

Airy és a feszültségfüggvények

Airy élete

Sir George Biddell Airy 1801. július 27-én született az északkelet-angliai *Alnwick*-ben, a skót határtól nem messze fekvő kicsiny városkában, ami akkoriban inkább nagyobb falunak¹ számított csupán. Édesapja, *William Airy* egy elszegényedett nemesi család sarja volt. Bár egészen a XIV. századig tudták visszavezetni a – többnyire a király szolgálatában álló – család történetét, a XIX. század elején az Airy-k már csupán egyszerű falusi gazdálkodók voltak, és még csak nem is számítottak a gazdagabbak közé. George édesanyja, *Ann Biddel* szintén egy farmer lánya volt.



William Airy kemény munkával próbált kitörni a szegénységből, szívós tanulással a körzeti adófelügyelő posztjáig emelkedett. Munkája miatt a családnak többször is lakóhelyet kellett változtatni. George még egészen kicsi volt, amikor Délnyugat-Angliába, a walesi határ menti *Hereford*-ba költöztek. A kis Airy itt kezdte el elemi iskolai tanulmányait, de hamarosan innen is búcsúznia kellett, *Colchester*-be, a Londontól keletre, a tengerpart közelében fekvő kisvárosba települtek át. Itt már hosszabb ideig tanult, szülei beírták a híres *Colchester Grammar School*²-ba, ami akkoriban (is) az egyik legjobb iskolának számított Angliában. Bár Airy csendes, befelé forduló³ gyerek volt, kiváló tanulmányi eredményeket ért el, több ízben is osztályelsőként végzett.

1812-től Airy a nyári szüneteket nagybátyjánál, *Arthur Biddell*-nél töltötte, akinek nagy farmja volt a *Colchestertől* nem túl távol levő *Ipswich* mellett. Airy lassan minden szabad idejében itt volt, és 1813-ban – szülei jóváhagyásával – állandó lakásául is nagybátyja házáat választotta. Ennek a döntésnek több oka volt. George édesapja ebben az évben elveszítette adófelügyelői állását és ezt követően a család szinte állandó nyomorban élt, így kifejezetten örömmel vették, hogy egy éhes szájjal kevesebb van otthon. A másik ok az volt, hogy a fiú sokszor nehezen viselte el apja kissé merev természetét és szigorúságát. Bár sokak szerint alapvetően az ő természetét örökölte, egész életükben elég nehezen jöttek ki egymással. A harmadik – és Airy jövője szempontjából talán a legdöntőbb – tényezőt pedig az jelentette, hogy a nagybácsi házában hatalmas és ráadásul kiváló művekből álló könyvtárat talált. *Arthur Biddell*-nek szenvedélye volt a természettudomány, így rengeteg – csillagászattal, kémiával, optikával és mechanikával foglalkozó – művet vásárolt. A következő öt évben szinte második iskolájának számított az *ipswichi* farm, saját bevallása szerint talán még többet is tanult itt, mint „hivatalos” iskolájában. Kiváló memóriájának⁴ és szorgalmának köszönhetően a legjobb

¹ Nagyon szép régi várkastély van a városka határában, sokszor játszott szerepet a skót-angol történelemben.

² Az iskolát 1539-ben VIII. Henrik alapította és mindig jelentős királyi támogatással működött. A képzés az iskolában a mai értelemben vett elemi és középiskolai oktatás keveréke, a hagyományos klasszikus műveltség kialakítása mellett igen nagy hangsúlyt fektettek már a XIX. században is a matematikai és fizikai tudás megalapozására.

³ Akkori osztálytársai későbbi visszaemlékezéseikben kicsit sznobként jellemzik a fiatal Airyt...

⁴ Feljegyezték róla, hogy egyszer egy 2400 soros latin eposzt mondott el fejből.

eredményt elérők között végzett a *Grammar School*-ban és 1819-ben sikeresen felvételizett *Cambridge*-ben a *Trinity College*-ba.

Családja nyomorúságos anyagi helyzete miatt Airy nem tudta fizetni a teljes egyetemi tandíjat, így eleve olyan hallgatói állásért folyamodott, amelyért csökkentett összeget kellett fizetnie. Cserébe ezeknek a hallgatóknak állandó egyetemi munkát (takarítás, laborok berendezése, stb.) kellett végezni. Bár nagybátyjától néha kapott némi pénzt, még ez sem volt elegendő anyagi segítség számára, ezért rendszeresen fizető órákat kellett adnia gazdagabb társainak. A többszörös terhelés ellenére gyorsan és kiváló eredménnyel, osztályelsőként tette le vizsgáit, és 1823-ban megkapta az egyetem úgynevezett *Smith-díját*⁵. A következő évben elnyerte a *Trinity College* ösztöndíját és elkezdte élete végéig tartó tudományos karrierjét.

