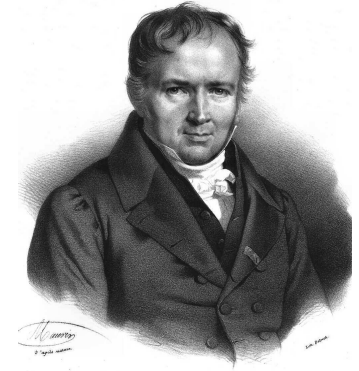


Poisson és a Poisson-tényező

Poisson élete

Siméon-Denis Poisson 1781. június 21-én született Pithiviers-ben, egy Párizstól mintegy 80 km-re délre található kisvárosban. Szülei nagyon szegények voltak, apja korán nyugdíjazott, alacsony beosztású katonatiszt. Több idősebb testvére a nehéz körülmények miatt már kisgyermek korában meghalt, Poisson is csak édesanyja emberfeletti küzdelmének köszönhetően életben maradt. Nem tudták iskolába járatni, egészen tizenöt éves koráig éppen csak olvasni és írni tudott otthon megtanulni. Annál csodálatraméltóbb volt rendkívül gyors szellemi fejlődése az ezt követő években. 1796-ban – szerencsés változásként az életében – Fontainebleau-ban lakó nagybátyja magához vette, és lehetőséget adott neki a tanulásra.



Egészen lenyűgöző intenzitással kezdett matematikát tanulni, így két évvel később, 1798-ban sikerrel felvételizett az Ecole Polytechnique már akkor híres intézetébe. Olyan kiváló tanárok keze alatt tanult, mint *Pierre-Simon Marquis de Laplace*¹ és *Joseph Louis Lagrange*² (aki akkor például a függvénytant oktatta). Mindketten felfigyeltek a hatalmas tempóban haladó diákra (1800-ban – mindössze két év alatt – már sikerrel be is fejezte tanulmányait) és javaslatukra az egyetem először segédoktatói, majd 1806-tól rendes előadói állást ajánlott fel a Matematika Tanszéken (ő is függvénytant oktatott, éppen a – Napóleon utasítására Grenoble-ba távozó – *Jean Baptiste Joseph Fourier*³-t váltotta a katedrán).

Lagrange és Laplace is nagyon jó baráti kapcsolatban voltak Poissonnal, a 32 évvel idősebb Laplace szinte fiaként kezelte a tehetséges fiatalembert. Poissonnak már első publikációi olyan sikeresek voltak, hogy Lagrange javaslatára 1812-ben a Francia Akadémia felvette tagjai közé. 1808-ban a mérések szabványosításával és a tengeri navigáció kérdéseivel foglalkozó Bureau des Longitudes-ben kezdett el dolgozni csillagászként, 1809-ben pedig az Ecole Polytechnique-n a mechanika professzori állását is ellátta. 1815-től a Saint-Cyr-ben működő nagy francia katonai akadémia rendszeres vizsgáztatója lett, 1818-ban az angol Royal Society vette be tagjai közé, 1820-ban pedig az Ecole Polytechnique választotta be igazgatótanácsi tagjai közé. 1832-ben megkapta a Royal Society rangos kitüntetését, a Copley Érmét (*Airy*⁴ az előző évben, *Gauss*⁵ pedig néhány évre rá kapta meg ugyanezt a díjat).

Poisson 1817-ben feleségül vette egy nemesi család lányát, *Nancy de Bardy*-t. Békés házasságban éltek, több gyermekük is született.

¹ 1749 – 1827. Kiváló francia matematikus és csillagász, híres a csillagászatban alkalmazott matematikai módszereiről.

² 1736 – 1813. Olasz-francia matematikus és csillagász. Főleg analízissel és égi mechanikával foglalkozott, a XVIII. század egyik legnagyobb matematikusának tartják.

³ 1768 – 1830. Francia matematikus és fizikus. A matematikai sorok illetve speciális transzformációk tették híressé nevét.

