Mérnökgeodéziai hálózatok

dr. Siki Zoltán
siki@agt.bme.hu

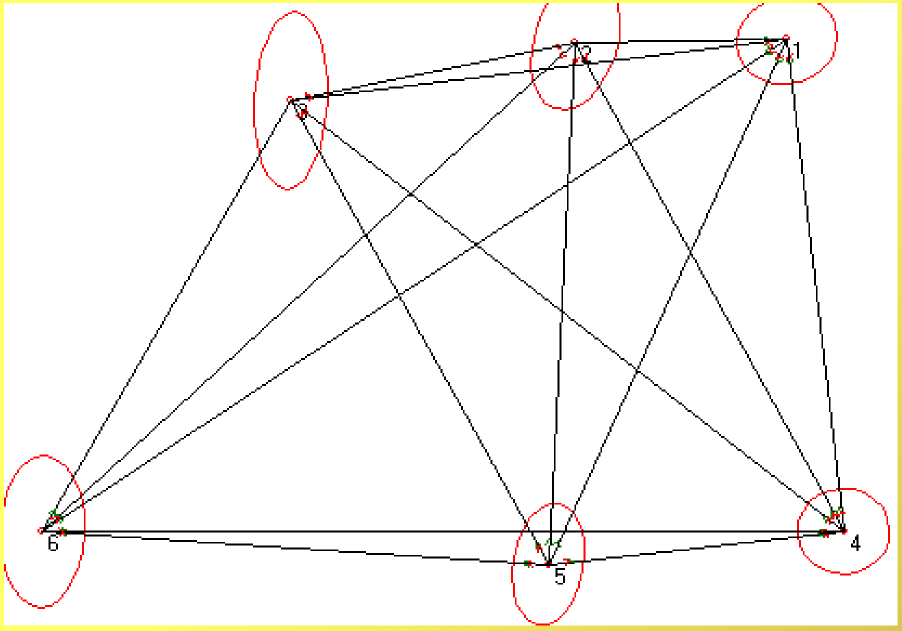
Mérnökgeodézia BSc

Mérnökgeodéziai hálózatok

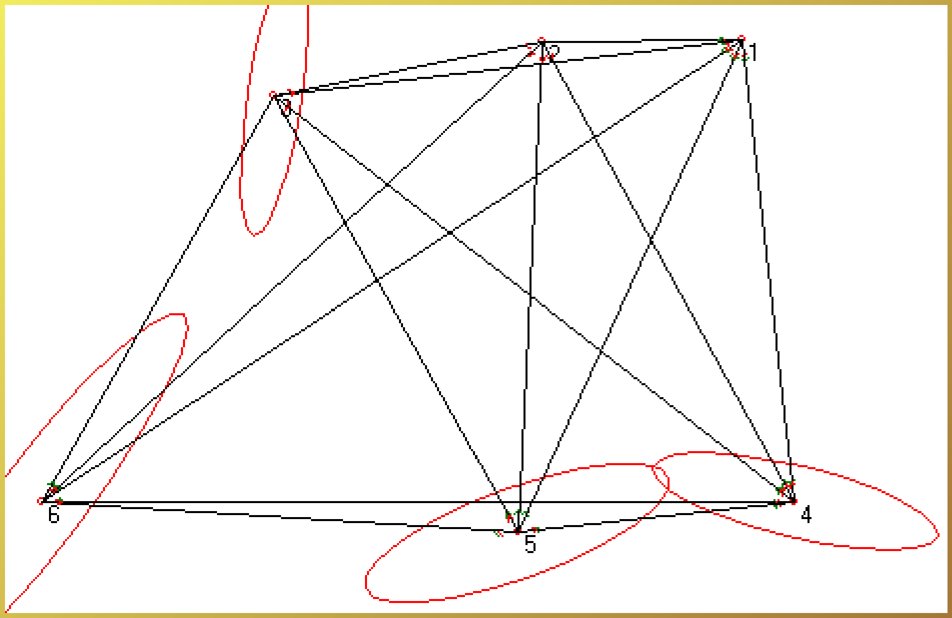
nagy relatív pontosságú hálózatok (1/100 000, 1/1000000),
pontok távolsága néhány tíz, száz méter,
a magas fölösmérés szám könnyen biztosítható,
mm-es vagy kisebb elvárt középhibák

Homogén hálózat: minden hibaellipszis kör és a sugaruk azonos

Pontosság fokozására hálózat kiegyenlítés, durvahiba szűrés, kedvezőbb (homogénebb) középhibakép érdekében szabad hálózat



Szabad hálózat



Beillesztett hálózat

Mérések, hálózatok pontossági tervezése

$\mu_{max} = H / 3$ $\mu_{max} = T / 6$ $p = 0.997$

1. rendű tervezés – pontok elhelyezése (hálózat alak)
2. rendű tervezés – mérésszám, súly tervezés

2. rendű tervezés

- Hálózat alak ismert (előzetes koordináták)
- Mérési középhibák és a priori súlyegység középhiba ismert
- Alakmátrix és súlymátrix felírható
- Pont középhibák $(A^*PA)^{-1}$ -ból számíthatók
- Pont középhibák összehasonlítás az elvárt pontossággal
- Az elvártnál nagyobb középhibák esetén

  1) ismétlési szám növelés vagy
  2) pontosabb mérőeszköz alkalmazása vagy
  3) fölösmérés szám növelése vagy
  4) hálózati geometria módosítása

Szabad hálózat kiegyenlítés

- Előny – nincsenek kényszerek, feltételezések, jobb középhiba kép

- Hátrány – a normál egyenletrendszer együttható mátrix determinánsa nulla, nem létezik reguláris inverz

- Megoldási módszerek
  - Moore-Penrose pseudo inverz (N^+)
  - Zérus sajátértékekhez tartozó sajátvektorokkal bővítés, pl. szintezési hálózatban az előzetes magasságok súlypontja maradjon helyben
  - svd – singular value decomposition

A mai informatikai eszközökkel nem okoz gondot a szinguláris egyenletrendszer megoldása.

