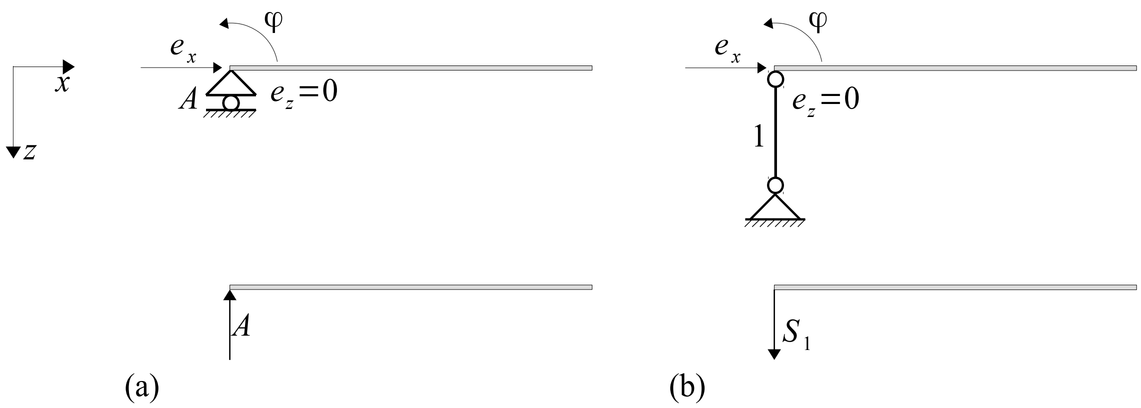
Egyszerű tartók reakcióerőinek meghatározása

Def.: *Egyszerű tartó*nak az olyan egyetlen testből álló, környezetükhöz *kényszer*ekkel kapcsolódó szerkezeteket nevezzük, amelyek bármilyen elrendezésű külső teher esetén egyensúlyban maradnak.

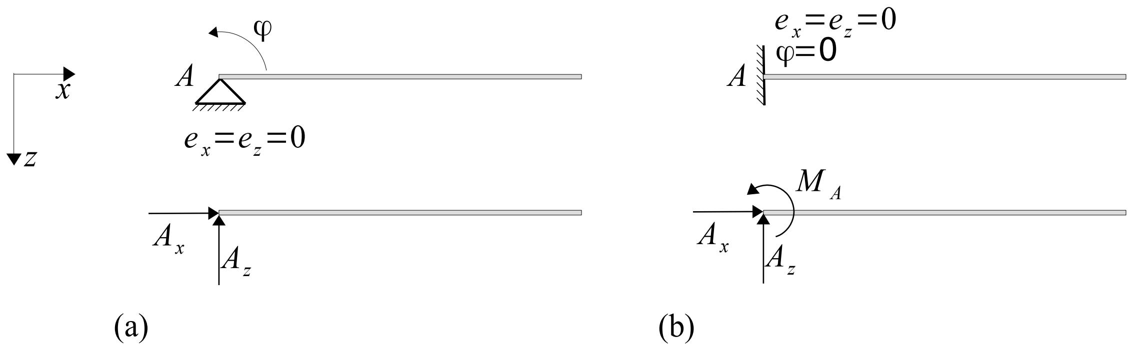
A kényszerek vagy más szóval támaszok megakadályozzák az általuk megtámasztott test egyes elmozdulás-komponenseit. A különböző kényszerek eltérő számú és jellegű elmozdulás-komponenst akadályozhatnak meg, ugyanakkor a megtámasztott testre a megakadályozott elmozdulásnak megfelelő erőt, nyomatékot adnak át. Ezeket a támaszokról a megtámasztott testre átadódó erőket, forgatónyomatékokat *reakció*knak nevezzük. A kényszer által megakadályozott elmozdulás-komponensek számát a *kényszer fokszámá*nak nevezzük. A kényszer fokszáma egyben azt is megmutatja, hogy hány skalár adattal lehet megadni a támaszról a megtámasztott testre átadódó reakció(ka)t. A továbbiakban bemutatjuk a legfontosabb síkbeli kényszereket.

