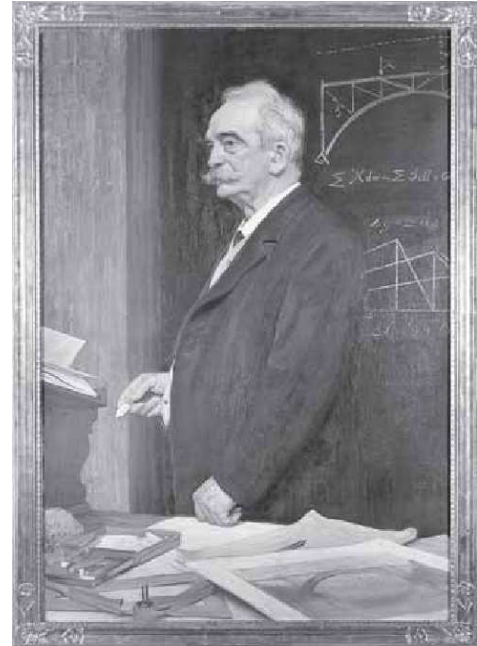


Mohr és az anyag szilárdsági határfeltétele

Mohr élete

A XIX. század közepén az Európán végigvonuló forradalmak után a kontinens országainak életére hosszú ideig a többé-kevésbé töretlen ipari és társadalmi fejlődés volt a jellemző. Ez a stabilitás és rend jó hatással volt a természettudományok és így a mechanika fejlődésére is, az ezekben az évtizedekben mechanikával foglalkozók általában békés egyetemi környezetben dolgoztak és jóval kevesebb közéleti problémával találkoztak életükben, mint néhány évtizeddel korábban *Cauchy*¹, *Navier*² vagy *Poisson*³.

Christian Otto Mohr tipikus képviselője ennek a kornak. Egész élete nyugodt, következetes tervezéssel, oktatással és kutatással telt el, és – fiatal korának hídtervezéssel eltöltött néhány évét leszámítva – mindvégig elsősorban egyetemi előadóként dolgozott.



Mohr 1835. október 8-án született az Északi-tenger partjának közelében található Wesselburen nevű városkában⁴. Szülei kisebb földbirtokkal rendelkező gazdálkodók voltak. 15 éves korában egy darabig egyházi írnokként dolgozott Wesselburenben, de egy év után sikerült bejutnia a Hannoveri Műszaki Főiskolára, ahol 1855-ben szerkezetépítő mérnöki diplomát kapott. A Hannoveri Királyi Vasúti Társaság rögtön alkalmazta a tehetséges fiatalembert, először mérnökasszisztensként, majd főállású tervezőként. Hamarosan elnyerte az *építésügyi tanácsos* címet is, ami elismert rangnak számított akkoriban. Tervezői tevékenységének egyik legkomolyabb megbízását a '60-as években kapta az Oldenburgi Nagyhercegség vasúthálózatának létrehozására. Itt, ezeken a vonalakon épültek Németország *első acélszerkezetű rácsos* vasúti hídjai, valamennyi Mohr terveként. 1860-tól kezdett foglalkozni elméleti kérdésekkel is, első cikkei a Hannoverben kiadott *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur-Vereins zu Hannover* című lapban jelentek meg.

Harmincas évei elején már elismert mérnökként tartotta számon a szakmai közvélemény, így igazán nem meglepő, hogy 1863-ban meghívták a műszaki mechanika előadójának a Stuttgarter Műszaki Főiskolára. Öt évet töltött itt, majd 1873-ban Drezdába költözött, és az ottani egyetemen⁵ folytatta oktatói munkáját egészen hatvanöt éves korában bekövetkezett

¹ 1789 – 1857. A legkiválóbb matematikusok egyike. Nagyon sokat tett a mechanika alapfogalmainak meghatározásáért.

² 1785 – 1836. Kiváló francia mérnök és fizikus.

³ 1781 – 1840. Francia matematikus. Mechanikához kapcsolódó kutatásai a rezgésstanban illetve a *Fourier*-sorok alkalmazásában ismertek. Az anyagmodellezésben használt és róla elnevezett *Poisson*-tényezőt is ő vezette be a mechanikai számításokba.

⁴ Az akkori években Wesselburen még csak egy nagyobb falunak számított.