Megoldási módszerek

- Moore-Penrose pseudo inverz (N^+)
  $N N^+ N = N$
  $N^+ N N^+ = N^+$ minimum feltétel a koordináta változásokra
  $(N N^+)' = N N^+$
  $(N^+ N)' = N^+ N$
- Zérus sajátértékekhez tartozó sajátvektorokkal bővítés, pl. szintezési hálózatban az előzetes magasságok súlypontja maradjon helyben
- svd – singular value decomposition
  $N = U D V'$ $U'U = I$, $V'V = I$, D diagonál mátrix
  D^+ - $d^+_{i,j} = 0$ ha $i \,!= j$; $d^+_{i,i} = 1/d_{i,i}$ ha $d_{i,i} \,!= 0$; különben $d^+_{i,j} = 0$
  $N^+ = V D^+ U'$ U – m x m, D – m x n, V – n x n

  $Ax - l = 0 \rightarrow x = A^+ l = V D^+ U' \; l$

  Egyenértékű matematikai módszerek.

Példa: pseudo inverz

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} 3.35774 & -1.68663 & -0.62988 & -1.04123 \\ -1.68663 & 3.15898 & -0.90703 & -0.56532 \\ -0.62988 & -0.90703 & 4.05644 & -2.51953 \\ -1.04123 & -0.56532 & -2.51953 & 4.12608 \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathbf{N}) = 0$$

$$\mathrm{pinv}(\mathbf{N}) = \boxed{\begin{vmatrix} 0.1750131 & -0.0220407 & -0.0829037 & -0.0700686 \\ -0.0220407 & 0.1876161 & -0.0776892 & -0.0878862 \\ -0.0829037 & -0.0776892 & 0.1569249 & 0.0036681 \\ -0.0700686 & -0.0878862 & 0.0036681 & 0.1542868 \end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{N} * \mathrm{pinv}(\mathbf{N}) * \mathbf{N} - \mathbf{N} = \begin{vmatrix} -4.4409e-16 & 1.1102e-15 & 2.2204e-16 & -6.6613e-16 \\ 1.3323e-15 & -1.3323e-15 & 3.3307e-16 & -2.2204e-16 \\ -7.7716e-16 & 5.5511e-16 & 8.8818e-16 & -8.8818e-16 \\ 2.2204e-16 & -4.4409e-16 & -1.3323e-15 & 1.7764e-15 \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{N} * \mathrm{pinv}(\mathbf{N}))' - \mathbf{N} * \mathrm{pinv}(\mathbf{N}) = \begin{vmatrix} 0.0000e+00 & 0.0000e+00 & -2.2204e-16 & 1.9429e-16 \\ 0.0000e+00 & 0.0000e+00 & 2.7756e-17 & -1.1102e-16 \\ 2.2204e-16 & -2.7756e-17 & 0.0000e+00 & 0.0000e+00 \\ -1.9429e-16 & 1.1102e-16 & 0.0000e+00 & 0.0000e+00 \end{vmatrix}$$

Példa: sajátértékek

$$N = \begin{bmatrix} 3.35774 & -1.68663 & -0.62988 & -1.04123 \\ -1.68663 & 3.15898 & -0.90703 & -0.56532 \\ -0.62988 & -0.90703 & 4.05644 & -2.51953 \\ -1.04123 & -0.56532 & -2.51953 & 4.12608 \end{bmatrix}$$

[V, lambda] = eig(N)

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{array}$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.50000 & 0.44474 & 0.72546 & 0.16098 \\ -0.50000 & 0.55235 & -0.65237 & -0.13903 \\ -0.50000 & -0.50270 & -0.18729 & 0.67986 \\ -0.50000 & -0.49438 & 0.11420 & -0.70181 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} -7.2316e-16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.1325e+00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8731e+00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.6936e+00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} + \mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_1' = \begin{bmatrix} 3.60774 & -1.43663 & -0.37988 & -0.79123 \\ -1.43663 & 3.40898 & -0.65703 & -0.31532 \\ -0.37988 & -0.65703 & 4.30644 & -2.26953 \\ -0.79123 & -0.31532 & -2.26953 & 4.37608 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{N} + \mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_1') = 102.18$$

$$\mathrm{inv}(\mathbf{N} + \mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_1') - \mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_1' = \begin{bmatrix} 0.1750131 & -0.0220407 & -0.0829037 & -0.0700686 \\ -0.0220407 & 0.1876161 & -0.0776892 & -0.0878862 \\ -0.0829037 & -0.0776892 & 0.1569249 & 0.0036681 \\ -0.0700686 & -0.0878862 & 0.0036681 & 0.1542868 \end{bmatrix}$$

Példa: SVD

$$\mathbf{N}=\begin{vmatrix} 3.35774 & -1.68663 & -0.62988 & -1.04123 \\ -1.68663 & 3.15898 & -0.90703 & -0.56532 \\ -0.62988 & -0.90703 & 4.05644 & -2.51953 \\ -1.04123 & -0.56532 & -2.51953 & 4.12608 \end{vmatrix}$$