A 10.1. ábrán az egyik végén egy *görgő*vel (a), illetve egy függőleges *támasztórúd*dal (b) megtámasztott egyenes tengelyű gerenda látható. Mindkét kényszer fokszáma egy. A görgő a megtámasztás síkjára merőleges, a támasztó rúd pedig a rúd tengelyének irányába eső eltolódást akadályozza meg. A másik két elmozduláskomponens szabadon létrejöhet, a görgő nem akadályozza a megtámasztás síkjával párhuzamos eltolódást és a megtámasztott pont körüli elfordulást, a rúd nem akadályozza a tengelyére merőleges irányú eltolódást és a megtámasztott pont körüli elfordulást. A gerendára mindkét esetben a megakadályozott elmozdulás-komponensnek megfelelő irányú, tehát adott hatásvonalú reakcióerő adódik át. A rudakat általában számozzuk, a többi kényszert latin nagybetűkkel jelöljük. A rudakról a megtámasztott testre ható úgynevezett rúderőket *S* betűvel jelöljük, alsó indexben megadva az adott rúd sorszámát. A többi kényszernél fellépő reakcióerőket a kényszer jelével megegyező latin nagybetűvel jelöljük. A két alsó ábrán a megtámasztott gerendára ható reakcióerőket ábrázoltuk. (Szintén egy a fokszáma az *egyszerű megtámasztás*nak és a *kötél*nek.)



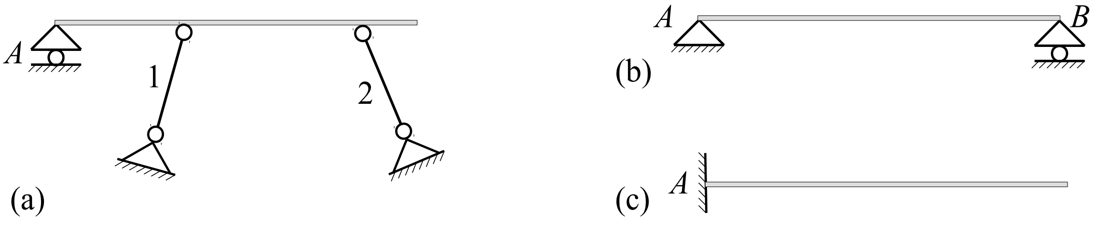
10.1. ábra. Megtámasztás görgővel (a) és rúddal (b)

A 10.2. ábrán *csuklós megtámasztás*ra (a) és *befogás*ra (b) látunk példát. A csukló megakadályozza a megtámasztott pont eltolódását, de a test szabadon elfordulhat a megtámasztott pont körül. A csuklóról a megtámasztott testre ható erő hatásvonala átmegy a csuklón. (A modellben a csuklót pontszerűnek tekintjük.) A csukló fokszáma kettő, a csuklóról átadódó reakcióerő két skalár adattal, például a két komponensével megadható. A befogás (vagy fix támasz) a megtámasztott pont eltolódását (az eltolódás mindkét komponensét) és elfordulását egyaránt megakadályozza, fokszáma tehát három. A befogásnál bármilyen irányú reakcióerő és egy úgynevezett befogási nyomaték adódhat át a megtámasztott testre. Megjegyezzük, hogy további kényszerek is léteznek, de az építőmérnöki gyakorlatban az itt felsoroltak fordulnak elő a leggyakrabban.



10.2. ábra. Csuklós megtámasztás (a) és befogás (b)

Mivel egy testnek síkmozgás esetén (egyelőre csak síkbeli feladatokkal foglalkozunk) három független elmozdulás-komponense van, egy testből olyan kényszerekkel lehet tartót kialakítani, amelyeknek az összfokszáma (fokszámaik összege) minimum három. A 10.3. ábrán ilyen egyszerű tartókra látunk néhány példát. Az (a) ábrán szereplő tartó mindhárom támaszának a fokszáma egy. Amennyiben a három reakcióerő hatásvonala nem egy pontban metszi egymást és nem is párhuzamos mindhárom, akkor az így megtámasztott test bármilyen elrendezésű teher viselésére alkalmas. A (b) ábrán szereplő test egy csuklóval és egy görgővel van megtámasztva, tehát az egyik támaszának kettő, a másik támaszának egy a fokszáma. Amennyiben az adott hatásvonalú reakcióerő (ez lehetne rúderő is) nem megy át a csuklón, akkor ez a szerkezet szintén tartóként működik. A (c) ábrán egy konzoltartó látható, ez egyetlen befogással van megtámasztva, amelynek a fokszáma három. (Egyelőre nem foglalkozunk sem olyan tartókkal, ahol a kényszerek összfokszáma nagyobb, mint három, sem pedig olyan szerkezetekkel, ahol ugyan a támaszok összfokszáma három, mégsem alkalmas a szerkezet bármilyen elrendezésű teher viselésére.)