1824-ben Airy *Derbyshire*-ben, egy vasárnapi sétán megismerkedett a csodálatos szépségű húsz éves *Richarda Smith*-szel, egy *Richard Smith* nevű lelkész leányával. Két napra rá meg is kérte a leány kezét, de a lány apja – Airy nehéz anyagi helyzetére hivatkozva – visszautasította. Airy ezt követően mindent megtett azért, hogy megfelelő fizetéssel járó álláshoz jusson, de ez csak hosszú évek kitarató munkája után sikerült neki. Először asszisztensként, majd hamarosan matematika professzorként dolgozott *Cambridge*-ben (évi 99 font fizetésért, ami még az akkori viszonyokat figyelembe véve sem volt jelentős jövedelem...), majd egy „mellékállást” is vállalt a *Mérésügyi Hivatalban*, évi újabb száz fontos fizetésért, valamint sikerült megszereznie az „*Ír Királyi Csillagász*” pozícióját is.

Az igazi anyagi és társadalmi stabilitást azonban akkor érte el, amikor barátai támogatásával 1828 végén megkapta a *Cambridge-i Obszervatórium* igazgatói állását. Ez már igen jelentős fizetéssel járt (évi 500 fontot kapott) és így végre elnyerte a szülői beleegyezést is, hogy elvehesse *Richarda Smith*-t. 1830. március 24-án *Cambridge*-ben tartott esküvőjük után boldog és kiegyensúlyozott házasságban éltek életük végéig⁶. Összesen kilenc gyermekük született, és bár a gyerekek közül az első három még kicsi korában meghalt különböző betegségekben, a többiek közül néhányan később ismert személyiségek⁷ lettek.

1835-ben Airyt kinevezték *Királyi Csillagásznak* és megbízták a *Greenwich-i Királyi Obszervatórium* vezetésével⁸. Egészen 1881-ig, nyugdíjazásáig megmaradt ebben a pozícióban. A csillagvizsgáló irányítójaként ő volt Anglia vezető csillagásza, bár megjegyezzük, hogy ez a cím a tudósok körében inkább adminisztratív, mint tudományos jelentőségű volt.

Greenwich-i kinevezését követően szinte elhalmozták különböző címekkel. Csak a fontosabbakat említve: 1835-ben az *edinburgh-i*, 1836-ban pedig a *londoni Royal Society* hívta meg tagjai közé (1871 – ’73 között ő volt a *Royal Society* elnöke), 1845-ben pedig a *Királyi Csillagászati Társaság* választotta elnökévé. 1851-ben lett elnöke az *Alkalmazott Tudományok Brit Társaságának*, 1872-ben pedig a *Francia Csillagászati Társaság* vette fel tagjai közé. A fenti címek mellett még számtalan kisebb-nagyobb kitüntetés és emlékérmét is kapott.

⁵ A díjat *Roberth Smith* (1689 – 1768) angol matematikus alapította 1768-ban a természettudományokban (elsősorban a matematikában) jártas hallgatók jutalmazására.

⁶ *Richarda* 1875-ben, 71 éves korában halt meg, Airy 17 évvel élte túl.

⁷ Például a legidősebb életben maradt fiú, *Wilfrid Airy* országszerte ismert kiváló építész lett, az ő lánya – *Anna Airy* – pedig a XX. század első felének neves angol képzőművésze volt.

⁸ Természetesen az egész család azonnal átköltözött *Cambridge*-ből *Greenwich*-be.

Airy egész élete nyugodt, rendszeres munkával telt el. Viselkedését kissé merev, hűvösen zárkózott magatartás, időnként erősen szarkasztikus stílus jellemezte, külföldi kollégái a viktoriánus Anglia tudósainak klasszikus megtestesítőjét látták benne. Hivatalos egyetemi és obszervatóriumi munkáján kívül egyébként nagyon szerette a költészetet, szívesen olvasott történelmi, építészeti és teológiai munkákat is. Kedvtelésből ugyan, de igen színvonalas történelmi értekezéseket is írt, például több cikket szentelt *Julius Caesar* britanniai tartózkodásának, elemezte partraszállásának és Angliából való távozásának körülményeit és helyszínét.

Igazi angol létére neki is voltak sajátos szokásai. Ilyen volt például, hogy bár élete végéig megmaradt ragyogó emlékezőtehetsége, ennek ellenére már fiatalkorától kezdve szokása volt, hogy szinte minden körülötte történt eseményt feljegyzett, cédulákra, naplókba, és ezek a feljegyzések (idősebb korára már több hatalmas könyvszekrényt megtöltve) állandóan körülötte voltak, fontos döntései előtt hosszú időt töltött tanulmányozásukkal...

Nagyon jó szervezőnek tartották, ez sokszor komoly segítségére volt a különböző tanszékek, intézetek és obszervatóriumok életének irányításában. Komoly eredményének tartják például, hogy Angliában az ő nevéhez kapcsolható a rendszeres, tervszerű csillagászati megfigyelések bevezetése az obszervatóriumokban, a korábbi, teljesen esetleges és rendszertelen kutatói munka helyett.