$[\mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{V}] = \mathrm{svd}(\mathbf{N})$

$$\begin{vmatrix} -0.16098 & -0.72546 & -0.44474 & 0.50000 \\ 0.13903 & 0.65237 & -0.55235 & 0.50000 \\ -0.67986 & 0.18729 & 0.50270 & 0.50000 \\ 0.70181 & -0.11420 & 0.49438 & 0.50000 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6.6936e+00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.8731e+00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1325e+00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7.3815e-16} \end{vmatrix}$$

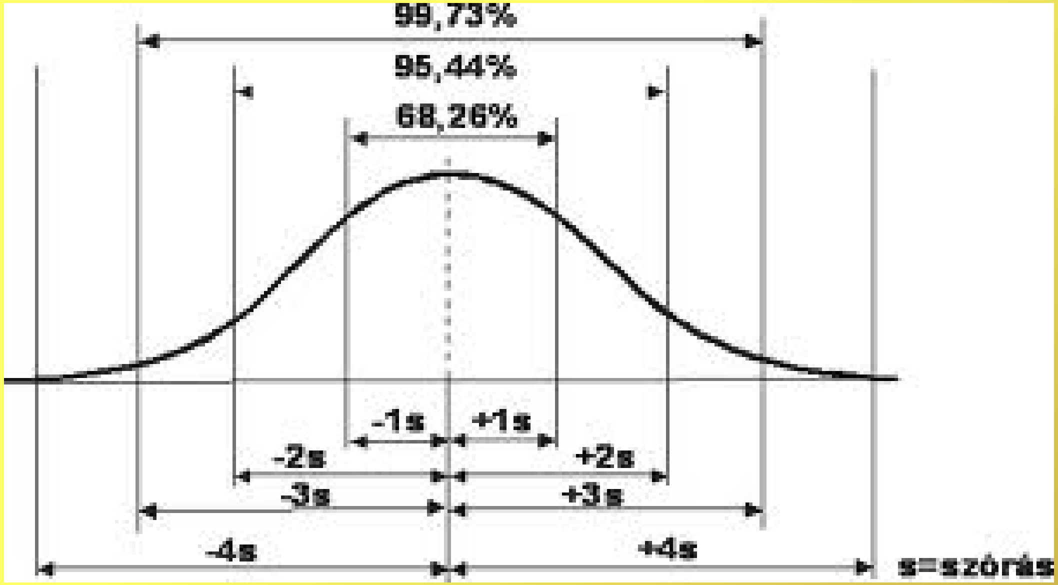
$$\begin{vmatrix} -0.16098 & -0.72546 & -0.44474 & 0.50000 \\ 0.13903 & 0.65237 & -0.55235 & 0.50000 \\ -0.67986 & 0.18729 & 0.50270 & 0.50000 \\ 0.70181 & -0.11420 & 0.49438 & 0.50000 \end{vmatrix}$$

Diagonál mátrix inverze egyszerű!
A 0 értékek helyett 0 az inverzbe!

$$\mathbf{V} * \mathrm{inv}(\mathbf{D1}) * \mathrm{U}' = \boxed{\begin{vmatrix} 0.1750131 & -0.0220407 & -0.0829037 & -0.0700686 \\ -0.0220407 & 0.1876161 & -0.0776892 & -0.0878862 \\ -0.0829037 & -0.0776892 & 0.1569249 & 0.0036681 \\ -0.0700686 & -0.0878862 & 0.0036681 & 0.1542868 \end{vmatrix}}$$

Hibák

- Hiba típusok (véletlen, szabályos, durva)
- Véletlen hibák → Normális eloszlás
- 1/2/3 σ (szigma) szabály (68%/95%/99.7%)
- II. kiegyenlítési csoport (közvetett mérések)
  - Csak véletlen hibák esetén alkalmazható
  - Durva hiba esetén valamennyi eredményt torzítja



Példa:
123.345
123.347
123.634
123.344
123.345

L_2 **norma**:
123.400 ± 0.129
L_1 **norma**: (medián)
123.345 ± ?
L_∞ **norma**:
123.498 ± ?

Statisztikai módszerek

- Teljes hálózatra az a priori és a posteriori súlyegység középhibák (μ_0,m_0)vizsgálata $\chi^2_{f,\alpha/2}$ próba
- Mérések egyenkénti vizsgálata, standardizált javítások alapján $|w_i| < t_{p,f}$ u vagy t próba

(Baarda-féle data snooping)

$$\chi^2 = \frac{v^t P v}{\mu_0^2}$$

$$\chi^2 > \chi^2_{f,\alpha/2}$$

$$\chi^2 < \chi^2_{f,1-\alpha/2}$$

$Q_{XX} = N^{-1}$

$Q_{UU} = A\, Q_{XX}\, A^*$

$Q_{vv} = P^{-1} - Q_{UU}$

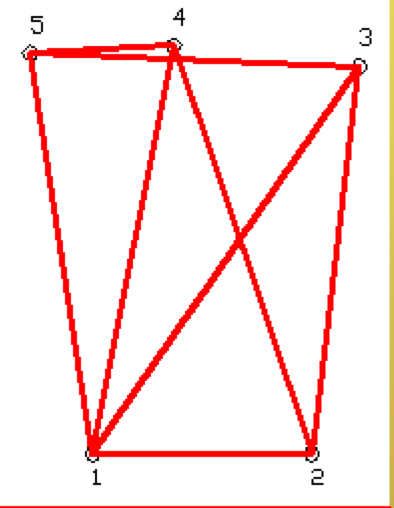
$$w_i = \frac{v_i}{m_{vi}}$$

Durva hiba szűrés végrehajtása

- Súlyegység középhibára vonatkozó statisztikai próba
- Iterációs megoldás (Baarda-féle data snooping)