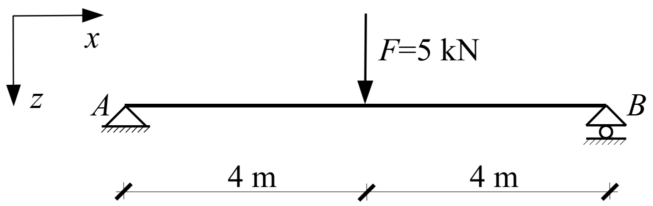
10.3. ábra. Síkbeli tartók

A tartókra különböző hasznos (pl. járművek súlya), meteorológiai (pl. hóteher) és önsúly jellegű terhek hatnak. Ezeket aktív erőknek (terheknek) nevezzük. A támaszokról a tartóra (a megtámasztott testre) átadódó erőket, nyomatékokat reakcióknak nevezzük. A tartóra ható aktív terhekből és reakciókból álló erőrendszernek egyensúlyban kell lennie. A tartószerkezetek statikai vizsgálatának első lépése a reakcióerők meghatározása. Ezzel fogunk a következő néhány órában foglalkozni az alábbi recept lépéseit követve.

A reakciók számításának első lépése az *elkülönítés*. Ennek során felrajzoljuk az elkülönített szerkezet ábráját: eltávolítjuk a tartó támaszait és helyettesítjük azokat az ott fellépő reakciókkal. Az elkülönített szerkezet ábrájának megrajzolása után felírjuk a tartóra ható erőrendszerre vonatkozó *egyensúlyi kijelentés*t. Ez azt fejezi ki, hogy az aktív terhek és a reakciók egy egyensúlyi erőrendszert alkotnak. Mivel az egyensúlyi kijelentés egy szétszórt síkbeli erőrendszerre vonatkozik, három független skaláregyenletet (vetületi és nyomatéki egyenleteket) tudunk felírni. Ennek az *egyensúlyi egyenletrendszer*nek a megoldásával a három ismeretlen reakció(komponens) meghatározható. A számítás fontos lépése az *ellenőrző egyenlet*(ek) felírása. A kiszámított reakciókat egy úgynevezett *eredményvázlat*ban ábrázoljuk, ami tulajdonképpen a támaszaitól elkülönített szerkezetet ábrázolja az összes rá ható erővel és nyomatékkal. A következő példákban részletesen bemutatjuk a reakciók meghatározásának lépéseit.

Mintapélda - 1

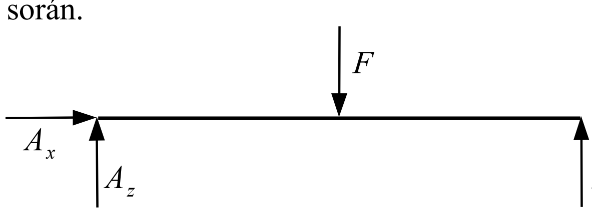
Határozzuk meg az ábrán látható *kéttámaszú tartó* reakcióit!



Megoldás

Első lépésben rajzoljuk fel az elkülönített szerkezet ábráját: távolítsuk el a tartó támaszait és helyettesítsük azokat az ott fellépő egyelőre ismeretlen nagyságú reakciókkal! Az A jelű csuklós támasz egy általános irányú reakcióerő átadására alkalmas, amit egy függőleges és egy vízszintes reakciókomponenssel egyértelműen meg tudunk adni. Az elkülönítés során az A_x vízszintes reakciókomponenst jobbra mutatónak az A_y reakciókomponenst felfelé mutatónak tételezzük fel. Az elkülönítés során a reakciókomponensek irányát tetszőlegesen felvehetjük. A számítás során kapott eredmények előjele egyértelműen megadja a komponensek irányát, pozitív eredmény esetén a feltételezésnek megfelelő, negatív eredmény esetén a feltételezettel ellentétes irányú az adott reakciókomponens. A B jelű görgős támasz a megtámasztásra merőleges hatásvonalú reakcióerő átadására alkalmas, ezért egy függőleges, például felfelé mutatónak feltételezett B erővel helyettesíthetjük a támaszt az elkülönítés során.

A fentiek szerint elkülönített szerkezet ábrája:



A testre három erő hat, egy adott F külső, aktív teher és a támaszoknál átadódó A és B reakcióerők, ezek hatására a szerkezet egyensúlyban van. Azt, hogy a testre ható erők egy egyensúlyi erőrendszert alkotnak egy egyensúlyi kijelentéssel fejezhetjük ki:

$(F, A, B) \doteq 0$.