Nyolcvan éves korában lemondott minden hivatalos posztjáról és teljesen visszavonult a közéleti és tudományos tevékenységtől is. Két leányával a *Greenwich* melletti *Croom's Hill*-ben levő villájában élt még tizenegy évet, 1892. január 2-án bekövetkezett haláláig. A közeli *Playford Szent-Mária-templomában* (lásd a jobb oldalon lévő képet) temették el felesége és három fiatalon elhunyt kisgyermekével.



Airy nevét a *Holdon* egy, a *Marson*⁹ pedig két kráter őrzi. Életének summáját talán fia fogalmazta meg legtömörebben róla:

„Olyan élete volt, mint egy keményen dolgozó üzletembernek, csak a munkája változatossága és minősége különböztette meg azoktól. Nem volt nagyon izgalmas élet, de igazán érdekes volt...”

Tudományos munkásságának fontosabb adatai:

Airy alapvetően csillagásznak tekintette magát, a fizika illetve a matematika egyes témáival kapcsolatos kutatásai mindig másodlagosak voltak számára, még akkor is, ha a mérnökök számára természetesen ezek a jelentősebbek.

11 könyvet és 518 kisebb-nagyobb cikket publikált élete során. Első igazán komoly munkájának ma a csillagászati megfigyelések pontosságával foglalkozó, 1831-ben megjelent *„On the Diffraction of an Object-Glass with Circular Aperture”* című tanulmányát tartják,

⁹ Ennek az az oka, hogy a *Marson* lévő óriási *Airy-kráteren* belül van még egy kisebb is, ez utóbbit külön *Airy-zéró* névvel illetik a csillagászok.

ezért a *Royal Society* még ebben az évben emlékéremmel tüntette ki. Saját méréseire támaszkodva írta néhány évvel később az „*On the Inequality of Long Period in the Motions of the Earth and Venus*¹⁰” című, a csillagászok körében ugyancsak jelentősnek tartott összefoglaló jelentését, amiért pedig a *Királyi Csillagászati Társaság* tüntette ki aranyéremmel. Élete további részében is sok sikeres mérést végzett, például a Holddal kapcsolatos, 1872 és 1886 között publikált számításait szintén kiváló szakmai eredménynek tartják.



Az ő nevéhez kapcsolják azt az – 1884-ben már nemzetközi egyezményben is elfogadott – döntést, hogy 1851-től kezdve a zérus meridián *Greenwich*-en megy keresztül. A bal oldali képen középen látható függőleges vonal ezt ábrázolja.

Komoly eredményként értékelik a tudósok Airynek a Föld átlagos sűrűségére vonatkozó számításait. Már 1826-ban elkezdett ezzel foglalkozni, de csak évekkel később egy cornwalli bányában végzett méréseivel tudta alátámasztani számításait¹¹. A Föld sűrűségére egyébként Airy 6,566 g/cm³-t kapott¹².

Fizikai témájú kutatásai között megemlíthjük még a *szivárvány* fizikai természetéről írt munkáját és a nagy tengeri *hullámok* kialakulásával foglalkozó cikkeit.

Kevésbé volt sikeres a *Neptun* bolygó csillagászati felfedezésével. 1846 júniusában egy francia csillagász, *Urban Le Verrier*¹³ levélben arról értesítette, hogy az *Uranusz* pályájának szabálytalanságai arra utalnak, a Naprendszerben léteznie kell egy újabb, addig még fel nem fedezett bolygónak. Egy nála jóval fiatalabb cambridge-i csillagász kollégája, *John Couch Adams*¹⁴ szintén felhívta erre a figyelmét, az ő számításai ugyanazt mutatták, mint a francia tudósé. Airy utasítást adott a bolygó keresésére, de balszerencséjére a német *Johann Gottfried Galle*¹⁵ Berlinben megelőzte. Nagyon nehezen heverte ki ezt a kudarcot – alapvetően az egész angol tudományt ért szégyenként élte meg –, hosszú ideig vádolta *Adams*-ot, hogy pontatlanok és hiányosok voltak az adatai (ez nem volt igaz, *Adams* számításai korrektek voltak), illetve *Le Verrier*-t, hogy a bolygó pályájának adatait *Galle*-nak is átadta. Ez a vád sem volt jogos, hiszen a francia kutató nem tett egyebet, mint számításait több kollégájának is elküldte. Mai szemmel nézve semmi különös nem történt, *Galle* (akit egyébként híresen precíz, jó megfigyelőnek ismertek) egyszerűen valamivel gyorsabb és szerencsésebb volt...

¹⁰ *Phil. Trans. of Royal Society*, Vol. 122/67, 1833.

¹¹ “Account of Pendulum Experiments undertaken in the Harton Colliery, for the purpose of determining the Mean Density of the Earth”. *Philosophical Transactions of the Royal Society* **146**:343-355, 1829.

¹² A ma érvényes adat ennél valamivel kisebb, 5,5153 g/cm³

¹³ *Urban Le Verrier* (1811 – 1877) francia matematikus.

¹⁴ *John Couch Adams* (1819 – 1892) angol csillagász és matematikus.

