

## Bernoulli, Navier és a klasszikus gerendaelmélet

A mérnöki munka igen sok területén találkozunk nap mint nap gerendákkal, ellenőrzésük, keresztmetszeteik tervezése a leggyakrabban előforduló feladatok közé sorolható egy mérnök számára. A következő oldalakon annak a két kiváló tudósnek az életét és munkásságát szeretnénk bemutatni, akik munkájukkal hozzájárultak a gerendáknál alkalmazható pontos és a gyakorlat számára ma is jól használható mechanikai módszerek létrehozásában. A személyükhöz kapcsolódó fontosabb adatok bemutatása után magának a gerendaelméletnek a fejlődését is ismertetjük.

### Jacob Bernoulli élete

A Bernoulli-família a történelem azon családjai közé tartozik, akik több nemzedéken keresztül jelentős alkotások létrehozására voltak képesek ugyanabban a tudományos vagy művészeti ágban. A Bach-család például a zenében alkotott maradandót, míg a Bernoulliak a matematikában váltak világhírűvé.

A család eredetileg németalföldi származású, a régi okmányok tanúsága szerint Antwerpenben éltek több generáción át és elsősorban fűszerek kereskedésével foglalkoztak. A XVII. század vallásháborúi azonban távozásra kényszerítették őket, Svájcba, Baselbe költöztek. A XVII. század végétől kezdve közel 100 éven a család olyan kiváló matematikusokat adott a világnak, akiknek a nevét azóta is őrzi az emlékezet<sup>1</sup>.



Jacob<sup>2</sup> Bernoulli 1654. december 27-én született Baselben. Édesapja - őseihez hasonlóan - fűszerkereskedő volt, tehető polgár, tagja a város szűkebb vezetésének, édesanyja pedig gazdag bankárcsaládból származott.

Mielőtt Jacob életrajzát folytatnánk, a család másik két híres tagját feltétlenül meg kell említenünk: *Johann Bernoulli* Jacob öccse volt (1667-1748), őt ma korának legnagyobb matematikusaként tartja számon a történelem. Ő tanította a fiatal *Leonhard Euler*<sup>3</sup> is. Megjegyezzük, hogy *Pierre Varignonhoz*<sup>4</sup> írt egyik levelében ő fogalmazta meg elsőként a *virtuális elmozdulások* elvét. Johann Bernoulli fiának, *Daniel Bernoullinak* (1700-1782) még többet köszönhet a mechanika tudománya, híres „*Hydrodynamica*” című könyve az áramlástan vizsgálatok alapjait fektette le, prizmatikus rudak szabad rezgéseire vonatkozó differenciálegyenlete és az ahhoz kapcsolódó kísérletek pedig sok kutatóra, többek között *Eulerre* is hatással voltak későbbi munkájukban.

Jacobot szülei először – minden ellenkezése dacára – filozófiára és teológiára tanították, ezekből a tárgyakból végzett a Baseli Egyetemen. 1671-ben megkapta az MSc fokozatot

<sup>1</sup> 1699-ben választotta például a Francia Akadémia külső tagjai közé a két testvért, Jacob és John Bernoullit, és attól kezdve egészen 1790-ig folyamatosan képviselte valaki a Bernoulli-családot az intézményben...

<sup>2</sup> Francia forrásmunkákban Jacques keresztnévvel hivatkoznak rá.

<sup>3</sup> 1707 – 1783. Kiváló svájci származású matematikus, nagyon sokat tett a mechanika fejlődéséért.

<sup>4</sup> 1654 – 1722. Francia matematikus, Johann Bernoulli jó barátja. Sok munkája ismert a grafikus statikában is.

filozófiából, rá öt évre teológiából doktorált. Bár szülei továbbra is ellenezték<sup>5</sup>, ezekben az években már egyre komolyabban kezdett foglalkozni a matematika és csillagászat tanulmányozásával.

1676-ban Jacob Bernoulli Genfben költözött, ahol néhány évig tanárként dolgozott. Három év múlva már Franciaország városait járja, alapvető célja René Descartes<sup>6</sup> és Nicolas Malebranche<sup>7</sup> műveinek tanulmányozása. 1681-ben Hollandiába utazik, itt Johannes Hudde<sup>8</sup> fogadja, majd Anglia következett, ahol Robert Boyle<sup>9</sup>-al és Robert Hooke<sup>10</sup>-kal találkozott. Alapvető célja mindenütt a tanulás, a legfrissebb matematikai ismeretek összegyűjtése. Ezekben az években kezdi el egész életében tartó levelezését is európai matematikus kollégáival.

1683-ban visszatért Baselbe, és mechanikát kezdett oktatni az ottani egyetemen. Ez nem ment minden nehézség nélkül, hiszen ő „hivatalosan” filozófiát és teológiát végzett, de tudása hamarosan meggyőzi ellenfeleit (még a saját családján belül is...). Ezekben az években jelennek meg első matematikai írásai a lipcsei kiadású *Acta Eruditorum* című lapban. 1684-ben megnősült, feleségétől – Judith Stupanustól – egy fia és egy lánya<sup>11</sup> születik.

Komoly előrelépést jelentett Jakob matematikusi pályáján az az esemény, amikor (eredetileg orvosi pályára szánt) öccse, Johann bejelentette, hogy ő is matematikus kíván lenni. Bár a két testvér kapcsolatát a későbbi években komoly rivalizálás terhelte, kezdetben mindkettőjük számára nagyon hasznos volt együttműködésük. Közös kezdték tanulmányozni Gottfried Wilhelm Leibnitz<sup>12</sup> 1684-ben az *Acta Eruditorum*-ban megjelent „*Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus...*” című cikkét, és elsőként kezdték alkalmazni az abban ajánlott differenciálszámítási módszereket különböző fizikai feladatok megoldására.

Az 1690-es évek vége felé a két testvér kapcsolata fokozatosan megromlott, Johann matematikusként fokozatosan bátyja fölé nőtt. 1695-ben már az egyetemi tanszék vezetését is szeretne volna átvenni tőle, de mivel ez nem sikerült, mélyen megsértődve családjával együtt Baseltől Hollandiába költözött és hamarosan minden kapcsolatot megszakított bátyjával.

Jakob egészen haláláig (1705. augusztus 16-án hunyt el Baselben) az egyetemen maradt. Elhunyt után tanszéke vezetését azonnal átvette Hollandiából visszaköltöző öccse.

---

<sup>5</sup> Érdekes dolog, hogy ez a viselkedésminta később is nagyon gyakran előfordult a Bernoulli-családban: a matematikát tanulmányozni óhajtó családtagnak komoly ellenállással kellett szembenéznie, mert a többiek általában egy „jövendelmézőbb” életpályán kívánták tartani. Különösen nehéz küzdelem volt ez Jakobnak, mert a családban ő volt az *első* matematikus.