⁵ Eredetileg az *Út-, Vasút- és Vízműépítési Tanszék* vezetőjének hívták, három évvel később azonban már a szilárdságtan teljes témaköre is oktatási feladatai közé tartozott. 1894-ben az egyetem belső átszervezését követően kapta Mohr drezdai tanszéke a ma is viselt nevét: *Műszaki Mechanika és Szilárdságtan Tanszék*.

nyugdíjba vonulásáig. Érdekes róla megjegyeznünk, hogy diákjai igen nagy tisztelettel beszéltek előadásairól, később híressé vált tanítványa, *August Otto Föppl*⁶ például emlékirataiban „*Lehrer von Gottes Gnaden*”⁷ néven emlegeti. Több visszaemlékezésben írják, hogy bár néha lassan beszélt és a táblára rajzolt vázlatok sem voltak mindig a legrészletesebbek, de az előadások annyira logikusan felépítettek és következetesek voltak, hogy mindig magukkal ragadták a hallgatóságot. Ráadásul Mohr – saját maga illetve a legújabb építkezések tapasztalataira építve – mindig igyekezett „valódi” szerkezeti példák tömegével illusztrálni mondanivalóját és – ez az akkoriban nem túl gyakran alkalmazott oktatói stílus – nagyon népszerűvé tette.

1900-tól az 1918. október 2-án bekövetkezett haláláig „aktív” nyugdíjasként élt a Drezda melletti Wachwitzban, emlékiratain illetve tudományos életműve összefoglalásán⁸ dolgozva. Végso nyughelye Drezdában, a Johannisfriedhof nevű temetőben van.

Tudományos munkássága

Mohr egész tudományos tevékenységére igen nagy hatással volt a fiatal éveit alatt végzett tervezői munka. Mindig olyan kérdésekkel foglalkozott, amelyeknek volt valamilyen gyakorlati hátterük és nem vonzódott a tisztán elméleti jellegű felvetésekhez.

A mechanikai számítások egyik legfontosabb kérdése a XIX. század második felében a *rácsos* szerkezetű *acélhidak* erőtan vizsgálata volt. Az egész világon átsöprő vasútépítési láz nélkülözhetetlenné tette a viszonylag gyorsan szerelhető, anyagtakarékos, ugyanakkor nagy teherbírású szerkezetek megbízható statikai tervezését és Mohrnak ezen a téren igen jelentős érdemei vannak (ő maga – még egyetemi oktatóként is – elsősorban szerkezettervező statikusnak tartotta magát). Ő volt az, aki 1874-ben világosan és egyértelműen megfogalmazta a *statikai határozottság*⁹ fogalmát a különböző rúdszerkezetek esetére. Ezt megelőzően inkább intuitív módon alkalmazták az osztályozásnak ezt a módját a mérnökök, Mohrt követően azonban már a gyakorló szakemberek körében is elterjedt az általa tanított precíz definíciós rendszer. Hozzá tartozik az igazsághoz, hogy Mohrt megelőzően *August Ferdinand Möbius*¹⁰, a híres német matematikus és csillagász, aki lipcsei egyetemi tanárként statikával is szívesen foglalkozott, már elemezte az egymáshoz csuklóval kapcsolt egyenes tengelyű rudakból kialakított hálózatok statikai viselkedésének alapvető szabályait¹¹, de munkái többnyire csak matematikusokhoz jutottak el, teljesen ismeretlenek maradtak a mérnökök előtt.

⁶ 1854 – 1924. Kiváló német mérnök, életéről lásd részletesebben a http://de.wikipedia.org/wiki/August_F%C3%B6ppl honlapot. Az ő tanítványa volt *Ludwig Prandtl*, a képlékenységtan egyik nagy alakja.

⁷ *Isten kegyelméből való tanár.*

⁸ Nagyszerű munkák születtek tollából ezekben a nyugdíjas években: *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik* (Berlin, Ernst Verlag, 1914), *Beitrag zur Berechnung der Rahmenträger* (Berlin, Ernst Verlag, 1915), *Die Theorie des statisch unbestimmten Fachwerks* (Berlin, Ernst Verlag, 1916).

⁹ *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger*, *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 1874. Vol. 20. pp. 509.

¹⁰ 1790 – 1868. A híres „*Möbius-szalag*” (kétdimenziós egyoldalú felület) mellett ismertek számelméleti és függvénytan munkái. További adatok találhatóak róla az alábbi honlapon: http://de.wikipedia.org/wiki/August_Ferdinand_M%C3%B6bius.