¹⁵ *Johann Gottfried Galle* (1812 – 1910) német csillagász. 1846. szeptember 23-án fedezte fel a *Neptunt*.

A csillagászatban elért fontosabb eredményeinek bemutatása után fordítsuk most figyelmünket a számunkra lényegesebb témakör, a mechanikában használatos *feszültségfüggvények* létrejöttének bemutatására.

A feszültségfüggvények szerepe a mechanikában

A XIX. század a műszaki mechanika történetének igazi aranykora volt. Ekkor fogalmazódtak meg azok a mechanikai változók (feszültségek, alakváltozások), amiket ma is használunk a mérnöki számításokban és ebben a korban írták fel először azokat az alapvető egyenleteket, amelyekre a szilárdságtan illetve a statikai számítások egésze épül. Megjegyezzük, hogy ezen a téren különösen sokat köszönhet a tudomány a XIX. század első felében élő francia tudósoknak: *Lagrange*¹⁶, *Poisson*¹⁷, *Cauchy*¹⁸, *Navier*¹⁹, valamivel később pedig *Saint-Venant*²⁰ és *Lamé*²¹ munkássága eredményeként rendelkezésre állt a rugalmas viselkedésű anyagok vizsgálatához szükséges mechanikai és matematikai háttér.

Tudománytörténeti szempontból nagyon érdekes, hogy az általánosított *peremérték-feladat* formájában összefoglalható *egyensúlyi-, geometriai- és anyagmodell-egyenletek* mellett a mechanika kutatói egyes feladatoknál *másféle* matematikai feladatmegfogalmazást is használtak. Még az 1800-as évek elején *Marie-Sophie Germain*²², majd vele párhuzamosan *Poisson* illetve kicsit később *Navier* a hajlított vékony lemezek vizsgálatára az alábbi *biharmonikus differenciálegyenletet* javasolták:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q \Rightarrow D \Delta \Delta w = q,$$

ahol q a lemez felületére merőleges megoszló terhelés, w a lemez középsíkjának eltolódása, D pedig az E rugalmassági modulusától, a ν Poisson-tényezőtől, valamint a t lemeztvastagságtól függő, úgynevezett lemezmerevségi tényező:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Egy adott lemezfeladat megoldásánál a fenti egyenlet mellett az eltolódásfüggvényre illetve annak deriváltjaira vonatkozó peremfeltételeket is figyelembe kell venni.

A lemezfeladat vizsgálatától teljesen függetlenül fogalmazott meg 1845-ben az angol *Stokes*²³ egy *másik* mechanikai problémára *teljesen hasonló matematikai alakú biharmonikus*

¹⁶ *Joseph Louis Lagrange* (eredeti nevén *Giuseppe Lodovico Lagrangia*, 1736 - 1813) olasz származású, de élete nagy részében Franciaországban élő kiváló matematikus.

¹⁷ *Siméon Denis Poisson* (1781 - 1842) kiváló francia matematikus.

¹⁸ *Augustin Louis Cauchy* (1789 - 1857) világhírű francia matematikus, a mechanika nagyon sokat köszönhet tudományos eredményeinek.

¹⁹ *Claude Louis Marie Henri Navier* (1785 - 1836) híres francia építőmérnök, a modern gerendaelmélet létrehozója, az első színvonalas építőmérnök-képzés megszervezője.

²⁰ *Adhémar Jean Claude Barre de Saint-Venant* (1797 - 1886) kiváló francia tudós, ő foglalta össze először a szilárdságtan különböző tételeit összefüggő rendszerré.

²¹ *Gabriel Lamé* (1795 - 1870) híres francia matematikus, elsősorban függvénytannal és geometriával foglalkozott.

²² *Marie-Sophie Germain* (1776 - 1831) francia matematikus. A lemezek mechanikai vizsgálatáról lásd bővebben a "*Kirchhoff, Love és klasszikus lemezmodell*" című fejezetet.

²³ *Sir George Gabriel Stokes* (1819 - 1903) híres angol matematikus és fizikus, az áramlástan alapvető tételeinek egyik megfogalmazója.

differentiál-egyenletet. Áramlástanai vizsgálatai során jutott el a viszkózus folyadékok egyik változatánál az alábbi alakhoz:

$$\Delta\Delta\Psi = 0,$$

ahol a (kétdimenziós) folyadékáramlás részecskéinek két (u és v) sebességkomponensét az x , y derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi módon számította²⁴:

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

A mechanika kétdimenziós feladatainál ennek a különleges *biharmonikus* matematikai alak alkalmazásának *harmadik* példája éppen az Airy által javasolt feszültségfüggvényes megoldási technika segítségével adódott. Airy 1862 októberében *Cambridge*-ben, az *Alkalmazott Tudományok Brit Társaságának* rendes évi értekezletén számolt be javaslatáról, majd december 11-én a *Royal Society*-ben is tartott egy előadást ugyanerről a témáról. Ezekkel az előadásokkal párhuzamosan cikk formájában is benyújtotta levezetéseit a Királyi Társaság hivatalos lapjába, a „*Philosophical Transactions of the Royal Society*”-be.