⁴ 1801 – 1892. Kiváló angol csillagász és fizikus. A feszültségfüggvényekről írt munkái tették ismertté a mérnökök között.

⁵ 1777-1855. Német matematikus és fizikus, a világ legnagyobb tudósainak egyike.

Apjával ellentétben, aki aktívan részt vett a francia forradalom eseményeiben, és később is szenvedélyesen politizált, Poisson sokkal inkább visszahúzódó alkat volt. Bár minden forrás azt bizonyítja, hogy egész életében megőrizte a szüleitől kapott köztársasági szellemet és ateista gondolkodást, de a forradalom bukását követően, majd a császárság illetve később a Bourbon-restauráció alatt tartózkodott mindenféle politikai megnyilvánulástól. 1804-ben például mindent megtett, hogy fékezze az Ecole Polytechnique diákjainak Napóleon ellenes szervezkedését, nem éppen azért, mert különösen lelkesedett volna Napóleonért, egyszerűen csak az intézetben folyó munka nyugalalmát akarta biztosítani. A sors fintora, hogy Napóleon hivatalnokai később éppen őt zaklatták a legtöbbet ezért. Később – 1821-ben –, amikor a királytól bárói címet kapott, nemhogy a címet nem használta soha, de még a kinevezés okmányát sem vette át. Az 1830-as forradalom után *Lajos Fülöp* kormánya minden állásától és címétől meg akarta fosztani, de barátja, *Francois Jean Dominique Arago*⁶ királyi kegyelmet eszközölt ki számára, sőt, halála előtt néhány évvel tudományos életművére hivatkozva megkapta a „Franciaország peerje” címet is.

Poisson 1840. április 25-én halt meg Párizs közelében, Sceaux-ban. Mindössze 59 éves volt. Nevét – örökké élő tudományos hagyatékán kívül – egy róla elnevezett kráter is őrzi a Holdon.

Úgy vélem, egész életének jellemzője az a mondat, amit gyakran hangoztatott kollégái és tanítványai között:

„Az élet csak két dologra jó: matematikát kutatni és matematikát tanítani...”

Tudományos munkásságának fontosabb adatai

Nagyon fiatalon, még 19 éves egyetemista korában publikálta első dolgozatait. Az egyikre, egy véges differenciaegyenlet integrálszámítással történő megoldására azonnal felfigyelt a tudományos közvélemény. *Adrien-Marie Legendre*⁷ rögtön közlésre javasolta munkáját, és ezzel megkezdődött Poisson közel 400 cikket kitevő publikációs tevékenysége.

A matematika és a fizika számos területén használják ma is az általa megfogalmazott egyenleteket illetve változókat. Gondoljunk csak a *potenciálelmélet Poisson-egyenletére* vagy ennek vektoralgebrai megfelelőjére, az áramlástan *Poisson-Boltzmann-egyenletére*, a különböző fizikai feladatoknál gyakran használt *Poisson-integrálra*, a *Poisson-eloszlásra*, stb. Rengeteg olyan matematikai ötlete, elkezdett, de sajnos sokszor be nem fejezett, kellően ki nem munkált matematikai gondolata volt egyébként, amelyek évekkel-évtizedekkel később mások publikációinak eredményeként váltak nemzetközileg ismertté (többek között Navier-től teljesen függetlenül formálta meg például a ma Navier-Stokes-egyenletekként ismert áramlástan alapösszefüggést...)

⁶ 1786 – 1853. Katalán származású francia matematikus, fizikus, csillagász. Időnként politikával is foglalkozott, főleg kollégái segítésére használva kapcsolatait és befolyását.

⁷ 1752 – 1833. Matematikus, matematikai statisztikával, számelmélettel, algebrával és analízissel foglalkozott.

