

## Huber, Mises, Hencky és a fémek képlékenységtana

### Huber élete

Makszimillian Titusz Huber lengyel tudós 1872. január 4-én született a *Zakopane*-tól mintegy 20-30 km-re északkeletre fekvő, *Kroszcienko nad Dunajcem* nevű dél-lengyelországi településen<sup>1</sup>. Ez a terület abban a korban az Osztrák-Magyar Monarchiához tartozott, így Huber tanulmányait a Birodalom különböző intézeteiben végezte. Először a közeli *Limanowa* általános iskolájába járt, utána a gimnázium következett *Krakkóban*, majd 18 évesen a kiváló szakmai műhelynek számító kétnyelvű<sup>2</sup> *Lemberg*<sup>3</sup> *Műszaki Egyetemre* jelentkezett építőmérnöknek (az egyetem főépületének mai képe látható alul jobboldalt). 1895-ben kiváló eredménnyel fejezte be tanulmányait és rögtön az egyetemen is maradt tanársegédnek az Út- és Alagútépítési Tanszéken. Hamarosan a *Berlini Egyetemen* folytatta szakmai továbbképzését, itt főleg matematikát tanult. Néhány Berlinben töltött év után visszatért



*Lembergbe*, itt védi meg 1904-ben a fémek kristályszerkezetének torzulási energiájáról írt doktori disszertációját. Gyorsan haladt előre az egyetemi ranglétrán, 1908-ban már rendes egyetemi tanárrá nevezték ki.

Az első világháborúban Huber *Przemyslnél* orosz hadifogságba esett, és csak a polgárháború éveiben került haza *Kazanyból* az immár önálló Lengyelországba. Ismét *Lvovban*, az egyetemen dolgozik, 1922 és 1923 között az egyetem rektorának is megválasztják. 1928-ban meghívták *Varsóba*, az ottani *Műszaki Egyetem Mechanika Intézetének* vezetésére. A második világháború alatt a varsói egyetemet bezárták, az akkor már nem túl fiatal és sokat

<sup>1</sup> Az akkori szegényes falucska ma kedvelt hegyi üdülőhely. A környék mostani hangulatát érzékelteti a baloldalt fent látható fénykép.

<sup>2</sup> Lengyel és német nyelven egyaránt folyt képzés.

<sup>3</sup> Ma a város *Lviv* néven Ukrajnához tartozik. Gyakran említik *Lvov* elnevezéssel is.

betegeskedő Huber először a Varsó melletti *Pruszkow*-ba, később pedig *Zakopane*-ba költözött. Csöndes visszavonultságban – és meglehetősen nehéz körülmények között – élt.

A háború után 1945-ben felkérték a *Gdanski Műszaki Egyetem* megszervezésére. Hatalmas energiával látott munkának, és jórészt neki köszönhetően a tengerparti város egyeteme nagyon hamar komoly képzési és kutatási centrummá vált. 1949-ben Huber befejezte itteni szervezőmunkáját – hálából a gdanskiak az egyetem díszdoktorává választották – és visszatért szülőföldjére, Dél-Lengyelországba, átvette a *Krakkói AGH-Műszaki Egyetem*<sup>4</sup> *Mechanika Tanszékének* vezetését. Sajnos ezt már csak nagyon rövid ideig irányíthatta, 1950 őszén megbetegedett és december 9-én meghalt.

### Huber tudományos munkássága

Legjelentősebb alkotása az 1904-ben publikált doktori disszertációjában található folyási feltétel, amelyet a fémek képlékeny viselkedésével foglalkozó részben majd külön tárgyalunk. Említést érdemel a varsói évei alatt 1929-ben publikált „*Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten*” című könyve, ahol ortotrop lemezek statikai számítására kidolgozott eljárásait mutatta be és többféle gyakorlati esetre kidolgozott számítási változatot is közölt. Nagyon népszerű volt Lengyelországban az 1948-ban írt „*Elméleti rugalmasságtan*” című munkája is.

### Mises élete

Richard Edler von<sup>5</sup> Mises osztrák nemesi család gyermekeként született 1883. április 19-én *Lemberg*ben. Egész életében büszke volt származására és még hosszú amerikai tartózkodása idején is sokszor mutatta be ismerőseinek családja címerét (ennek képét láthatjuk baloldalt):



Édesapja – *Arthur Edler von Mises* – az Osztrák Államvasutak magasrangú szakértőjeként dolgozott, mérnöki képzettséggel rendelkezett, és büszkén viselte a műszaki tudományok doktora címet. Édesanyja szintén nemesi születésű volt, *Adele von Landaun*nak hívták. Richard másfél évvel idősebb bátyja – *Ludwig Heinrich Edler von Mises*<sup>6</sup> – később ugyancsak ismertté vált hazájában és világszerte, mint kiváló közgazdász.



<sup>4</sup> Lengyel nevén: *Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica*. Az 1919-ben alapított egyetem akkoriban elsősorban a bányászathoz és a fémipari tevékenységekhez kapcsolódó oktatással foglalkozott.

<sup>5</sup> Mises nevében az „*Edler von*” rész utal a nemesi címre.

<sup>6</sup> *Ludwig* jóval túlélte öccsét, 1973-ban halt meg az Egyesült Államokban. A Mises családnak egyébként még volt egy harmadik fiúgyermeke (*Karl Edler von Mises*), de ő fiatalon meghalt skarlátban.

A lebergi elemi iskolás évek után Richard középiskolai tanulmányait már Bécsben, az *Akadémiai Gimnáziumban* folytatta, ezt 1901-ben kitüntetéssel<sup>7</sup> befejezte és rögtön utána jelentkezett a *Bécsi Műszaki Egyetemre*. A (gépész)mérnöki tanulmányok mellett Mises külön matematikát és fizikát is hallgatott, különösen a fizikai tanulmányok vonzották. Még hallgató volt, amikor 1905-ben megjelent első cikke (*Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven* címmel) a „*Zeitschrift für Mathematik und Physik*” neves folyóiratában. Egyetemi tanulmányai mellett arra is volt energiája, hogy asszisztensi munkát vállaljon *Georg Karl Wilhelm Hamel*<sup>8</sup> brünni (ma Brno) intézetében.