Egy adott ponton átmenő (A) és egy adott hatásvonalú (B) erő egyensúlyozza az adott külső (F) terhet. Az adott ponton átmenő erőt két, az adott hatásvonalú erőt egy előjeles skalárral meg tudjuk adni egyértelműen, összesen tehát három ismeretlent kell meghatároznunk. Egy szétszórt síkbeli erőrendszerre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján három független skaláregyenletet lehet felírni. A független skaláregyenletek és a skalár ismeretlenek száma megegyezik. Az egyensúlyi kijelentés alapján felírt egyenletek sorrendjének megválasztásánál egyismeretlenes egyenletek megoldására törekszünk. Kéttámaszú tartók számítása során ökölszabályként elmondható, hogy a csuklóra felírt nyomatéki egyenletből a görgős támasznál fellépő reakció meghatározható, hiszen a másik két ismeretlen reakciókomponens karja zérus. Az aktuális feladatban az *A* pontra felírt nyomatéki egyenletben csak az adott *F* erő és az ismeretlen *B* erő szerepel nemzérus karral, így az egyenletből *B* erő kifejezhető:

$$\sum M_i^{(A)}: -5\cdot 4 + A_x\cdot 0 + A_y\cdot 0 + B\cdot 8 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 2{,}5\,\mathrm{kN}(\uparrow)$$

A nyomatéki egyenletekben mindig az óramutató járásával ellentétes irányban forgató erők nyomatéka szerepel pozitív előjellel. Az eredmény pozitív előjele azt jelenti, hogy a *B* erő az elkülönítés során feltételezett irányba (felfelé) mutat. A most megállapított irányt tüntessük is fel a reakció mértékegysége után! A statikai egyenletekbe mindig az egyensúlyi kijelentésben szereplő sorrendben írjuk be az erőket, így könnyű elkerülni, hogy kimaradjon egy erő vagy komponense. A nyomatéki egyenletbe azokat az erőket vagy komponenseket, amelyeknek zérus a karja a későbbiekben nem feltétlenül kell beírni, most csak azért írtuk be, hogy lássuk miért nem szerepel A_x és A_y ismeretlenként az egyenletben. A görgős támasznál fellépő reakcióerő meghatározása után egy-egy vetületi egyenletből a csuklónál fellépő reakció egy-egy komponense egyismeretlenes egyenletekből számítható. Az aktuális feladatban a vízszintes, *x* irányú vetületi egyenletben csak az *A* erő vízszintes komponense szerepel, tehát annak zérusnak kell lennie, ha a szerkezet egyensúlyban van:

$$\sum F_{ix} \quad \rightarrow \quad A_x = 0\,\mathrm{kN}$$

A függőleges, *z* irányú vetületi egyenletben csak az *A* reakció függőleges komponense szerepel ismeretlenként, hiszen a *B* erőt korábban már meghatároztuk (*B* előjele azért negatív, mert felfelé, a *z* tengely negatív irányába mutat):

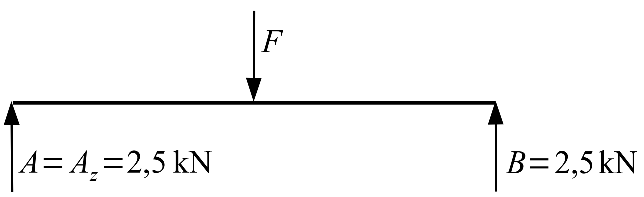
$$\sum F_{iz}: 5 - A_z - 2{,}5 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 2{,}5\,\mathrm{kN}(\uparrow)$$

A pozitív eredmény ismét azt jelzi, hogy a feltételezett irányba, felfelé mutat az A_z reakciókomponens. $A_x=0$ miatt az *A* reakció függőleges és $A=A_z$. Az ismeretlen reakciókomponensek meghatározása után mindig írjunk fel legalább egy ellenőrző egyenletet! A *B* pontra felírt nyomatéki egyenletben már nem lesz ismeretlen, az kell csupán ellenőriznünk, hogy teljesül-e a nyomatéki egyensúly:

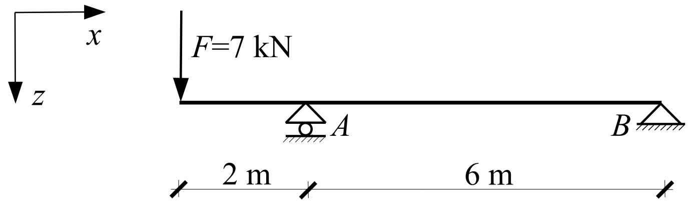
$$\sum M_i^{(B)}: +5\cdot 4 - 2{,}5\cdot 8 = 0$$

Az eredmény ellenőrzése után rajzoljuk le az elkülönített testet az összes rá ható erővel! A feladatban ismeretlenként szereplő erőket írjuk be mértékegységgel együtt az eredményvázlatba!