A számunkra mechanikai szempontból fontosabb publikációi sorát az 1814-ben a *Mémoires* című kiadványban megjelent⁸ „*Mémoire sur le surfaces élastiques*” nyitotta meg. Bernoulli és Lagrange korábbi munkáira építve vizsgálta különböző alakú membránok rezgéseit, és felírta a fizikai modellezéshez szükséges differenciálegyenleteket.

Több kisebb cikk mellett 1829 és 1831 a dátuma a Poisson által publikált talán legfontosabb mechanikai munkáknak. Az első a „*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*”⁹, a másik pedig a „*Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides*”¹⁰ címet viseli. Ezekben a dolgozatokban¹¹ kifejti azokat az alapelveket, amelyeket a mechanikai rendszerek vizsgálatánál fontosnak tart, és felírja a vizsgálatokra javasolt matematikai egyenleteket. Szerinte a világot szabályos rendben elhelyezkedő atomok (molekulák) építik fel, és azok közötti erők szabják meg az anyag és így a szerkezetek mechanikai viselkedését. A vizsgált test egy elemien kicsiny darabjára írt fel három egyensúlyi egyenletet, és ezekhez három peremfeltételt fogalmazott meg kiindulási bázisként (ezek nagyon hasonlóak *Claude-Louis Navier*¹² és *Augustin Louis Cauchy*¹³ egyenleteihez), majd bebizonyította, hogy ezek szükséges és elégséges feltételei a test bármely részén az egyensúly meglétének. Felírta a testek belsejében keletkező elmozdulás-hullámokra vonatkozó egyenleteket is, és egyszerűbb esetekre megadta integrált változataikat, továbbá foglalkozott a hullámokban keletkező esetleges zavarok hatásaival. Hivatkozva *Osztrogradszkij*¹⁴ publikációjára, Poisson ekkor fogalmazta meg a húzott izotrop rúdelem tengelyirányú alakváltozásának a keresztirányú alakváltozásokra gyakorolt hatását, és vezette be azt a paramétert, amit ma a mérnökök szerinte a világon *Poisson-tényezőként* ismernek.

Poisson egyszerű testek (például külső-belső nyomással terhelt körgyűrűk) szilárdságtani vizsgálatát (feszültségek, alakváltozások számítása, rezgések elemzése, stb.) is elvégezte ezekben a munkáiban. Egyenletesen terhelt vékony hajlított lemezekre – befogott peremfeltételekkel – felírta azt biharmonikus differenciálegyenletet, amit ma Kirchhoff-Love-modellként ismer a világ. Kör alakú lemez esetére átírta a feladatot polárkoordinátás változatra, és megadta a feladat megoldását is. Foglalkozott a lemez szabad rezgéseinek modellezésével, és többféle esetre – például kör alakú változatra – a megoldást is megadta.

1833-ban kiadott „*Traité de Mécanique*” című kétkötetes – alapvetően tankönyvnek szánt – művében a fentiek rendszerezett összefoglalása mellett nagyon sok egyéb rezgéstani és elmozdulás-számítási vizsgálatot is bemutat (rudakra, gerendákra, kétdimenziós testekre). Különösen sokat tett azért, hogy a mérnököket megtanítsa a trigonometrikus sorok használatára különböző mechanikai feladatok vizsgálatánál.

⁸ Több kutatónál téves ennek a publikációnak a dátuma. A hibát az okozza, hogy a kiadvány az 1812-es dátumot viseli ugyan, de a hosszú nyomdai átfutási idő (már akkor is...) miatt csak 1814-ben jelent meg.

⁹ *Mémoires of the Academy*, Vol. 8. 1829. pp. 357-570.

¹⁰ *Journal de l'École Polytechnique*, Vol. 20. 1831, pp. 1-174.

¹¹ Megjegyezzük, hogy egyetemi előadásaiiban az itt leírtakat akkor már több éve tanította.

¹² 1785 – 1836. Kiváló francia mérnök és fizikus.

¹³ 1789 – 1857. A legkiválóbb matematikusok egyike. Nagyon sokat tett a mechanika alapfogalmainak meghatározásáért.