<sup>6</sup> 1596 – 1650. Kiváló francia matematikus és filozófus, az analitikus geometria létrehozója.

<sup>7</sup> 1638 – 1715. Francia filozófus, Descartes követője.

<sup>8</sup> 1628 – 1704. Holland matematikus, emellett Amszterdam polgármestere és a nagyhatalmú Holland-Keletindiai Társaság kormányzója. A nevéhez fűződik az amszterdami csatornahálózat létrehozása. A matematikában ő is a Descartes-iskolához tartozott.

<sup>9</sup> 1627 – 1691. Ír származású kiváló fizikus, vegyész, filozófus. A gázok állapotváltozására vonatkozó (*Mariotte* francia fizikustól függetlenül megfogalmazott) törvényéről ismert a leginkább.

<sup>10</sup> 1635 – 1703. Kiváló angol fizikus. A lineárisan rugalmas viselkedés mechanikai modelljének megalkotója.

<sup>11</sup> Ritka kivételként a Bernoulli-családban ezek a gyerekek nem a matematikusi pályát választották.

<sup>12</sup> 1646 – 1716. Szorb származású német matematikus, egyike a matematika legnagyobbjainak.

Jakob Bernoulli sírkövét – saját kérésére – egy logaritmikus spirál rajza díszíti, melyet a legvarázslatosabb görbék egyikének tartott. A spirál körül az alábbi latin nyelvű felirat<sup>13</sup> olvasható:

„*Eadem Mutata Resurgo*”

A két testvér - Jakob és *Johann* - nevét közösen őrzi a Hold egy krátere, melyet kettőjükről neveztek el.

### Tudományos munkásságának fontosabb adatai

Jacob Bernoulli számunkra legérdekesebb mechanikai témájú felfedezéséről, a hajlított gerendák vizsgálatára kidolgozott modelljéről majd a későbbiekben részletesen írunk. Cikkek formájában megjelent matematikai munkái mellett jelentős alkotása az 1713-ban - halála után nyolc évvel kiadott - „*Ars Conjectandi*” című, latin nyelven írt könyve, mely elsősorban a sorokkal és a valószínűségszámítással kapcsolatos téziseit összegzi.

Jakob maradandó alkotásai a matematika terén elsősorban az alábbi témakörökhöz kapcsolódnak:

- *Transzcendens* görbék (ciklois, exponenciális és logaritmikus függvények, stb.) tulajdonságainak tanulmányozása, lásd például a, [http://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental\\_curve](http://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental_curve) honlapot,
- Az *izoperimetria*<sup>14</sup> kutatása, (lásd a <http://en.wikipedia.org/wiki/Isoperimetry> honlapot a részletekről),
- *Szétválasztható változójú* differenciálegyenletek első megoldása néhány fontos gyakorlati esetre,
- *Valószínűségszámítási* vizsgálatok (a valószínűségszámítás alapjainak definiálása, játékelméleti kérdések, stb.),
- stb.

Jakob Bernoulli életének bemutatása után térjünk most a másik nagy kutató, Henri Navier munkásságának ismertetésére.

### Henri Navier élete

Navier teljes neve<sup>15</sup> Claude Louis Marie Henri Navier. 1785. február 10-én született Dijonban. Édesapja a francia forradalom politikai eseményeiben aktív szerepet játszó ügyvéd volt. Navier nyolc éves volt, amikor elvesztette őt. Édesanyja férje halála után Párizsból azonnal vidékre költözött, a kisfiút azonban a fővárosban hagyta, és ettől kezdve nagybátyja, *Emiland Gauthey*



<sup>13</sup> Állandóság a változásban...

<sup>14</sup> Az *izoperimetria* a matematikában az azonos tulajdonságú peremekkel rendelkező geometriai alakzatok tanulmányozása.

<sup>15</sup> Egyes munkákban Claude-Louis, másokban Henri keresztnévvel kiegészítve használják nevét, a teljes alakot csak az életrajzok használják.

gondoskodott neveléséről. *Gauthey* Franciaország legjobb építőmérnökei közé tartozott, (többek között tagja volt az *École des Ponts et Chaussées* tanácsának is) és igen nagy hatással volt Navier érdeklődési körének kialakulására. Bár kissé nehezen indultak tanulmányai (az 1802-es felvételin az *École Polytechnique* listáján az utolsók között került be az intézetbe), de nagyon gyorsan utolérte társait és az első év végén már a legjobb tíz között végzett, a másodikban pedig már önálló feladatot is kapott egy Boulogne-ban végzett építkezés tervezési feladatainál. Itt az intézetben kötött életre szóló barátságot tanárával, *Jean Baptiste Joseph Fourier*<sup>16</sup>-vel, akitől a függvénytant hallgatta, és aki nagy hatással volt későbbi kutatói gondolkodásmódjára is.

1804-ben Navier az *École des Ponts et Chaussées*-n folytatta tanulmányait. Itt két év múlva évfolyamelsőként végzett. Rövid vidéki munka után az egyetem tanácsa visszahívta, hogy rendezze, és részben folytassa 1807-ben elhunyt nagybátyja hidak és csatornák építéséről írott munkáit<sup>17</sup>. Ettől kezdve a '30-as évekig alapvetően az építőmérnökök oktatása és a gyakorlati (elsősorban mechanikai illetve hídépítési) feladatokhoz kapcsolódó matematikai kutatások alkották élete lényegét. Először „mellékállásban”, majd 1819-től a Mechanika Tanszék vezetőjeként tanított az *École des Ponts et Chaussées*-n. Teljesen újszerű oktatási módszert használt a mechanika illetve a híd- és úttervezés tanításában, az addigi – alapvetően évszázados tapasztalatokra épülő – módszereket egyre inkább fizikai és matematikai alapokra helyezett eljárásokkal helyettesítette, és tanítványaitól is az addig megszokottnál jóval mélyebb matematikai tudást követelt. Bevezette a gyakorlatokon az előre kidolgozott sillabuszokat használó oktatást, és egységes oktatási stílust kívánt meg a gyakorlatok vezetőitől is. Bár tanítási elvei sokszor még kollégái között is vitákat váltottak ki (*Siméon-Denis Poisson*<sup>18</sup>-nal például évekig vitatkoztak azon, hogyan kell helyesen tanítani a hővezetés egyenletének *Fourier*-féle megoldását...), szemléletmódja hamarosan igen pozitív irányban befolyásolta az építőmérnökök képzését, és így nem véletlenül tartották számon akkoriban a világ legkiválóbb mérnöki iskolái között a francia felsőoktatási intézményeket.