Eredményvázlat:



Gyakorlópélda - 1
Határozzuk meg az ábrán látható *konzolos kéttámaszú tartó* reakcióit!



Megoldás
Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentés:

Ismeretlenek:

A felírható skaláregyenletek száma:

Megoldás számítással:

...

...

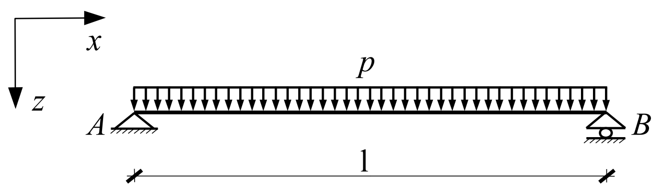
...

Ellenőrző egyenlet:

....

Eredményvázlat:

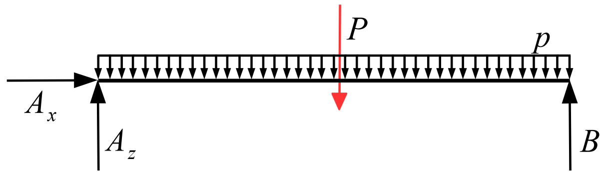
Mintapélda - 2
Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében az ábrán látható kéttámaszú tartó reakcióit!



Megoldás

A feladat megoldását kezdjük az elkülönítéssel! Az ábrába berajzoltuk a megoszló teher eredőjét is (P).

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Az egyensúlyi kijelentés: $((p), A, B) \doteq 0$,

A számítás során a megoszló erőt az eredőjével helyettesítettük, melynek nagysága $P = p \cdot l$, hatásvonala pedig felezi a támaszközt. Az A reakcióerőt a két komponensével, a függőleges B reakcióerőt az előjeles nagyságával meg tudjuk adni, így a feladatban szereplő skalár ismeretlenek száma három. A szétszórt síkbeli erőrendszerre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján három független skaláregyenletet lehet felírni. Írjunk fel a csuklóra egy nyomatéki egyenletet majd a koordinátatengelyekkel párhuzamos irányú vetületi egyenleteket! Az egyenletekbe az egyensúlyi kijelentésben szereplő sorrendben írjuk be az erők hatását!

$$\sum M_i^{(A)} : -(p \cdot l) \cdot \frac{l}{2} + B \cdot l = 0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{p \cdot l}{2} (\uparrow)$$

$$\sum F_{iz} : (p \cdot l) - A_z - \frac{p \cdot l}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = \frac{p \cdot l}{2} (\uparrow)$$

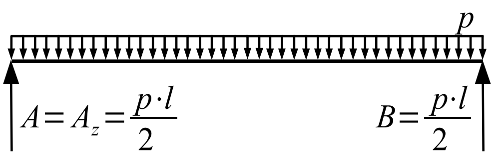
$$\sum F_{ix} : A_x = 0$$

A reakciók meghatározása után ellenőrző egyenletként írjunk fel egy nyomatéki egyenletet a B pontra:

$$\sum M_i^{(B)} : (p \cdot l) \cdot \frac{l}{2} - \frac{p \cdot l}{2} \cdot l = 0$$

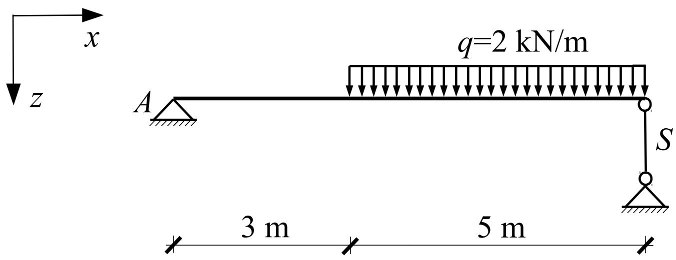
Az eredmény ellenőrzése után rajzoljuk meg az elkülönített testet az összes rá ható erővel! A feladatban ismeretlenként szereplő erők nagyságát írjuk be az eredményvázlatba!

Eredményvázlat:



Gyakorlópélda - 2

Határozza meg az ábrán látható tartó reakcióit!



Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:

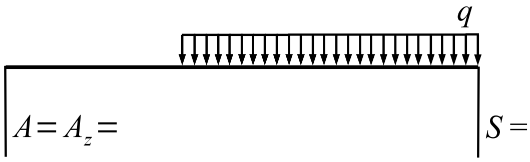
Egyensúlyi kijelentés:
A felírható skaláregyenletek száma:
Ismeretlenek:
A megoszló teher eredőjének nagysága *Q*=
Megoldás számítással:

...

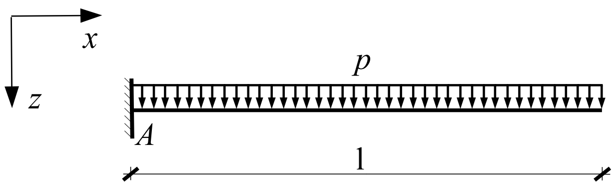
...

...
Ellenőrző egyenlet:
…

Eredményvázlat:

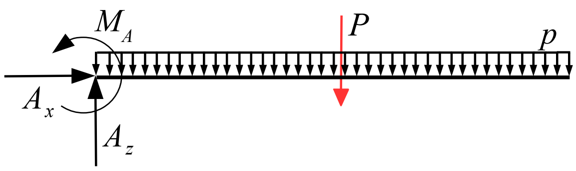


Mintapélda - 3
Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében az ábrán látható konzoltartó reakcióit!



Megoldás
A feladat megoldását kezdjük az elkülönítéssel! A testre a megoszló terhen kívül a befogásnál fellépő reakciók hatnak, egy adott ponton átmenő, de ismeretlen hatásvonalú *A* erő és egy M_A befogási nyomaték.

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Egyensúlyi kijelentés: $((p), A, M_A) \doteq 0$
A testre szétszórt síkbeli erőrendszer hat, tehát az egyensúlyi kijelentés alapján három független skaláregyenletet lehet felírni. Az ismeretlenek száma szintén három, az *A* reakció két komponense

és a befogási nyomaték. Konzoltartó esetén két vetületi egyenlet és a befogási keresztmetszet súlypontjára felírt nyomatéki egyenlet mindig három egyismeretlenes egyenletre vezet. A vetületi egyenletekben csak a reakció adott irányú komponense szerepel ismeretlenként, a nyomatéki egyenletben pedig csak a befogási nyomaték, hiszen a reakcióerő karja zérus a befogási keresztmetszet súlypontjára. (A nyomaték soha nem szerepel a vetületi egyenletekben, hiszen a nyomatékot helyettesítő erőpár vetületösszege zérus.) Írjuk fel ezeket a statikai egyenleteket:

$$\sum M_i^{(A)}: -p\cdot l\cdot\frac{l}{2}+M_A=0 \quad\rightarrow\quad M_A=\frac{p\cdot l^2}{2}\ (\circlearrowleft)$$

$$\sum F_{iz}: p\cdot l-A_z=0 \quad\rightarrow\quad A_z=p\cdot l\ (\uparrow)$$

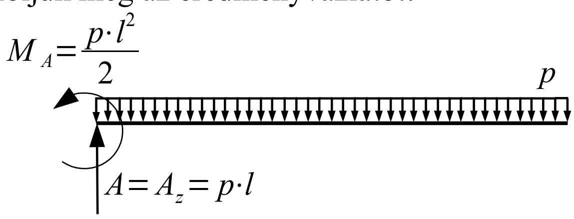
$$\sum F_{ix}: A_x=0$$

A reakciók meghatározása után írjunk fel egy ellenőrző egyenletet a test jobb oldali végkeresztmetszetének súlypontjára:

$$\sum M_i^{(j)}: p\cdot l\cdot\frac{l}{2}-p\cdot l\cdot l+\frac{p\cdot l^2}{2}=0$$

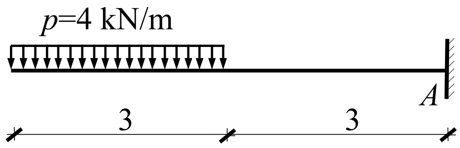
Az eredmények ellenőrzése után rajzoljuk meg az eredményvázlatot!

Eredményvázlat:



Gyakorlópélda - 3

Határozza meg az ábrán látható tartó reakcióit!



Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentés:

A felírható skaláregyenletek száma:

Ismeretlenek:

A megoszló teher eredőjének nagysága P=

Megoldás számítással:

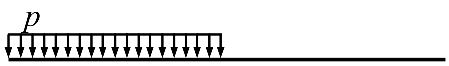
...

...