¹¹ *A. F. Möbius: Lehrbuch der Statik, Lipcse, 1837. II. kötet, 4. – 5. fejezet.*

Mohr ismerte Möbius munkásságát, rá hivatkozva dolgozta ki igen részletesen a rúdszerkezetek statikai határozottságának ma is használatos fogalomrendszerét. Különösen sokat elemezte a számára kiemelkedően fontos *rácsos szerkezeteket*, későbbi követői ezen a területen¹² gyakran hivatkoztak az ő munkáira.

Az általános elvi kérdéseken túl Mohr sokat tett a mérnöki számítások minél hatékonyabbá tételéért. Tervezőként ő alkalmazott először például *hármasszét*¹³ rácsos tartók rúderőinek számítására az oldenburgi vasúti hidak vizsgálatánál. Jól használható eljárást dolgozott ki *rácsok tartók elmozdulásainak*¹⁴ számítására (felújítva és a mérnökök számára átfogalmazva *Carlo Alberto Castiglianonak*¹⁵ az alakváltozási energiát felhasználó módszerét). A francia *M. Williot*¹⁶ kicsit később grafikus technikával egészítette ki Mohr számítási eljárását, így jött létre a mérnökök között *Mohr-Williot-szerkesztésként* ismert módszer.

A rugalmas gerendatartók vizsgálatok Mohr mutatta ki, hogy a klasszikus gerendamodell differenciálegyenlete típusát tekintve megegyezik a kötélgörbe differenciálegyenletével. Ezt a felismerést felhasználva dolgozott ki eljárást a *gerendatartók elmozdulásainak* meghatározására, lényegesen könnyebb módszert adva így a mérnökök kezébe, mint a hagyományos, a differenciálegyenlet megoldását igénylő lépéssorozat. Ma ezt a Mohr-féle eljárást a „*nyomatéki terhek módszere*” néven oktatják az egyetemeken. Megjegyezzük, hogy a klasszikus gerendaelmélet történetének bemutatásakor már említettük, hogy ezt a módszert elvileg *Saint-Venant*¹⁷ javasolta elsőként, de ő soha nem használta tényleges számításokra, csupán ötletet adott az alkalmazására.

Többtámaszú tartók (elsősorban hídszerkezetek) vizsgálatánál Mohr dolgozott először *elmozdulási hatásfüggvényekkel*. Az elméleti alapokat ehhez Maxwell (lásd a „15”-ös

¹² A különböző típusú rácsos tartók vizsgálatával sokat foglalkozott ebben a korban *Nyikolaj Jegorovics Zsukovszkij* (1847 – 1921), a híres aerodinamikus (lásd *Collected Papers, Moscow Mathematic Society, 1908*), *Lebrecht Henneberg* (német mérnök, egyetemi tanár, 1850-1933, vonatkozó munkáit lásd a „Statik der starren Systeme”, *Darmstadt, 1886* c. könyvében), *August Otto Föppl* (életéről lásd az előző oldal lábjegyzetét, vonatkozó műve pedig: *Das Fachwerk in Raume, Lipcse, 1892*) illetve *Heinrich Franz Bernhard Müller-Breslau* (német mérnök és egyetemi tanár, 1851 – 1925, ide illő könyve: *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Lipcse, 1904*).

¹³ Megelőzve ezzel *Georg Dietrich August Ritter* (1826 – 1908), aki viszont előbb publikálta ezt a módszert és ma a világon az ő nevéhez kapcsolják a számítási eljárást (*A. Ritter: Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brücken-Constructionen, Rümpler Verlag, Hannover, 1863*). Kicsit meglepő, de *Ritter* nevét a Hold egyik krátere is őrzi, míg a lényegesen többet alkotó Mohrnak nem jutott ilyen megtiszteltetés...

¹⁴ *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1875. Vol. 21. pp.17*

¹⁵ 1847 – 1884. Kiváló olasz matematikus és fizikus, az észak-olaszországi vasúttársaság mérnökeként dolgozott. Elméleti munkái nagy hatással voltak a lineárisan rugalmas anyagú szerkezetek energiaalapú vizsgálataira. Megjegyezzük, hogy mindkettőjüktől függetlenül (és előbb) *James Clark Maxwell* (1831 – 1879), a kiváló skót fizikus precíz, magas szintű matematikai elemzéssel vizsgálta ugyanezt a kérdést, de az ő publikációi a nagyon elvont matematikai leírás mód miatt nem váltak széles körben ismertté.