¹⁴ 1801 – 1862. Orosz matematikus és fizikus. Sokat foglalkozott mechanikai kérdésekkel is.

A mai kor tudománytörténészei úgy látják, hogy Poisson elsősorban matematikusként alkotott igazán jelentőset, mérnöki munkásságában nem volt olyan léptékű újító a mechanikában, mint például a kortárs *Cauchy* vagy *Navier*. A mérnökök világa azonban – elsősorban a gyakorlati problémák kiváló megoldójaként – mindig tisztelettel őrzi emlékét.

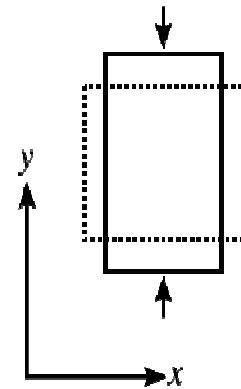
A Poisson-tényező

Mint azt az előző pontban már leírtuk, Poisson először 1829-ben említette azt a paramétert amit ma Poisson-tényezőként ismerünk. A dolog érdekessége, hogy először nem statikai, hanem rezgéstani példában találkozunk vele, csak utána jegyezte meg, hogy ez a paraméter statikai feladatoknál is használható (lásd az idézett mű 456. oldalán). Nem tartozott az általa túl gyakran említett vagy vizsgált kérdések közé, ezt követően már csak az 1833-as mechanika tankönyvében fordul elő az egyik oldalon (II. kötet 369. oldal). Fontos tudnunk, hogy ő *nem anyagjellemzőként, hanem* – kisebb részben néhány kísérletre, de főleg az atomok közötti erőkre felírt elméleti egyenleteire hivatkozva – *0,25 értékű, minden anyagra azonos konstansként* tartotta számon! A meghatározás azonban már egyezett a ma is használatos képlettel.

Emlékeztetőül a Poisson-tényező definíciója¹⁵:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}$$

A konstansnak feltételezett Poisson-tényező természetesen azt jelentette, hogy a homogén izotrop rugalmas testek viselkedését egyetlen anyagállandóval (praktikusan a Young-féle rugalmassági modulussal) lehet leírni. A XIX. század elején ténylegesen ez is volt a közfelfogás a mechanikában, *Navier*, *Cauchy*¹⁶, *Poisson*, *Gabriel Lamé*¹⁷ vagy *Benoit Paule Émile Clapeyron*¹⁸ ebben tökéletesen egyetértett. Megjegyezzük, hogy abban is összhang volt ezen tudósok között, hogy az általános anizotrop viselkedést 15 paraméterrel tartották jellemezhetőnek.



A merev molekulaszervezetre épített anyagmodell-felfogást alapvetően *George Green*¹⁹ munkássága változtatta meg. Élete sok hasonlóságot mutat Poissonéval. Szegény nottinghami molnár fiaként született, gyerekkorában neki sem volt alkalma rendszeresen tanulni, csak lopva olvasott könyvekből képezte magát. Csak 1833-ban (negyven évesen) jutott be a cambridge-i egyetemre, 1837-ben védte meg BSc címét. 1839-ben végre Cambridge-ben kapott kutatói állást, de két év múlva már meghalt.

1828-ban (ekkor még semmilyen hivatalos végzettsége sem volt!) publikálta első, és talán legjelentősebb munkáját „*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the*

¹⁵ Poisson maga a μ betűt használta, a XX. század elején sokáig a σ szimbólummal dolgozott sok szerző, csupán az ötvenes évektől terjedt el a most használatos ν jelölés.

¹⁶ Nagyon érdekes, hogy maga Cauchy Green-nél jóval korábban már saját levezetéseiben is eljutott a két független anyagi paraméter szükségességéig, de nem vizsgálta mélyebben ezt a kérdést, és az egyiket csak konstansnak tekintette.

¹⁷ 1795 – 1870. Francia matematikus. Híres a görbevonaltú koordináta-rendszerek fejlesztése terén elért eredményeiről.