1. Kiegyenlítés II. kiegyenlítési csoporttal (közvetett mérések)
2. Statisztikák számítása (standardizált javítások)
3. Legnagyobb statisztikával bíró mérés kihagyása, mely az adott szignifikancia szinten nem elfogadható
4. Ismétlés az 1. ponttól amíg van kihagyandó mérés

Durva hiba szűrés eredménye



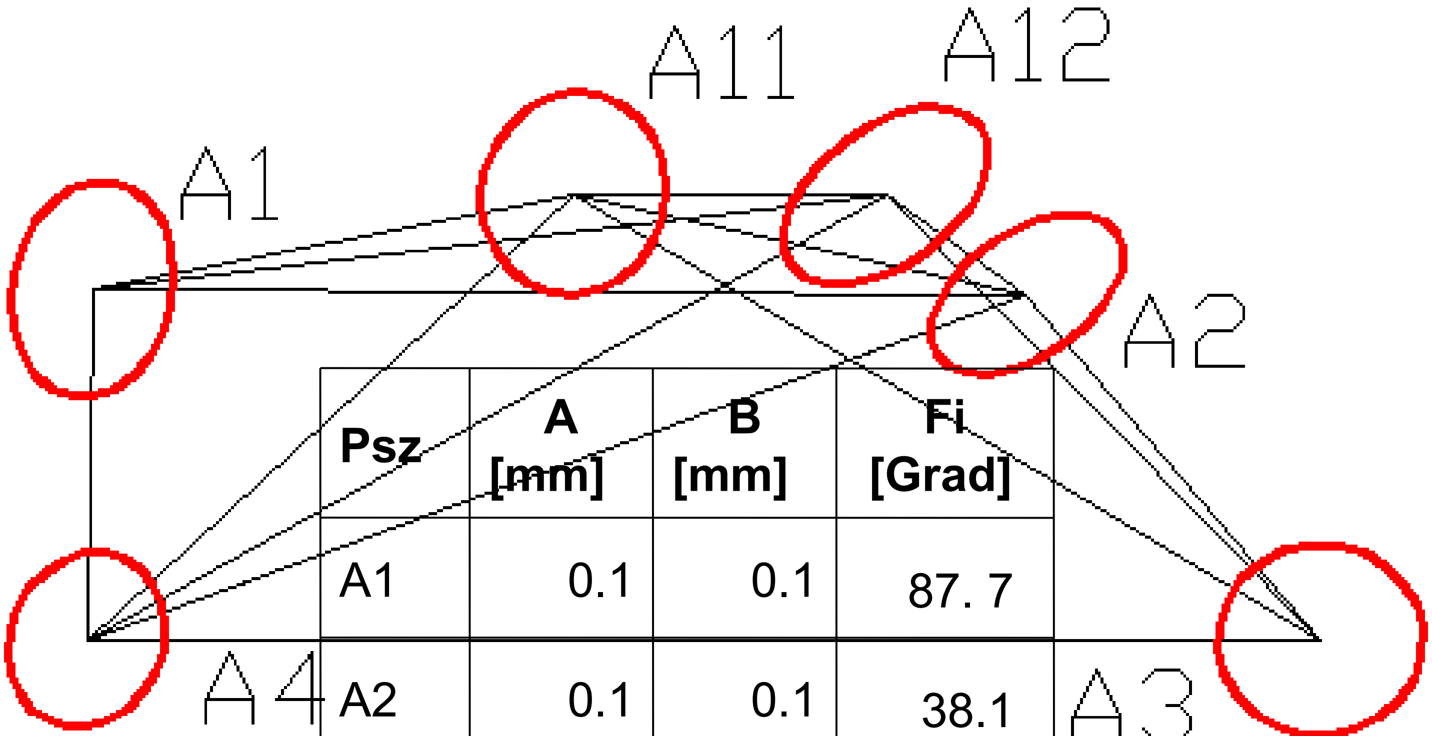
Két mérés kiszűrése után a koordináta középhibák a felére csökkentek! 36 – 2 = 34

m_0 aposteriori 1.58 max. statisztika 3.07 > 1.94

m_0 aposteriori 1.05 max. statisztika 1.93 < 1.94

Pont	Y [m]	X [m]	mY [mm]	mX [mm]	Y	X	mY [mm]	mX [mm]
1	-0.0104	0.0001	**0.6**	**0.5**	-0.0111	0.0003	**0.3**	**0.2**
2	-0.0089	211.7022	**0.6**	**0.5**	-0.0081	211.7017	**0.3**	**0.3**
3	375.6426	257.9512	**0.6**	**0.7**	375.6432	257.9505	**0.3**	**0.4**
4	395.4922	78.1333	**0.5**	**0.7**	395.4919	78.1325	**0.3**	**0.4**
5	387.9833	-60.3665	**0.5**	**0.6**	387.9841	-60.3670	**0.3**	**0.3**

Mozgásvizsgálati hálózat



Psz	A [mm]	B [mm]	Fi [Grad]
A1	0.1	0.1	87. 7
A2	0.1	0.1	38.1
A3	0.1	0.1	6.1
A4	0.1	0.1	72.5
A11	0.1	0.1	85.0
A12	0.1	0.1	40.8

Nyílt forráskódú programok

GNU GaMa – GaMa Local http://www.gnu.org/software/gama/
1D, 2D, 3D geodéziai hálózatok kiegyenlítése
Statisztikai próbák alkalmazása
GeoEasy-ből is használható

QGIS SurveyingCalculation modul
Egyszerű geodéziai számítások, tájékozás, előmetszés,
Sokszögvonal, GNU Gama, koordináta transzformációk

Octave, QtOctave http://www.gnu.org/software/octave/
Általános célú matematikai programcsomag
Mátrix műveletek, eloszlás függvények