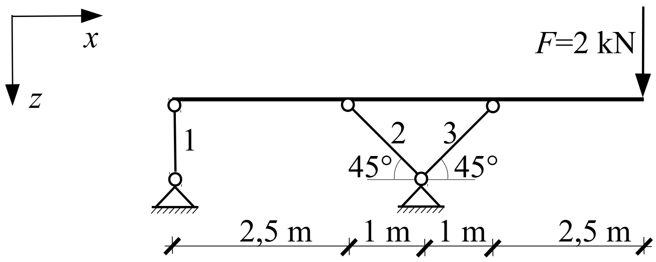
...

Ellenőrző egyenlet:

....
Eredményvázlat:

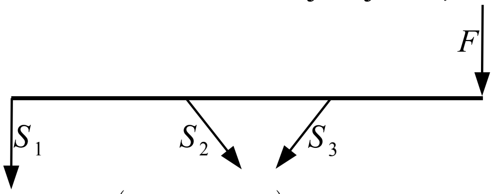


Mintapélda - 4
Határozzuk meg az ábrán látható három rúddal megtámasztott gerenda reakcióit!



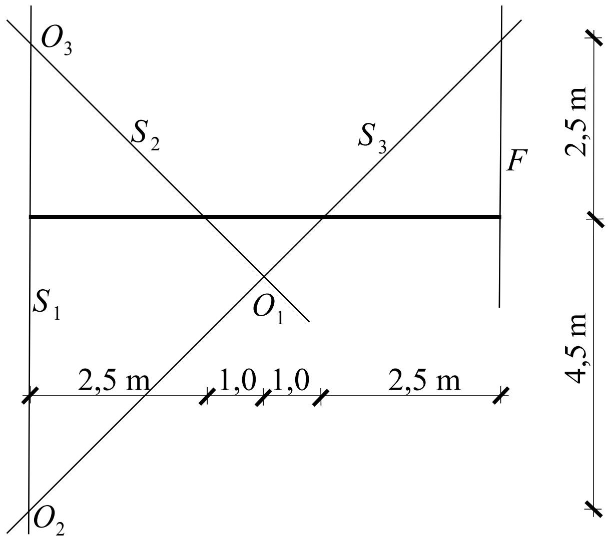
Megoldás
A feladat megoldását kezdjük az elkülönítéssel! A testre az aktív koncentrált erőn kívül a támasztórudakban fellépő reakcióerők hatnak. A rudakban működő rúderők hatásvonala ismert, az elkülönítés során rúdirányú erőket működtetünk a gerendára az eltávolított rudak helyén. A rudakat mindig húzottnak tételezzük fel, ami azt jelenti, hogy a rúdban is húzóerő működik és a rúdról a gerendára is húzóerő adódik át. Az *i* jelű rúdban működő erőt jelöljük S_i -vel (*i*=1, 2, 3)!

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Az elkülönítés után írjuk fel az egyensúlyi kijelentést: $(F, S_1, S_2, S_3) \doteq 0$
A három rúderőt egy-egy előjeles skalárral lehet megadni, tehát a feladatban szereplő ismeretlenek száma három. A felírható skaláregyenletek száma szintén három, hiszen egy szétszórt síkbeli erőrendszer egyensúlyát vizsgáljuk. Három adott hatásvonalú (reakció)erővel való egyensúlyozás esetén a *Ritter-módszer*t érdemes alkalmazni, aminek az a lényege, hogy három nyomatéki egyenletet írunk fel, mindegyiket két-két ismeretlen erő hatásvonalának a metszéspontjára. Ezekben a nyomatéki egyenletekben csak a harmadik rúderő szerepel ismeretlenként. A következő ábrán a hatásvonalak metszéspontjait, az úgynevezett *főpont*okat ábrázoltuk, ezek indexe azt mutatja meg, hogy melyik rúderő hatásvonala nem megy át rajta, tehát melyiknek nemzérus a karja az adott főpontra. Ennek megfelelően az O_i főpontra felírt

nyomatéki egyenletből az S_i rúderőt tudjuk meghatározni.



