megoldásának, ha a külső erőhatás rúdvégeken történő megoszlása ugyanolyan, mint a feszültségeké a belső keresztmetszetekben.

Ezzel párhuzamosan azonban arra is felhívta a figyelmet, hogy a feszültségekre kapott eredmény kielégítő pontosságú lesz azokban az esetekben is, amikor ez a feltétel nem teljesül, de a rúdvégeken működő erők vagy nyomatékok *eredője* megegyezik az elméletileg pontos eredményeket adó terhelésekével.

Bár Saint-Venant alapvetően elméleti kutató volt, de ebben az esetben saját maga által végzett kísérleteket is felhasznált a fentiek illusztrálására. A jobboldalt látható ábra az ő könyvéből való: egyensúlyi erőrendszerrel terhelt rudak feszültségállapotát elemezve írja, hogy megfigyelései szerint az erőrendszer által okozott jelentősebb mértékű deformációk (és így a feszültségek) csak az erőátadódás közvetlen környezetére jellemzőek, onnan távolodva ez a hatás



²⁶ 1864-ben jelent meg.

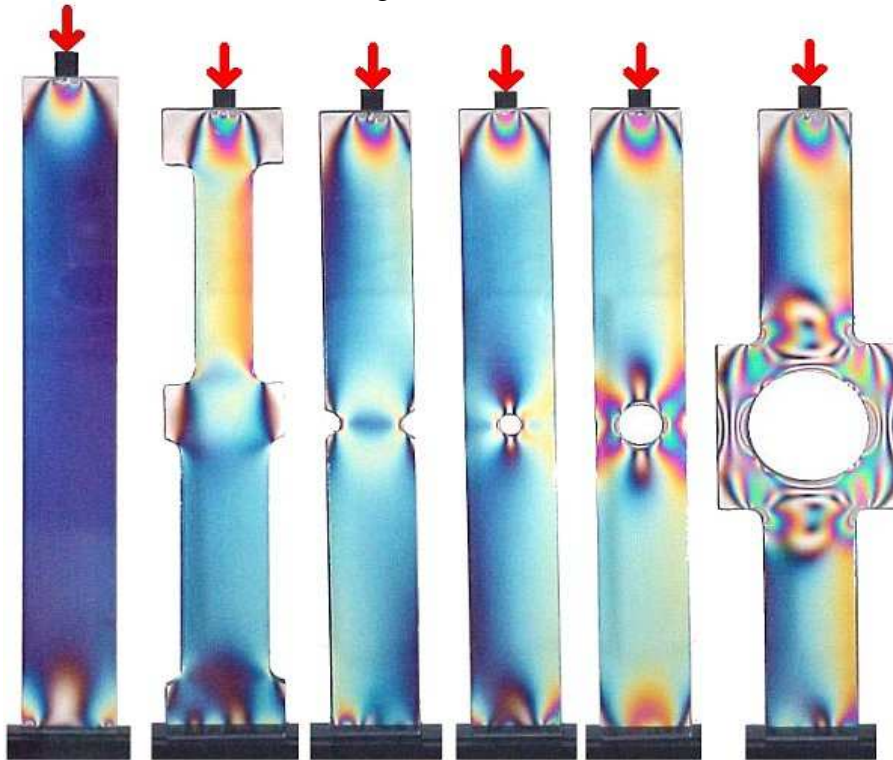
²⁷ 1833 – 1872. Teljes neve *Rudolph Friedrich Alfred Clebsch*. Német matematikus. Könyvének eredeti címe: *Theorie der Elasticität fester Körper*, Teubner, 1862.

²⁸ *Mém. savants étrangers*, Vol. 14, 1855

megszűnik. A megfigyelt tapasztalatok megerősítették a korábban már hivatkozott elméleti megjegyzés lényegét (idézve [5] definícióját):

„Valamely test vagy szerkezet egy bizonyos szakaszára a működő teher eloszlásának módja lényeges mértékben befolyásolja a teher közvetlen környezetében létrejövő feszültségek és alakváltozások eloszlását, azonban elenyésző hatást gyakorol a távolabbi részek feszültségi és alakváltozási állapotára.”

Ezt a tételt *Saint-Venant-elvként* ismerik és használják a mechanikában. Maga Saint-Venant is sokszor hivatkozott rá különböző munkáiban (például az előbb bemutatott csavarási feladat különböző terhelések esetére történő megoldásánál).