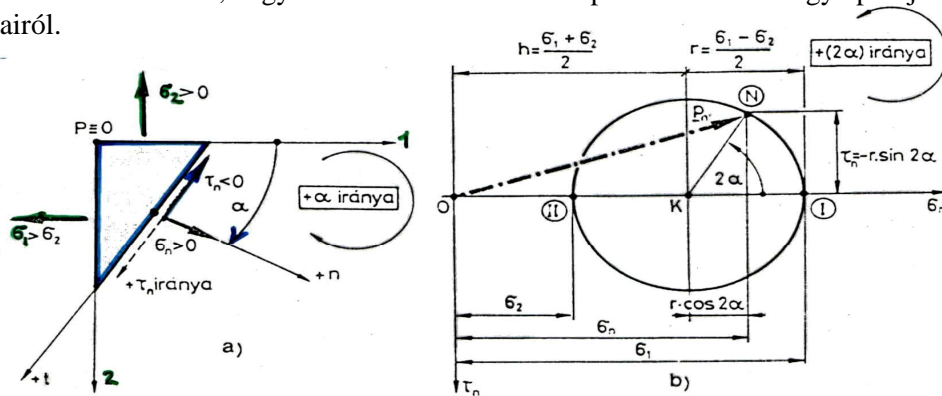
¹⁶ *M. Williot: Notions Pratiques sur la Statique Graphique, Párizs, 1877.*

¹⁷ Teljes nevén Adhémar Jean-Claude Barre de Saint-Venant, (1797 – 1886), nagy francia matematikus és mechanikus.

lábjegyzetet) fektette le, de a gyakorlati technika kidolgozása és a széleskörű alkalmazás mindenképpen Mohr érdeme. A pontosság kedvéért itt is megjegyezzük, hogy vele párhuzamosan a főleg ágyazási modelljéről ismert *Emil Winkler*¹⁸ német mérnök szintén bevezette ezt a függvényfogalmat, de gyakorlati célokra már nem alkalmazta.

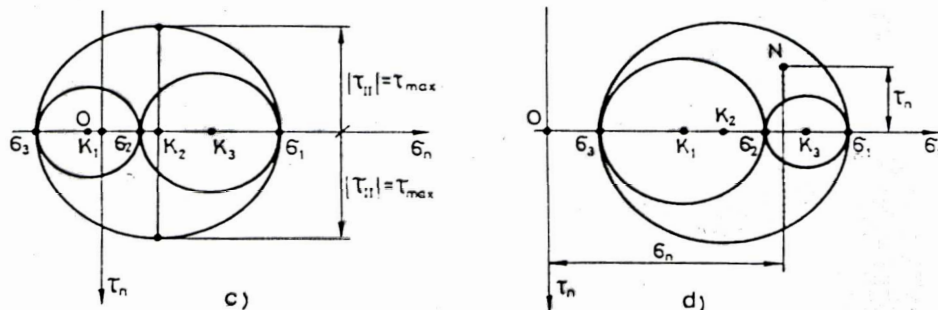
A különböző módon megtámasztott ívek vizsgálatával is sokat foglalkozott Mohr. Már 1870-ben publikált („szokásos” hannoveri folyóiratában) egy igen jól használható szerkesztési módszert az ív igénybevételeinek számítására. Általában elmondható egyébként, hogy Mohr kifejezetten szerette a *grafikus eljárásokat* és tanári pályáján is előszeretettel helyezte az oktatás központjába az ilyen technikákat. Ez egyébként teljesen megfelelt az adott kor *pontossági igényeinek* illetve *megoldási lehetőségeinek*, hiszen akkoriban az általában nagyméretű egyenletrendszerek megoldását igénylő közelítő numerikus technikák még csupán a távoli jövő ígéreteihez tartoztak.

A statikai eljárások mellett Mohr maradandót alkotott a szilárdságtanban is. A világ szinte minden szilárdságtan könyvében megtalálható *feszültségi köre*, amely minden esetben egyszerűen előállítható, ugyanakkor szemléletes képet ad a test egy pontjának feszültségi viszonyairól.



A Mohr-féle feszültségi kör alapfogalmai

A fenti ábrán egy sík feszültségi állapotban lévő pont környezetében felvett különböző metszetekhez tartozó feszültségeket ábrázolja a Mohr-kör (a modellezés részleteit lásd a [3] alatti könyvben, ahonnan az ábrák is származnak). A következő képen pedig egy térbeli feszültségi állapotú pontnál az egymásra merőleges metszetek mindhárom feszültségi körét láthatjuk.