Navier 1830-ig az *École des Ponts et Chaussées* Mechanika Tanszékét vezette, majd 1831-től – *Augustin Louis Cauchy*<sup>19</sup>-t felváltva – az *École Polytechnique* Matematika Tanszékét vette át. A Francia Tudományos Akadémiának már 1824-től tagja volt, 1830-ban pedig a kormány legfőbb tanácsadója lett az infrastruktúrát érintő (út, híd, csatornák, stb.) építkezési kérdésekben. 1831-ben a Becsületrend lovagja címmel tüntették ki. Váratlanul korán, 1836. augusztus 21-én hunyt el Párizsban.

Navier sok kiemelkedő építkezés tervezésében és szakértésében is részt vett. Egyik legjelentősebb és legszebb alkotása, az 1826-ban a Szajrán épített függőhíd azonban sajnos az építkezés közvetlen befejezése előtt olyan súlyosan megsérült, hogy le kellett bontani. A

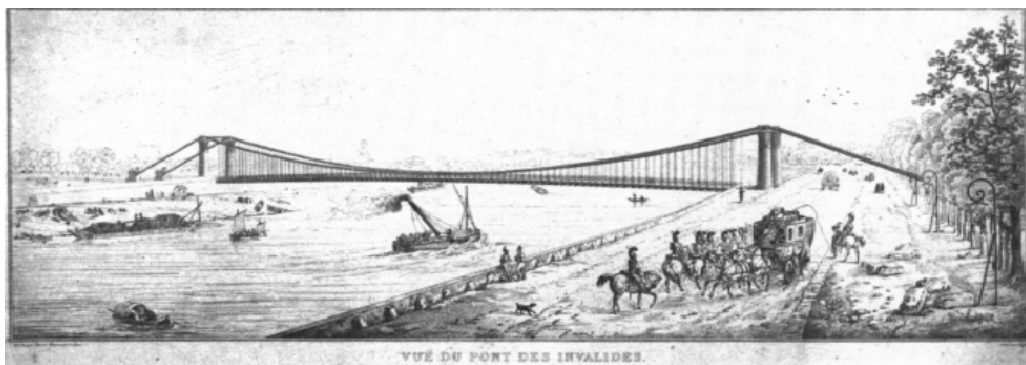
<sup>16</sup> 1768 – 1830. Kiváló francia matematikus. Többek között a hőáramlás differenciálegyenletének felírása és megoldása is nevéhez fűződik.

<sup>17</sup> Navier végül 3 kötetben jelentette meg nagybátyja hagyatékát. Jelentős részét – főleg az elméleti részeket - már maga írta. Ezek a könyvek kiváló összefoglalását adják a mechanika és az építőmérnöki tervezés XIX. század eleji helyzetének.

<sup>18</sup> 1781 – 1840. Francia matematikus. Mechanikához kapcsolódó kutatásai a rezgésstanban illetve a *Fourier*-sorok alkalmazásában ismertek. Az anyagmodellezésben használt *Poisson*-tényezőt is ő használta elsőként.

<sup>19</sup> 1789 – 1857. A legkiválóbb matematikusok egyike. Számatalan matematikai felfedezésén kívül a mechanikában az egyensúlyi differenciálegyenletek és a feszültségfogalom megalkotása tette ismertté nevét.

tönkremenetelt alapvetően nem statikai tervezési hiba okozta (a ma végzett számítások is megerősítették ezt), hanem az egyik pillér közelében húzódó nagyméretű csatorna törése, ami a támasz váratlan süllyedéséhez vezetett<sup>20</sup>. A mai szemmel nézve is karcsú és szép híd képe látható a következő ábrán:



Navier élete és munkássága a kibontakozó ipari forradalom évtizedeire esik. Nem véletlen, hogy legjobb barátai, *Auguste Comte*<sup>21</sup> vagy *Claude Henri de Rouvroy, Saint-Simon hercege*<sup>22</sup> hozzá hasonlóan az ipari és technológiai fejlődést tartották megoldásnak a világ problémáira. Mindannyian mélyen hittek a műszaki fejlődésben, úgy gondolták, hogy egy békés<sup>23</sup> és iparilag fejlett világ gyökeresen megjavítja majd az emberiség sorsát.

### Tudományos munkásságának fontosabb adatai

Navier – nagy kortársaival, például *Cauchy*-val vagy *Poisson*-nal ellentétben – nem matematikusként foglalkozott a mechanika kérdéseivel, hanem a gyakorlati feladatok megoldását szolgáló mérnök gondolkodásából és igényeiből kiindulva jutott el az elméleti feladatok megoldásáig.

Valamennyi cikke és könyve ezt a célt szolgálta. Az előbbieken már említettük, hogy három kötetben jelentette meg nagybátyja összegyűjtött mérnöki hagyatékát, és ezekbe a könyvekbe már beleépítette saját gondolatait is az egyes problémák elméleti megközelítéséről. Az 1809-ben, 1813-ban és 1816-ban kiadott kötetek után 1823-ban jelentette meg első teljesen önálló munkáját „*Rapport et Mémoire sur les Ponts Suspendus*” címmel. Ez a könyv az 1821-ben és 1823-ban tett angliai szakmai látogatásainak eredményeként született, és a függőhidak építésével és tervezésével kapcsolatos kérdéseket foglalta össze. A tervezéssel kapcsolatosan rengeteg új megállapítást tett Navier, munkája jó ötven évig a függőhidak építésének fontos kézikönyve volt, és sok elméleti megállapítása még ma is helytálló.

1826-ban jelent meg Navier legfontosabb elméleti munkája „*Résumé des Leçons de Mécanique*” címmel. Az egyetemen tartott előadásainak javított-átdolgozott anyagát tartalmazta, lényegében mindazok a fontos megállapítások megtalálhatók itt, amelyek Navier nevéhez fűződnek a mechanikában. A könyv legfontosabb eredményei közé tartozott a

<sup>20</sup> A szerencsétlenség igen nagy port vert fel akkoriban, még *Balzac* is megemlékezik róla egyik regényében. A bulvárlapok „a tudósok tönkreteszik Párizst” kezdetű szalagcímekekkel támadták Navier-t...

<sup>21</sup> 1798 – 1857, teljes nevén *Isidore Marie Auguste Francois Xavier Comte*, francia pozitivistá filozófus, a mai értelemben vett szociológia egyik megteremtője.

<sup>22</sup> 1760 – 1825, híres francia filozófus, a saint-simont-ista mozgalom megalapítója.