¹⁸ 1799 – 1864. Francia mérnök és fizikus, a termodinamika megalapítóinak egyike.

¹⁹ 1793- 1841.

Theories of Electricity and Magnetism” címen, ahol – a Laplace-nál tulajdonképpen már sok részletében megtalálható, de gyakorlati feladatokra nem túl gyakran használt – potenciálfogalmat helyezte előtérbe, és ajánlotta mechanikai feladatok vizsgálatára. A rugalmas anyagok belső feszültségeinek és alakváltozásainak összekapcsolására Green ajánlott először olyan potenciálfüggvényeket²⁰, melyekből parciális deriválással megteremthetők a feszültség-alakváltozás vagy pedig az alakváltozás-feszültség kapcsolati egyenletek. Ezeket ma a mechanika hiperelasztikus, vagy más néven Green-féle modelleknek hívja. Bebizonyítható, hogy ezek a kapcsolati modellek olyan szimmetrikus negyedrendű tenzorok segítségével adhatók meg, ahol az anyagmodell általános esetben 21 darab konstansot tartalmaz. Homogén izotrop rugalmas anyag esetén ezen konstansok száma *kettőre* csökken, vagyis a Young-modulus *önmagában még nem elegendő* az anyag tulajdonságainak leírására!

A XIX. század közepén két táborra vált szét az anyag mechanikai tulajdonságaival foglalkozó kutatók csapata: az egyikbe *Navier, Cauchy és Poisson követői* tartoztak, akik az *egy* (illetve 15) állandó mellett foglaltak állást, a másik csoportot pedig *Green elméletét elfogadók* alkották a *két* (illetve 21) paraméterrel. A kérdés megválaszolását az a paradigmaváltás tette lehetővé, ami akkoriban bontakozott ki a műszaki tudományok szinte valamennyi területén. Az ipari forradalom hatására ezekben az években vált igazán elfogadottá és hitelessé a nyomokban már korábban is létező, de alapvetően háttérbe szorított *laboratóriumi kísérletezés*. Míg a korábbi századok döntően az elméleti megközelítési módot tartották alapvetőnek, a XIX. század közepén az egyetemeken, az ipari cégeknél illetve független vállalatoknál létrejövő, anyagvizsgálattal foglalkozó laboratóriumok már a mechanikai elméletek minősítéséből is részt kértek (lásd részletesebben az akkor kialakuló laborokról az [5] és [6] alatti munkákat).

Green elmélete az első gyakorlati bizonyítást az osztrák *W. Wertheim*²¹ kísérleteiből kapta. Wertheim orvos volt, Bécsben született és ott szerzett orvosi diplomát 1839-ben. 1840-ben Párizsba költözött, ahol érdeklődése egyre inkább a mérnöki tudományok és azon belül is elsősorban a laboratóriumi kísérletezés felé fordult. 1855-től már az *École Polytechnique* laboratóriumában dolgozott. 1861-ben öngyilkos lett.

A Poisson-tényezővel kapcsolatos mérési eredményeit 1848-ban publikált²² „*Mémoire sur L'équilibre des corps solides homogènes*” összefoglaló cikkében közli, bár már korábbi munkáiban is megjelentetett kisebb cikkeket anyagvizsgálatokról. Fémekkel (acél, bronz) és különböző kerámiákkal illetve fával végzett statikus és dinamikus kísérleteket. Részletesen elemezte a hőmérséklet illetve a gyártási technológiák (például a tömörítés) hatását ugyanannál az anyagnál mind a rugalmassági modulusra, mind a keresztirányú alakváltozásra. Tulajdonképpen ő volt az *első* a világon, aki anyagfüggő paraméternek, *anyagi változónak* tekintette Poisson paraméterét, bár az igazsághoz hozzátartozik, hogy – talán a nagy francia tudósok iránti tiszteletből – ezt nyíltan nem írta le, hanem inkább feltételes módot használva kerülte meg az állásfoglalást a kétféle elmélet között...