1908-ban a *bécsi Műegyetemen* Mises megvédte dugattyúval mozgatott kerekek tömegeloszlásának vizsgálatáról szóló doktori disszertációját, rá egy évre pedig már *Brünnben* habilitált sikeresen vízturbinákról írt dolgozatával. 1909-ben – 26 éves volt akkor – meghívták *Straßburg*<sup>9</sup> egyetemére alkalmazott matematikát tanítani (megkapta a német állampolgárságot is). Bár hosszú ideig tanított a Matematika Intézetben, mindig csak átmenetinek tekintette strauburgi tartózkodását, mert többször is megpályázta a *Brünni Műszaki Egyetem* különböző oktatói állásait, de minden alkalommal sikertelenül.

Az 1910-es években *Straßburgban* kezdett foglalkozni a repülés mechanikájának különböző feladataival<sup>10</sup>. Maga is megtanult repülni, sőt vállalta újfajta repülőgépek berepülő pilótájának szerepét is. Az első világháború kitörésekor azonnal otthagyta strauburgi állását és jelentkezett az Osztrák-Magyar Monarchia hadseregébe pilótának. Az új repülőgépkonstrukciók tervezésével foglalkozó katonai irodában kapott munkát, géptervezéssel illetve tesztrepülésekkel foglalkozott. 1916-ban ő tervezte azt a 600 lóerős gépet, melyet a hadseregben „*Mises-repülőnek*” („*Mises-Flugzeug*”) hívták. A Monarchia katonai összeomlása megakadályozta a gép sorozatgyártását, de maga a tervezés mérnöki körökben igen nagy tiszteletet szerzett Misesnek.

A háború után abbahagyta a repülőtervezést, visszatért az egyetemi oktatás világába. Egy ideig a *Drezdai Műszaki Egyetemen* tanított hidro- és aerodinamikát, majd 1920-ban egyetemi tanárrá és az *Alkalmazott Matematikai Intézet* igazgatójává nevezték ki a *Berlini Egyetemen*. Ezt az intézetet eredetileg *Erhard Schmidt*<sup>11</sup> javaslatára hozta létre az egyetem, de maga *Schmidt* nem vállalta a vezetést, hanem kifejezetten olyan – „erős” matematikusi háttérrel rendelkező – mérnököt keresett az Intézet vezetésére, akinek komoly szakmai gyakorlata is van. Mises kiválóan megfelelt ennek a célnak, és irányításával hamarosan pezsgő szakmai élet bontakozott ki az Intézetben. Elsősorban a különböző fizikai és mechanikai háttérű differenciálegyenletek megoldása, mechanikai célú valószínűség-számítási feladatok, áramlástani illetve rugalmasságtani problémák vizsgálata jelentette az Intézet fő profilját. 1921-ben itt Berlinben alapította meg Mises a ma is létező és tekintélyes „*Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*” című folyóiratot, amelynek ő volt az első főszerkesztője.

Az 1920-tól a harmincas évek elejéig tartó időszak a nyugodt alkotó munka korszakát jelentette Mises számára. A Németországban akkoriban lezajlott politikai változásokkal

<sup>7</sup> Főleg latinból és matematikából volt kiváló.

<sup>8</sup> 1877 – 1954. Német matematikus, főleg függvénytanal és áramlástani vizsgálatokkal foglalkozott.

<sup>9</sup> A város akkor Németországhoz tartozott, ma – *Strasbourg* néven – Franciaország része.

<sup>10</sup> Ő tartott 1913-ban először a világon egyetemi kurzust a motoros repülés elméleti kérdéseiről.

<sup>11</sup> 1876 – 1959. Kiváló német matematikus, *David Hilberttel* együtt őt tartják a modern funkcionálanalízis létrehozójának.

azonban nem értett egyet, így 1933 decemberében elfogadta a török kormány meghívását és Németországot elhagyva Törökországba költözött, ahol átvette az *Isztambuli Egyetem* akkoriban alapított *Elméleti és Alkalmazott Matematika Intézetének* vezetését. Hat évig dolgozott itt, majd 1939-ben – a *Mustafa Kemál Atatürk*<sup>12</sup> halála utáni törökországi politikai zavargások miatt – újból útra kelt és immár véglegesen letelepedett az *Egyesült Államokban*<sup>13</sup>, ahol a *Harvard Egyetemen* lett az *Aerodinamika és Alkalmazott Matematika Tanszék* professzora. 1943-ban itt vette feleségül korábbi munkatársát, *Hilda Geiringert*<sup>14</sup>, aki hűséges társa volt már Németországban is és követte őt Törökországba és Amerikába.

Mises 14 évet élt és dolgozott Amerikában. Még megérte, hogy 1950-ben korábbi munkahelye, a *Berlini Egyetem* díszdoktorává avatta, de egy sokáig lappangó betegség hamarosan úrrá lett szervezetén. Hosszú szenvedés után 1953. július 14-én *Bostonban* meghalt.

### **Mises tudományos munkássága**

Mises számos területen alkotott maradandót, bámulatosan sokoldalú személyiség volt.

Az aerodinamikában nevéhez fűződik a határoló felületek közvetlen környezetében lezajló, úgynevezett „határréteg-áramlási feladat” részletes vizsgálata. Áramlástanai eredményeiről írt könyveit még halála után is többször kiadták (*Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Academic Press, 1958, *Fluid Dynamics*, Springer, 1971).

Szilárdtestmechanikai eredményei közül kiemelkedik a témánk szempontjából fontos folyási feltétel, ezt az életrajzok utolsó pontjában majd külön bemutatjuk. Az ehhez kapcsolódó publikációja egyébként 1913-ban jelent meg.

*Philipp Frankkal*<sup>15</sup>, *Heinrich Weberrel*<sup>16</sup> és *Georg Fridrich Bernhard Riemann*<sup>17</sup>-nal közösen írt, enciklopédikus jellegű „*Die Differential- und Integralrechnungen der Mechanik und Physik*” című, több nyelvre – köztük magyarra is – lefordított kiváló könyvét nemzedékek forgatták, ebből tanulva meg a mechanika alapvető differenciálegyenleteinek felírási és megoldási módjait.