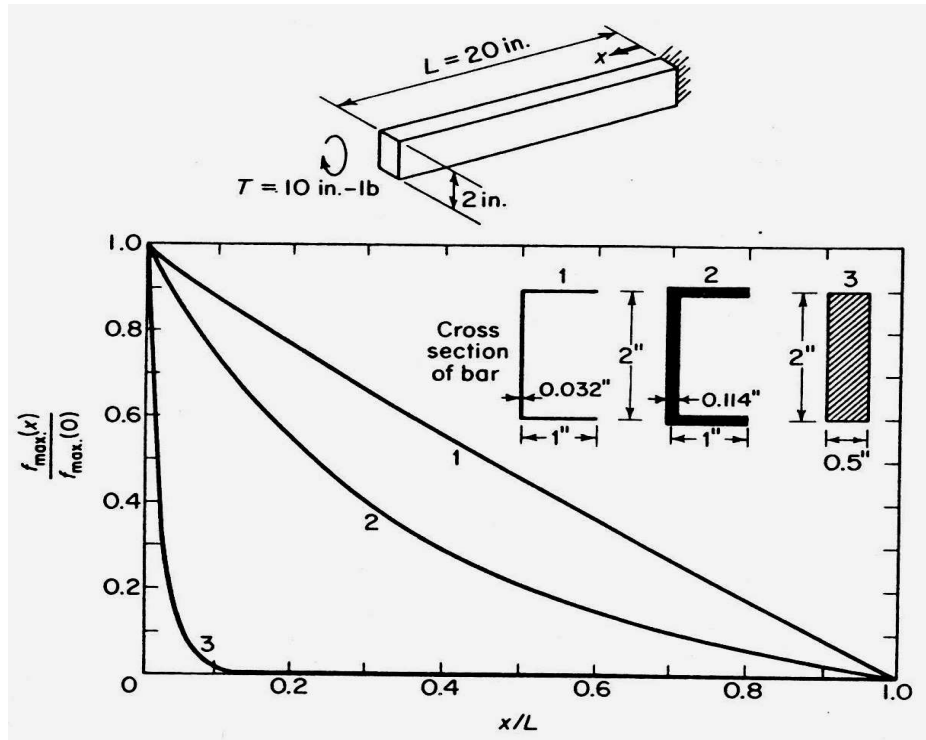


A fenti ábrák feszültségoptikai eljárással készült laboratóriumi tesztet ábrázolnak²⁹. A képeken jól látható, hogy az erők támadáspontjától távolodva hogyan „simulnak ki” a feszültségeloszlások. Ugyanez vonatkozik a lyukak és bemetszések okozta feszültségkoncentrációs zavarokra is, ezeknél az elv kiterjesztését láthatjuk.

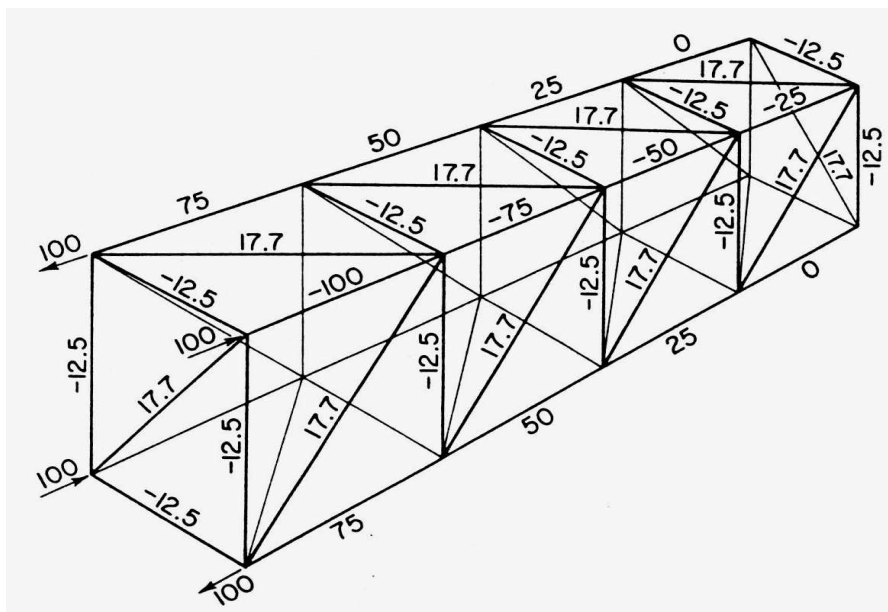
Megjegyezzük, hogy ma már jól ismerjük az *elv korlátait* is. Például a vékonyfalú szerkezetek nagy deformációval járó alakításánál gyakran lehet találni olyan terhelési változatokat, amelyeknél az erőátadódás helyétől lényegesen távolabb is jól érezhető a lokális hatás, vagyis *nem érvényes* a Saint-Venant-elv. Más hasonló terhelési eseteket illetve szerkezeti elemeket is találtak már a mérnökök, amelyeknél ugyanez a helyzet. Fontos tudnunk, hogy ebben semmi meglepő sincs, hiszen maga Saint-Venant sem fizikai „törvénynek”, hanem alapvetően egy nagyon sok esetben jól használható, sokféle mechanikai rendszer viselkedésére jellemző megállapításnak tekintette elvét. Ezek a korlátok illetve kivételek semmiképpen nem csökkentik az elv sokoldalú érvényességét.

