

Euler és a kihajlás vizsgálata

Euler élete

Leonhard Euler 1707. április 15-én született a svájci Baselben. Édesapja, *Paul Euler* kálvinista lelképásztor volt, édesanyja – *Margaret Brucker* – szintén papi családból származott. Eulernek két húga született még a későbbi években, *Anna Maria* és *Maria Magdalena*.

Apjáról feljegyezték a krónikák, hogy amikor fiatal korában a baseli egyetemen teológiát tanult, diákként *Jacob Bernoulliék*¹ házában lakott és nagyon jó kapcsolatba került az egész *Bernoulli* családdal. Mint látni fogjuk, ez az ismeretség fiának életére is igen nagy hatással volt.



1708-ban a család a Baseltől nem messze levő *Riehenbe* költözött, Euler itt töltötte gyermekkorát. 1719-ben, 12 éves korában elküldték anyai nagyanijához Baselbe, hogy a komolyabb képzést lehetővé tevő városban éljen. 13 évesen már a Baseli Egyetem hallgatója és még csak 16 éves, amikor megvédi – *Newton* és *Descartes* filozófiáját összehasonlító – disszertációját. Ezekben az években már ő is rendszeres vendége a *Bernoulli*-háznak, *Johann Bernoulli*² minden szombat délután külön matematikalecke³ adott számára, és Euler óriási lelkesedéssel járt ezekre az órákra... Tanára számára nagyon hamar nyilvánvalóvá vált a fiatal Euler rendkívüli matematikai tehetsége és erről szerencsére sikerült *Paul Eulert* is lassan-lassan meggyőznie. Az apa fiát is papnak szánta, és ahhoz mindenképpen ragaszkodott, hogy Leonhard legalább elkezdje teológiai tanulmányait. Apja kérésének engedve 1723-ban valóban beiratkozott a Baseli Egyetem teológia szakára, ahol különféle valláselméleti tárgyakat, valamint görög és héber nyelvet tanult. Jóllehet Euler egész életében mélyen vallásos ember volt, de ezek helyett a tanulmányok helyett egyre inkább a matematika kötötte le egész idejét, így éppen csak minimális energiát fordított a választott szak teljesítésére.

1726-ban befejezte teológiai tárgyait. Ugyanebben az évben már megjelentek első matematikai tárgyú cikkei, sőt, egy évvel később a Francia Tudományos Akadémia tudományos művekre kiírt pályázatán már második helyezést⁴ szerzett a hajótervezési problémákkal foglalkozó „*Meditationes super problemate nautico*” című munkájával, és ez az elismerés nemzetközileg is azonnal ismertté tette nevét. Apja végre engedett *Johann Bernoulli* évek óta tartó „unszolásának” és belegyezett, hogy fiából matematikus legyen.

¹ 1654 – 1705. Kiváló svájci matematikus. Sokat foglalkozott mechanikai feladatokkal is. Életéről és munkásságáról lásd bővebben a róla készült életrajzot.

² 1667 – 1748. A Bernoulli-család talán legnevesebb matematikusa, *Jacob Bernoulli* testvére, *Daniel Bernoulli* édesapja.

³ *Varignon*, *Descartes*, *Newton*, *Galilei*, *Jacob Bernoulli*, *Taylor* stb. munkáinak tanulmányozása jelentette a tananyagot, Euler ezzel töltötte szinte minden szabad idejét.

⁴ Az első helyezést abban az évben *Pierre Bouguer* (1698 – 1758) nyerte el. *Bouguer* francia matematikus és csillagász volt, nevéhez fűződik a tudományos elveken nyugvó hajótervezés létrehozása. Euler egyébként később *tizenkét* alkalommal kapta meg a Francia Akadémia nagydíját...

Ebben az időben Johann Bernoulli két fia, *Daniel*⁵ és *Nicolas*⁶ a szent-pétervári *Orosz Birodalmi Tudományos Akadémián*⁷ dolgozott, ahol az orosz uralkodók meghívására sok külföldi oktató és kutató. *Nicolas Bernoulli* 1726 júliusában – egyéves oroszországi tartózkodás után – váratlanul meghalt vakbélgyulladásban, és az Akadémia vezetése ekkor a testvérét kérte fel, hogy folytassa *Nicolas* munkáját. *Daniel* ezt elfogadta, de egyúttal azt javasolta, hogy az ő korábbi tevékenységét – az Élettani Intézetben dolgozott matematikusként – bízák Eulerre, a Bernoulli-család régi barátjára. 1726 novemberében meg is érkezett Baselbe *Laurentius Blumentrostnak*, az Akadémia elnökének hivatalos felkérése.

Euler nem válaszolt rögtön. Ennek két oka volt: egyrészt nem érezte magát elég képzettnak az orvostudományokban (ezt pótlandó azonnal elkezdte látogatni az orvosi fakultás előadásait), másrészt éppen akkor üresedett meg a baseli egyetemen a Fizika Tanszék vezetői állása, és Euler úgy döntött, hogy indul a kiírt pályázaton. A jelölteknek egy tudományos munkát kellett erre a célra összeállítani (Euler publikációja a hang terjedésével foglalkozott „*Dissertatio physica de sono*” címmel), és ennek alapján döntött az egyetem vezetése a kinevezésről. Euler pályázata nem volt sikeres, így elfogadta a szentpétervári felkérést. 1727. április 5-én egy rajnai hajóval indult el Svájcba, ahová már soha életében nem tért vissza. Akkoriban több mint egy hónapig tartott egy ilyen út: gyalog illetve postakocsin haladt át a német államokon, utána pedig Lübeckből hajón jutott el Szentpétervárra, ahová végül május 17-én érkezett meg.