Említésre méltóak hengerhéjak illetve belső nyomással és tengelyirányú erőkkel terhelt hengerek stabilitásvizsgálatáról írt munkái is, lásd például a „*The critical external pressure of cylindrical tubes under uniform radial and axial load*”<sup>18</sup> című cikkét.

*Kármán Tódorral*<sup>19</sup> közösen írt „*Advances in Applied Mechanics*” (Academic Press, 1975) című könyve a különböző matematikai technikák mechanikai alkalmazásának kiváló összefoglalása.

---

<sup>12</sup> 1881 – 1938. Török politikus, a modern Törökország megteremtője.

<sup>13</sup> Megjegyezzük, hogy egy évvel később – az addig Svájcban élő – bátyja is csatlakozott hozzá, ő is kivándorolt az Államokba.

<sup>14</sup> 1893 – 1973. Német matematikus, több egyetemen is tanított professzorként.

<sup>15</sup> 1884 – 1966. Német matematikus, fizikus és filozófus, főleg variációs számítással és a Fourier-sorok alkalmazásával foglalkozott.

<sup>16</sup> 1839 – 1928. Német fizikus.

<sup>17</sup> 1826 – 1866. Kiváló német matematikus, sokat foglalkozott matematikai fizikával és differenciálgeometriával. Misesék könyve sok hivatkozást tartalmaz az ő munkáira, ezért szerepel a neve a szerzők között.

<sup>18</sup> *U.S. Experimental Model Basin, Navy Yard, 1933.*

Mises sokat tett a valószínűségelméleten alapuló mechanikai vizsgálatoknak illetve magának a matematikai valószínűségelméletnek a fejlesztéséért. Több könyve foglalkozik ilyen témákkal, lásd például a „*Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen in der Statistik und theoretischen Physik*” (Springer, 1931), vagy „*Mathematical Theory of Probability and Statistics*” (Academic Press, 1964), illetve „*Probability, Statistics and Truth*” (Dover Publ., 1981) című munkáit.

Megjegyezzük, hogy bár ezen a területen sok vitája volt más matematikusokkal (például Kolmogorovval<sup>20</sup> vagy Osztrovszkijjal<sup>21</sup>), de még vitapartnerei is elismerték modelljeinek újszerűségét és a gyakorlati feladatok megoldásában való hatékonyságát.

Fiatal korának kedvencéhez, a repüléshez sem maradt hűtlen, komoly munkát írt a repülés elméletéről „*Theory of Flight*” (McGraw-Hill, 1945) címmel.

Érdekes megemlíteni, hogy Mises sokat foglalkozott filozófiai kérdésekkel. Sajátmagát a pozitivista<sup>22</sup> iskolához sorolta, és – főleg fiatal korában – kapcsolatban állt az úgynevezett „*Bécsi Kör*” ilyen gondolkodású filozófusaival is (például *Philipp Frankkal* (későbbi szerzőtársával), *Otto Neurathtal*<sup>23</sup> és *Hans Hahnnal*<sup>24</sup>). Frankkal egész életében levelezett tudomány-filozófiai témákról, gondolkodásmódjuk nagyon közel állt egymáshoz.

Saját bátyjával is sokat vitatkozott filozófiáról, bár Ludwignak tőle nagyon eltérő véleménye volt... Mises egyébként könyvet is írt saját álláspontjáról „*Positivism: A Study in Human Understanding*” (Dover Publ., 1968) címmel.

Befejezésül megjegyezzük, hogy komoly szépirodalmi műveltséggel rendelkezett, személyes barátja volt például *Robert Musil*<sup>25</sup>, a világhírű osztrák író, a „*Tulajdonságok nélküli ember*” című regény (vagy inkább novellafüzér) írója valamint *Marie Rilke*<sup>26</sup>, a „*Duinói elégiák*” szerzője.

---

<sup>19</sup> 1881- 1963. *Szöllőskislaki Kármán Tódor* (külföldön ismertebb nevén *Theodore von Karman*) magyar gépészmérnök, a szuperszonikus repülés elméletének egyik kidolgozója.

<sup>20</sup> *Andrej Nyikolajevics Kolmogorov* (1903 – 1987) orosz matematikus, a valószínűségelmélet egyik nagy alakja. Sokat foglalkozott klasszikus mechanikai feladatokkal (pl. a turbulencia kérdéskörével) is.

<sup>21</sup> *Alexander Markovics Osztrovszkij* (1893 – 1986) ukrán származású, de egész életében Nyugat-Európában élő matematikus. Elsősorban lineáris algebrával, számelmélettel és topológiával foglalkozott.

<sup>22</sup> A *pozitívizmus* olyan filozófiai irányzat, amely a XIX. század végén és a XX. század elején volt jellemző az európai filozófiában. Ezen irányzatokban közösnek tekinthető a filozófia tudományos jellegű, racionális megközelítése, és a tudomány pozitív szerepének hangsúlyozása az élet javításában.

<sup>23</sup> 1882 – 1945. Osztrák filozófus és szociológus.

<sup>24</sup> 1879 – 1934. Osztrák matematikus, funkcionálanalízissel és topológiával foglalkozott.

<sup>25</sup> 1880 – 1942.

<sup>26</sup> 1875 – 1926. Teljes nevén *René Karl Wilhelm Johann Josef Marie Rilke*. Prágai születésű osztrák költő, egyike a XX. század legjelentősebb német irodalmárainak.



## Hencky élete

Heinrich Hencky 1885. november 2-án született *Ansbach*ban, egy *Münchentől* északra levő bajorországi kisvárosban. A városka főterének mai képe látható a fényképen.



Édesapja korai halála után édesanyja Heinrichhel és testvéreivel *München*be költözött, ott vállalt munkát, hogy családját eltarthassa. Hencky itt *München*ben végezte elemi és középiskolai tanulmányait, majd 1912-ben sikerrel felvételizett a *Darmstadti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karára*. Korán elismerést szerzett nevének, egyetemi évei alatt írt első tudományos munkája (rugalmas lemezek számítására javasolt különböző numerikus módszereket) jó fogadtatásra talált a mérnökök között.

