

Ritz, Galjorkin és mechanikai feladatok közelítő módszerei

A modern mechanikai számítási módszerek alkalmazói gyakran találkoznak két nagy tudós, Walter Ritz és Borisz Grigorjevics Galjorkin nevével. Munkásságuknak köszönhetően váltak a számítógéppel segített végeses elemes módszerek a huszadik-huszonegyedik század egyik leghatékonyabb mérnöki eszközévé és valósulhatott meg rendkívül bonyolult szerkezetek korábban elképzelhetetlen pontosságú mechanikai vizsgálata. Ez a rövid kettős életrajz az ő életüket és munkásságukat mutatja be, kiemelve a műszaki mechanika szempontjából legfontosabb eredményeiket.

Ritz élete

Walter Ritz 1878. február 22-én született a dél-svájci Valais kanton székhelyét adó Sion nevű városkában, egy jómódú család gyermekeként. Édesapja, *Raphael Ritz* ismert svájci művész volt, főleg belsőépítészként illetve kerttervezőként dolgozott. Édesanyja egy *Nördlinger* nevű német mérnök leánya, még fiatal korában került Svájcba. Ritz fényképét és szülővárosának a Rhone partján épült középkori váráról készült mai felvételt láthatjuk a következő képeken:



Ritz elemi és középiskolai tanulmányait Sionban végezte – kiváló eredménnyel –, majd 19 évesen felvételt nyert a Zürichi Műszaki Egyetemre. A mérnöki tanulmányok azonban nem nyerték el a tetszését, saját szavai szerint nagyon zavarta az a sok „közelítés és kompromisszum”, amit egy mérnöknek munkája során figyelembe kell vennie. A matematikailag jóval egzaktabb tudományok iránt kezdett érdeklődni és így hamarosan átváltott a fizika szakra. Érdekességként említjük, hogy a nála egy évvel fiatalabb *Albert Einstein*¹ volt a csoporttársa.

1900-ban Ritz sajnos súlyosan megbetegedett. Először hosszú ideig mellhártyagyulladásal kezelték, majd tuberkulózist állapítottak meg nála. Orvosai azt javasolták, hogy a meglehetősen nyirkos éghajlatú Zürichből utazzon el az egészsége számára kedvezőbb helyre. Németországot választotta és 1901-ben el is költözött *Göttingen*be, hogy az ottani *György-Ágoston Egyetem*² folytassa aspiránsi tanulmányait *Woldemar Voigt*³ és *David Hilbert*⁴

¹ 1879 – 1955. Német származású elméleti fizikus, egyike a legnagyobb tudósoknak.

² Híres német egyetem, tanárai közé tartozott *Gauss* és *Riemann* is, hallgatói között pedig olyan neveket találunk, mint *Heine*, *Schopenhauer*, *Bismarck*, *Max Planck*, *Heisenberg* és *Oppenheimer*.

tanítványaként. Már 1902 végén – kitűnő eredménnyel – megvédte az atomszerkezet spektrálméletével foglalkozó doktori disszertációját, ezt követően pedig különböző egyetemeket és kutatóközpontokat keresett fel: 1903 tavaszán *Leidenben Hendrik Antoon Lorentz*⁵ előadásait hallgatta, majd júniusban a bonni *Heinrich-Kaiser-Institut*-ba ment, ahol kalciumkarbonát színképelemzésével foglalkozott, novemberben pedig már *Párizsban* van, az *École Normal Supérieure* laboratóriumában. Itt az infravörös sugárzás alkalmazási lehetőségeit tanulmányozta különböző fényképezési eljárásokban, de sajnos 1904 júliusában – egyre súlyosbodó tüdőbetegsége miatt – kénytelen volt abbahagyni ezt a kutatást, vissza kellett térnie Zürichbe.

Egészen 1906-ig olyan beteg volt, hogy képtelen volt munkáját folytatni. 1907-ben átmeneti javulás következett be állapotában, így szeptemberben el tudott utazni *Tübingenbe*, édesanyja szülővárosába.

1908-ban docensi állást kínáltak fel neki a göttingeni *György-Ágoston Egyetemen*, ezt rögtön elfogadta és oda is költözött Tübingenből. Még ebben az évben itt jelentette meg leghíresebb munkáját, a „*Recherches critiques sur l'Électrodynamique Générale*” című könyvet.

Sajnos szervezete nem tudott megbirkózni az egyre jobban elhatalmasodó tüdőbajjal. Hosszas szenvedés után halt meg *Göttingenben* 1909. július 7-én. Mindössze 31 éves volt, a tudomány egy rendkívül ígéretes tehetsége távozott vele tragikusan korán.