Nagyon rövid ideig töltötte be azt a posztot, amire eredetileg meghívták, az Élettani Intézetből gyorsan átkerült a matematikusok csoportjába, de „mellékállásként” három évig őrnagyi rangban emellett az orosz haditengerészetnél még orvosi teendőket is ellátott. Gyorsan megtanult oroszul, és hamarosan önálló házat vett a Néva partján, ide költözött *Daniel Bernoullitól*, akinél kezdetben lakott. 1730-ban fizika-professzornak – és akadémikusnak – nevezték ki, majd 1733-ban, amikor *Daniel Bernoulli* hazatért Baselbe, Euler lett a Matematika Intézet vezetője.

Anyagi helyzete ezekben az években jelentősen javult, így 1734. január 7-én megházasodott, feleségül vette egy Pétervárott dolgozó svájci festő leányát, *Katharina Gsell*. 13 gyermekük született⁸, de sajnos csak öt érte meg a felnőttkort, a többiek mind fiatal korukban haltak meg.

Az 1730-as évek második felében az orosz birodalom politikai életét a fokozódó belpolitikai viszályok jellemezték. Bár 1737-ben Euler kiadja első könyvét, a „*Mechanica, sive motus*

⁵ 1700 – 1782. Főleg a folyadékok mechanikájának kutatásáról ismert, *Hydrodynamique* c. híres munkáját 1738-ban publikálta.

⁶ 1695 – 1726. Nem tévesztendő össze (szakmai eredményei miatt jóval ismertebb) hasonló nevű nagybátyjával, akit *Nicolas I*, őt pedig *Nicolas II*. névvel azonosít a tudománytörténet.

⁷ Az Akadémiát – a mai Orosz Tudományos Akadémia elődjét – *Nagy Péter* cár alapította 1724. január 22-i rendeletével. Létrejöttében komoly szerepe volt a nagy német tudós, *Gottfried Wilhelm von Leibnitz* javaslatainak illetve Péter cár külföldön, a hasonló tudományos intézményekben szerzett tapasztalatainak. A cár sokáig habozott, hogy a párizsi (erősen centralizált felépítésű) Akadémia, vagy a jóval lazább szerkezetű Royal Society legyen számára a minta, de végül a francia intézményt fogadta el modellnek. Mivel Péter cár 1725. január 28-án meghalt, már nem érte meg az intézmény hivatalos megnyitását. Ezt özvegye, *I. Katalin* cárnő tette meg helyette 1725 nyarán.

⁸ Euler úgy emlékezett vissza ezekre az évekre, hogy „legnagyobb matematikai felfedezéseim akkor születtek, amikor az éppen legkisebbik babánkat a kezemben ringattam, a többi gyerek meg körülöttem játszadozott..”

*scientia analytice exposita*¹⁰-t, továbbá 1738-ban illetve 1740-ben kétszer is elnyeri a Párizsi Akadémia nagydíját¹¹, de a pétervári Akadémián végzett munka egyre nehezebb anyagi feltételek és egyre zavarosabb politikai viszonyok¹² között zajlott. Hosszas habozás után végül elfogadta II. Frigyes porosz király meghívását¹³, és az Euler-család 1741. június 19-én elhagyta Szentpétervárt¹⁴. Több mint egy hónapos utazás után értek Berlinbe, ahol Euler a *Berlini Akadémián*¹⁵ vállalt munkát. *Pierre-Louis Moreau de Maupertuis*¹⁶, az Akadémia elnöke a Matematikai Intézet igazgatójának nevezte ki.

Termékeny tudományos időszak következett be az életében, közel 380 cikket publikált a Berlinben eltöltött 25 év alatt. 1748-ban „*Introductio in analysin infinitoum*” címmel adta ki függvények vizsgálatával foglalkozó hatalmas munkáját, 1755-ben pedig megjelent „*Institutiones calculi differentialis*” című, differenciálszámítási feladatokat tárgyaló könyve. Ebben az évben választották meg egyébként a Párizsi Tudományos Akadémia külső tagjának. Kutatómunkája mellett II. Frigyes arra is felkérte, hogy legyen unokahúga, *Anhalt-Dessau* hercegnő nevelője. Euler több mint 200 levelet (vagy inkább esszészerű feljegyzést) írt a hercegnő számára, és ezekben összefoglalta véleményét¹⁷ a legkülönbözőbb tudományos-vallásos illetve közéleti kérdésekről.

¹⁰ Ez a munkája a newtoni dinamika matematikai analízisével foglalkozik.

¹¹ Az 1740-ben kiadott „*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimique proprietate gaudentes*” című, variációszámítással foglalkozó munkájáról írta később *Constantin Carathéodory*, a nagy görög matematikus (1873 – 1950), hogy „*a valaha írt legszebb matematikai munkák egyike*”.

¹² I. Katalint 1727-ben meggyilkolták, utódja, II. Péter nagyapja (*Nagy Péter*) számos tudományfejlesztő intézkedését visszavonta, a birodalom fővárosául újból Moszkvát jelölte ki. Hamarosan II. Pétert is megölték *Anna Ivanovna*, *Nagy Péter* unokahúga parancsára. 1740-ben *Anna* cárnő is meghalt, őt a gyermek VI. *Iván* követte. *Ivánt* 1741-ben megfosztották a tróntól és *Nagy Péter* lányát, *Erzsébetet* koronázták meg uralkodónak. Ő egészen 1761-ig uralkodott, III. Péter követte, de vele még abban az évben végzett saját felesége, akit II. (*Nagy*) *Katalinként* ismer a történelem.