Euler http://www.euler-math-toolbox.de/
Általános célú matematikai programcsomag
Mátrix műveletek

R http://www.r-project.org/
Matematikai statisztikai programcsomag

GNU GaMa

XML imput
Parancssori használat
Grafikus felhasználói felület - GeoEasy

```
<?xml version="1.0" ?>
<!DOCTYPE gama-xml SYSTEM "gama-xml.dtd">
<gama-local version="2.0">
<network axes-xy="ne" angles="right-handed">
<description>
GeoEasy 2D network
</description>
<parameters sigma-apr = "1" conf-pr = "0.95" tol-abs = "1000" sigma-act = "aposteriori"
update-constrained-coordinates="yes" />
<points-observations distance-stdev="1.0 1.5" direction-stdev="3" angle-stdev="4">
<point id="5" y="-60.365" x="387.976" adj="XY" />
<point id="4" y="78.135" x="395.485" adj="XY" />
<point id="3" y="257.950" x="375.638" adj="XY" />
<point id="2" y="211.700" x="0.000" adj="XY" />
<point id="1" y="0.000" x="0.000" adj="XY" />
<obs from="5">
<distance to="4" val="138.703" stdev="1.208" />
<distance to="3" val="318.554" stdev="1.478" />
<distance to="2" val="473.878" stdev="1.711" />
```

xy -ismeretlen pont
XY- ismeretlen + minimum felt.
FIX -rögzített pont

GNU GaMa 2

```
Egyenletek száma    :    33           Ismeretlenek száma:    15
Szabadságfok        :    21           Hálózati defektus :     3

m0  apriori    :     1.00
m0' aposteriori:     1.01          [pvv] : 2.13232e+001

Statisztikai analízis

- aposteriori középhiba 1.01
- konfidencia szint 95 %

m0' aposteriori / m0 apriori: 1.008
95 % intervallum (0.700, 1.300) m0'/m0 értéket tartalmazza
m0'/m0 (távolság): 1.049   m0'/m0 (irány): 0.805

Egy mérés elhagyásával elérhető maximális csökkenés az m0''/m0
értékben : 0.930

Maximális studentizált javítás 1.99 eléri a kritikus értéket 1.94
szignifikancia szint 5 % az észlelésnél #28
<distance from="2" to="1" val="211.699" stdev="1.3" />

...

Test Kolmogorov-Smirnov : 94.4 %
```

GaMa output

Megoldás Octave programmal

```
N = A' * P * A;
% szinguláris együttható mátrix?
if (n > rank(N))
    Ninv = pinv(N);
else
    Ninv = inv(N);
endif
% fölösmérés szám
f = m - rank(N);
% ismeretlenek változása
x = Ninv * A' * P * l;
% javítások "/cm
v = A * x - l;
% számítási ellenőrzés
w1 = v' * P * v;
w2 = -l' * P * v;
% súlyegység középhiba
m0 = sqrt((w1) / f);
% ismeretlenek középhibája
mx = m0 * sqrt(diag(Ninv));
```

www.agt.bme.hu/gis/mkiegy.m


Ezen a fejlesztésen
még dolgozunk...

Mérnökgeodéziai hálózatok

dr. Siki Zoltán
siki@agt.bme.hu

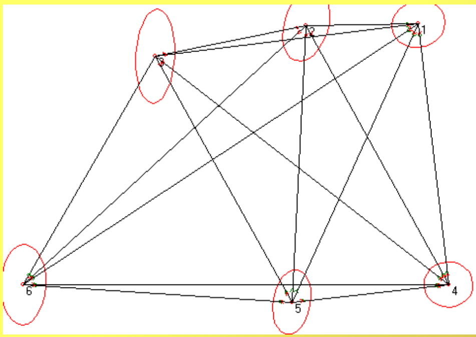
Mérnökgeodézia BSc

Mérnökgeodéziai hálózatok

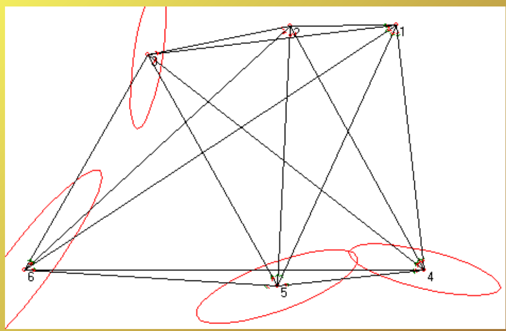
nagy relatív pontosságú hálózatok (1/100 000, 1/1000000),
pontok távolsága néhány tíz, száz méter,
a magas fölösmérés szám könnyen biztosítható,
mm-es vagy kisebb elvárt középhibák

Homogén hálózat: minden hibaellipszis kör és a sugaruk azonos

Pontosság fokozására hálózat kiegyenlítés, durvahiba szűrés, kedvezőbb (homogénebb) középhibakép érdekében szabad hálózat



Szabad hálózat



Beillesztett hálózat

Mérések, hálózatok pontossági tervezése

$\mu_{max} = H / 3$ $\mu_{max} = T / 6$ p = 0.997

1. rendű tervezés – pontok elhelyezése (hálózat alak)
2. rendű tervezés – mérésszám, súly tervezés

2. rendű tervezés

- Hálózat alak ismert (előzetes koordináták)
- Mérési középhibák és a priori súlyegység középhiba ismert
- Alakmátrix és súlymátrix felírható
- Pont középhibák $(A^*PA)^{-1}$ -ból számíthatók
- Pont középhibák összehasonlítás az elvárt pontossággal
- Az elvártnál nagyobb középhibák esetén
  1) ismétlési szám növelés vagy
  2) pontosabb mérőeszköz alkalmazása vagy
  3) fölösmérés szám növelése vagy
  4) hálózati geometria módosítása

Szabad hálózat kiegyenlítés

- Előny – nincsenek kényszerek, feltételezések, jobb középhiba kép
- Hátrány – a normál egyenletrendszer együttható mátrix determinánsa nulla, nem létezik reguláris inverz
- Megoldási módszerek
  - Moore-Penrose pseudo inverz (N^+)
  - Zérus sajátértékekhez tartozó sajátvektorokkal bővítés, pl. szintezési hálózatban az előzetes magasságok súlypontja maradjon helyben
  - svd – singular value decomposition

A mai informatikai eszközökkel nem okoz gondot a szinguláris egyenletrendszer megoldása.