A mechanikával foglalkozók körében önkéntelenül is felvetődik a kérdés: miért kezdett a Királyi Csillagász „hirtelen” szilárdságtani feladatok megoldásával foglalkozni, mikor sem korábban, sem később nem érdekelte különösebben a mechanikának ez a területe? Az ok viszonylag egyszerű, saját posztja, a *greenwich-i obszervatórium* igazgató állása miatt kényszerült erre... *Greenwich*-ben ugyanis azokban az években – királyi támogatással – nagyszabású fejlesztések-felújítások folytak, új távcső elhelyezését készítették elő. Az adott építészeti kialakítás miatt azonban az új távcsőnél szüksége volt egy nagyméretű kéttámaszú faltartó megépítésére, amelynél igen nagy pontossággal ismerni kellett volna a szilárdságtani viselkedést. Bár *Navier* gerendamodellje (lásd a „*Bernoulli, Navier és a klasszikus gerendamodell*” című életrajzot) akkor már rendelkezésre állt, az nem volt alkalmas egy ilyen nagy magasságú gerenda vizsgálatára. Éppen ezért Airy úgy döntött, hogy saját maga oldja meg a feladatot, kidolgoz egy olyan eljárást, amely alkalmas a hosszú gerendáktól eltérő arányú tartók szilárdságtani elemzésére.

Cikke a mai mérnökök számára kissé nehezen olvasható, az akkoriban már szokásos és elfogadott feszültség-szimbólumok *helyett* saját maga által bevezetett elnevezéseket használt, a levezetések során *gyakran keverte* a feszültség és alakváltozás fogalmát (!), sokszor nem tett különbséget parciális és közönséges deriválás között, stb.. A lényegen azonban ez nem változtat, megtett egy nagyon fontos lépést, bevezetett egy F -fel jelölt új függvényt, aminek segítségével meg lehet határozni a faltartóban keletkező 2D-s feszültségkomponenseket.²⁵

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Airy azt javasolta, hogy ezt a függvényt a megoldónak kell felvennie valamilyen algebrai vagy trigonometrikus polinom formájában, és a polinomban szereplő ismeretlen együtthatókat az adott tartóra vonatkozó feszültségi peremfeltételekből kell meghatározni. Cikkében önsúllyal rendelkező, téglalap alakú, befogott és kéttámaszú faltartó esetére – mindkét esetben koncentrált és megoszló teher esetére – táblázatos formában megadta az általa használt polinomokat.

²⁴ A feladat megoldásánál természetesen itt is figyelembe kell venni a megfelelő kiegészítő feltételeket.

²⁵ A ma szokásos jelöléseket alkalmazzuk.

Airy cikkét a *Royal Society* akkori titkára²⁶ – *Stokes* – december 18-án elküldte hivatalos bírálatra a nagy fizikusnak, *James Clerk Maxwellnek*²⁷, december 31-én pedig a kiváló skót mérnöknek, *William John Macquorn Rankine*²⁸-nak. *Rankine* válaszára nem kellett sokáig várni, 1863. január 26-én kelt levelében igen rövid és tömör választ adott *Stokes*-nak:

„Az F függvény bevezetése lényegében világos, egyszerű és sokszor elegendően pontos megoldásokhoz vezet a gerendák belső jellemzőinek számításakor. A cikk elméletileg érdekes, gyakorlatban használható, magas szintű és javasolható a *Transactions*-ban való közlésre.”

Maxwell bírálatának elkészítése valamivel több időt vett igénybe, de lényegesen hosszabb és alaposabb vizsgálatot tartalmazott. Először a modell matematikai oldalát vette elemzés alá. Részletesen kifejtette, hogy az *Airy* által használt 2D modell helyett elméletileg pontosabb lenne 3D feszültségállapotot vizsgálni és ilyen esetekre megadni a függvény és a feszültségek kapcsolatát (ennek technikáját ő levelében részletesen be is mutatta). Ezt követően megvizsgálta az *Airy* által bemutatott mintapéldákban használt feszültségfüggvényeket, bírálta azok pontosságát (helyenként hibáit), és jobb függvényfelvételt javasolt. *Maxwell* sokat foglalkozott az F függvény közelítő jellegével – akkoriban a közelítő módszerek jóval kevésbé voltak elfogadottak a tudósok között, mint manapság – és rámutatott arra, hogy egyes helyeken (koncentrált erő, nyílások, stb.) elméletileg gond lehet a függvény felvételével²⁹. Elméletileg hátránynak tartotta a módszer azon tulajdonságát is, hogy a függvény felvétele teljesen független az anyagminőséget leíró állandóktól, ez változó anyagminőségnél gondot jelenthet. A módszer újdonságát egyébként *Maxwell* elismerte, bár egy picit csípős megjegyzést azért tett a bírálatában: „mivel én fizikus vagyok és más a kutatási területem, mindenesetre célszerű lenne olyan francia tudóssal (például *Lamé*-vel) átnézetni, aki ért a szilárdságtanhoz, és emellett esetleg érdemes lenne utánajárni a kérdésnek a párizsi *Ecolé Polytechnique* könyvtárában³⁰ is...”.