¹³ A felvilágosodás századában az európai államok vezetői még kifejezetten ügyeltek arra, hogy támogassák a tudományos elméket, és szinte versengtek egymással a legkiválóbbak meghívásában...

¹⁴ Érdekes történeti adalék, hogy a pétervári Akadémiáról egész berlini tartózkodása (25 év!) alatt továbbra is megkapta rendes fizetése jelentős részét. Euler viszont ezen a pénzen könyveket és műszereket vásárolt, és ezeket elküldte Szentpétervárra. Vállalta az őt meglátogató fiatal orosz kutatók ingyenes oktatását is.

¹⁵ A *Berlini Akadémia* (a mai *Berlin-Brandenburgi Tudományos Akadémia* elődje) ugyancsak *Leibnitz* javaslatára jött létre. I. Frigyes 1710-ben alapította *Societas Regia Scientiarum* néven, de sem ő, sem utódja (*I. Frigyes Vilmos*) nem gondoskodott az anyagi támogatásról. A sokáig csak tengődő intézményt II. (*Nagy*) Frigyes tette igazán jelentőssé, aki biztos anyagi háttérrel juttatott neki és számos neves tudóst hívott meg külföldről. Sokan csak az 1744-es „újrakezdéstől” számítják a *Berlini Akadémia* létét, ekkortól viselte az „*Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse*” nevet.

¹⁶ 1698 – 1759. Francia matematikus és filozófus. Evolúciós elméletéről illetve a „legkisebb hatás elvének” nevezett energiaminimalizációs elveiről ismert. Euler személyes barátja volt, távollétében mindig Eulert kérte fel, hogy helyettesítse az akadémiai ügyek intézésében.

¹⁷ Euler feljegyzéseit később összegyűjtve kiadták „*Letters of Euler on different Subjects in Natural Philosophy Addressed to a German Princess*” címen. A háromkötetes könyv kiváló kortörténeti munka és egyúttal Euler gondolkodásmódjáról, illetve a különböző dolgokról alkotott véleményéről is jó képet ad. A műnek már a kortársak körében is igen nagy sikere volt, és a későbbi korokban is szívesen olvasták, több európai és amerikai kiadást ért meg.

Sajnos ezekre az igen eredményes évekre árnyékot vetettek egyre jobban elhatalmasodó egészségügyi problémái. Még Pétervárott, 1735-ben többször átesett különböző, magas lázzal járó betegségeken, amelyekben majdnem életét veszítette. 1738-ban kezdődtek látási problémái, amelyeket ő saját életrajzában a kartográfiai munkájával járó megerőltetésnek vélt, de a mai történészek szerint valószínűleg valamelyik korábbi lázas fertőzés okozta az alapvető bajt. 1753 körül jobb szemére majdnem teljesen megvakult és ugyanekkor megkezdődött a másik szem látásának lassú csökkenése is egy fokozatosan növekvő hályog miatt.

Sok más gond is nehezítette Euler életét berlini évei alatt. A király – és környezete – felismerve Euler rendkívüli teherbírását és a munka fanatikus szeretetét, egyre több olyan feladatot bízott rá, amelyek sokszor feleslegesen terhelték és elvonták igazi tudományos tevékenységétől. Az állami lottójátékok felügyeletétől a potsdami Sanssouci királyi kastély parkjának szökőkúttervezésén át az Akadémia könyvtárának és pénzügyeinek rendbetételéig tömegével kapott olyan feladatokat, amelyek rengeteg idejét lekötötték. Ráadásul a meglehetősen szeszélyes és hirtelen haragú *Frigyes* nem értékelte ezt különösebben, egyre lekezelőbben bánt vele és sokszor gúnyolta¹⁸ őt a háta mögött. A király körüli – főleg franciákból álló, *Voltaire*¹⁹ vezette – társaság is gyakran nevetségessé tette a munkamániás, csöndes természetű és mélyen vallásos Eulert, aki a szópárbajokban nem tudta felvenni a versenyt a szellemes-csipkelődő gúnyolódást mesterien alkalmazó udvaroncokkal.

1759-ben meghalt jóbarátja, a Berlieni Akadémia addigi elnöke, *Maupertius. II. Frigyes* az Akadémia irányításával kapcsolatos minden feladatot Eulerre bízott, de ehhez a hatalmas többletmunkához sem hivatalos megbízást, sem rendes fizetést nem adott, csupán addigi intézetigazgatói jövedelmét folyósították. Mint később kiderült, a király titokban a francia *Jean le Rond d'Alembert*²⁰-t kérte fel az elnöki posztra. Eulert ez azért is nagyon zavarta, mert a tudományos közéletben akkor közismert volt Euler és *d'Alembert* heves szakmai vitája sok matematikai kérdésben. Nem voltak ellenségek, de ha francia kollégája lett volna Euler új „főnöke”, minden bizonnyal nem lett volna súrlódásmentes a kapcsolatuk. Hosszas habozás után azonban *d'Alembert* visszautasította a felkérést, néhány látogatást kivéve nem kívánt tartósan Berlinben maradni, így a király továbbra is az addigi „félhivatalos” (és számára olcsóbb...) megoldást alkalmazta: Euler minden megbízás nélkül dolgozott, vezette az Akadémiát és intézte az összes szakmai és gazdasági ügyet. Ráadásul az akkoriban zajló hétéves háború²¹ eseményei a király figyelmét egyre gyakrabban vonták el az Akadémiáról, és időnként már a korábban rendszeres anyagi támogatás átutalása is akadozott.