Térbeli feszültségi állapotok Mohr-körei

¹⁸ 1835 – 1888. A hatásábrákról írt cikke (Mitteilungen Architek. und Ingenieurs-Vereinigung Böhmen, 1868, pp. 6.) ugyanabban az évben jelent meg, mint Mohré, de nem vált igazán ismertté.

Ez a grafikus ábrázolás kiválóan alkalmazható a feszültségi szélsőértékek és a hozzájuk tartozó irányok meghatározására. Még a számítógépek korában sem veszített jelentőségéből, hiszen egy elvi vázlat szintjén kézzel is gyorsan felrajzolható és így mindig jó segítséget adhat a mérnöknek egy pont feszültségállapotának becslés szintű elemzésénél.

Szilárdsági határfeltétel

Sok mérnök véleménye szerint Mohr egyik legmaradandóbb alkotása a nemfémes anyagok (főleg a talajok, kőzetek) képlékeny folyási határfelületére javasolt modellje, amit ma *Mohr-Coulomb*¹⁹-féle feltételként ismer a szakirodalom. A modellt többféle változó segítségével is meg lehet adni, az alábbi két képlet a főfeszültségek illetve a normál- és nyírófeszültség felhasználásával írja le *ugyanazt* a feltételt, méghozzá a modell gyakran használt „legegyszerűbb” alakjában:

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \phi}{2c \cos \phi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \phi}{2c \cos \phi} = 1 \text{ illetve } |\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \phi.$$

A képletekben szereplő c betű az anyag belső kohézióját, ϕ pedig az úgynevezett belső súrlódási szögét jelöli. Maga a képlet fizikailag a *rugalmas viselkedés határát, a képlékeny állapot kezdetét* jelzi²⁰.

Mohr 1882-ben publikálta²¹ modelljét. Három szerzőt említ, akiknek korábbi munkáit figyelembe vette:

- *Johann Bauschinger*²², akinek kísérleti eredményeit elemezte,
- *Henri Edouard Tresca*²³, aki 1868-ben nyújtotta²⁴ be a francia Akadémiának fémekre érvényes folyási feltételét bemutató jelentését („*Tresca-modell*”), illetve
- *Charles Augustin de Coulomb*-ot, aki jó száz évvel azelőtt (a lábjegyzetben már hivatkozott) jelentésében indítványozta, hogy a normál- és nyírófeszültségek

¹⁹ *Charles Augustin de Coulomb* (1736 – 1806) kiváló francia fizikus. Az elektrostatikában ő fogalmazta meg a pozitív-negatív töltések között fellépő erőket megadó, róla elnevezett Coulomb-törvényt. Fontos eredményeket ért el a súrlódás vizsgálatában is. Szilárdsági feltételét talajminták illetve blokkokból álló falazatok nyomókísérleteinek felhasználásával nyert megfigyelések alapján alkotta meg és 1773-ban publikálta a Francia Akadémiának írt „*Sur une application des règles, de maximis et minimis à quelque problèmes de statique, relatifs à l'architecture*” című munkájában.

²⁰ A mechanikában az ilyen függvények segítségével kapott mechanikai korlátot nevezzük *folyási feltételnek*.

²¹ *Civilingenieuren, 1882, pp. 113.*

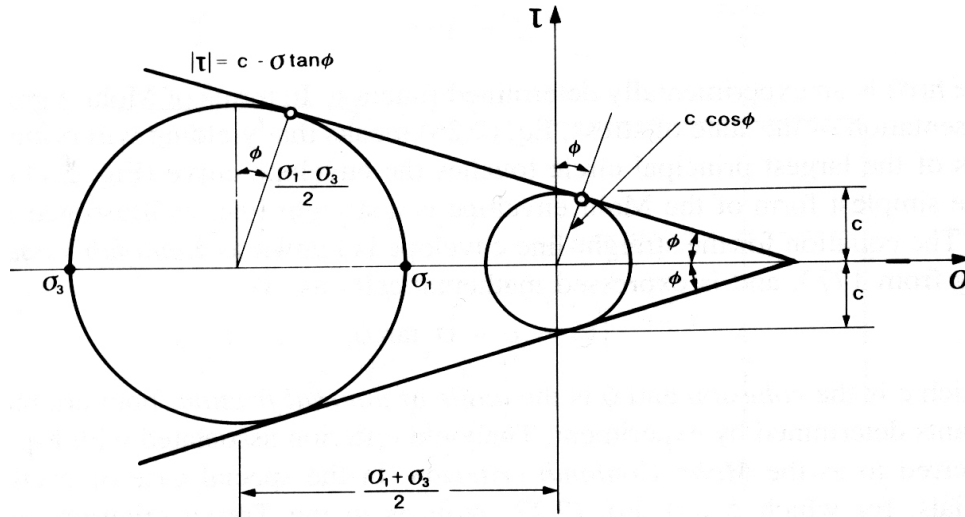
²² 1834 – 1893. Német matematikus és mérnök, a Münchener Műszaki Egyetem tanára. Ő alapította az egyetem világhírű anyagvizsgáló laboratóriumát. Nagyon sok kísérletet végzett az anyagok képlékeny határállapotának vizsgálatára, nevéhez fűződik az ún. *Bauschinger-hatás* (kinematikus keményedési típus) felfedezése.