Airy február közepén kapta meg – *Stokes* közvetítésével – *Maxwell* bírálatát és igen hevesen reagált rá. Már február 22-én válaszolt *Stokes*-nak, visszautasította *Maxwell* megjegyzéseit és azt javasolta, hogy amennyiben a szerkesztőség óhajtja, külön függelékben csatolják azt cikkéhez, ő nem kíván változtatni a sajátján. A következő hetek *Stokes* és *Airy* közötti sűrű levélváltással teltek el, végül *Stokes* nem tudott ellenállni a Királyi Csillagásznak, udvarias – és kicsit mentegetőző – levélben újabb bírálatot kért *Maxwell*től. A skót fizikus válasza 1863. június 9-én érkezett meg és mintapéldája a hűvösen elegáns, könnyed modornak. A korábbi levelében írt azon megjegyzésre, miszerint neki nem szakterülete a szilárdságtan, alaposan rációfolva pedagógiai gondossággal összeállított összefoglaló elemzést írt *Airy*nek a szilárdságtan alapelveiről, rendszerezve mindazt, amit az 1860 körüli években a világ erről

²⁶ Egyúttal ő volt a *Transactions* főszerkesztője is.

²⁷ *James Clerk Maxwell* (1831 – 1879) skót matematikus és fizikus, egyike a világ legnagyobb tudósainak. Híres volt matematikai precizitásáról. Ma az elektromágneses jelenségeket leíró *Maxwell-egyenletekről* ismert elsősorban.

²⁸ *William John Macquorn Rankine* (1820 – 1872) skót gépészmérnök. A gőzgépek fejlesztése mellett sokat foglalkozott talajmechanikai vizsgálatokkal és különböző fizikai feladatok vizsgálatával is. Híres volt bohém életéről, hivatásos zenekarban is játszott, és szerzője volt sok, akkoriban divatos kuplénak...

²⁹ Ezzel a megjegyzésével (is) messze megelőzte korát, ezt a kérdést csak a huszadik század első felében, a törésmechanika megjelenésekor kezdték alaposabban vizsgálni.

³⁰ Akkoriban a francia tudósok voltak a legjobbak a műszaki mechanikában a világon és a kutatási központok közül pedig kiemelkedett az *Ecolé Polytechnique*.

tudott. Tulajdonképpen az a levezetés, amit ma a világ mérnökhallgatóinak az önsúlyt elhanyagoló esetre erről a témakörrel az előadók bemutatnak, *Maxwelltől* származik. Az egyes lépések az alábbiak: egyensúlyi egyenletek és rugalmas anyagmodell felírása, geometriai egyenletekből kapott kompatibilitási feltétel megadása, ezek összevonása, a feszültségfüggvény bevezetése és végül az egész 2D feladat tömör megfogalmazása a

$$\Delta\Delta F = 0$$

*biharmonikus differenciálegyenlet*³¹ segítségével.

Ebben a második bírálatában *Maxwell* rendszerezett formában megismételte korábbi javításait és javaslatait, majd közölte, hogy ő utánanézett az elsőség kérdésének is, legjobb tudomása és információi alapján valóban *Airy* az, aki elsőként javasolta ezt a módszert, ezért a továbbiakban indítványozza *Airy-féle feszültségfüggvénynek*³² nevezni az F függvényt. Befejezésül megjegyezte, hogy nem kíván függelékkel írni és a maga részéről lezárta³³ a bírálati eljárást... Az újabb bírálat megérkezése után *Airy* minden további vita nélkül végrehajtott több javítást az eredeti cikkben és a publikáció³⁴ végül 1863 végén megjelent az alábbi címmel: „*On the strains in the interior of the beams*”.

A világ többi országában a kutatók és a mérnökök a következő évtizedekben fokozatosan megismerték és egyre több feladat vizsgálatánál alkalmazták is a feszültségfüggvényes megoldási technikát. Érdekes módon először nem is annyira Angliában, hanem Német-, Francia- és Olaszországban alkalmazták *Airy* módszerét, Angliában csak *Love*³⁵ híres könyvét („*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”, *Cambridge University Press, 1892.*) követően kezdett lassan ismertté válni az eljárás a mérnökök között.

A kontinensen *Otto Venske*³⁶ német mérnök 1891-ben kör alakú tárcsák vizsgálatára használta, *Franz Klein* és *Karl Wieghardt*³⁷ német kutatók pedig (Maxwellre is hivatkozva) többféle gerendatartót elemeztek. *Wieghardt* és egy másik mérnök, *A. Timpe* pár évvel később már egy-egy *disszertációt*³⁸ is szentelt a módszernek.

Olaszországban a XIX. század végén kiváló mérnök és matematikus gárda dolgozott, ők is felismerték a feszültségfüggvényes eljárás hatékonyságát. *Almansi*³⁹ 1896-ban

³¹ Ezt a matematikai megfogalmazást *Maxwell* alkalmazta először.