<sup>23</sup> *Navier* ellenezte például mind a francia forradalom vérontását, mind *Napóleon* hadjáratait.

hajlított gerendák vizsgálatával kapcsolatos kutatás (ezt mutatjuk be a következő pontban részletesebben), de a rugalmassági modulus hajlításban betöltött szerepével kapcsolatos eredményei, a lemezek és héjak számítása, valamint a statikailag határozatlan rúdszerkezetek szabványosítható módszerekkel történő vizsgálata is alapvetően új eredmény volt Navier korában. A kéziratok sillabuszok formájában a hallgatók között már korábban terjesztett anyagok radikálisan megváltoztatták a gyakorlati mérnöki tervezés számos területét, és komoly segítséget jelentettek a francia mérnökképzés magas színvonalának megtartásában.

Munkásságának egészét áttekintve kijelenthetjük, hogy Henri Navier volt a mai értelemben vett műszaki mechanikai tudomány egyik legjelentősebb megalapozója, munkássága megteremtette a hétköznapi *gyakorlat* és a tudományos *elmélet* hatékony *mérnöki szintézisét*.

### A klasszikus gerendaelmélet

Sok évszázados kutatómunka előzte meg a ma használatos gerendamodellek létrejöttét. Utólag persze könnyű egyszerűnek látni a gerendákban keletkező feszültségek és alakváltozások meghatározására szolgáló képleteket, de a tudósoknak rengeteg összefüggést kellett tisztázniuk ahhoz, hogy ezek a jól használható formulák létrejöhessenek.

Az igazság az, hogy ha pontosak akarunk lenni, akkor nagyon sok kutató nevét hozzá kellene kapcsolni jelzőként a mai „klasszikus” gerendamodellekhez. Nálunk, a magyar építőmérnöki szakirodalomban elsősorban *Bernoulli* és *Navier* nevét szoktuk említeni, angolszász könyvekben többször előfordul az *Euler-Bernoulli* kapcsolat, de ha igazán pontosak akarunk lenni, akkor jóval több nevet kell használnunk, egy

**„Leonardo-Mariotte-Jacob Bernoulli-Euler-Parent-Navier-Saint Venant”**

jelző véleményem szerint lényegesen jobb közelítés...

Ha végignézzük a hajlított gerenda vizsgálatának több száz éves történetét, érthetőbbé válik ez a megjegyzés.

A sort *Leonardo da Vinci*<sup>24</sup> nyitja meg. Sokáig nem tudtunk arról, hogy Leonardo a hajlítás kérdésével is foglalkozott, de az 1967-ben a Spanyol Nemzeti Könyvtárban rábukkantak *Leonardo* addig nem ismert vázlataira és feljegyzéseire. Ezeket ma a *Madridi Kódexnek* nevezett gyűjtemény őrzi, és a lapok között témánk szempontjából nagyon érdekes feljegyzések találhatók. *Leonardo* rugók hajlítását vizsgálta egy kísérletsorozatban és feljegyzéseiben a következőket állapította meg:

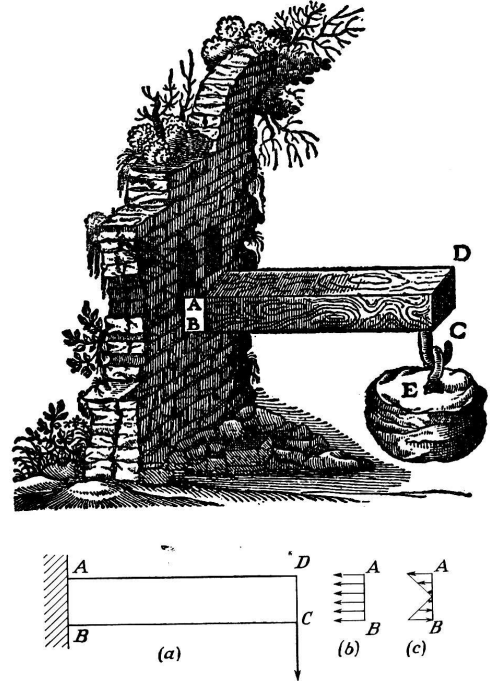
*„Ha egy rugót meghajlítunk, a konvex rész vékonyabb, a konkáv pedig vastagabb lesz. A változás a keresztmetszetben lineáris és a rugó metszetének súlypontjában lesz mindig zérus...”*

Leonardo korában még nem ismerték a feszültség, a tehetetlenségi nyomaték, az igénybevétel vagy a rugalmassági modulus fogalmát. Az azonban bizonyosnak tűnik, hogy ez a mondat - és a hozzá kapcsolódó vázlatok - voltak az első megfigyelések egy hajlított rúdelem viselkedésének leírásánál.

<sup>24</sup> 1452 – 1519. A reneszánsz – és talán az egész emberi történelem – egyik legnagyobb művésze és tudósa.

Jó száz évvel később *Galileo Galilei*<sup>25</sup> volt a következő tudós, aki hajlítással foglalkozott. 1638-ban Hollandiában kiadott „*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno á due nuove Scienze*” című művében van egy érdekes részlet, amely gerendák határteherbírásának meghatározásával foglalkozik. Sok könyv idézi az ebből a könyvből való mellékelt ábrát is Galilei hajlítási kísérletéről:

A „C” pontban felfüggesztett súly által igénybevett gerenda vizsgálatakor abból a feltételből indult ki, hogy már ismeri a rúd egydimenziós húzókísérlet alapján meghatározott határteherbírását, amit ő „abszolút törési ellenállás”-nak nevezett. Elmélete szerint a falnál a teherbírás kimerülésekor *ugyanaz* a belső ellenállás (a feszültség fogalmát még nem ismerték) vehető figyelembe. Ha „lefordítjuk” *Galilei* modelljét a ma használatos feszültségek fogalomrendszerére, és összehasonlítjuk az általa javasolt konstans eloszlást a rugalmas viselkedésű gerendáknál napjainkban alkalmazott képletekkel, akkor a jobboldalt látható ábra statikai vázlatát használva azt kapjuk, hogy például *tömör téglalap* keresztmetszet esetén *Galilei* modellje *háromszor* nagyobb erőt ad határteherbírási értéként!