A tanulás mellett – elsősorban nehéz anyagi helyzetű családja segítésére – tervezői munkát vállalt az *Elzász-Lotharingiai Vasútnál* is. A cégnél nagyon meg voltak vele elégedve, éppen ezért amikor 1913-ban egy *harkovi* (Ukrajna) vasúttársaság gépészmérnököt keresett, a fiatal Henckyt javasolták. Ő el is vállalta ezt a jó fizetéssel járó feladatot és azonnal Oroszországba költözött. Az egy múlva váratlanul kitörő első világháború azonban derékba törte tervezői karrierjét, mint német állampolgárt az *Ural*ba internálták. Egy adott körzetben szabadon mozoghatott és amennyire lehetősége engedte, mechanikai tanulmányait is folytatta. Megismerkedett egy orosz lánnyal, akit 1918 elején el is vett feleségül<sup>27</sup> (a hölgy hűségesen követte Henckyt mozgalmas élete majdnem minden további állomásán, több gyermekük is született).

A breszt-litovszki békét követően Hencky azonnal visszatért *München*be. A *warnemiündei* tengerészeti támaszponton ajánlottak fel neki munkát, tengerre leszállni képes repülőgépek tervezése és tesztelése volt a feladata. A német katonai összeomlás miatt azonban ez a munka nem tartott sokáig, hamarosan elbocsátották az intézet bezárása miatt. 1919-ben családjával együtt *Darmstadt*ba költözött, ahol az egyetemen kapott magáncocensi állást. Sajnos fizetést nem tudtak neki biztosítani, ezért hamarosan ezt az állást is ott kellett hagynia. *Drezda* volt a következő állomás, itt az egyetemen legalább be tudta adni habilitációs dolgozatát (lemezek stabilitási kérdéseivel foglalkozott ebben a munkájában). Védése eredményes volt, igen kitűnő munkának találták értekezését (később cikkek formájában is közölte ezeket az eredményeit). Ezen a sikerén felbátorodva Hencky megpályázott egy egyetemi tanári állást,

<sup>27</sup> Zilahy „Két fogoly” című regényének eseményeit idézi olykor Hencky sorsa...

de ezt már nem tudta megszerezni, a bíráló bizottság elismerte ugyan tudományos képességeit, de hiányolta oktatói gyakorlatát... Egyedül a bizottság elnöke, a híres matematikusként ismert *E. I. Trefftz*<sup>28</sup> támogatta, mondván „*Ki születik közülünk tanárnak? Ezekben a háborús években csoda, hogy ilyen eredményeket el tudott érni...*”

A kudarcon elkeseredve Hencky ismét várost – és országot – váltott, 1922-ben most *Hollandiába* ment, a *Delfti Műszaki Egyetemen* vállalt lektori állást szerény fizetésért. Rendes oktatói álláshoz itt sem jutott. Minden anyagi nehézsége ellenére tovább publikált, 1923-ban itt *Delftben* jelent meg élete egyik legfontosabb alkotása (*„Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern“*), a képlékeny viselkedést jellemző folyási feltételről illetve a deformációs elmélet alapjairól írt munkája.

1929-ben a világgazdasági válság *Hollandián* is végigsöpört, Hencky elvesztette állását. Szerencséjére publikációira Amerikában is felfigyeltek és meghívták előadónak a világ egyik leghíresebb műszaki egyetemére, a *Massachusetts Institute of Technology Gépészmérnöki Karának Mechanika Tanszékére* előadónak. Sajnos amerikai évei nem voltak konfliktusmentesek, az alapvetően gyakorlati eredmények kifejlesztésére koncentráló amerikai környezetben a kifejezetten elméleti beállítottságú Hencky nem érezte igazán jól magát. Ennek ellenére tovább finomította a képlékeny deformációs elméletre vonatkozó tételeit és ez volt az MIT-n töltött három évének legfontosabb eredménye. Sajnos 1931-ben meghalt *Stratton*<sup>29</sup> professzor, Hencky jóbarátja és támogatója, és az új vezetés nem hosszabbította meg Hencky szerződését, megint állás nélkül maradt. Egy darabig *New Hampshire*-ben tanácsadóként dolgozott, de a harmincas évek közepére már egy farmra szorult gazdálkodóként, annyira nem kapott mérnöki feladatot sem egyetemen, sem ipari vállalatoknál.

Ennek ellenére szívósan publikált tovább, farmerként jelentette meg például a gumik nemlineáris viselkedésének elméletéről írt kiváló tanulmányát. Erre a munkára figyelt fel *Galjorkin*<sup>30</sup>, aki hosszas utánjárással elérte, hogy Hencky 1936-ban kutatóként meghívást kapott a *Szovjetunióba*, először a *Harkovi Kémiai Intézetbe*, majd néhány hónap múlva a *Moszkvai Állami Egyetemre, Iljusin*<sup>31</sup> intézetébe. Közel két évig dolgozott itt, azonban egyre kevésbé érezte megfelelőnek azt a politikai légkört, ami a mindennapi életben körülvette. 1938-ban felmondta szerződését és visszatért szülőföldjére, Németországba. Felesége és gyerekei hosszú évek után először nem értettek egyet az új úticéllal, ők Amerikát választották és oda költöztek vissza, ahonnan 1936-ban eljöttek.

Hencky testvére – *Karl Hencky* – akkoriban az *IG-Farben* német óriáscég vezető beosztású tisztviselője volt, az ő segítségével sikerült elérnie, hogy állást kapott a *MAN* autó és motorgyártó cég egyik *Mainz* melletti gyárában. Sajnos a következő évek sem hoztak számára nyugalmat, a német biztonsági szolgálat többször letartóztatta, szemére hányva valamennyi külföldi útját, *Hollandiától* kezdve *Amerikán át Oroszországig*. Csak testvére segítségének köszönhető, hogy elkerülte a koncentrációs tábor, de így is csak nagyon nehéz körülmények között, szerény beosztású mérnökként tudta átvészelni a háborús éveket. 1945

<sup>28</sup> 1888 – 1937. Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldási technikáival foglalkozott, a hibrid végesesemes technikát alkalmazók is gyakran találkoznak munkáival. Aszteroidát is elneveztek róla.