³² *Airy* maga nem használta ezt az elnevezést.

³³ Soha többet nem említette ezt a témakört későbbi cikkeiben.

³⁴ *Philos. Transactions of Royal Society*, Vol. 153, pp. 49-79, 1863.

³⁵ *Augustus Edward Hugh Love* (1863 – 1940) angol matematikus, nagyon sok tett a modern mechanikai elméletek elterjesztéséért. Az ő nevéhez fűződik a klasszikus lemezmodell mai formájú elterjesztése a világ mechanikai szakirodalmában.

³⁶ Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche, *Nachr. Ges. Wiss., Göttingen*, pp. 27-34, 1891.

³⁷ Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten, *Arch. Math. Phys.*, Vol. 8, pp. 1-23, 95-97, 1904.

³⁸ *Wieghardt* disszertációja: Über ein neues Verfahren, verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellem Wege zu finden, *Teubner, 1908, Berlin*, *Timpe* pedig: Probleme der spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach, gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion, *Teubner, 1904, Lipsce*.

³⁹ *Emilio Almansi* (1869 – 1948) olasz matematikus és mechanikus, elsősorban a nemlineáris rugalmasságtan különböző feladataival foglalkozott, az általa bevezetett alakváltozás-tenzorról ismert a mérnökök között.

„Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^2 \Delta^2 = 0$ „ (Atti. Reale. Accad. Sci., Vol. 31, pp. 881-888, Torino) című cikkében írt róla, *Levi-Civita*⁴⁰ két évvel később szintén matematikai elemzést adott („Sulla integrazione dell'equazione $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$, Atti. Reale. Accad. Sci., Vol. 33, pp. 932-956, Torino), *Volterra*⁴¹ pedig (ugyancsak 1896-ban) „Osservazioni sulla Nota precedente del Prof. Lauricella e sopra una Nota di analogo argomento dell'Ing. Almansi”, (Atti. Reale. Accad. Sci., Vol. 31, pp. 1018-1021, Torino) címmel írt róla cikket.

Franciaországban *Mathieu*⁴² írt nagyon részletes tanulmányt⁴³ a biharmonikus függvények tulajdonságairól, egy másik matematikus – *E. Goursat*⁴⁴ – pedig bemutatta⁴⁵, hogyan lehet komplex függvényeket alkalmazni feszültségfüggvényként. Egy harmadik francia, *Joseph Valentin Boussinesq*⁴⁶ nevét is feltétlenül meg kell említenünk, ő különböző koncentrált erőkkel terhelt 3D közegek szilárdságtani vizsgálatára alkalmazta az itt bemutatott technikát⁴⁷, nagy segítséget adva eredményeivel a geotechnikai számítások végzőinek. Sok talajmechanikus követője akadt, akik a legkülönbözőbb felszíni és felszín alatti erőfajtákra fejlesztették tovább *Boussinesq* számítását (kitűnő magyar nyelvű összefoglalót talál az olvasó erről *Kézdi Árpád* „Talajmechanika” című könyvében).

Németországban 1898-ban *Gustav Kirsch*⁴⁸ – igen nagy nemzetközi érdeklődést keltve – egy a gyakorlatban rendkívül fontos mechanikai feladatot oldott meg Airy módszerével. Sikert ért el meghatározni egy lyukkal gyengített húzott tárcsánál a lyuk környezetében keletkező feszültségkoncentrációt és ezzel magyarázatot találni arra a kérdésre, hogy miért megy tönkre sok – az akkor ismert elemi szilárdságtani eljárások szerint gondosan tervezett – mérnöki szerkezet. Néhány évvel később az orosz *Koloszov*⁴⁹ továbbfejlesztette *Kirsch* módszerét, ő oldotta meg először – *Goursat* munkáira építve – komplex feszültségfüggvények⁵⁰

⁴⁰ *Tullio Levi-Civita* (1873 – 1941) olasz matematikus, főleg tenzorszámítással foglalkozott, de mechanikai munkái is jelentősek.

⁴¹ *Vito Volterra* (1860 – 1940) olasz matematikus és fizikus. A matematikai biológia megteremtőjének tartják. Mechanikai munkássága főleg a kristályok diszlokációjának vizsgálatára összpontosult.

⁴² *Émile Leonard Mathieu* (1835 – 1890) francia matematikus, főleg csoportelmélettel és matematikai fizikával foglalkozott.

⁴³ Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta \Delta u = 0$, et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide, *J. Math. Pures Appl.*, Vol. 14, pp. 378-421, 1896.

⁴⁴ *Edouard Jean-Baptiste Goursat* (1858 – 1936) francia matematikus, az analízis és a komplex függvénytan jeles tudósa.

⁴⁵ Sur l'équation $\Delta \Delta u = 0$, *Bull. Soc. Math. France*, Vol. 26, pp. 236-237, 1898.