Nem szabad azonban elfelejtenünk néhány dolgot:

*Galilei* - és még az utána következő nemzedékek is nagyon sokáig - nem tettek finom különbséget az anyag viselkedésének különböző állapotai között, számára a „*rugalmas*”, „*képlékeny*” vagy „*berepedt-morzsolódó*” tulajdonságok még nem voltak értelmezhetők. Ő nem egy lineárisan rugalmas anyagúnak feltételezett gerendát vizsgált, hanem csupán egy szerkezet abszolút határteherbírása érdekelte. Ha figyelembe vesszük, hogy a keresztmetszet egyes tartományaiban kialakuló képlékeny zónák illetve repedések milyen bonyolulttá teszik és mennyire átalakítják a kezdeti rugalmas feszültségállapotot, akkor a *Galilei*-modell és a modern számítások adta határ-teherbírasi értékek közötti különbség már jóval kisebb lesz. Ez okozta egyébként azt a tényt, hogy *Galilei* modellje minden pontatlansága ellenére nagyon sokáig használatos volt a mérnökök között, és csak komoly matematikai-fizikai háttérrel lehetett hiányosságait bizonyítani...

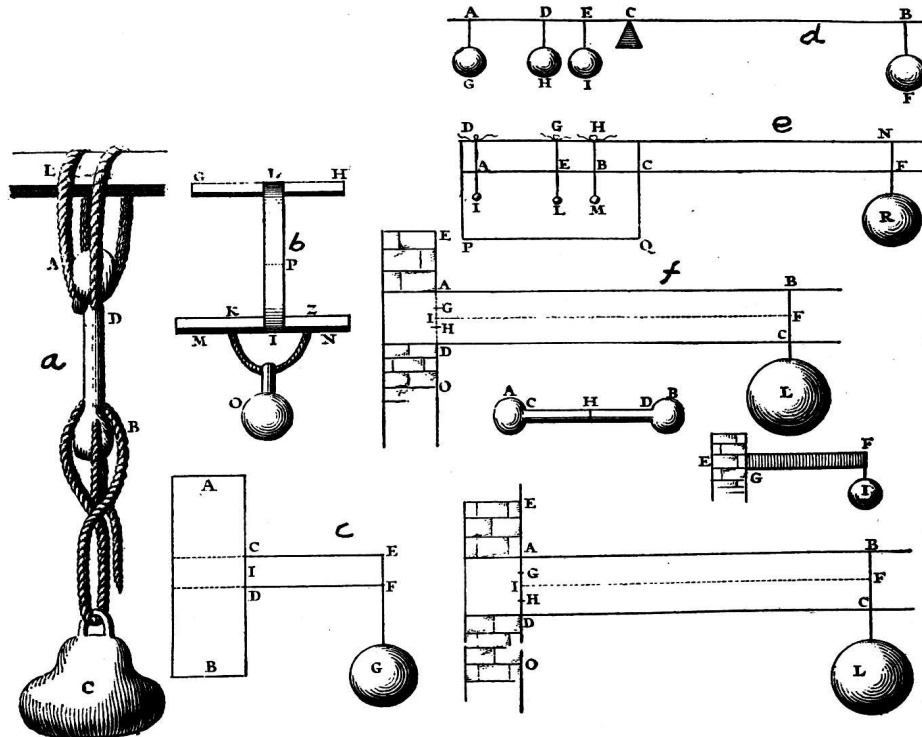
A következő kutató, akiről meg kell emlékeznünk, a Francia Tudományos Akadémia legelső tagjai közé tartozott. A híres francia tudós, *Edme Mariotte*<sup>26</sup> gázokkal illetve folyadékokkal kapcsolatos kutatásai mellett sok időt szentelt szilárdságtani vizsgálatoknak is.

Húzási és hajlítási kísérleteinek<sup>27</sup> néhány vázlata látható a következő képen:

<sup>25</sup> 1564 – 1642. Olasz természettudós, számos nagyszerű fizikai felfedezés fűződik nevéhez. Szilárdságtani számításai a fentiekén túlmenően kiterjedtek a mérethatásra, az egyenszilárdságú konzol vizsgálatára és a kéttámaszú tartók hajlításának elemzésére is.

<sup>26</sup> 1620 – 1684. *Boyle* angol tudóstól függetlenül fedezte fel a gázok állapotváltozására vonatkozó törvényt.

<sup>27</sup> Szenvedélyes kísérletező volt, messze megelőzve ezzel korának sok tudósát, akik főleg elméleti vizsgálatokkal szerettek foglalkozni. Talán csak *Hooke* volt hozzá mérhető kísérletező kutató.



Galileihez hasonlóan ő is a húzási tesztek adta határszilárdságból indult ki, de vele ellentétben már azt tételezte fel, hogy ez nem állandó, hanem lineárisan változó megoszlású lesz a támasz keresztmetszetében. Vizsgáljunk megint egy egyszerű  $a \times h$  méretű téglalap keresztmetszetet a fenti ábra konzolt ábrázoló gerendájánál  $h$  magasságú éllel. Legyen a húzási tesztből megállapított határszilárdság jele „ $S$ ” ( $S = \sigma_h a h$ ), ekkor – a lineáris eloszlást feltételezve – a belső erők „ $D$ ” pontra felírt nyomatékát egyenlővé tehetjük a külső „ $L$ ” koncentrált erő nyomatékával és meghatározhatjuk a határteherbíráshoz tartozó erőt:

$$\frac{S}{2} \cdot \frac{2}{3} h = L l \Rightarrow L = \frac{S h}{3 l}$$

Ha ezt hasonlítjuk össze a rugalmas állapot alapján ma számítható határerővel, akkor a különbség már csak kétszeres, ellentétben a Galileinél kapott háromszoros szorzóval.

Mariotte különböző anyagú rudakkal végzett hajlítási kísérleteiben megfigyelte, hogy a konzolok felső részén (a vázlaton például ilyen az  $IA$  tartomány) az anyag elemi szálai hosszabbak, az alsó részen ( $ID$  rész) pedig rövidebbek lesznek. Úgy okoskodott, hogy ha az előbb bemutatott gondolatmenetet alkalmazza például a húzott rész határeréjének számítására és feltételezi, hogy a húzott-nyomott részeket elválasztó sáv (mai fogalmainkkal a „semleges tengely”) középen van, akkor a húzási hatásból kapott határerő-komponens az

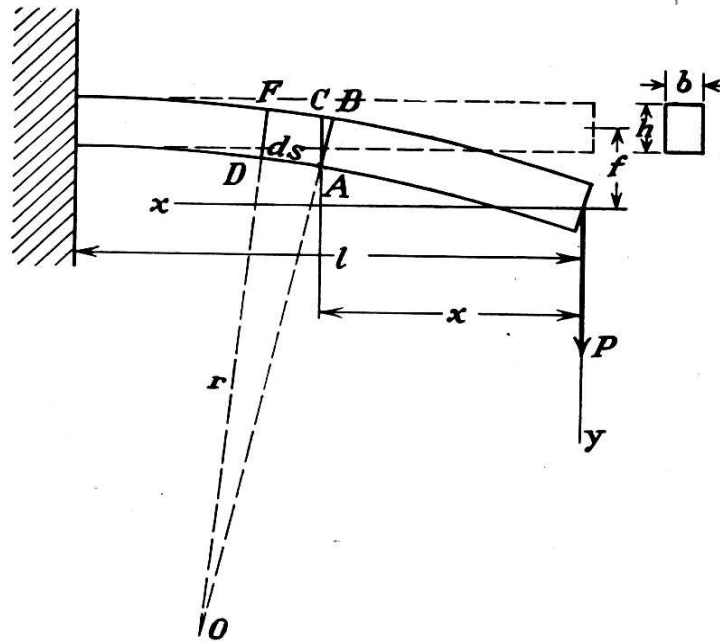
$$L_{húz.} l = (S/2)(2/3)(h/2) \Rightarrow L_{húz.} = \frac{S h}{6 l}$$