¹⁸ Frigyes rendszeresen *Küklópsz*nak (a görög mondavilág kicsit nehézkes félszemű óriása) nevezte Eulert.

¹⁹ Eredeti nevén *Francois-Marie Arouet* (1694 – 1778). Francia filozófus és író, a felvilágosodás korának egyik legnagyobb alakja. Európaszerte ismert volt éles elméjéről és filozófiai témájú, korát bíráló szatirikus írásairól.

²⁰ 1717 – 1783. Kiváló francia matematikus és fizikus, a hullámegyenletekkel kapcsolatos kutatásairól ismert. Részt vett a francia Enciklopédia szerkesztésében is.

²¹ 1760-ban az osztrák-orosz-francia szövetségben a poroszok ellen harcoló orosz csapatok elfoglalták Berlint és a harcokban súlyosan megsérült Euler háza. Amikor ezt az orosz csapatok parancsnoka, *Totleben* tábornok megtudta, személyesen kért bocsánatot Eulertől és házipénztárából azonnal kifizette az újjáépítés költségeit. Kis idő múlva megérkezett Erzsébet akkori cárnő bocsánatkérő levele is, a tatarozáshoz szükséges költségek másodsorra is kifizetett összegével.

Közben az 1760-as évek elején jelentős változások következtek be az orosz politikai életben. *II. (Nagy) Katalin* keménykezű uralkodónak bizonyult, rendet teremtett a több évtizedes politikai zűrzavartól sújtott országban és újra jelentős támogatáshoz juttatta a Szentpétervári Akadémiát. Régóta figyelemmel kísérte a jelentősebb tudományos elmék munkáját Európában, és nem volt ismeretlen előtte Euler és *II. Frigyes* közötti, egyre erősebbé váló konfliktus sem. 1766-ban személyes megbízottja olyan ajánlatot tett Eulernek, ami még egy jobb helyzetben levő kutató számára is roppant csábító lett volna: teljesen szabad kezet kapott saját tudományos tevékenységében és a cárnő élete végéig szóló megbízatást kínált fel neki az Akadémián²². Euler egy pillanatig sem habozott, azonnal elfogadta *Katalin* ajánlatát és búcsú nélkül otthagya *Frigyes* udvarát, egész családjával együtt Szentpétervárra költözött. Az egykorú feljegyzések szerint a király dührohamot kapott, mikor tudtára adták Euler váratlan távozását...

Euler változatlan intenzitással folytatta tudományos tevékenységét (59 éves volt, mikor újból visszatért Szentpétervárra), több mint 400 (!) munkája jelent meg második oroszországi tartózkodása alatt, ez körülbelül teljes életművének a fele²³. Ebben még az öt ért személyes tragédiák sem tudták megakadályozni, pedig ezekből jócskán volt része ezekben az években. Röviddel megérkezése után teljesen megvakult, hiába operálták meg a szemét borító hályogot²⁴. 1771-ben egy tűzvészben teljesen leégett a háza, csak élete kockáztatásával tudta megmenteni tudományos kéziratait. 1773-ban elvesztette feleségét, aki hű társa és támasza volt egész addigi életében²⁵.

Minden nehézség és gond ellenére Euler kitartóan dolgozott élete utolsó percéig. Egészen elképesztő, szinte fényképezőgéphez hasonlító memóriáját²⁶ segítségül hívva diktálta újabb és újabb műveit. Sokat segítettek neki fiai, főleg *Johann Albrecht Euler*, aki 1766-ban az Akadémia Fizika Intézetében kezdett dolgozni (1769-ben már kinevezték titkárnak). Az akkoriban köréje gyűlő fiatalok későbbi visszaemlékezései szerint állandóan pezsgő szellemi légkörben élt, barátai-tanítványai vele együtt folyamatosan megvitatták legújabb gondolatait, levezetéseit. Kéziratainak véglegesítésében és nyomdai előkészítésében is nagy hasznára volt az őt tisztelettel körülvevő társaság.

76 éves volt, amikor 1783. szeptember 18-án késő este – szellemi ereje teljében – végzett vele egy hirtelen jött agyvérzés. Szentpétervárott, az Alexander Nyevszkij kolostor kertjében helyezték örök nyugalomra egy gránit szarkofágban. Párizstól Berlinen át Szentpétervárig számos helyen tartottak hivatalos megemlékezést a nagy



²² A cárnő személyes ajándékeként egy teljesen berendezett ház várta Eulert Szentpétervárott.

²³ 1768 és 1770 között jelent meg „*Institutiones calculi integralis*” című műve, 1771-ben a „*Dioptrica*” három kötete, 1772-ben pedig egy másik nagy munkája, a „*Theoria motuum lunae*”.

²⁴ Euler személyes balszerencséje, hogy maga a műtét kitűnően sikerült, teljesen tisztán látott, de sajnos orvosai szigorú tilalma ellenére alig két napot pihent, újból teljes intenzitással elkezdett dolgozni, és a hirtelen megerőltetés tönkretette látását, végleg megvakult.

²⁵ 1776-ban újra megházasodott, korábbi felesége féltestvérét, Abigail Gsellt vette el, aki haláláig nagy odaadással gondoskodott róla.