⁴⁶ *Joseph Valentin Boussinesq* (1842 – 1929) francia matematikus és fizikus. A hidrodinamika, rezgés- és fénytan területén alkotott jelentőset, bár az építőmérnökök főleg a talajmechanikában alkalmazott modelljeiről ismerik.

⁴⁷ Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, principalement au calcul des déformations et des pressions que produisent, dans ces solides, des efforts quelconques exercés sur une petite partie de leur surface ou de leur intérieur, *Gauthiers-Villars, Paris*, 1885. A többféle feladat megoldását bemutató hatalmas tanulmány 722 oldal hosszú.

⁴⁸ *Gustav Kirsch* (1841 – 1901) német mérnök.

⁴⁹ *Jurij Vasziljevics Koloszov* (1867 – 1936) orosz matematikus és mérnök.

⁵⁰ One application of the theory of functions of complex variables to a plane problem of the theory of elasticity, *Disszertáció (orosz nyelven)*, 1910.

segítségével a mechanika egyik legérdekesebb feladatát: az elliptikus lyukkal, illetve határesetben végtelenül vékony repedéssel terhelt tárcsában keletkező *szinguláris feszültségmezők* számítását. Az általa javasolt technikát később, a XX. század első felében *Muszhelisvili*⁵¹, majd *Westergaard*⁵² is alkalmazta különböző típusú repedésekkel gyengített szerkezetek feszültségeinek vizsgálatára, megteremtve ezzel egy új tudományág, a törésmechanika alapjait⁵³.

A feszültségfüggvények segítségével eddig megoldott legfontosabb feladatokat ma már kézikönyvekben gyűjtötték össze. Fontos tudnunk, hogy ezek a megoldások a modern numerikus technikák (például a vége-selemes módszerek) tesztelésének legfontosabb eszközei közé tartoznak.

Érdekes megjegyeznünk azt is, hogy az ennek a pontnak a bevezetésekor bemutatott, *három különböző fizikai feladatból* származó biharmonikus differenciálegyenlet közötti *hasonlóság* is sok kutató figyelmét felkeltette. *Lord Rayleigh*⁵⁴ volt az első, aki felhívta a figyelmet az áramlástani Stokes-egyenlet és a lemezfeladat közötti hasonlóságra⁵⁵. Az előbb említett *Klein-Wieghardt* szerzőpáros pedig az Airy-féle feladat és a lemezprobléma közötti összefüggéseket elemezte, később pedig *Wieghardt* ennek alapján laboratóriumi kísérleti modelleket is létrehozott (a részletek az előbb hivatkozott disszertációban találhatóak). Hozzá hasonlóan az angol *Southwell*⁵⁶ a lemezfeladat és az áramlástani probléma közötti analógiára építve dolgozott ki kísérleti technikát⁵⁷ lemezek igénybevételeinek számítására.

Befejezésül elmondhatjuk, hogy Airy mint a klasszikus műszaki mechanikától némileg távolabb álló tudományág sajátos egyéniségű művelője végülis mindenképpen hasznos segítője lett a mérnökök munkájának, a mai napig használható és bizonyos területeken, mint például a törésmechanikában szinte nélkülözhetetlen számítási módszert adott a szilárdságtant művelőknek.

⁵¹ *Nikoloz Muszhelisvili* (1891 – 1976) híres örmény matematikus, elsősorban a komplex függvénytan törésmechanikai alkalmazásáról és az ehhez kapcsolódó vizsgálatokról ismert.

⁵² *Harald Malcolm Westergaard* (1888 – 1950), dán származású, de élete nagy részét Amerikában töltő mechanikus. Jelentős műveket alkotott az elméleti rugalmasságtanban.

⁵³ Megjegyezzük, hogy a feszültségfüggvények mai legfontosabb alkalmazási területe éppen a törésmechanika.

⁵⁴ *John William Strutt, Rayleigh* harmadik bárója (1842 – 1919) kiváló angol fizikus, a közelítő variációs technika egyik első alkalmazója a mechanikában.

⁵⁵ On the flow of viscous liquids, especially in two dimensions, *Philos. Mag., Ser. 5., Vol. 36, pp. 354-372, 1893.*

⁵⁶ *Richard Vynne Southwell* (1888 – 1970) angol matematikus, főleg alkalmazott mechanikával foglalkozott.

⁵⁷ Use of an analogue to resolve Stoke's paradox, *Nature, Vol. 181, pp. 1257-1258, 1958.*

Felhasznált irodalom:

- 1./ **Timoshenko, S. P.:** History of Strength of Materials, *McGraw-Hill*, 1953.
- 2./ **Love, A. E. H.:** A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, *Cambridge University Press*, 1892.
- 3./ **Todhunter, I. – Pearson, K.:** A History of the Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time, Vol. I-II, *Cambridge University Press*, 1886.
- 4./ http://en.wikipedia.org/wiki/George_Biddell_Airy
- 5./ **Meleshko, V. V.:** Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem, *ASME, Appl. Mech. Rev.*, Vol. 56, No. 1, p. 33-85, 2003.