összefüggéssel számítható. Egyensúlyi okokból a nyomott zóna alapján kapott erő is ugyanekkora, a két erő összege pedig az (előbbi) teljes törési határt adja meg. Ha Mariotte ebben a levezetésben a szilárdság általa használt  $S/2$  értékét felére csökkenti, akkor már az 1600-as végén ismerték volna a helyes eredményt a vizsgált feladatnál!

Ettől eltekintve hatalmas lépést tett a pontos megoldás megtalálása felé. Különösen a húzott-nyomott szálak közötti lineáris változás feltételezése volt igen komoly előrelépés, így teljes joggal írhatjuk az ő nevét is a gerendaelmélet jeles kutatói közé.



Jacob Bernoulli, életrajzunk első szereplője a következő tudós a gerendák mechanikai viselkedésével foglalkozók körében. Míg Galilei és Mariotte a gerenda szilárdsági vizsgálatából indult ki, Bernoulli az elmozdulások vizsgálatát kezdte elemezni matematikai eszközökkel<sup>28</sup>. A következő rajz Bernoulli 1705-ben Párizsban megjelent cikkéből való<sup>29</sup>:



Ismerte Mariotte azon hipotézisét, mely szerint a húzott és nyomott zónákat egy folytonos felület választja el (ő nevezte ezt először „semleges tengelynek”) és ezt fel is használta számításában. Vizsgáljuk például az ábrán  $ABFD$ -vel jelölt  $ds$  hosszúságú elemi<sup>30</sup> tartományt. Ha a hajlítás miatt az  $AB$  keresztmetszet elfordul az  $FD$ -hez képest egy  $A$  ponton átmenő tengely körül, akkor a két metszet közötti szálak hosszváltozásai arányosak a szálak  $A$  ponttól mért távolságával. Bernoulli ismerte Robert E. Hooke anyagmodelljét – mint említettük, személyesen is találkoztak Angliában – és ezt a viselkedést vette figyelembe az egyes szálak tulajdonságainál. A konvex oldalon lévő legkülső szál megnyúlását  $\Delta ds$ -sel jelölte és ennek segítségével az  $AB$  metszet húzott szálaiban keletkező erők eredőjét

$$\frac{1}{2} \frac{m \Delta ds}{ds} b h$$

képlettel tudta meghatározni, ahol  $b$  és  $h$  a négyzet keresztmetszet jellemző méretei,  $m$  pedig a gerenda rugalmas anyagi tulajdonságaitól függő állandó. Bernoulli szerint ennek az erőnek a nyomatéka az  $A$  pontra megegyezik az  $x$  távolságban lévő külső  $P$  erő ugyanazon pontra vett nyomatékával:

$$\frac{1}{2} \frac{m \Delta ds}{ds} b h \cdot \frac{2}{3} h = P x.$$

A megnyúlás és az eredeti elemi hossz arányát

<sup>28</sup> Ő soha nem végzett kísérleteket és az anyagok szilárdsági paramétereit sem elemezte mélyebben vizsgálataiban.

<sup>29</sup> A kiadvány címe: „*Histoire de l'Académie des Sciences de Paris*” Megjegyezzük, hogy a fenti gondolatmenet egyes elemeit már 1694-ben publikálta az „*Acta Eruditorium*”-ban.

<sup>30</sup> Mint már említettük, ő használta először Leibnitz módszerét fizikai feladatok vizsgálatára.

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{h}{r}$$

módon véve figyelembe, Bernoulli végül a

$$\frac{C}{r} = Px \Leftrightarrow C = \frac{mbh^3}{3}$$

képlethez jutott. Az elfordulási pont helyének helytelen felvétele miatt *Bernoulli* rossz eredményt kapott, de az egyes keresztmetszetek *merev lapokként való elfordulásának* gondolata, és ebből következően a fenti képlet általános alakja mindenképpen nagyon fontos és hasznos előrelépés volt. Bármilyen névkombinációban is hivatkozzanak a mérnökök szerte a világon a klasszikus gerendamodellekre, *Bernoulli* neve semmiképpen nem hiányozhat.

Annál inkább így van ez, mert a család egy másik tagja, Jacob unokaöccse, *Daniel Bernoulli* is sokat tett a modell további javításáért. Elsősorban azzal, hogy felhívta a nagy matematikus, *Leonhardt Euler* figyelmét *Jacob* eredményeire, és állandóan arra ösztönözte *Eulert*, hogy hatalmas matematikai tudásával próbálja meg általánosabban megoldani a gerendák mechanikai modellezését, mint ahogy azt elődei tették az egyetlen konzol elemzése során.

*Euler* gerendákkal kapcsolatos vizsgálatait „*Methodus inveniendi lineas curvas...*” című, 1744-ben megjelent könyvében gyűjtötte össze, ahol *Euler* kifejezetten pozitívan értékelt *Jacob Bernoulli* ezen a téren végzett munkásságát. Bár ő többnyire az általa szívesen használt variációs módszerek<sup>31</sup> segítségével elemezte feladatait, a gerendafeladat esetében eltért ettől. Az előbb bemutatott *Bernoulli*-féle eredményt a görbületi sugár helyettesítésével a következő alakban vizsgálta:

$$C \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = Px.$$

Mivel a vizsgálatokat nem korlátozta kis elmozdulásokra, a nevezőben lévő  $(y')^2$  tag nem hanyagolható el, és így a feladat meglehetősen bonyolulttá válik. *Euler* sorfejtés felhasználásával integrálta a fenti egyenletet, majd kimutatta, hogy ha a konzol eltolódása kicsi, akkor a  $C$  paraméterre a következő értéket kapjuk ( $f$  az előbbi rajzon látható rúdvégi függőleges eltolódás):