Tudományos munkásságának fontosabb adatai

Ritz nagyon rövid élete ellenére jelentős tudományos eredményeket ért el. Nem kívánjuk ezek részleteit bemutatni, mert kivétel nélkül az elméleti fizika területéhez tartoznak, de címszavak szintjén megemlítünk néhányat:

1908-ban publikálta például a ma „*Ritz-féle kombinációs elv*” néven ismert tételét, amely színképvonalak felbontásában használatos. A fizikusok körében ismert a fény részecsketermészetének magyarázatához fűződő ún. „*emissziós elmélet*”-e, amelyet sikerrel alkalmaztak a fénysebesség mérésére szolgáló Michelson-Morey-féle kísérletek elméleti magyarázatára. Előbb említett könyvében fontos kritikai megjegyzéseket fűzött az *elektrodinamika* alapkérdéseire és élete utolsó napjáig tartott vitája Einsteinnel a „*Physikalische Zeitschrift*” hasábjain a *speciális relativitáselmélet* egyes tételeiről.

Mérnökök számára legfontosabb alkotása egyértelműen a funkcionálok numerikus vizsgálatára ajánlott eljárása, amit ma *Ritz-módszer* néven ismer a tudomány. Ennek ismertetésére külön pontban fogunk kitérni, de először még röviden bemutatjuk a témánk szempontjából fontos másik tudós, Galjorkin életét.

³ 1850 – 1919. Német elméleti fizikus. Főleg kristályfizikával, optikával és az atomi szerkezetek vizsgálatával foglalkozott.

⁴ 1862 – 1943. Német matematikus, geometriai vizsgálatairól illetve a funkcionálanalízishez kapcsolódó munkásságáról ismert.

⁵ 1853 – 1928. Kiváló holland fizikus. Matematikai munkásságát (Lorentz-transzformációk) *Einstein* használta fel a világegyetem tér- és időszerkezetének magyarázatánál.

Galjorkin élete

Borisz Grigorjevics Galjorkin 1871. március 4-én⁶ született az oroszországi *Polockban*⁷, a Dvina folyó partján levő, történelmi emlékhelyeiről híres kisvárosban. Időskori arcképe, és Polockról – néhány évvel az ő születése után – készült, kézzel színezett fénykép látható a következő sorokban:



Igen szerény körülmények között nevelkedett, szülei kis kézműves műhelyt tartottak fenn a városka szélén levő házukban, de munkájuk éppen csak a legszükségesebbek megszerzését tudta biztosítani. Már 12 éves korától rendszeresen dolgozott az iskola mellett, sokáig például írnok⁸ volt a városi bíróságon. Miután Polockban befejezte elemi iskolai tanulmányait, szülei hozzájárultak, hogy a tanítói által nagyon tehetségesnek tartott fiú tovább tanulhasson, de ezen a szülői beleegyezésen kívül mással már nem tudták segíteni, a fiatal Galjorkinnak nagyon hamar meg kellett tanulnia az önálló életet.

22 éves koráig *Minszkben* dolgozott, munkája mellett középiskolába illetve egy egyetemi előkészítő iskolába járt. 1893-ban sikeresen felvételizett a *Szentpétervári Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karára*, de ezt is csak úgy tudta elvégezni, hogy mellette állandóan dolgozott, kezdetben mint műszaki rajzoló, később pedig mint magánórákat adó tanár.

1899-ben kiváló eredménnyel fejezte be az egyetemet és azonnal tervezőmérnökként alkalmazták különböző műszaki cégeknél. Először *Harkovban* dolgozott egy gőzmozdonyokat gyártó nagyvállalatnál (itt mechanikát is oktatott a cég továbbképző intézetében), majd 1903-ban fél évre tervezői állást vállalt a *Kínai Távolsági Vasútnál*. 1904-ben visszatért *Szentpétervárra*, ahol Oroszország egyik legnagyobb tartálykészítő cégénél kapott tervezői állást.

Ezekben az években Galjorkin bekapcsolódott az országban zajló politikai eseményekbe. Még 1899-ben az egyetemen lett tagja az Oroszországi Szociáldemokrata Pártnak, részt vett egy sztrájk szervezésében is, sőt 1906 elején még a Szociáldemokrata Párt mensevik tagozatának

⁶ Az akkori oroszországi régi naptár szerint február 20-án.

⁷ A kisváros ma Fehéroroszországhoz tartozik.

⁸ A visszaemlékezések szerint gyönyörűen írt és rajzolt, sokszor bízták meg például oklevelek díszítésének munkáival.

szentpétervári vezetőségébe⁹ is beválasztották. A rendőrség 1906. augusztus 5-én az egész vezetőséget letartóztatta, és az 1907. március 5-én megtartott tárgyaláson¹⁰ Galjorkint másfél évi börtönre ítélték.