²⁰ A szilárdságtannal kapcsolatos részletek elsősorban az “*On the Laws of the Reflexion and Refraction of Light at the Common Surface of Two Noncrystallized Media*” című munkájában található.

²¹ 1815 – 1861.

²² *Annales de Chimie et de Physique*, Vol. 23, pp. 52-95, 1848.

Néhány évvel később egy másik kiváló kutató, a német származású *Adolph-Theodor Kupffer*²³ végzett igen nagyszámú kísérletet az anyagállandók vizsgálatára. *Kupffer* 1849-ben lett az orosz Mérésügyi Hivatal igazgatója, így stabil anyagi háttérrel rendelkezett munkájához. Méréseit Európában a legkiválóbbak között emlegették, *Todhunter* például (lásd [3]-ban) azt írja róla, hogy az egész XIX. században senki nem végzett gondosabb és részletesebb anyagotani elemzéseket szilárdságtani paraméterek meghatározására. Elsősorban geológiai anyagokat vizsgált, de hőhatásokkal kombinált statikus és dinamikus mérései másféle anyagokra is kiterjedtek. 1860-ban Pétervárott megjelentetett „*Recherches expérimentales sur l'élasticité des métaux faites á l'observatoire physique central de Russie*” című összefoglaló könyvében *Kupffer* megerősítette *Wertheim* méréseinek eredményeit, és egyértelműen állást foglalt *Green* két illetve 21 paraméteres modelljei mellett.

A XIX. század második felében a Poisson-tényező valódi anyagjellemzőként való kezelése, vagyis a homogén rugalmas anyagok kétparaméteres állapotú jellemzése *mindenhol elfogadottá vált*. További kísérleteket végzett még például a német *Franz Ernst Neumann*²⁴, vagy az ő híres tanítványa, *Gustav Robert Kirchhoff*²⁵. Ezek a mérések mindenki számára egyértelműen lezárták ezt a kérdést. *Neumann* már egy olyan mérési technikát is kidolgozott, amelynek segítségével négyszög keresztmetszetű gerendák egyenes hajlításakor a trapéz alakúvá váló keresztmetszet adataiból egyszerűbben lehet a Poisson-tényezőt mérni.

Az elmúlt száz év során a laboratóriumok a legkülönbözőbb anyagoknál és igen változatos peremfeltételi rendszerek (változó hőmérséklet, időfüggés, stb.) között mérték a Poisson-tényezőt. A teljesség kedvéért mi is közlünk kétféle adatsort. Az első az ismertebb (izotropnak feltételezett) mérnöki anyagoknál adja meg a paraméter értékét:

alumínium: 0,33	beton: 0,17 – 0,20	öntöttvas: 0,21 – 0,26	üveg: 0,24
agyag: 0,30 – 0,45	szárított agyag: 0,40 – 0,50	réz: 0,33	magnézium: 0,35
acél: 0,27 – 0,30	rozsdamentes acél: 0,30 – 0,31		gumi: 0,45 – 0,50
habok: 0,10 – 0,40	titán: 0,34	homok: 0,20 – 0,45	parafa: 0,0

A második adatsor sokkal átfogóbb, és a periódusos rendszer egészére vonatkozik. A <http://www.webelements.com/webelements/properties/text/definitions/poissons-ratio.html#lit> honlapon valamennyi elemre vonatkozó adatot megtalálja az olvasó.