$$C = \frac{Pl^2(2l-3f)}{6f}.$$

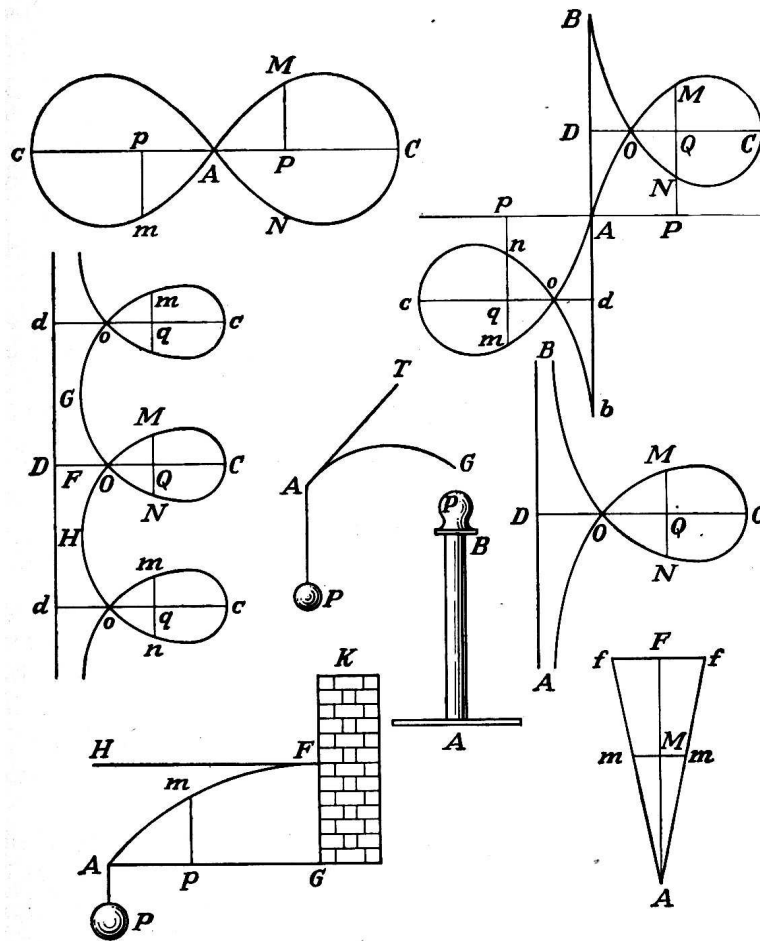
Ha a számlálóban lévő  $3f$  tagot elhanyagoljuk a másik érték mellett, akkor a konzol végének eltolódására az

$$f = \frac{Pl^3}{3C}$$

„ismerős” képletet kapjuk. *Euler* nem foglalkozott a  $C$  konstans fizikai tartalmával, elnevezte „*abszolút rugalmasságnak*”, és azt javasolta, hogy értékét kísérleti mérésekből határozzák meg a mérnökök. Annyi megjegyzése volt csupán, hogy véleménye szerint  $C$  a  $h$  magasság négyzetétől függ. Ma már tudjuk, hogy ez köbös érték, de még hosszú ideig élt ez téves megállapítás a mérnökök között.

<sup>31</sup> *Euler* több művében is hangsúlyozza, hogy a világegyetem tökéletessége miatt minden jelenség kapcsolatba hozható valamilyen maximum-minimum elvvel.

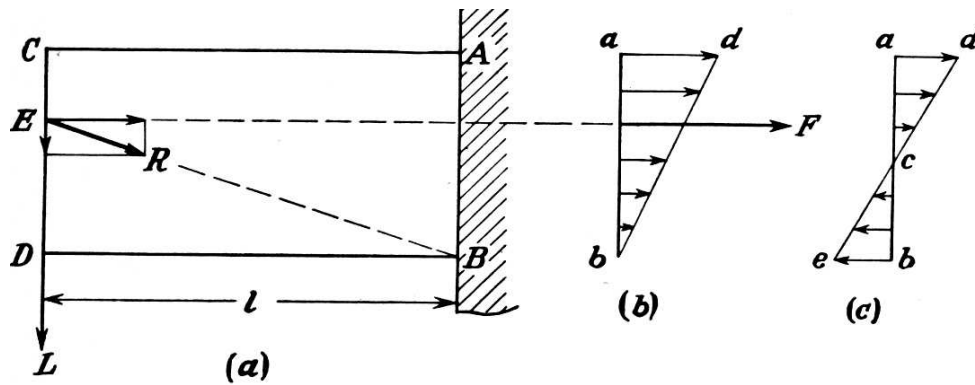
Számos más rugalmas hajlítási példát is vizsgált, néhány ilyen feladat vázlatát láthatjuk a könyvből kivett következő ábrán. Megjegyezzük, hogy ebben a művében foglalkozott először részletesen a nyomott rudak kihajlásával<sup>32</sup>, a változó keresztmetszetek és a kezdeti görbületek kérdésével valamint a rudak rezgéseivel is.



Egy – a mérnökök között sajnálatosan kevésbé ismert – francia matematikus és fizikus, *Antoine Parent*<sup>33</sup> a következő név a gerendaelmélet formálói között. *Mariotte* munkáit elemezve kimutatta, hogy az elődje által négyszög keresztmetszetre levezetett határerő, az általunk is bemutatott  $L = (Sh)/(3I)$  összefüggés nem megfelelő például kör vagy körgyűrű keresztmetszetek esetén. Erre hivatkozva bírálta *Mariotte* eredeti feltevését a konzol talppontjától kiinduló lineáris erőmegoszlásról, helyette – négyszög metszetű konzolra visszatérve – feleakkora értékű eredő erőt adó, belső semleges tengellyel rendelkező eloszlást javasolt, lásd a következő ábra vázlatát, ahol a „b” jelű megoszlás *Mariotte*, a „c” jelű pedig *Parent* javaslata.

<sup>32</sup> Erre a kérdésre 1757-ben még újból visszatért, a kihajlás vizsgálatára használatos formuláit abban az időben pontosította (*Sur la force des colonnes, Mémoires de l'Académie de Berlin, Vol. XIII, pp. 252-282. 1759*).

<sup>33</sup> 1666 – 1716. Alapvető munkája „*Recherches de Mathématique et de Physique*” címmel három kötetben jelent meg Párizsban 1713-ban. Könyve jelentős részét egyébként 3D geometriai feladatok alkotják.