A börtön radikálisan megváltoztatta Galjorkin életét. Ebben az időben fordult teljes energiájával a tudományos kutatás felé. Mivel lehetősége volt cellájában olvasni, a másfél év egészét és minden erejét matematikai és mechanikai könyvek tanulmányozásának szentelte és szabadulása után úgy döntött, felhagy korábbi tervezői munkájával, mechanikát oktat és kutat. Még egy dolog megváltozott az életében: kilépett a Szociáldemokrata Pártból, és soha többé nem foglalkozott semmilyen politikai tevékenységgel. Később írt életrajzaiban is nagyon szűkszavúan és óvatosan szólt ezekről az évekről, és még a nyílt rákérdezés esetén sem óhajtott többet beszélni róluk.

1908 végén szabadult a börtönből, 1909 márciusában pedig már tanári állást is kapott a *Szentpétervári Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karának Mechanika Tanszékén*¹¹, ahol azonnal leadta publikálásra élete első cikkét a többszintes merev csomópontú térbeli keretrendszerek mechanikai vizsgálatára javasolt eljárásáról. A cikk (vagy inkább tanulmány) 130 oldal hosszú volt, döntő részét még a börtönben írta. Megjegyezzük, hogy bár ez a Tanszék a gépészek oktatását látta el, de Galjorkin egyre inkább az építőmérnöki szerkezettervezés iránt kezdett érdeklődni, bár élesen azért soha nem választotta el a két szakterületet saját munkájában sem.

1909 nyarától kezdve egészen az első világháborúig az egyetem támogatásával minden évben hosszabb külföldi utakat tett *Németországba, Ausztriába, Belgiumba és Svédországba*. Egyetemeket és jelentős építkezéseket keresett fel, mindenütt a mechanikához (főleg a magasépítési illetve hídszerkezetekhez) kapcsolódó kérdéseket tanulmányozta. A külföldi utazások közötti időben a tartószerkezetek témaköréből tartott előadásokat az egyetemen, saját tanszéke mellett 1911-től az úgynevezett *Pétervári Női Műszaki Főiskolán*¹² is. Újból elkezdett gyakorlati tervezési feladatokkal is foglalkozni, 1913-ban például közreműködött a Szentpétervári Hőerőmű létrehozásában, az ő tervei alapján épült egy igen nagy teherbírású többszintes acélkeret (az első ilyen volt Oroszországban és Európában is ritkaságszámba ment akkoriban), illetve több óriási fémtartály.

Kutatási tevékenysége az 1910-es évek közepétől vált egyre jelentősebbé. Míg korábban főleg rúdszerkezetekkel foglalkozott, 1915 után elsősorban a lemez- és egyéb felületszerkezetek vizsgálata került figyelme középpontjába, és egyre inkább elmélyült az egyes feladatok megoldásának matematikai elemzésében is. 1915-ben jelent meg az a híres cikke, amely az egész világon összekapcsolta nevét a differenciálegyenletek hatékony numerikus megoldásának lehetőségével illetve a XX. század közepétől kezdve a végeselemes technikákkal, de ezzel a publikációval majd külön pontban foglalkozunk. Az 1917 és 1919

⁹ Ezzel párhuzamosan 1905-ben ő volt az egyik alapítója az Oroszországi Mérnök Egyletnek.

¹⁰ A 19 tagú vezetőségből egy ember kapott két évet, nyolcat másfél évi börtönre ítélték, a többiek szabadon bocsátották. A XX. század későbbi politikai pereinek történetét ismerve az ítéletek kifejezetten enyhének mondhatók...

¹¹ Az 1910 és 1920 közötti években ez a Tanszék volt az oroszországi mechanikakutatás legszínvonalasabb helyszíne, többek között itt dolgozott a későbbiekben világszerte komoly hírnévre szert tevő *Timoshenko* és a két kiváló matematikus, *Bubnov* és *Krülov* is.

¹² A nők műszaki képzését akkoriban hivatalosan elkülönítették a férfiakétól, csak az első világháború után vonták össze a két műszaki felsőoktatási intézményt.

között évek egyébként kifejezetten eredményesek voltak számára, nagyon sok cikket jelentetett meg a különböző alakú és peremfeltételű lemezek vizsgálatáról az *Orosz Tudományos Akadémia Közlönyében*.