Befejezésül még két kérdést érintünk röviden. Az egyik a Poisson-tényező *érvényességi tartományára* vonatkozik. Elemi szilárdságtani összefüggésekből már régóta tudjuk, hogy a paraméter értéke -1 és 0,5 között változhat izotrop anyagoknál. A felső határ a polimerekre vagy az élő szövetekre (például az emberi test izmaira, ereinek falára, stb.) jellemző, a *negatív* értékre azonban sokáig némi kétkedéssel gondoltak a mérnökök, bár *Woldemar Voigt*²⁶ német fizikus (*Neumann* tanítványa) már az 1880-as években mért szabályos pirit kristályokon -1/7-es Poisson-tényezőt. A negatív harántkontrakciójú anyagok vizsgálatával a XX. század végén *Robert Lakes* amerikai kutató kezdett el újból foglalkozni. 1987-ben publikálta első híres cikkét ebben a témában „*Foam structures with negative Poisson's ratio*” címmel²⁷. Ezek az

²³ 1799 – 1865. Mivel élete nagy részét Oroszországban töltötte, orosz források gyakran Adolf Jakovlevics Kupfer-ként hivatkoznak rá.

²⁴ 1798 – 1895. Kiváló német mérnök. *Neumann* egyébként sokat levelezett *Kupffer*rel.

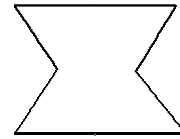
²⁵ 1827 – 1887. Német mérnök, egyike a mechanika legnagyobb alakjainak.

²⁶ 1850 – 1919 .

²⁷ *Science*, Vol. 235, pp. 1038-1040. 1987.

anyagok – ma a mechanikában angol szóval „auxetic”-nek hívják őket – mind speciális szerkezetű habok. Belső felépítésüket jól illusztrálja a képen látható vázlat:

Húzás hatására a belső szerkezet kitágul, az anyag „duzzadni” kezd. Sokan vitatják, hogy ez a viselkedés az „anyag” vagy pedig a „mikroszerkezet” sajátossága, mindenesetre a harántkontrakció a makroszintű méréseknél valóban negatív Poisson-hatásként jelentkezik. Lakes ma már -0,7-es tényezőjű anyagokról is beszámolt.



További érdekes részletek olvashatók Lakes honlapján a <http://silver.neep.wisc.edu/~lakes/Poisson.html> címen.

A másik kommentárunk az ortotrop anyagokra vonatkozik. Ilyen esetekben az anyagi merevségi mátrix szimmetria-feltételeiből az következik, hogy az egyes irányokban használt rugalmassági modulusok és Poisson-tényezők közötti kapcsolatot mindig biztosítani kell. Ha x , y és z -vel jelöljük az ortotropia főirányait, akkor a kapcsolati egyenletek az alábbiak lesznek:

$$\frac{\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz}}{E_y E_z C} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zx}}{E_z E_x C}, \quad \frac{\nu_{zy} + \nu_{zx}\nu_{xy}}{E_z E_x C} = \frac{\nu_{zy} + \nu_{xz}\nu_{yz}}{E_x E_y C}, \quad \frac{\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}}{E_y E_z C} = \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz}}{E_x E_y C},$$

ahol

$$C = \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{zx}\nu_{xz} - 2\nu_{xy}\nu_{yz}\nu_{zx}}{E_x E_y E_z}.$$

A további részleteket lásd az [5] alatti munkában. Megjegyezzük, hogy ortotrop anyagokra vonatkozóan szintén sok adat található a szakirodalomban, lásd például a [7] és [8] alatti munkákat, egy “klasszikus” könyvet és egy egészen friss mérési adatsort.

Irodalom:

- 1./ Timoshenko, S. P.: History of Strength of Materials, McGraw-Hill, 1953.
- 2./ Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press, 1892.
- 3./ Todhunter, I. – Pearson, K.: A History of the Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time, Vol. I-II, Cambridge University Press, 1886.
- 4./ <http://www.gap-system.org/~history/References/Poisson.html>
- 5./ Bojtár, I.: Mechanikai anyagmodellek, BME jegyzet, 2007.
- 6./ Bojtár, I.: Törésmechanika építőmérnököknek, BME jegyzet, 2007.
- 7./ Gercek, H.: Poisson's ratio values of rocks, Int. Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 44, Issue 1, pp. 1-13, 2007.
- 8./ Lehnijckij, S. G.: Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, Holdan-Day, 1963.