Megoldási módszerek

- Moore-Penrose pseudo inverz (N^+)
  $N N^+ N = N$
  $N^+ N N^+ = N^+$ minimum feltétel a koordináta változásokra
  $(N N^+)' = N N^+$
  $(N^+ N)' = N^+ N$
- Zérus sajátértékekhez tartozó sajátvektorokkal bővítés, pl. szintezési hálózatban az előzetes magasságok súlypontja maradjon helyben
- svd – singular value decomposition
  $N = U D V'$ $U'U = I$, $V'V = I$, D diagonál mátrix
  D^+ - $d^+_{i,j} = 0$ ha i != j; $d^+_{i,i} = 1/d_{i,i}$ ha $d_{i,i}$!= 0; különben $d^+_{i,j} = 0$
  $N^+ = V D^+ U'$ U – m x m, D – m x n, V – n x n

  $Ax - l = 0 \rightarrow x = A^+ l = V D^+ U' \; l$

  Egyenértékű matematikai módszerek.

Példa: pseudo inverz

$$\mathbf{N}=\begin{vmatrix} 3.35774 & -1.68663 & -0.62988 & -1.04123 \\ -1.68663 & 3.15898 & -0.90703 & -0.56532 \\ -0.62988 & -0.90703 & 4.05644 & -2.51953 \\ -1.04123 & -0.56532 & -2.51953 & 4.12608 \end{vmatrix}$$

$\det(\mathbf{N}) = 0$

$$\mathrm{pinv}(\mathbf{N})=\boxed{\begin{vmatrix} 0.1750131 & -0.0220407 & -0.0829037 & -0.0700686 \\ -0.0220407 & 0.1876161 & -0.0776892 & -0.0878862 \\ -0.0829037 & -0.0776892 & 0.1569249 & 0.0036681 \\ -0.0700686 & -0.0878862 & 0.0036681 & 0.1542868 \end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{N} * \mathrm{pinv}(\mathbf{N}) * \mathbf{N} - \mathbf{N} = \begin{vmatrix} -4.4409e-16 & 1.1102e-15 & 2.2204e-16 & -6.6613e-16 \\ 1.3323e-15 & -1.3323e-15 & 3.3307e-16 & -2.2204e-16 \\ -7.7716e-16 & 5.5511e-16 & 8.8818e-16 & -8.8818e-16 \\ 2.2204e-16 & -4.4409e-16 & -1.3323e-15 & 1.7764e-15 \end{vmatrix}$$

$$(\mathbf{N}*\mathrm{pinv}(\mathbf{N}))' - \mathbf{N}*\mathrm{pinv}(\mathbf{N})= \begin{vmatrix} 0.0000e+00 & 0.0000e+00 & -2.2204e-16 & 1.9429e-16 \\ 0.0000e+00 & 0.0000e+00 & 2.7756e-17 & -1.1102e-16 \\ 2.2204e-16 & -2.7756e-17 & 0.0000e+00 & 0.0000e+00 \\ -1.9429e-16 & 1.1102e-16 & 0.0000e+00 & 0.0000e+00 \end{vmatrix}$$

Példa: sajátértékek

$$
\mathbf{N}= \begin{vmatrix} 3.35774 & -1.68663 & -0.62988 & -1.04123 \\ -1.68663 & 3.15898 & -0.90703 & -0.56532 \\ -0.62988 & -0.90703 & 4.05644 & -2.51953 \\ -1.04123 & -0.56532 & -2.51953 & 4.12608 \end{vmatrix}
$$

[**V**, **lambda**] = eig(**N**)

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{array} \\
\begin{vmatrix} -0.50000 & 0.44474 & 0.72546 & 0.16098 \\ -0.50000 & 0.55235 & -0.65237 & -0.13903 \\ -0.50000 & -0.50270 & -0.18729 & 0.67986 \\ -0.50000 & -0.49438 & 0.11420 & -0.70181 \end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix} -7.2316e-16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.1325e+00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8731e+00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.6936e+00 \end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{N} + \mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_1' = \begin{vmatrix} 3.60774 & -1.43663 & -0.37988 & -0.79123 \\ -1.43663 & 3.40898 & -0.65703 & -0.31532 \\ -0.37988 & -0.65703 & 4.30644 & -2.26953 \\ -0.79123 & -0.31532 & -2.26953 & 4.37608 \end{vmatrix}
$$

$$
\det(\mathbf{N} + \mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_1') = 102.18
$$

$$
\mathrm{inv}(\mathbf{N} + \mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_1') - \mathbf{V}_1 * \mathbf{V}_1' = \boxed{\begin{vmatrix} 0.1750131 & -0.0220407 & -0.0829037 & -0.0700686 \\ -0.0220407 & 0.1876161 & -0.0776892 & -0.0878862 \\ -0.0829037 & -0.0776892 & 0.1569249 & 0.0036681 \\ -0.0700686 & -0.0878862 & 0.0036681 & 0.1542868 \end{vmatrix}}
$$