Az első világháború illetve a forradalmak alatt végig Szentpétervárott maradt és azzal foglalkozott, amit addig is csinált: tanított, különböző mechanikai feladatokon dolgozott és cikkeket írt. 1919 januárjában kinevezték egyetemi tanárnak a II. sz. Műszaki Egyetemre (a korábbi „Női Műszaki Főiskolára”), de megtartotta állását korábbi tanszékén is, mert 1920-ban a Gépészmérnöki Karon is megkapta a professzori kinevezést. Jelentős váltást 1922 hozott számára, amikor megüresedett az *Építőmérnöki Kar Mechanika Tanszékének* vezetői állása. Galjorkin sikerrel pályázott, így 13 évi gépészkarai munka után az építőmérnököknél tanszékvezetőként folytatta oktató és kutató tevékenységét.

Kollégái körében nagyon népszerű volt munkaszeretete, csöndes-nyugodt, ugyanakkor szívósan kitartó stílusa miatt. 1923 decemberében megválasztották az Építőmérnöki Kar dékánjának. Olyan időszakban történt ez, amikor az egyetem életét komoly belső viharok nehezítették: külső politikai kényszerre az egyetemek vezetésébe igen nagyszámú hallgatót kellett bevonni, és ezt az oktatók jelentős része kifejezett nemtetszéssel fogadta. Galjorkin rátermett vezetőnek, kitartó, taktikus vitapartnernek bizonyult, tárgyalások hosszú sorával sikerült elérni, hogy az Építőmérnöki Karon lassan normalizálódott a helyzet és alapvetően ismét az oktatás és kutatás kérdéseivel foglalkoztak oktatók és hallgatók. Kollégái írták róla később, hogy Galjorkin a sokszor ide-oda kapkodó utasításoktól és rendeletektől soha nem vesztette el a türelmét, és lehetőség szerint igyekezett mindent úgy értelmezni, hogy az az egyetem javára váljon, az intézménynek ártó előírások végrehajtását pedig addig halogatta, amíg csak lehetett. Nagyon sokszor sikerült megváltoztatnia olyan döntéseket, amelyek az oktatás „egyszerűsítését” (értsd: színvonalának csökkentését), laborok-tanszékek bezárását írták elő, sőt, sikerült elérnie, hogy az egyetemen új, addig nem létező kutatólaboratóriumok (Vasútépítő, Hidraulikai Labor) jöjjenek létre. Hat évig volt dékán, és utódjának sikeresen működő, jó intézményt adott át.

Dékánsága idején sem szünetelt oktatói és kutatói tevékenysége. 1924-től 1929-ig a Vasútépítő Mérnöki Intézetben és a Tudományegyetemen is tanított különböző mechanikai tárgyakat, 1922-től pedig újból sokat publikált.¹³ 1924-ben még részt vehetett Hollandiában egy alkalmazott mechanikával foglalkozó tudományos konferencián, de ettől kezdve már soha többet nem kapott lehetőséget külföldre utazni.

1928-ban a Tudományos Akadémia levelező tagjának választották, majd ezt követően őt is elérte a kiemelkedő tudósokat mindig fenyegető veszély: egyre több bizottság és szakértő testület kérte fel tagjának. Részt vett az országos szintű nagy építkezések (gátak, erőművek, hidak, stb.) tervezési szakértésében, az Akadémia és a kormányzat számtalan véleményező testületében és különféle egyetemi bizottságokban. 1934-ben egyszerre *két* nagydoktori címet kapott: a *műszaki*, illetve a *matematikai* tudományok területén is sikerrel védte meg disszertációit, két év múlva pedig megválasztották az Akadémia rendes tagjának.

Minden hivatalos címe és rangja ellenére Galjorkin nem vált meg egyetemi katedrájától. Írta és mondta, hogy a világon a legszívesebben elméleti szilárdságtant oktat, és csak egyetlen

¹³ 1919 és 1922 között semmilyen tudományos publikálásra nem volt lehetősége senkinek, mert erre a célra nem tudtak papírt biztosítani. Ezekben az években Galjorkin kizárólag külföldi lapokba írt.

dolog zavarja: a hallgatók gyenge matematikai előképzettsége, ami rendkívül nehézé teszi számukra a tárgy rendes elsajátítását...¹⁴

Puritán, egyszerű életet élt, a különböző címekért kapott jövedelmét teljes egészében könyvekre, műszerekre költötte. Jellemző anekdotaként mesélték róla, hogy az egyetemre látogató hazai és külföldi vendégeket mindig egyedül fogadta a pályaudvaron és utána mindenkit a villamoshoz vezetett, és elmagyarázta, hogy lehet eljutni az egyetemre. A külföldieknek annyi kedvezményt adott, hogy megvette számukra a villamosjegyet... Ebből persze többször botrány is lett, mert sok magas rangú állami vendég nem volt hozzászokva az ilyen bánásmódhoz.¹⁵