²⁶ Kívülről tudta például *Vergilius* „*Aeneas*”-át, és nemcsak a teljes költeményre emlékezett, hanem arra is, hogy az egyes oldalakon melyik az első és az utolsó sor. Ugyanígy emlékezett korábban olvasott cikkek és levezetések százaira.

tudós emlékére a különféle Akadémiák, de talán a legszebb búcsúmondat *Laplace*²⁷-től származik: „*Olvass, olvass Eulert! Ő mindannyiunk tanítómestere...*”

Euler eredményei, gondolatai ma is élénken élnek a tudományos köztudatban. Születésének-halálának évfordulóiról rendszeresen megemlékeznek, konferenciákat tartanak munkássága különböző területeinek továbbfejlesztett eredményeiről, válogatott műveit sokféle nyelven újból és újból kiadják²⁸, arcképét több ország bélyegeken jelentette meg, Svájcban pedig a tízfrankos bankjegyen látható. A Lutheránus Egyház minden év május 24-én hivatalosan is megemlékezik Eulerről, a hitét mindig őszintén valló tudósról.

Euler nevét a világűr is megőrzi: 1973. augusztus 29-én egy orosz csillagász, *Tamara Mihajlovna Szmirnova* felfedezett egy új aszteroidát, amit Euler emlékére a nagy matematikusról nevezett el.

Tudományos munkásságának fontosabb adatai:

Euler nemcsak a legnagyobb, hanem a legtermékenyebb matematikusok közé tartozik. *Gustav Eneström* (1852 – 1923) svéd matematikatörténész összeállította műveinek majdnem teljes listáját, ezen 866 tétel szerepel. Oldalakon keresztül lehetne sorolni újonnan elért eredményeit, de ebben a rövid életrajzban most csak részleteket fogunk kiragadni hatalmas életművéből a teljességre való törekvés esélye nélkül. A mechanika tudományához kapcsolódóakat majd az utolsó pontban külön említjük, most csak a tisztán matematikai eredmények közül sorolunk fel néhányat:

- Maradandóak jelöléstechnikai újításai, ő alkalmazta először a függvénykapcsolatokra az $f(x)$, a $\sqrt{-1}$ -re az i , az összegzésre a Σ , a természetes alapú logaritmusra az e , a pi-re a π , a véges differenciákra pedig a $\Delta y, \Delta^2 y, \dots$ jelöléseket.
- A modern analitikus geometria és trigonometria megteremtőjeként például ő használta először a \sin és \cos függvényeket²⁹ a különböző számításokban, és ő írta fel azok exponenciális függvényekkel illetve komplex változókkal való kapcsolatát (Euler-képlet, illetve az ebből felírható Euler-azonosság). Megalkotta a természetes logaritmus valamint az inverz tangens függvény hatványsorát és számos logaritmikus függvény esetében is megadta a sorok segítségével felírható alakot.
- Egyesítette Leibnitz és Newton differenciálszámításra vonatkozó módszereit, és így minden addiginál használhatóbb eljárásokat adott a matematikai analízissel foglalkozók számára. Megtalálta a módját, hogyan lehet komplex határokkal rendelkező integrálokat számítani, elősegítve ezzel a komplex függvénytan

²⁷ *Pierre-Simon Laplace* (1749 – 1827) kiváló francia matematikus és csillagász.

²⁸ Születésének 200. évfordulójára 1909-ben összefogott a *Svájci Természettudományi Társaság*, a *berlini* és *szentpétervári Akadémia*, hogy kiadják Euler összegyűjtött műveit. 1911-ben jelent meg a *Teubner Kiadónál* a kritikai kiadás első kötete. Az európai történelem ismeretében kisebbfajta csoda, hogy a munkát a két világháború ellenére folytatták és 1982-ben (már a *Birkhauser Kiadó*) megjelentette az utolsó, 72. kötetet.

²⁹ Már *Ptolemaiosz* és az ókori indiai matematikusok is ismerték a \sin - \cos fogalmát az egységsugarú körből származtatott értéként és időnként használták is, de „valódi” függvényként először Euler alkalmazta.

fejlődését. *Lagrange*³⁰-zal együtt megalkotta a variációszámítás³¹ alapfeladatának számító *Euler-Lagrange*-egyenletet.

- Úttörő munkát végzett az analitikus számelmélet megalkotásában, továbbfejlesztette *Fermat*³² ezekhez a témákhoz kapcsolódó több állítását, foglalkozott a prímszámok kérdésével³³, bebizonyított egy másfélezer éves ókori sejtést a „tökéletes szám”³⁴ fogalomköréhez kapcsolódóan.
- Nagyon sokat tett a gráfelmélet fejlődéséért. Nevéhez fűződik a híres „königsbergi 7 híd feladatának” megoldása. Königsberg³⁵ városát a Pregel-folyó osztotta ketté, a folyón két nagy sziget is volt (lásd a jobboldali képet a hidakat szimbolizáló kis jelekkel). A város polgárai azzal a kérdéssel fordultak hozzá, vajon lehetséges-e egyszer (és csakis egyszer) áthaladva mindegyik hídon visszajutni az eredeti kiindulási pontra³⁶. Euler bebizonyította, hogy a feladat nem oldható meg. A vizsgálat során létrehozott módszere megeremtette a mai gráfelmélet (a későbbi kombinatorika egy ágának) alapjait.
- Mint oly sok más tudós (példaként említjük *Youngot*³⁷), Euler is nagyon sokat foglalkozott a zene és a matematika kapcsolatával. A „*Tentamen novae theoriae musicae*” című, 1739-ben publikált és viszonylag kevésbé ismert művében például kísérletet tett a zene matematikai alapjainak³⁸ összefoglalására.
- Sokat tanulmányozta az üstökösök és más égitestek égi mozgását és számításai hasznára váltak a kortárs és a későbbi csillagászoknak is.