<sup>29</sup> 1861 – 1931. *Samuel Wesley Stratton*, amerikai mérnök, hosszú ideig az MIT elnöke.

<sup>30</sup> 1871 – 1945. Fehérorosz származású mérnök. Életéről lásd részletesebben a róla készült életrajzot.

<sup>31</sup> 1894 – 1977. *Szergej Vlagyimirovics Iljusin* orosz mérnök, híres repülőgép-tervező.

után – még csak hatvan éves volt – testben-lélekben megfáradt emberként már nem volt ereje megújítani az életét, tudományos munkája is csupán addigi eredményei összegzésére szorítkozott. A MAN tervezőosztályánál dolgozott csöndes visszavonultságban, 1951. július 6-án bekövetkezett haláláig.

### **Hencky tudományos munkássága:**

Henckyre ma elsősorban kontinuummechanikai, azon belül pedig mindenekelőtt képlékenységtani vizsgálatai miatt emlékezünk. Még fiatalon publikálta lemezekről szóló első jelentős munkáját, a „*Der Spannungszustand der rechteckigen Platten*” (Oldenburg Publ., 1913) című kötetet, utána a hadifogság miatt sajnos sokáig nem jelent meg tőle semmi.

A fémek képlékeny folyását magyarázó, 1923-ban Hollandiában megjelent publikációja mellett alapvető fontosságú munkája a képlékeny deformációs elméletről 1928-ban írt „*Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen*” (Zeitschrift für Technische Physik) című cikke, ami nagyon sokáig volt mértékadó forrásmunka a szerkezetek képlékeny alapú tervezésénél. A magyar származású *Nádai Árpád*, a képlékenységtan – élete nagy részében Amerikában élő – tudósa is erre alapozva fejlesztette tovább a képlékenységtan deformációs modelljét az 1930-'40-es években.

Megjegyezzük még, hogy halála évében jelent meg életműve összefoglaló munkája, a „*Neue Verfahren der Festigkeitslehre*” (Oldenburg Publ., 1951) című kötete.

### **A fémek képlékeny viselkedésének vizsgálata**

A XIX. század második felében a világszerte győztes ipari forradalom a mechanika fejlődésére is jótékony hatással volt. *Saint-Venant*<sup>32</sup>, *Mohr*<sup>33</sup> és sok más kutató munkásságának eredményeképpen sikerült tisztázni az anyagok rugalmas viselkedésének pontos feltételeit és az ezekre a rugalmas anyagmodellekre épülő statikai eljárások segítségével egyre megbízhatóbb mechanikai viselkedésű szerkezetek épültek világszerte.

A rugalmas alapon történő tervezés mellett azonban fokozatosan formálódni kezdett egy másféle igény is: a mérnökök szerették volna pontosabban megérteni, mi történik az anyagban a határteherbírása környezetében? Két okuk volt erre: egyrészt szerették volna jobban ismerni az anyagi tönkremenetelhez vezető fizikai okokat, másrészt – főleg gazdaságossági okokból – egyre inkább ki akarták használni azt a többlet-teherbírási lehetőséget, amely az anyagban még benne rejlett a rugalmas viselkedés túllépése után. Mivel akkoriban a legtöbb fontos építő- és gépészmérnöki szerkezet fémekből – alapvetően acélból – készült, természetes volt, hogy mindenekelőtt a fémek határteherbírásának jelenségei után kezdtek érdeklődni.

A laboratóriumi és a valós szerkezetek vizsgálatán alapuló megfigyelések azt mutatták, hogy a gyakorlatban használt legtöbb fém<sup>34</sup> átlagos terhelési és hőmérsékleti körülmények között olyan módon megy tönkre, hogy az anyag kisebb-nagyobb kiterjedésű részei lágyabbá, szinte a viszkózus folyadékokhoz hasonló viselkedésűvé válnak, és sokszor egészen nagy lokális

---

<sup>32</sup> 1797 – 1886. Kiváló francia tudós, a mechanika első nagy összefoglaló jellegű alkotóinak egyike. Életéről külön életrajz készült ebben a sorozatban.

<sup>33</sup> 1835 – 1918. Német tudós és gyakorló építőmérnök. Kiváló oktató volt, mérnökök generációit nevelte. Életéről lásd részletesebben a róla készült életrajzot.

<sup>34</sup> Kivéve az öntöttvasat és egyes hozzá hasonló ötvözeteket.

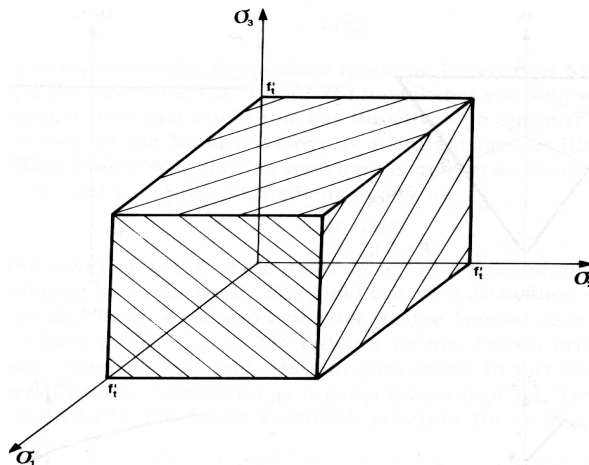


deformációk keletkeznek ezekben a tartományokban. A mérnökök *képlékeny viselkedésnek* nevezték el ezt az állapotot, és megkezdték gondos tanulmányozását. Legelőször arra szerettek volna rájönni, hogy milyen szilárdságtani feltételek mellett kerülhet az anyag rugalmas állapotból képlékenybe, vagy ahogy a mechanikával foglalkozó mérnökök mondják: *mikor fog megfolyni az anyag?* Ennek a folyási feltételnek a fizikai-matematikai megfogalmazása volt a XIX-XX. század fordulóján az egyik legizgalmasabb feladat a mechanikának ezen a területén.