A második világháború kitörésekor egy rendelettel valamennyi akadémikusnak katonai rangot adtak és különböző katonai szakértői testületekbe „sorozták” be őket. Galjorkin (aki korábban soha nem volt katona) őrnagyi rangot kapott és kötelezték az ennek megfelelő egyenruha viselésére. Rendkívül kínosan érezte magát, szégyenkezett az öltözéke miatt.¹⁶ Kollégái elbeszélései szerint néha szinte bohózatba illő jelenetek játszódtak le, amikor az utcán vagy hivatalos találkozókön a neki tisztelgőknek barátságosan mosolyogva integetni kezdett.

Amikor a háború Leningrád határához ért, Galjorkin a védelmi bizottság mérnöki szakértője lett, a különböző erődítések, óvóhelyek, stb. mechanikai vizsgálatához nyújtott segítséget.

Egy év után az ostromlott városból áthelyezték Moszkvába, az Akadémia Hadmérnöki Bizottságánál kapott munkát. Idős szervezete már nem sokáig bírta a háborús évek állandóan feszített munkatempóját és a sok nélkülözést. Még megérte a háború végét, de egyre többet betegeskedett, és végül 1945. július 12-én Moszkvában meghalt.

Tudományos munkásságának fontosabb adatai

Galjorkin életművében egyértelműen a különböző típusú parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására használatos, róla elnevezett közelítő módszer a legfontosabb. Ennek részleteire a következő pontban térünk majd ki. Emellett – matematikával foglalkozó mérnökként (ő maga „határozta” meg így saját magát) – elsősorban a rúd- és lemezszerkezetek vizsgálatáról jelentek meg saját publikációi. Ezek közül az először 1933-ban kiadott „*Vékony rugalmas lemezek*” című könyvét említjük, ez a mű a lemezekről írt munkáinak a legjobb összefoglalása.

A mechanikai feladatok közelítő megoldásai

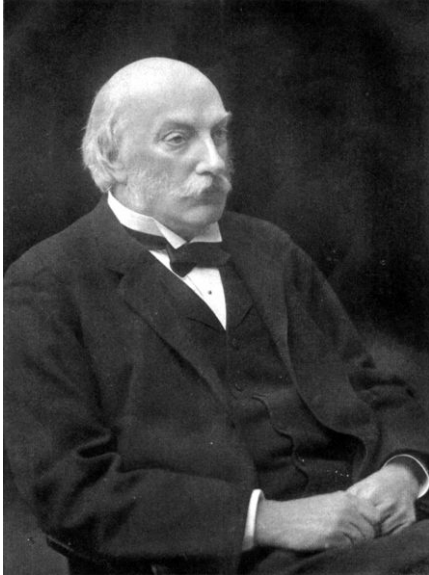
Walter Ritz és Borisz Grigorjevics Galjorkin életének rövid bemutatása után tekintsük most annak a módszernek a létrejöttét, amely oly szorosán összeköti kettőjük nevét, és amiről túlzás nélkül elmondhatjuk, hogy a számítástechnika adta lehetőségekkel összekapcsolódva a XX. században radikálisan megváltoztatta a mérnöki munka jellegét.

¹⁴ A történelem ismétli önmagát. Young életrajzánál már írtuk, hogy a hallgatók állandóan panaszkodtak, hogy túl magas színvonalúak az előadások. Galjorkin hallgatói is azt vetették professzoruk szemére, hogy „csupa matematika az egész...”

¹⁵ Felettesei az ő megkérdése nélkül vettek a Tanszékének egy gépkocsit, hogy az „előkelőbb” vendégeket azon szállítsa, de Galjorkin egyszerűen nem vett róla tudomást.

¹⁶ Ráadásul soha nem tett különbséget az egyes katonai rangjelzések között.

Az ipari fejlődés a XIX. század végén már olyan szintet ért el, hogy megnőtt az igény a korábbiaknál jóval bonyolultabb szerkezetek pontos és gazdaságos számítására. Az ehhez szükséges elméleti alapok Euler¹⁷, Lagrange¹⁸, Navier¹⁹, Cauchy²⁰ illetve Saint-Venant²¹ és mások munkássága nyomán jórészt már rendelkezésre álltak a mechanikában, de sajnos az egyenletek megoldása a legtöbb esetben egyáltalán nem vagy csak igen nagy nehézségek árán sikerült. Szükség volt tehát olyan matematikai eljárásokra, amelyek segítségével a feladatokhoz tartozó (általában parciális) differenciálegyenletek illetve az energiaelvű vizsgálatokból kapott funkcionálok vizsgálata egyszerűbben elvégezhető.