³⁰ *Joseph-Louis Lagrange* (1736 – 1813), francia matematikus és csillagász. Maradandót alkotott a matematikai analízis és a mechanika számos területén. Euler ajánlatára hívta meg őt *II. Frigyes*, hogy az ő távozása után helyettesítse Berlinben az Akadémián (1766 – 1783 között így Euler utódja volt Berlinben).

³¹ A variációszámítás egyébként Euler legkedvesebb megoldási módszerei közé tartozott. Az írta róla, hogy „*nincs a világegyetemben olyan jelenség, ami ne lenne kapcsolatban a maximum-minimum elvvel*”. A módszer iránt érzett tisztelete jeléül a „*végső okok elve*” nevet adta az eljárásnak.

³² *Pierre de Fermat* (1601 – 1665) francia matematikus és parlamenti ügyvéd. A modern matematikai analízis egyik megalkotója.

³³ Egészen 1867-ig az általa felfedezett 2 147 483 647 volt a legnagyobb prímszám.

³⁴ „*Tökéletes számnak*” nevezzük azokat az egészeket, amelyek megegyeznek osztóik összegével. Euler *Nikomakhosz Geraszénosz* (Kr. u. I. szd. vége) „*Arithmétikhé eiszagogé*” (*Bevezetés az aritmetikába*) c. művében megfogalmazott sejtésről (*Euklidész* képlete: $2^{n-1}(2^n - 1)$ kiadja az összes páros tökéletes számot) bizonyította be annak igaz voltát.

³⁵ Königsberg Kelet-Poroszország nagyvárosa volt. Ma Kalinyingrád néven Oroszországhoz tartozik.

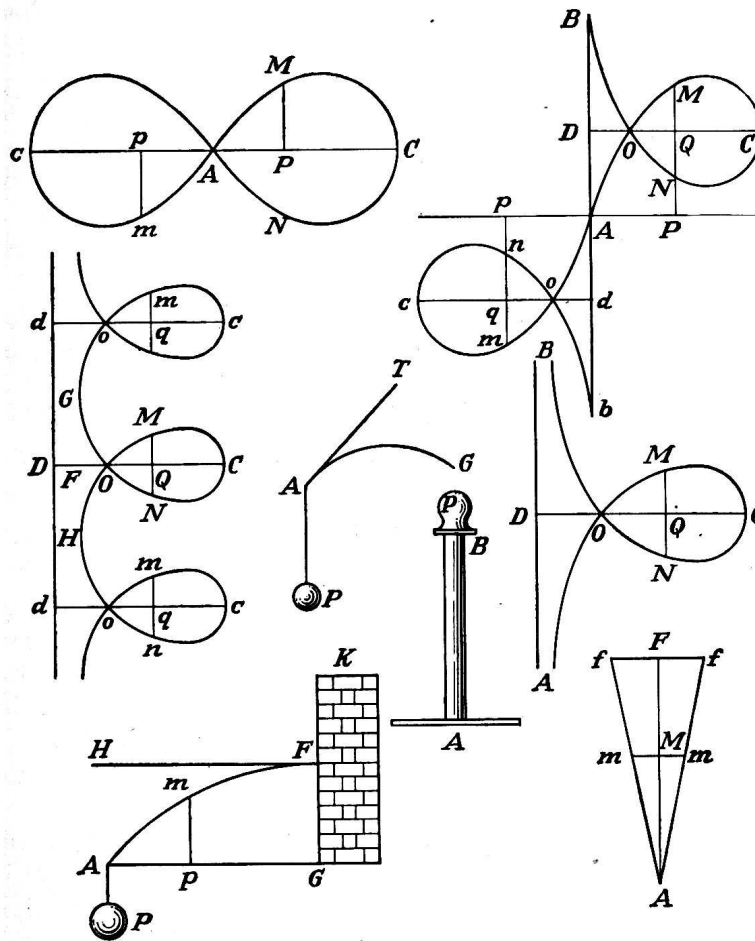
³⁶ Állítólag a königsbergi előkelőségek rendszeresen sétálgattak vasárnaponként a hidakon, hogy egy olyan útvonalat találjanak, amely megfelel a fenti feltételeknek... Érdekességként megjegyezzük, hogy a hét eredeti königsbergi híd közül kettőt leromboltak a II. világháború alatt a szövetséges bombázásokban. Két további hidat később az oroszok egy modern főúttal helyettesítettek. A fennmaradó három híd megmaradt, jóllehet ezek közül csak kettő származik Euler idejéből, mert a harmadikat a németek még 1935-ben újjáépítették.

³⁷ *Thomas Young* (1773 – 1829) angol polihisztor, a legkiválóbb tudósok egyike.