²⁹ Forrás: http://web.mst.edu/~jthomas/classes/ae282/lesson_2/saint_venant/index.html honlap

Bemutatunk két érdekes példát³⁰ a fenti megjegyzésekhez kapcsolódóan. Az első egy *befogott konzol klasszikus csavarási* feladata, ahol három különböző keresztmetszetet használva számolták ki a tengelyirányú normálfeszültség változását. Jól látható, hogy a tömör keresztmetszetenél érvényesül az elv, a vékonyfalú változatoknál azonban már nem vehetjük figyelembe, vagyis a keresztmetszeti alak jelentősen befolyásolja a lokalitást.



A másik példa egy egyensúlyi erőrendszerrel terhelt *térbeli rácsos tartó* segítségével a külső erőrendszer lokalitásának mértékét elemzi.



³⁰ Hoff: *The applicability of Saint-Venant's principle to airplane structures.* J. of Aeronautical Structures, 12, pp. 455, 1945.

Kevésbé ismert a mérnökök között, de éppen ezért érdemes megemlíteni, hogy több évtizeddel az elv eredeti megfogalmazása után a kutatók elvégezték annak *szigorú matematikai vizsgálatát* és ebben kitértek a hipotézis korlátaira is. Először két olasz matematikus, *Zanaboni*³¹, majd *Locatelli*³² írt erről a kérdéstről tanulmányt, velük párhuzamosan *Goodier*³³ is foglalkozott a témával, majd *von Mises* vizsgálta nagyon részletesen az elvet. Az érdeklődők számára az ő „*On Saint-Venant's Principle*” című munkáját ajánljuk (*Bull. American Mathematical Society*, 51, 555-562, 1945).

A XX. század közepén az érdeklődés újból megnőtt az elv elméleti háttere iránt, például néhány évvel később *von Mises* után *Toupin*³⁴ cikke másféle matematikai eszközökkel végezte el az elemzést, más kutatók pedig olyan mechanikai feladatok esetében kezdték vizsgálni az elv érvényességét, amelyeknél a körülmények eltérnek az eredeti feltételrendszerrel (homogén, izotrop, lineárisan rugalmas viselkedés).

Az érdeklődők kedvéért megemlítünk *négy különböző témájú*, de egyaránt érdekes munkát:

- *Batra, R.C.: Saint-Venant's Principle for Porous Materials (J. of Elasticity, 39, pp. 265-271, 1995).* Porózus anyagok esetén elemzi az elv érvényességét.
- *Berglund, K.: Generalization of Saint-Venant's principle to micropolar continua. (Arch. Rat. Mech. Anal., 64, pp. 317-326, 1977):* Magasabb szabadságfokú kontinuumok esetére terjeszti ki az elvet.
- *Batra, R. C.: Saint-Venant's Principle in linear elasticity with microstructure. (J. of Elasticity, 13, pp. 165-173, 1983):* A mikroszerkezetnek az elv érvényességére gyakorolt hatását mutatja be a cikk.
- *Karp, B.: Dynamic version of Saint-Venant's principle. (Nonlinear Analysis, 63, pp. 931-942, 2005):* Dinamikus hatások esetén mutatja be az elv használatát, elméleti, kísérleti és numerikus vizsgálatokkal alátámasztva a levezetéseket.

Sok más témával is találkozni a szakirodalomban: kompozit elemeknél, piezoelektromos jelenségeknél, negatív Poisson-tényezőjű és anizotrop anyagoknál, viszkózus anyagoknál, stb. szintén elemezték már az elv sajátos változatait. Mindez azt mutatja, hogy a *Saint-Venant-elv* változatlanul őrzi fontos helyét a mechanika alapvető tételei között.

³¹ *Zanaboni, O.: Dimostrazione generale del principio del de Saint-Venant, Atti. Accad. Lincei, Roma, 25, pp. 117, 1937*

³² *Locatelli, P.: Estensione del principio di St. Venant a corpi non perfettamente elastici, Atti Accad. Sci Torino, 75-76, pp. 506 és 125, 1940, 1941*

³³ *Goodier, J. N.: A general proof of Saint-Venant's principle, Phil. Mag. Ser. 7, Vol. 23, pp. 607, 1937.*

³⁴ *Toupin, R. A.: The Saint-Venant's principle, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 18, pp. 83 -96, 1965.*

Felhasznált irodalom:

- 1./ **Timoshenko, S. P.:** History of Strength of Materials, *McGraw-Hill*, 1953.
- 2./ **Love, A. E. H.:** A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, *Cambridge University Press*, 1892.
- 3./ **Todhunter, I. – Pearson, K.:** A History of the Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time, Vol. I-II, *Cambridge University Press*, 1886.
- 4./ <http://www.sabix.org/bulletin/b9/verneuil.html>
- 5./ **Kalishky, S. – Kurutzné, K. M. – Szilágyi, Gy.:** Szilárdságtan, *Tankönyvkiadó*, 2000.