Példa: SVD

$$\mathbf{N}= \begin{bmatrix} 3.35774 & -1.68663 & -0.62988 & -1.04123 \\ -1.68663 & 3.15898 & -0.90703 & -0.56532 \\ -0.62988 & -0.90703 & 4.05644 & -2.51953 \\ -1.04123 & -0.56532 & -2.51953 & 4.12608 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.16098 & -0.72546 & -0.44474 & 0.50000 \\ 0.13903 & 0.65237 & -0.55235 & 0.50000 \\ -0.67986 & 0.18729 & 0.50270 & 0.50000 \\ 0.70181 & -0.11420 & 0.49438 & 0.50000 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{V}] = \mathrm{svd}(\mathbf{N})$$

$$\begin{bmatrix} 6.6936e+00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.8731e+00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1325e+00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7.3815e-16} \end{bmatrix}$$

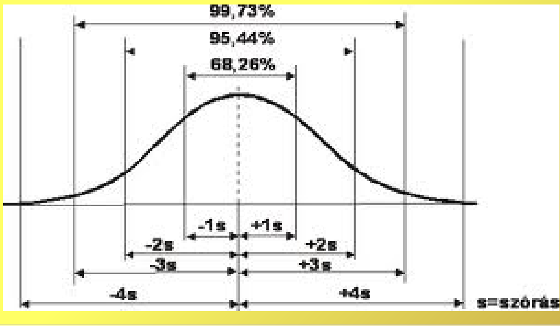
$$\begin{bmatrix} -0.16098 & -0.72546 & -0.44474 & 0.50000 \\ 0.13903 & 0.65237 & -0.55235 & 0.50000 \\ -0.67986 & 0.18729 & 0.50270 & 0.50000 \\ 0.70181 & -0.11420 & 0.49438 & 0.50000 \end{bmatrix}$$

Diagonál mátrix inverze egyszerű!
A 0 értékek helyett 0 az inverzbe!

$$\mathbf{V} * \mathrm{inv}(\mathbf{D1}) * \mathbf{U'} = \boxed{\begin{bmatrix} 0.1750131 & -0.0220407 & -0.0829037 & -0.0700686 \\ -0.0220407 & 0.1876161 & -0.0776892 & -0.0878862 \\ -0.0829037 & -0.0776892 & 0.1569249 & 0.0036681 \\ -0.0700686 & -0.0878862 & 0.0036681 & 0.1542868 \end{bmatrix}}$$

Hibák

- Hiba típusok (véletlen, szabályos, durva)
- Véletlen hibák → Normális eloszlás
- 1/2/3 σ (szigma) szabály (68%/95%/99.7%)
- II. kiegyenlítési csoport (közvetett mérések)
  - Csak véletlen hibák esetén alkalmazható
  - Durva hiba esetén valamennyi eredményt torzítja



Példa:
123.345
123.347
123.634
123.344
123.345

L_2 norma:
123.400 ± 0.129

L_1 norma: (medián)
123.345 ± ?

L_{oo} norma:
123.498 ± ?

Statisztikai módszerek

- Teljes hálózatra az
  a priori és a posteriori súlyegység középhibák (μ_0, m_0)vizsgálata
  $\chi^2_{f,\alpha/2}$ próba
- Mérések egyenkénti vizsgálata, standardizált javítások alapján
  $|w_i| < t_{p,f}$ u vagy t próba
  (Baarda-féle data snooping)

$$\chi^2 = \frac{\boldsymbol{v}^t \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}}{\mu_0^2}$$

$$\chi^2 > \chi^2_{f,\alpha/2}$$

$$\chi^2 < \chi^2_{f,1-\alpha/2}$$

$Q_{XX} = N^{-1}$

$Q_{UU} = A\, Q_{XX}\, A^*$

$Q_{vv} = P^{-1} - Q_{UU}$

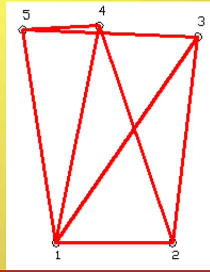
$$w_i = \frac{v_i}{m_{vi}}$$

Durva hiba szűrés végrehajtása

- Súlyegység középhibára vonatkozó statisztikai próba
- Iterációs megoldás (Baarda-féle data snooping)
  1. Kiegyenlítés II. kiegyenlítési csoporttal (közvetett mérések)
  2. Statisztikák számítása (standardizált javítások)
  3. Legnagyobb statisztikával bíró mérés kihagyása, mely az adott szignifikancia szinten nem elfogadható
  4. Ismétlés az 1. ponttól amíg van kihagyandó mérés

Durva hiba szűrés eredménye

Két mérés kiszűrése után a koordináta középhibák a felére csökkentek! 36 – 2 = 34