²³ 1814 – 1885. Francia gépészmérnök, a Francia Mérésügyi Hivatal professzora. A képlékenységtan tudományának megalapítói közé tartozik, igen alapos fémtani képlékenységi vizsgálatokat végzett. Tagja volt annak a tervezőcsoportnak, amelyik a szabványos méter etalonját megalkotta. Folyási feltétele szerint az anyag akkor kerül képlékeny állapotba, ha a benne keletkező maximális nyírófeszültség elér egy kritikus határértéket.

²⁴ *Mémoires présentés par divers savants, Vol. 20. 1868.*

közötti kapcsolat megadásával jellemezzük az anyag rugalmas teherbíró képességének határát.

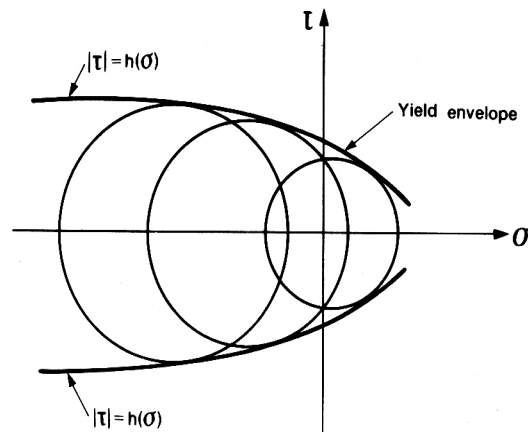
Coulomb a normál- és nyírófeszültségek között a határállapotban lineáris összefüggést tételezett fel, lásd a következő ábra vázlatát:



Mohr a *Tresca-féle feltétel általánosítását* javasolta a *Coulomb-modell felhasználásával*. Szerinte a kritikus nyírófeszültség értéke nemfémeknél a fémektől eltérően nem konstans, hanem az ugyanabban a pontban fellépő normálfeszültség nemlineáris függvénye:

$$\tau = h(\sigma),$$

ahol $h(\sigma)$ az adott anyagnál kísérletileg meghatározandó függvény. A korábban már bemutatott Mohr-féle grafikus feszültségi körök felhasználásával a feltétel azt jelenti, hogy kritikus állapotban a $h(\sigma)$ függvény burkológörbéje lesz a Mohr-köröknek:



Az *eredeti Coulomb-modell* ennek a bővített változatnak egy speciális – bár egyszerűsége miatt a geotechnikai gyakorlatban nagyon sokszor alkalmazott – *határesetete*. Ha egy ilyen határesetben a belső súrlódási szögét nullára választjuk, akkor „visszajutunk” az eredeti Tresca-feltételhez. A Mohr-Coulomb-feltételről egyébként további részletek találhatók a [4] alatti könyvben.

Mohr modellje ma is az egyik leggyakrabban használt talajmechanikai képlékeny határfeltétel. Egyszerűsége, lineáris változata esetén paramétereinek alacsony száma, és nem

utolsósorban a valóságot igen jól közelítő eredményei a publikálása óta eltelt több mint 120 év alatt is megőrizték népszerűségét a mérnökök között.

Felhasznált irodalom:

- 1./ **Timoshenko, S. P.:** History of Strength of Materials, *McGraw-Hill*, 1953.
- 2./ **Heyman, J.:** Structural Analysis – a Historical Approach, *Cambridge University Press*, 2007.
- 3./ **Kaliszky, S. – Kurutzné, K. M. – Szilágyi, Gy.:** Szilárdságtan, *Tankönyvkiadó*, 2000.
- 4./ **Bojtár, I:** Mechanikai anyagmodellek, *BME jegyzet*, 2007.