*John William Strutt, Rayleigh harmadik bárója*²² – vagy a fizikusok között ismertebb nevén *Lord Rayleigh* – volt az első a világon, aki javaslatot tett egy variációs feladat közelítő függvénnyel történő megoldására (az ő fényképe látható baloldalt). 1877-ben publikált híres könyvének²³ első kötetében rudak rezgéseinek vizsgálatánál vezette le, hogy a rezgéstani feladat differenciálegyenletének megoldása egyenértékű ugyanazon feladat variációs problémájának vizsgálatával, a minimumfeltételt kielégítő megoldás az eredeti differenciálegyenletnek is megoldása lesz. *Rayleigh* egy ismeretlen konstanssal²⁴ szorzott trigonometrikus függvény formájában kereste a megoldást úgy, hogy a függvényt a variációs feladat integráljába helyettesítette és az ismeretlen konstans a funkcionál minimumfeltétele alapján határozta meg.

Rayleigh nem foglalkozott módszere általánossá tételével vagy a más típusú fizikai feladatokra történő felhasználás lehetőségeivel. Későbbi munkáiban is előfordult, hogy néha alkalmazta ezt a numerikus eljárást, de kutatói figyelmét egész életében alapvetően más kérdések kötötték le, számára ez a fajta vizsgálat technikai részletkérdés maradt.

¹⁷ Leonhard Euler (1707 – 1783) kiváló svájci matematikus, életéről lásd a róla készült életrajzot.

¹⁸ Joseph-Louis Lagrange, eredeti nevén Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736 – 1813) olasz származású francia matematikus.

¹⁹ Claude-Louis Navier (1785 – 1836) francia mérnök, az építőmérnök képzés és a gyakorlati mérnöki számítások megújítója. Életéről lásd a róla készült életrajzot.

²⁰ Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) francia matematikus, a modern feszültségfogalom bevezetője, a rugalmasságtan egyensúlyi egyenleteinek megalkotója. Életéről lásd a róla készült életrajzot.

²¹ Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant (1797 – 1886) kiváló francia mechanikus, az addigi mechanikai elméletek első összefoglaló jellegű rendszerezője. Életéről lásd a róla készült életrajzot.

²² 1842 – 1919. Nobel-díjas angol fizikus, Maxwell utódja a Cambridge-i Egyetem Fizika Intézetének vezetőjeként. Kiváló kísérleti fizikus volt és nagyon széles érdeklődési körrel rendelkezett. A hang vizsgálata mellett sokat foglalkozott sugárzó anyagokkal, áramló folyadékokkal és gázokkal (az argon felfedezése 1895-ben az ő nevéhez fűződik, ezért kapott 1904-ben Nobel-díjat), de például ő magyarázta meg először az ég kék színének fizikai okát is. Publikációs listája 446 művet tartalmaz.

²³ „The theory of sound I-II.”, Macmillan Publ., London, 1877.

²⁴ Fontos megjegyeznünk, hogy soha nem használt egyetlen konstansnál, illetve egyetlen függvénnyel többet a közelítő megoldásnál.

Walter Ritz szintén fizikus volt, de ő *Rayleigh*-hez képest jóval általánosabban elemezte ezt a kérdést. Több mint harminc évvel angol kollégája könyvének megjelenése után publikálta híres cikkét (*Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Math. Physik, Journal für die reine und angewandte Mathematik., Bd.135. 1908*), melyben bemutatta, hogy a megoldás nem kötődik a rezgéstani problémához, az eredeti alapgondolat alkalmazható *tetszőleges variációs feladat* vizsgálatára és a függvények számának elvi korlátozására sincs semmiféle indok! Tisztázta a függvények folytonosságával kapcsolatos kérdéseket, illetve a függvények és az adott feladathoz tartozó peremfeltételek kapcsolatát is. Ritz bemutatta, hogy egy adott variációs feladatnál a közelítő polinomban szereplő függvények együtthatóinak a meghatározása végül mindig egy (homogén vagy inhomogén) lineáris egyenletrendszer megoldásával történik, és elemezte ennek az egyenletrendszernek a tulajdonságait is. Megjegyezzük, hogy az adott kor numerikus lehetőségei természetesen korlátozták a közelítésben felvehető függvények számát, hiszen néhány ismeretlenes egyenletrendszerrel nagyobb méretű feladatot akkoriban csak rendkívül nehezen lehetett megoldani.