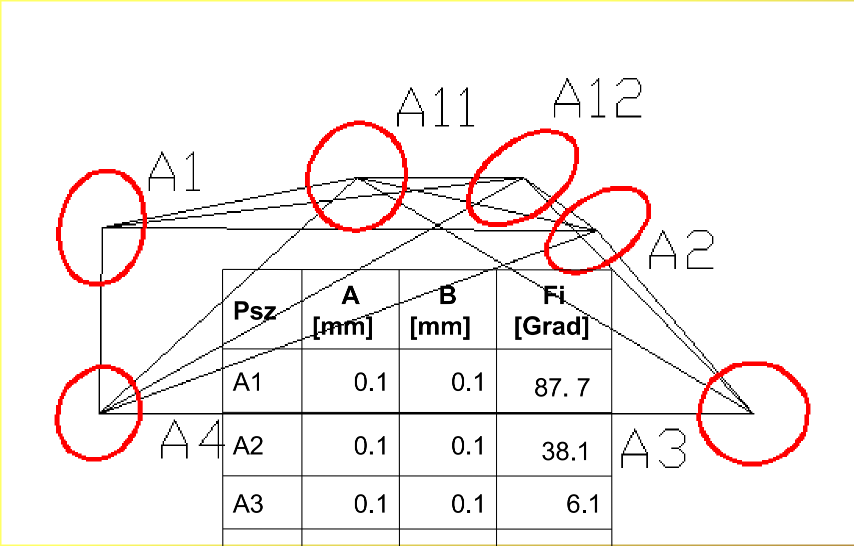


m_0 aposteriori 1.58 max. statisztika 3.07 > 1.94

m_0 aposteriori 1.05 max. statisztika 1.93 < 1.94

Pont	Y [m]	X [m]	mY [mm]	mX [mm]	Y	X	mY [mm]	mX [mm]
1	-0.0104	0.0001	**0.6**	**0.5**	-0.0111	0.0003	**0.3**	**0.2**
2	-0.0089	211.7022	**0.6**	**0.5**	-0.0081	211.7017	**0.3**	**0.3**
3	375.6426	257.9512	**0.6**	**0.7**	375.6432	257.9505	**0.3**	**0.4**
4	395.4922	78.1333	**0.5**	**0.7**	395.4919	78.1325	**0.3**	**0.4**
5	387.9833	-60.3665	**0.5**	**0.6**	387.9841	-60.3670	**0.3**	**0.3**

Mozgásvizsgálati hálózat



Psz	A [mm]	B [mm]	Fi [Grad]
A1	0.1	0.1	87. 7
A2	0.1	0.1	38.1
A3	0.1	0.1	6.1
A4	0.1	0.1	72.5
A11	0.1	0.1	85.0
A12	0.1	0.1	40.8

Nyílt forráskódú programok

GNU GaMa – GaMa Local http://www.gnu.org/software/gama/
1D, 2D, 3D geodéziai hálózatok kiegyenlítése
Statisztikai próbák alkalmazása
GeoEasy-ből is használható

QGIS SurveyingCalculation modul
Egyszerű geodéziai számítások, tájékozás, előmetszés,
Sokszögvonal, GNU Gama, koordináta transzformációk

Octave, QtOctave http://www.gnu.org/software/octave/
Általános célú matematikai programcsomag
Mátrix műveletek, eloszlás függvények

Euler http://www.euler-math-toolbox.de/
Általános célú matematikai programcsomag
Mátrix műveletek

R http://www.r-project.org/
Matematikai statisztikai programcsomag

GNU GaMa

XML imput
Parancssori használat
Grafikus felhasználói felület - GeoEasy

<?xml version="1.0" ?>
<!DOCTYPE gama-xml SYSTEM "gama-xml.dtd">
<gama-local version="2.0">
<network axes-xy="ne" angles="right-handed">
<description>
GeoEasy 2D network
</description>
<parameters sigma-apr = "1" conf-pr = "**0.95**" tol-abs = "1000" sigma-act = "aposteriori"
update-constrained-coordinates="yes" />
<points-observations distance-stdev="1.0 1.5" direction-stdev="3" angle-stdev="4">
<point id="5" y="-60.365" x="387.976" adj="**XY**" />
<point id="4" y="78.135" x="395.485" adj="**XY**" />
<point id="3" y="257.950" x="375.638" adj="**XY**" />
<point id="2" y="211.700" x="0.000" adj="**XY**" />
<point id="1" y="0.000" x="0.000" adj="**XY**" />
<obs from="5">
<distance to="4" val="138.703" stdev="1.208" />
<distance to="3" val="318.554" stdev="1.478" />
<distance to="2" val="473.878" stdev="1.711" />

xy -ismeretlen pont
XY- ismeretlen + minimum felt.
FIX -rögzített pont

GNU GaMa 2

GaMa output

```
Egyenletek száma    :    33          Ismeretlenek száma:    15
Szabadságfok        :    21          Hálózati defektus :     3

m0  apriori    :      1.00
m0' aposteriori:      1.01         [pvv] : 2.13232e+001

Statisztikai analízis

- aposteriori középhiba 1.01
- konfidencia szint 95 %

m0' aposteriori / m0 apriori: 1.008
95 % intervallum (0.700, 1.300) m0'/m0 értéket tartalmazza
m0'/m0 (távolság): 1.049   m0'/m0 (irány): 0.805

Egy mérés elhagyásával elérhető maximális csökkenés az m0''/m0
értékben : 0.930

Maximális studentizált javítás 1.99 eléri a kritikus értéket 1.94
szignifikancia szint 5 % az észlelésnél #28
<distance from="2" to="1" val="211.699" stdev="1.3" />

...

Test Kolmogorov-Smirnov : 94.4 %
```

Megoldás Octave programmal

```
N = A' * P * A;
% szinguláris együttható mátrix?
if (n > rank(N))
   Ninv = pinv(N);
else
   Ninv = inv(N);
endif
% fölösmérés szám
f = m - rank(N);
% ismeretlenek változása
x = Ninv * A' * P * l;
% javítások "/cm
v = A * x - l;
% számítási ellenőrzés
w1 = v' * P * v;
w2 = -l' * P * v;
% súlyegység középhiba
m0 = sqrt((w1) / f);
% ismeretlenek középhibája
mx = m0 * sqrt(diag(Ninv));
```

www.agt.bme.hu/gis/mkiegy.m


Ezen a fejlesztésen még dolgozunk...