³⁸ A mű után mostanában kezd nőni az érdeklődés, korábban talán „*túl sok matematika volt benne a muzikusoknak és túl sok zene a matematikusoknak...*”

A kihajlás vizsgálata

Euler mechanikához kapcsolódó munkássága – elméleti és gyakorlati jelentősége miatt egyaránt – feltétlenül érdemes arra, hogy egy kicsit részletesebben írjunk róla. Matematikusként elsősorban az egyes mechanikai szerkezetek (rudak, gerendák) geometriai formája, pontosabban a terhelés során megváltozott alakjuk iránt érdeklődött. Az ilyen jellegű problémákra először jóbarátja, *Daniel Bernoulli* hívta fel a figyelmét, ahogy ezt már a „*Bernoulli, Navier és a gerendamodell*” című életrajzban említettük. Először a „*Methodus inveniendi lineas curvas...*” című, 1744-ben megjelent munkája foglalkozott rúdszerkezetek vizsgálatával. Ennek a könyvnek a terjedelmes függeléke a „*De Curvis Elasticis*” címet viseli, ebben foglalta össze Euler a hajlított gerendákkal kapcsolatos statikai és dinamikai megoldásait. A konzollal illetve kéttámaszú gerendával kapcsolatos modelljeivel már az említett életrajzban részletesen foglalkoztunk, ezért ezeket most nem ismételjük meg. Újra közöljük viszont azt az – Euler könyvéből származó – ábrát, amelynek mostani témánkhoz is köze van:



A vázlatok különböző – tökéletesen rugalmas anyagú – hajlított rudakat ábrázolnak. Felhívjuk a figyelmet az alul, középen szereplő kis oszlopra, melynek alsó pontja „A”, felső vége pedig a „B” jelet viseli, és legfelül pedig egy „P” jelű – függőleges koncentrált erőt jelképező – teher található. Ez a rajz kapcsolódik a központosan nyomott rudak Euler-féle kihajlásvizsgálatához. Euler eredetileg azt a kérdést vizsgálta, hogy milyen hatással van egy oszlop alakjára, ha a végén ferde koncentrált erővel terheljük. A feladat határeseteként jutott ahhoz a változathoz, amikor az erő hatásvonala pontosan egybeesett a rúd tengelyével. Az

általával levezetett rúdalak differenciálegyenletének megoldásaként ebben az esetben azt kapta, hogy ilyenkor a

$$P = \frac{C \pi^2}{4l^2}$$

erőérték különleges jelentőséggel bír. Írását idézve:

„ha az oszlopra működő teher kisebb, mint a képletben megadott érték, akkor abszolút semmilyen hajlítás nem keletkezik, másrészt viszont, ha a súlyteher nagyobb, akkor az oszlop nem lesz képes ellenállni a hajlításnak”.

Ezzel a tétellel Euler megfogalmazta a központosan nyomott rudak kritikus erejének definícióját. A képletben szereplő C állandót kísérletekből meghatározandó „abszolút rugalmasságnak” nevezte, csak jóval később, Navier³⁹ tisztázta, hogy ez a Young-modulus és az inercia szorzatából adódó hajlítási merevség. A levezetés az alul befogott, felül szabad végű oszlopra vonatkozott.

13 évvel később, 1757-ben Euler újra visszatért a nyomott oszlop vizsgálatának feladatához „*Sur la force des colonnes*”⁴⁰ című munkájában. Az itt közölt differenciálegyenlet

$$C \frac{d^2 y}{d x^2} = -P y$$

a kihajlásvizsgálatokban ma is tanított, jól ismert alak. Ebben a cikkben már megállapítja, hogy a C konstansnak feltétlenül erő \times hosszúságnégyzet dimenziójúnak kell lennie (bár a hajlítómerevség fogalmához itt sem jutott el). Megjegyezzük, hogy vizsgálta a változó keresztmetszetű oszlop illetve a tengelyirányban megoszló erővel terhelt rudak határeijének értékét is, de ma már tudjuk, hogy ezekben az esetekben nem kapott pontos eredményeket.

Euler a továbbiakban nem elemezte a kihajlási alak különböző változatait. Lagrange volt az, aki 1770-73 között írt munkáiban (elsősorban híres „*Mecanique analytique*” c. könyvében, illetve „*Sur la figure des colonnes*” című tanulmányában) meghatározta más peremfeltételek hatását illetve a szinuszhullám alakú kihajlási görbe lehetséges típusait. Részletesen bemutatta a posztkritikus állapot leírásához szükséges állapotegyenletet és annak pontos megoldását. Lagrange kijavította a változó keresztmetszetű rudak⁴¹ Euler-féle hibás megoldását is.

A kihajlásvizsgálat elméleti eredményeinek első kísérleti ellenőrzésére nagyon hamar, még Euler korában sor került. Pieter van Musschenbroek⁴² holland mérnök 1729-ben publikálta hatalmas mérésorozatának eredményeit, ebben már kihajlásvizsgálatok is szerepeltek, főleg fa anyagú próbatestekkel. Eredményei igazolták Euler modelljét, sőt azt is ki lehetett mutatni az összevetésből, hogy az analitikus vizsgálatok képletei csak bizonyos karcsúság felett (ezt hívjuk ma „*határkarcsúságnak*”) érvényesek.

³⁹ Claude-Louis Navier (1785 – 1836) kiváló francia mérnök, a korszerű építőmérnöki mechanika egyik megteremtője.