Ritz elsősorban az elméleti fizika kérdéseivel és nem a különböző mérnöki feladatok vizsgálatával kívánt foglalkozni, amikor új matematikai módszerét bemutatta a tudományos közösségnek. Ez azonban nem volt akadálya annak, hogy erre a technikára a matematika iránt fogékony mérnökök hamar felfigyeljenek. Tragikusan korai halála²⁵ miatt nem érthette meg, hogy már az 1910-es években világszerte elkezdték alkalmazni eljárását a rugalmasságtani feladatok vizsgálatánál és számos más valós mérnöki feladatnál. Fontos megjegyezni, hogy sok évtizedig szinte minden publikáció és hivatkozás együtt említette a két fizikus nevét: teljes joggal és egyúttal pontosan *Rayleigh-Ritz-módszernek* nevezték ezt a numerikus technikát. Csupán az utóbbi évtizedek rohanó stílusa hagyja le sajnos egyre gyakrabban az idősebb angol tudóst a kettős névből.

A közelítő eljárás történetének harmadik szereplője, Borisz Grigorjevics Galjorkin még a börtönben ismerkedett meg Ritz módszerével. A szentpétervári egyetem is kiváló műhely volt ebből a szempontból, mert egyik matematikus kollégája, *I. G. Bubnov*²⁶ éppen az az 1910-es évek elején írt egy tanulmányt a Ritz-módszer mérnöki alkalmazásairól, többféle feladatnál bemutatva az általa optimálisnak tartott függvényfelvételt. Megjegyezzük, hogy *Bubnov* 1911-ben írt egy rövid, mindössze négy oldal terjedelmű tanulmányt (egy pályázathoz csatolta mellékletként, nyomtatásban 1913-ban jelent meg az egyetemi lapban), melyben vázolja a Ritz által javasolttól eltérő módszerek, többek között az ortogonalitási feltételen alapuló megoldás elvi lehetőségét. A részletekre sem akkor, sem később nem tért ki.²⁷ Maga Galjorkin 1915-ben publikálta saját modelljét (*Series-solutions of some cases of equilibrium of elastic beams and plates (orosz nyelven), Vesthnik inzsenerov i tehnikov. pp. 879-903, 1915*). Ebben a – mérnöki alkalmazásra szánt – munkában elődeihez képest egy radikális újítást vezetett be: míg *Rayleigh* és Ritz *variációs feladat* vizsgálatára alkalmazták eljárásukat,

²⁵ Emlékeztetőül: Ritz 1909. júliusában halt meg, a jóval korábban született *Rayleigh* tíz évvel élte őt túl.

²⁶ *Ivan Gregorjevics Bubnov* (1872 – 1919) kiváló orosz hajótervező mérnök, a cári flotta vezető tervezője, utolsó éveiben a Tengerészeti Akadémia professzora. Részt vett az első orosz tengeralattjáró tervezésében is.

²⁷ A cikk címe: *On the stability of elastic systems*, (orosz nyelven), *Sbornik St. Petersburg Inst. Inzh. Put. Soobsch. Vol. 81, pp. 33-36., 1913*. Egyes irodalmi hivatkozások – főleg az orosz nyelvű matematikai munkákban – erre a tanulmányra hivatkozva nevezik *Bubnov-Galjorkin-módszernek* az ortogonalitási feltételt, de ez a kettős elnevezés szélesebb körben nem terjedt el.

Galjorkin az „eredeti” *differentiálegyenlet* közelítő megoldására mutatott be egy olyan módszert, amely a közelítő függvény és a feladat *ortogonalitási feltételén* alapszik. Ez a technika abban az értelemben általánosabb a *Rayleigh-Ritz-változatnál*, hogy segítségével bármilyen nemlineáris *differentiálegyenlet* közelítő megoldása előállítható, míg a korábbi módszerrel „csak” a variációs változatot stacionáriussá tevő megoldás kereshető.

Magát a közelítést Galjorkin formailag ugyanolyan módon javasolta felvenni, mint elődei: ismeretlen konstansokkal megszorított függvények összegét használta fel az ortogonalitási feltételben, és az ismeretlen állandókat végül ugyanúgy egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapta, mint a *Rayleigh-Ritz-féle* approximáció. Erre a formai hasonlóságra hivatkozva néhány könyvben Ritz-Galjorkin-féle módszerként nevezték el modelljüket, ez az elnevezés azonban kizárólag csak akkor használható, ha a közelítésnél használt függvény formai alakjára hivatkozunk. Minden más esetben azonban tudnunk kell, hogy két elvileg különböző modelltől van szó: *ugyanannak* a fizikai problémának *matematikailag eltérő* módon történő közelítő megoldását keressük. A helyes elnevezés tehát az, ha külön *Rayleigh-Ritz-* és külön *Galjorkin-féle* modellt említünk.