Elsőként egy kiváló skót fizikus és mérnök nevét kell említünk a fémek képlékeny viselkedésével foglalkozók sorában: *William John Macquorn Rankine*<sup>35</sup> skót gépészmérnök és fizikus 1858-ban<sup>36</sup> egyszerű, de sok esetben hatékony modellt ajánlott a képlékeny határállapot bekövetkezésének ellenőrzésére. Feltételezte, hogy a tönkremenetel csak húzásra következik be, így:

$$\text{Max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f_t'$$

A jobb oldalon szereplő paraméter az 1D húzási határfeszültség. A feltétel geometriai ábrázolása a főfeszültségek terében a következő:



Az ábra azt mutatja, hogy ha egy anyagi pont főfeszültségei a koordinátasíkokkal illetve a velük párhuzamos lapokkal határolt testen belül vannak, akkor az anyag *rugalmas* állapotban van, ha pedig a fizikai állapotot jellemző pont a test felületére kerül, *képlékeny* tulajdonságúvá válik. Bár Rankine ezt a modellt mindenféle anyag modellezésére alkalmasnak tartotta, a kísérletek hamar bebizonyították, hogy fémeknél *erősen korlátozott* az alkalmazhatósága, ez a feltételezés jobban bevált például talajok vagy kőzetek modellezésénél.

Jóval használhatóbb volt egy francia gépészmérnök, *Henri Edouard Tresca*<sup>37</sup> (1814-1885) 1869-ben keletkezett<sup>38</sup> folyási feltétele. Érdekes megjegyeznünk, hogy *Tresca Saint-Venant* tanácsára és javaslatára kezdett fémek képlékeny viselkedésével foglalkozni és matematikai

<sup>35</sup> 1820-1872. Sokat tett a termodinamika és hőerőgépek fejlesztéséért. Emellett maradandót alkotott a talajmechanikában is, és mindezek mellett lelkes amatőr muzsikus volt...

<sup>36</sup> *Manual of Applied Mechanics*, Glasgow, 1858.

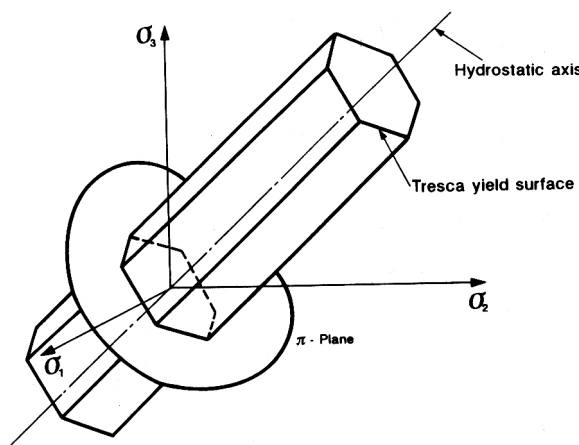
<sup>37</sup> Érdekes Trescáról tudnunk azt is, hogy ő volt a „méter” hosszúság-mértékegység etalonjának mérnöki tervezője. Az 1875-ben megtervezett és elkészült platina-iridium rúd 1960-ig volt hivatalos szabvány a világon.

<sup>38</sup> *Mémoires sur l'écoulement des Corps Solides* (Mém. presentes par divers savants, Vol. 20, 1896)

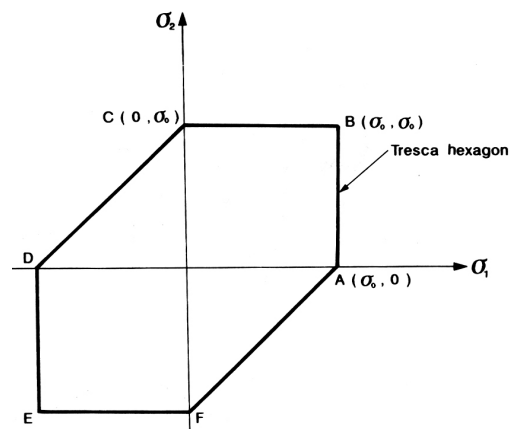
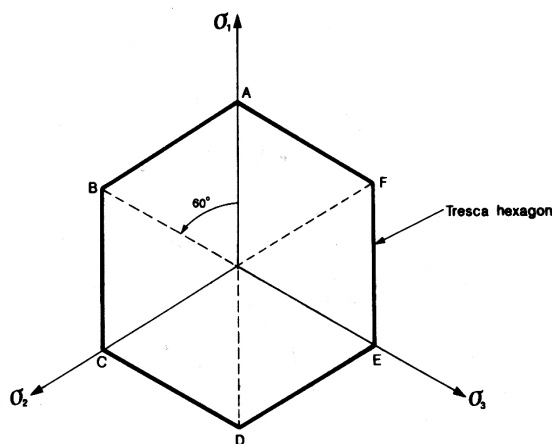
modelljét vékonyfalú tartályok nyomási kísérletei alapján fogalmazta meg. Szerinte a folyás akkor kezdődik, ha az anyagban a maximális nyírófeszültség elér egy kísérletileg meghatározható  $k$  állandót, ahol  $k$  értéke egydimenziós vizsgálatból számítható, a húzószilárdság felére adódik:

$$k = \frac{\sigma_h}{2}.$$

Tresca fényképe látható jobboldalt, alatta a méter-etalon képe. Folyási modelljének mikrofizikai alapját a nyírófeszültségeknek a kristálydiszlokációk létrehozásában játszott jelentős szerepe teremtette meg. Képlékenységi feltétele nem függ a hidrosztatikus hatásoktól. A modell geometriai ábrázolása a főfeszültségek terében mindkét irányban nyitott, sík lapokkal határolt hatszög metszetű palástfelület:



A térbeli folyási felület deviátoros metszetének, valamint a  $\sigma_1 - \sigma_2$  síkkal való - sík feszültségi állapotban érvényes - hatszög-metszetnek a rajzát mutatják a következő ábrák:



Megjegyezzük, hogy Tresca modellje felírható a főfeszültségek segítségével:

$$\left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2 \right] \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2 \right] \left[ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2 \right] = 0,$$

vagy használhatjuk a deviátoros feszültségi invariánsokat is:

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2 J_2^2 + 96k^4 J_2 - 64k^6 = 0.$$

*Tresca* feltétele már sokkal inkább használható volt az ipari alkalmazásoknál, a kísérletek – különösen viszonylag lágyabb fémeknél, mint a réz- és alumíniumötvözetek – elég jó egyezést mutattak az elméleti előrejelzéssel. Maga *Saint-Venant* is ezekre hivatkozott, amikor elméleti vizsgálataiban először fogalmazta meg a képlékenységtan alapvető egyenleteit. A kísérletek *Tresca* azon feltételezését is igazolták, mely szerint fémeknél elhanyagolható a hidrosztatikus feszültségek hatása. A különböző típusú acéloknál azonban a modell eltért a kísérletek eredményeitől, és ráadásul az utóbbiakban a *Tresca*-féle feltételnél a függvényben alkalmazott hirtelen váltásokat sem tapasztalták.

A XIX. század végén több kutató is kísérletet tett *Tresca* modelljének finomítására. Megemlíthetjük *C. Duguet* francia mérnök nevét, aki a *Mohr-Coulomb-modell* módosításával próbált kialakítani fémeknél húzási hatásokot követő folyási feltételt<sup>39</sup>. Sajnos a kísérletek nem igazolták elképzeléseit. Hasonlóan kevés sikert hoztak *J. J. Guest* angol kutató erőfeszítései<sup>40</sup>, ő szintén a maximális nyírófeszültségek hatását próbálta alapvető paraméterként felhasználni. A nagy olasz matematikus, *Eugenio Beltrami*<sup>41</sup> a teljes alakváltozási energiát javasolta mértékadó paraméternek, de a modelljéből<sup>42</sup> levezetett numerikus eredmények nála sem egyeztek a kísérletekkel.

Huber tette meg a következő jelentős lépést a fémeknél valóban jól használható folyási feltétel megalkotására. 1904-ben megjelent disszertációjában, pontosabban annak az egyetemi folyóiratban megjelent összefoglalásában<sup>43</sup> a fémek kristályszerkezetét képlékeny állapotban tönkretévő torzulási energia felhasználását javasolta folyási feltételként. Cikkében azt írja, hogy az alapvető ötletet *Beltramitól* kapta, de ő módosította az eredeti javaslatot, nem a teljes alakváltozási energiát, hanem annak csak egy részét javasolta figyelembe venni<sup>44</sup>. Ezt a torzulási energiát a főfeszültségek segítségével a következőképpen számította (a képletben  $G$  a nyírási rugalmassági modulus):

$$U = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right].$$

Egyszerű húzás esetében az első főfeszültség megegyezik a folyási határfeszültséggel ( $\sigma_1 = \sigma_h$ ), míg a többi főfeszültség zérus. Ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe 1D esetben az energia értékére a következőt kapjuk:

$$U = \frac{\sigma_h^2}{6G}.$$

Huber a két kifejezést egyenlővé téve a képlékeny állapot kialakulására az alábbi feltételt fogalmazta meg:

<sup>39</sup> Könyvének címe: *Deformation des corps solides*, Paris, 1885.

<sup>40</sup> *The strength of ductile material under combined stress*, Phil. mag., Vol. 50, pp. 69-79, 1900.

<sup>41</sup> 1835 – 1899. Elektromossághoz illetve a mágneses jelenségekhez kapcsolódó matematikai munkásságáról ismert elsősorban. Sokat foglalkozott rugalmasságtani feladatok elméleti vizsgálatával is.

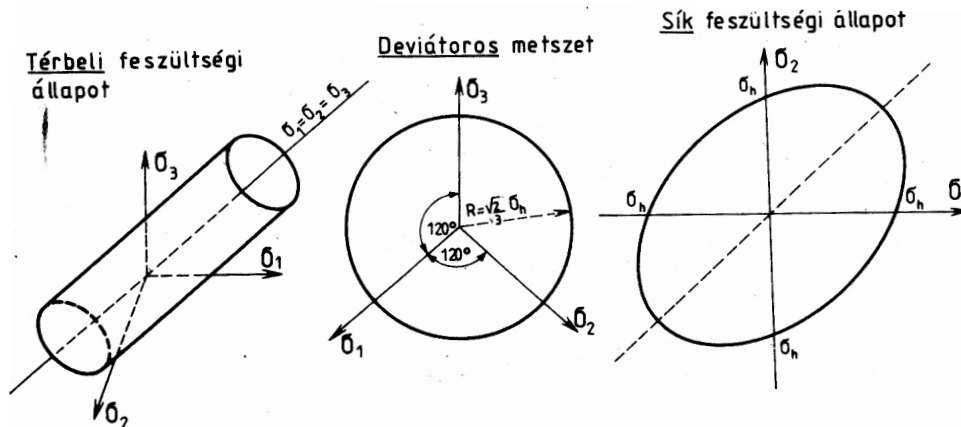
<sup>42</sup> *Rendiconti*, Roma, 1885.

<sup>43</sup> *Specific Deformation Work as a Measure of Material Damage*, Czasopismo Techniczne, Vol. 15, 1904.