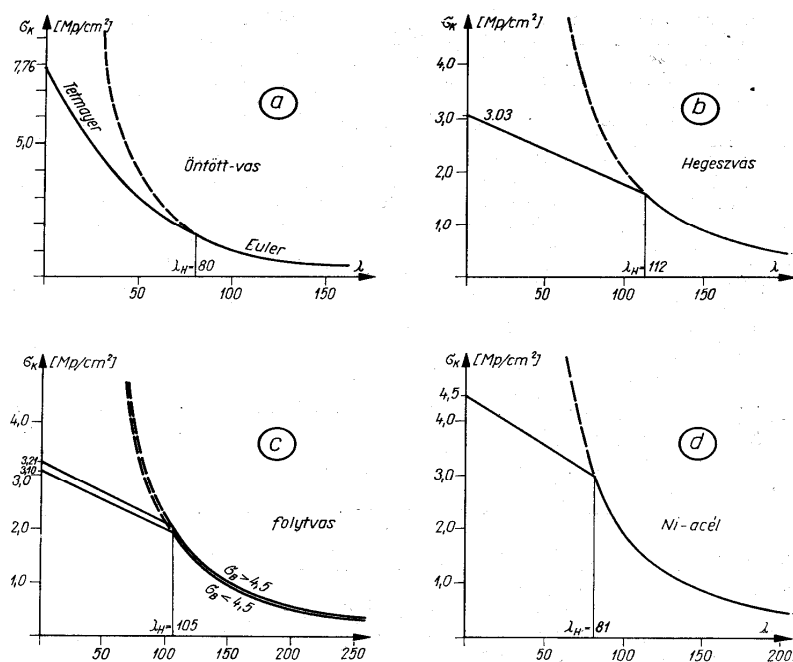
⁴⁰ *Mem. Acad. Berlin, Vol. 13. 1759.*

⁴¹ Megjegyezzük, hogy ezt a feladatot – jóval később, és másféle matematikai módszerrel – Young is megoldotta.

⁴² 1693 – 1739. Kiváló kísérletező volt, ő épített először a világon komplex (húzó-nyomótesztekre és hajlításra egyaránt alkalmas) mérőberendezéseket.

Ezt követően 1773-ban *Coulomb*⁴³ végzett újból méréseket, kövekből és téglából készített oszlopokon. Az általa kapott határerők lényegesen eltértek az Euler által megjósolttól (illetve *Musschenbroek* méréseitől), ezért *Coulomb* mindkettőt erősen bírálta (a holland mérnököt nyíltan és erőteljesen, Eulert csak körülírva, lényegesen szolidabban...). *Coulomb* azonban tévedett, nem vette figyelembe azt a hatást, ami a „diszkrét” elemekből összerakott oszlopainál alapvetően másféle tönkremenetelt okozott, mint a homogénnek tekinthető fa és vas próbatestek kihajlása *Musschenbroek*nál, vagyis francia fizikus lényegében nem kihajlási határerőt, hanem az egyes blokkok közötti kapcsolatok lokális tönkremenetelét vizsgálta.

A XIX. században az egyetemeken és a nagy iparvállalatoknál gombamód szaporodó laboratóriumok azután véglegesen igazolták Euler képletének helyességét. Az első vizsgálatok között megemlíthetjük még a francia *Duleau* (1820) illetve az angol *Hodgkinson* (1840) fém oszlopokon végzett méréseit, mindkét kutató egyértelműen kiállt Euler képlete mellett. Az 1840-es évek végére már a határkarcsúság is elfogadottá vált a mérnökök között, és lényegében ekkor kezdődött az a nagyon sokáig húzódó szakmai vita, amely a határkarcsúság alatti szilárdsági paraméterű, vagyis az Euler-képlettel nem vizsgálható, úgynevezett „zömök” rudak kihajlási határteherbírásának a meghatározását tűzte ki célul. Az ezt kutató tudósok közül most csak egyetlen egyet, a magyar származású *Tetmajer Lajost*⁴⁴ (vagy ahogy a külföldi könyvekben gyakrabban olvasható, *Ludwig von Tetmajert*) említhetjük meg, aki a XIX. század végén saját kísérletei alapján ajánlott két, illetve háromparaméteres határfeszültség-képleteket zömök rudak vizsgálatához:



9.3. ábra, TETMAJER képleteinek grafikus ábrái; (a) öntött vas, (b) hegeszvas, (c) folytvvas, (d) Ni-acél

⁴³ *Charles Augustin Coulomb* (1736 – 1809) francia fizikus. Alapvetően az elektromos jelenségekkel kapcsolatos munkái tették híressé, az építőmérnökök körében pedig talajmechanikai vizsgálatait (*Mohr-Coulomb-modell*) miatt ismert.

⁴⁴ 1850 – 1905. *Tetmajer* élete nagy részében Svájcban illetve Bécsben élt. Zürichben egyike volt az Anyagvizsgáló Intézet alapítóinak.

A XX. század mechanikája tovább vizsgálta-pontosította ezt a problémát, és – vele párhuzamosan – természetesen az eredeti kérdést is, a tökéletesen rugalmas anyagú rudak kihajlásvizsgálatának számtalan új elemmel, új kérdésfeltevéssel bővített változatait.

Euler stabilitásvizsgálati képletei pedig ma már ott szerepelnek a világ minden egyetemének tananyagában, ahol csak építőmérnököket tanítanak.

Felhasznált irodalom:

- 1./ **Timoshenko, S. P.:** History of Strength of Materials, *McGraw-Hill, 1953.*
- 2./ **Love, A. E. H.:** A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, *Cambridge University Press, 1892.*
- 3./ **Todhunter, I. – Pearson, K.:** A History of the Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time, Vol. I-II, *Cambridge University Press, 1886.*
- 4./ **Heyman, J.:** Structural Analysis – Historical Approach. *Cambridge University Press, 1998.*