A XX. század első felében mindkét eljárás ismertté vált a mérnökök között. Az igazság kedvéért hozzá kell tennünk azonban, hogy egyik sem vált a hétköznapi mérnöki tervezési munka részévé, hiszen bonyolultabb geometriájú vagy anyagi felépítésű szerkezetek vizsgálata olyan nagyméretű egyenletrendszer megoldását igényelte volna, amit a kor adottságai nem tettek lehetővé. Gyökeres változás következett be a század ötvenes-hatvanas éveiben a programozható számítógépek megjelenésével, a sokismeretlenes egyenletrendszerek megoldása ezek segítségével már nem okozott megoldhatatlan nehézséget.

Egy másik fontos újítást is elkezdtek alkalmazni a mérnökök a hatvanas években: a Ritz- és a Galjorkin-féle közelítésekben olyan speciális függvényeket használtak, amelyek csak a vizsgált tartomány egyes részein különböztek zérustól és ráadásul a tartomány kijelölt pontjain egységnyi értékkel rendelkeztek. Ez a különleges függvényfelvételi mód sok előnnyel járt: fizikai értelmet lehetett adni az addig csak matematikai változókként szereplő ismeretlen konstansoknak, tipizálni-egységesíteni lehetett a közelítő függvényeket, továbbá az eredeti szerkezet részekre osztásával sokkal könnyebben lehetett követni a geometriában, anyagi tulajdonságokban és a terhelésben bekövetkező változást. Ezt a különleges függvényfelvételi módszert nevezik *végeselemes technikának*²⁸. Természetesen ezek a speciális változtatások mindkét itt tárgyalt közelítési mód esetén alkalmazhatók, így ma Rayleigh-Ritz-féle és Galjorkin-féle végeselemes változatokról egyaránt beszélhetünk (a végeselemes technikák általános kérdéseiről és a Rayleigh-Ritz-féle végeselemes modelltől például lásd a [3] és [4] alatti műveket, míg a Galjorkin-féle végeselemes modellezésről a [5] és [6] alatti könyvekben található bőséges információ). Az eredeti fizikai háttérnek megfelelően a Rayleigh-Ritz-féle végeselemes változat elsősorban a kvázistatikus (tehát variációs elvvel rendelkező) feladatok körében lett népszerű, míg a Galjorkin-féle modellt nemlineáris mérnöki, fizikai és matematikai problémák megoldására használják.

²⁸ Érdemes megjegyezni, hogy az ilyen típusú közelítések lehetősége már Galjorkin – illetve más matematikusok (például *Kriilov* és *Kantorovics*) – egyes cikkeiben is nagyon korán említésre került, de mivel akkoriban hiányzott a megvalósításhoz szükséges eszköz (a számítógép), így pusztán matematikai ötletnek tekintették.

Megjegyezzük, hogy a hetvenes évektől kezdve a végeselemes Galjorkin-módszernek többféle speciális változatát is kifejlesztették. Megemlítjük ezek közül az úgynevezett „nemfolytonos Galjorkin-modell” (DG = discontinuous Galerkin-method), ami a differenciámódszert kapcsolja össze a végeselemes technikával. Kezdetben atomfizikai, elektrodinamikai és áramlástan feladatok megoldására alkalmazták, ma már rugalmasságtani vizsgálatokat is végeznek vele (lásd a [7] alatti cikket). Hasonló változat a kezdetben ugyancsak áramlástan, ma már nagyon sokféle más nemfolytonos feladat vizsgálatára alkalmazott *Petrov-Galjorkin-féle* algoritmus is, lásd például a [8] alatti cikket.

Irodalom:

- 1./ **Timoshenko, S. P.:** History of Strength of Materials, *McGraw-Hill*, 1953.
- 2./ **Forman, P.:** Dictionary of Scientific Biography, XI, pp. 475, *Charles Scribner's Sons*, New York, 1975.
- 3./ **Bojtár I. – Gáspár Zs.:** Végeselemmódszer építőmérnököknek, *Terc Kiadó, Budapest*, 2002.
- 4./ **Bojtár I. – Gáspár Zs.:** A végeselemmódszer matematikai alapjai, *Egyetemi jegyzet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem*, 2008.
- 5./ **Fairweather, G.:** Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, New York, 1978.
- 6./ **Thomee, V.:** Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, *Lecture Notes in Mathematics 1054*, New York, 1984.
- 7./ **Arnold, D. N. - Brezzi, B. F. – Cockburn - Marini, L. D.:** Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 39(5):1749-1779, 2002.
- 8./ **Lin, H. – Atluri, S. N.:** Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Convection-Diffusion Problems, *CMES*, vol.1, no.2, pp.45-60, 2000.