Parent javaslata abból indult ki, hogy a *Mariotte*-elmélet szerint az  $F$  és az  $L$  erők eredőjének át kell menni a „ $B$ ” elfordulási ponton, ez a helyzet viszont nem megfelelő a szerkezet egésze szempontjából. Ehelyett javasolta ő – először a *mechanika történetében* – a nyomási hatások figyelembevételét, két egyenlő háromszögre bontva az erők<sup>34</sup> megoszlását. Így „megfelelve” a *Mariotte*-féle eredményt, elsőként kapta meg a helyes összefüggést a rugalmas határterhelésre. Kicsit később Parent még tovább fejlesztette modelljét, olyan állapotokat is vizsgált, amelyeknél különböző viselkedést tételezett fel húzás és nyomás esetén<sup>35</sup>. Sajnos néha még maga is bizonytalaná vált modelljének helyességét illetően, ugyanis képletei sokszor nem egyeztek a *Mariotte* és mások által korábban végzett, alapvetően a határteherbírási irányuló mérések adataival. Mivel ő sem volt igazán tisztában a rugalmas – képlékeny – berepedt állapotok szilárdságtani hatásával, így nem tudta hatékonyan megvédeni modelljét. A XVIII. században munkái jórészt ismeretlenek maradtak, a mérnökök továbbra is *Mariotte* modelljét használták.

Az építőmérnökök által talán legismertebb név, *Henri Navier* a következő a sorban. 1826-ban megjelent, sok korábbi kisebb munkát is összegző könyvében foglalkozott a hajlított gerendák vizsgálatával. *Navier* végre kilépett az addig kizárólag konzolra koncentrált kutatói gondolkodásmódból és általános alakú hajlított gerendaszerkezeten vizsgálta feladatait.

Elsőként mutatta ki a terhelő erők síkjának és a keresztmetszetek tehetetlenségi irányainak kapcsolatát a hajlítási feladatnál<sup>36</sup>. Elfogadta a keresztmetszetek sík lapokként való elfordulásának és a rugalmas szálak metszetekre való merőlegességének Bernoulli-féle hipotézisét, elődeitől eltérően azonban nem foglalkozott többé a határ-teherbírási feladatok vizsgálatával, hanem szigorúan a rugalmas viselkedésre, a Hooke-modell érvényességi tartományára összpontosított. *Navier* kifejezetten hangoztatta, hogy a mérnöknek kötelessége a tervezés során olyan körülmények megteremtése, amikor a rugalmas viselkedést biztosító feltételek jól alkalmazhatók.

A metszetekre felírt statikai egyenletek segítségével igazolta, hogy a semleges tengelynek át kell mennie a keresztmetszet súlypontján. A rugalmassági modulus és a metszetenél számításba vehető tehetetlenségi nyomaték ismeretében ugyancsak az egyensúlyi feltételekből

<sup>34</sup> Ne feledjük, még NEM beszélhetünk feszültségekről, hiszen arra még több mint száz évet kellett várni...

<sup>35</sup> Nem álltak rendelkezésére saját kísérleti eredmények, így nem tudott képleteihez igazi anyagállandókat rendelni, de elméletének értékéből ez semmit nem von le.

<sup>36</sup> Megjegyezzük, hogy ő kizárólag szimmetrikus metszetű gerendákat vizsgált, ahol a terhelés síkja megegyezett a szimmetriasíkkal.

– kis elmozdulásokat feltételezve – eljutott az egyenes hajlításhoz ma is használatos alapképletekig:

$$\frac{EI}{\rho} = M \quad \text{és} \quad EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M .$$

A képletekben szereplő  $\rho$  a görbület,  $x$  a gerenda hossz tengelye irányába mutat,  $y(x)$  pedig a lehajlás-függvényt jelenti. A differenciálegyenletet már *Euler* is felírta, de *Navier* kapcsolta hozzá a rugalmassági modulus és az inercia kettőséből adódó hajlítási merevséget. Fentieket figyelembe véve úgy gondoljuk, hogy mérnöki szempontból valóban igen jelentős lépés volt *Navier* munkássága a gerendák elméletében.

Még egy nevet feltétlenül meg kell említenünk, mégpedig *Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant*<sup>37</sup>-ét. Ő volt a nagy „összegző” a sok évszázados múltra visszatekintő gerendaelméletben, ő vizsgálta<sup>38</sup> először részletesen *Bernoulli* és *Navier* hipotéziseinek (sík lapként elforduló keresztmetszetek, merőleges szálak, tiszta húzó- és nyomófeszültségek) pontosságát. Kimutatta, hogy ezek a feltételek szigorúan véve csak tiszta hajlítás esetében teljesülnek, minden más esetben a metszetek keresztirányban is torzulnak a *Poisson*-hatásnak megfelelően.

*Saint-Venant* elemezte a nyírófeszültségek<sup>39</sup> hatását is, és megvizsgálta az ennek következtében bekövetkező keresztmetszet-torzulás mértékét. Elsőként vizsgálta a ma *ferde hajlításhoz* nevezett változatot és megadta az úgynevezett „általános” módszert annak megoldására.

Megjegyezzük, hogy mindezekon felül *Saint-Venant* volt az első mérnök, aki a gerendaszerkezetek kis elmozdulásainak számítására kiválóan alkalmas „nyomatéki terhek” módszerét kidolgozta és alkalmazta.

Nagyon sok olyan kutatót ismer még a technikatörténet, akik életük egy részét szintén az itt bemutatott feladatnak szentelték: *Riccati*, *Varignon*, *Musschenbroek*, *Bülfinger*, *Belidor*, *Lagrange*, *Girard*, *Young*, stb.

Ez a hosszú, Leonardo korától majd a XIX. század közepéig terjedő névsor is azt mutatja, milyen roppant szellemi erőfeszítések voltak szükségesek ahhoz, hogy a mai mérnökök megbízhatóan alkalmazhassák letisztult és látszólag olyan egyszerű képleteiket...

### Felhasznált irodalom:

- 1./ **Timoshenko, S. P.:** History of Strength of Materials, *McGraw-Hill*, 1953.
- 2./ **Todhunter, I. – Pearson, K.:** A History of the Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time, Vol. I-II, *Cambridge University Press*, 1886.
- 3./ **Cannone, M. – Friedlander, S.:** Navier: Blow-up and collapse. *Notices of the AMS*, Vol. 50, No. 1, pp. 7-13, 2003.

<sup>37</sup> 1797 – 1886. Kiváló francia mechanikus. Szilárdságtani kutatásai mellett jól ismertek hidraulikai munkái is.

<sup>38</sup> Gerendákkal kapcsolatos vizsgálatait a „*Leçons de mécanique appliquée faites par intérim par M. de St. Venant*” című, 1837-38-ban megjelent munkájában írta le először, később 1864-ben ezt kiegészítette.

<sup>39</sup> Jól ismerte *Zsuravszkij* orosz vasútépítő mérnök nyírófeszültségekre vonatkozó – 1856-ban franciául is megjelent – számításait, sőt, az első alkalmazói közé tartozott.