<sup>44</sup> Kevesek által ismert tudománytörténeti érdekesség, hogy a nagy fizikus, *James Clark Maxwell* egyik – *Lord Kelvinhez* írt – levelében már jóval korábban előfordult ez az ötlet, de ez az irat csak az 1930-as évek végén került nyilvánosságra, amikor publikálták *Maxwell* teljes levelezését. Maga *Maxwell* a későbbiekben nem fejtette ki részletesen ezt a javaslatot, csak az elméleti vázlat szerepel a levélben.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_h^2.$$

A folyási feltétel főfeszültségek terében ábrázolt alakja egy kör vezérgörbéjű henger,



míg a  $\sigma_1 - \sigma_2$  síkkal való metszet - ez felel meg a sík feszültségi állapotnak - ellipszis (lásd a jobb szélső ábrát). Az előző 3D állapotot jellemző egyenlet tömörebben is felírható, ha észrevesszük, hogy a bal oldalon szereplő főnyíró-feszültségi értékek egyszerűen kifejezhetők a deviátoros feszültségtenzor második invariánsával:

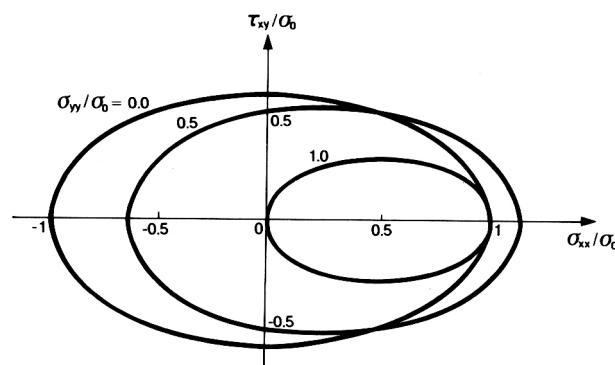
$$J_2 - k^2 = 0,$$

ahol a  $k$  tényező értéke:  $k = \sigma_h / \sqrt{3}$ . Erről a felírási módról szokás ezt a folyási feltételt  $J_2$ -modellnek is hívni.

Megjegyezzük, hogy ellipszis jellegű ábrákat kapunk akkor is, ha például sík feszültségi állapotban nem a főfeszültségek, hanem például egy normál- és nyírófeszültség-pár ( $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  és  $\sigma_{22}$ ) segítségével írjuk fel a folyási feltételt. Ebben az esetben:

$$J_2 = \frac{1}{3}(\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2) + \sigma_{12}^2 \Rightarrow \frac{1}{3}(\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2) + \sigma_{12}^2 = \frac{\sigma_h^2}{3}.$$

Például három különböző ( $\sigma_{22} / \sigma_h = 0, 0,5$  és  $1,0$ ) értéknél az alábbi ellipsziseket kapjuk:



Az ehhez a folyási feltételhez kapcsolódó másik két kutató közül elsőként Mises eredményeit ismerte meg a tudományos közösség. 1913-ban publikált, sokat idézett cikkében<sup>45</sup> más indoklással – tulajdonképpen Tresca modelljének „folytonossá tételéből” kiindulva, a

<sup>45</sup> *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*. Göttinger Nachricht. Math. Phys. Vol. 1, pp. 582 – 592., 1913.

főnyírófeszültségek munkáját elemezve kapta ugyanazt az összefüggést, amit Huber kilenc évvel azelőtt. Hencky publikációjára<sup>46</sup> még további tíz évet kellett várni, de nem szabad elfelejtenünk el, hogy ennek az időszaknak az első világháború volt a fő jellemzője... Hencky ugyanúgy a Beltrami-féle alapötletből indult ki, és némileg más levezetéssel és alapfogalmakkal, de ő is a deviátoros feszültségtenzor hatásaként értelmezte a képlékeny válást. Ő használta először a deviátoros feszültségtenzor második invariánsát a modellben.

Ma már bizonyítottnak tekinthető, hogy a három tudós nem ismerte egymás munkáját. Az akkori kommunikációs és publikációs eszközök miatt az ismeretek terjedése és cseréje is sokkal lassabb volt, ráadásul az eredeti forrás, Huber publikációja egy tudományos szempontból viszonylag félreeső helyen született, Misesét pedig a kitörő háború vihara sodorta félre. Jó tudni, hogy amikor az 1920-as években tudomást szereztek egymás eredményeiről, semmiféle szakmai vita vagy féltékenység nem árnyékolta be kapcsolatukat, mindhárman tiszteletben tartották a másik kettő véleményét. Maga Huber, aki végülis időben az első volt közöttük, használta először és utána egész életében is következetesen a *Huber-Mises-Hencky-féle folyási feltétel*<sup>47</sup> elnevezést, és így illik nekünk is nevezni, mindhármuk nevét belefoglalva a modell nevébe.

Befejezésül még megjegyezzük, hogy a modell ellenőrzésére rendkívül sok kísérletet végeztek. A magyar *Nádai Árpád* az elsők között volt a tesztek<sup>48</sup> végzésében. Az ő és mások kísérletei egyértelműen igazolták, hogy a HMMH-feltétel kiválóan megfelel a gyakorlatban használt legtöbb fémes anyag, közöttük a különböző acélok képlékeny határfeltételének, így a kutatók munkája eredményeképpen a mérnökök egyszerű és mégis pontos modellt kaptak a különböző képlékenységtani számítások elvégzéséhez.

Sajnos az 50-es évek elején egymás után (1950, '51, '53) eltávozó három kutató már nem érthette meg, hogy modelljük alapvető részévé vált minden olyan numerikus – végeeselemes – szoftvernek, amely képlékeny feladatokat vizsgál, és azt sem láthatták, hogy nincs a világon sehol olyan építő- vagy gépészmérnöki mechanikaoktatás, ahol ne a legfontosabb ismeretek között tanítanák a Huber, Mises és Hencky megfogalmazta folyási feltételt.

### **Felhasznált irodalom:**

- 1./ Timoshenko, S. P.:** History of Strength of Materials, *McGraw-Hill*, 1953.
- 2./ Bojtár I.:** Mechanikai anyagmodellek, *Egyetemi jegyzet, BME*, 2007.
- 3./ Chen, W.F.:** Plasticity and modeling, *Elsevier*, 1994.

---

<sup>46</sup> *Über einige statisch bestimmte Falle des Gleichgewichts in plastischen Körpern*, Zeitschrift Angew. Math. Mech, 1923.

<sup>47</sup> A tömörség kedvéért gyakran hívják HMMH-feltételnek.

<sup>48</sup> *Nádainak* az 1920-as évek közepétől egészen az 1950-es évekig végzett ilyen jellegű munkájáról nagyon jó összefoglalás olvasható saját „*Theory of Flow and Fracture of Solids*” című remek könyvében (John Wiley, 1950).