A főpontok helyzetének geometriai összefüggések segítségével történő meghatározása után felírjuk a három nyomatéki egyenletet:

$\sum M_i^{(O_1)}: -2\cdot 3{,}5 + S_1\cdot 3{,}5 = 0 \quad \rightarrow \quad S_1 = 2\,\text{kN}\,(\text{húzott})$

$\sum M_i^{(O_2)}: -2\cdot 7 - S_2\cdot\cos(45°)\cdot 7 = 0 \quad \rightarrow \quad S_2 = -2{,}828\,\text{kN}\,(\text{nyomott})$

$\sum M_i^{(O_3)}: -2\cdot 7 - S_3\cdot\cos(45°)\cdot 7 = 0 \quad \rightarrow \quad S_3 = -2{,}828\,\text{kN}\,(\text{nyomott})$

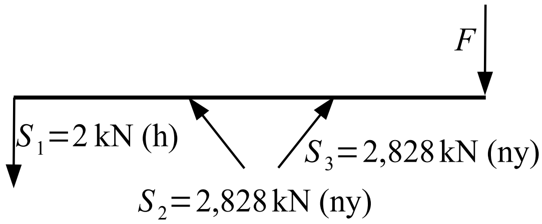
A második egyenletben az S_2 erőt az O_3, a harmadik egyenletben S_3 erőt az O_2 pontban bontottuk fel, így mindkét esetben csak a vízszintes komponenssel kellett számolni. A pozitív eredmény azt jelenti, hogy az adott rúd húzott (ahogy feltételeztük), a negatív előjel pedig azt, hogy a feltételezettel ellentétben a rúd nyomott. A rudak húzott-nyomott volta egy nagyon fontos információ, ezért zárójelben a kiszámított eredmény után mindig feltüntetjük.
Mivel csak nyomatéki egyenleteket írtunk fel a rúderők meghatározásához, „megmaradt” a két vetületi egyenlet ellenőrzésre:

$\sum F_{ix}: -2{,}828\cdot\cos(45°) + 2{,}828\cdot\cos(45°) = 0$

$\sum F_{iz}: 2 + 2 - 2{,}828\cdot\sin(45°) - 2{,}828\cdot\sin(45°) = 0$

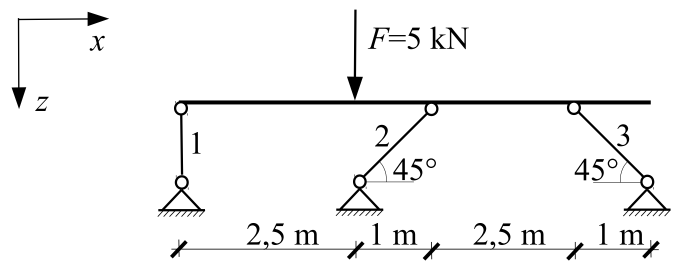
Az ellenőrző egyenletek felírása után elkészítjük az eredményvázlatot, ahol a gerendára ható rúderőket a meghatározott értelemnek (húzás/nyomás) megfelelően rajzoljuk.

Eredményvázlat:



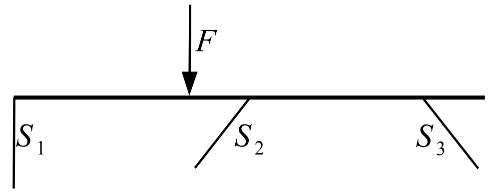
Gyakorlópélda - 4

Határozza meg az ábrán látható tartó reakcióit!



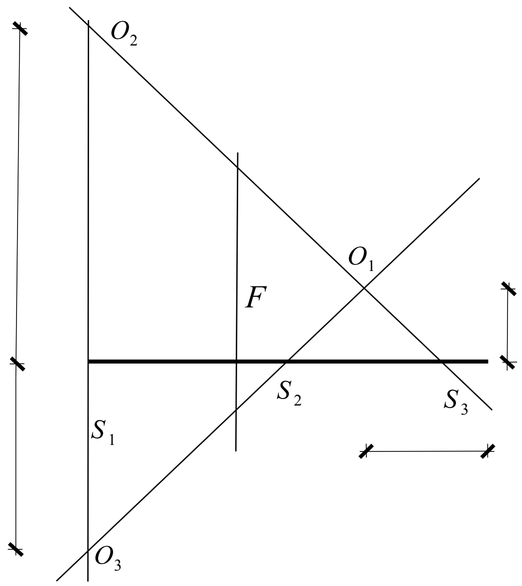
Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Egyensúlyi kijelentés:

A főpontok helyének meghatározása:



A felírható skaláregyenletek száma:

Ismeretlenek:

Megoldás számítással:

...

...

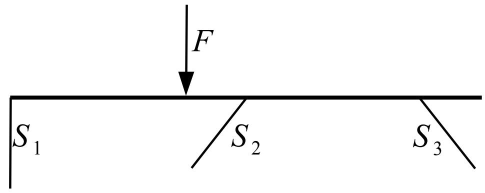
...

Ellenőrző egyenletek:

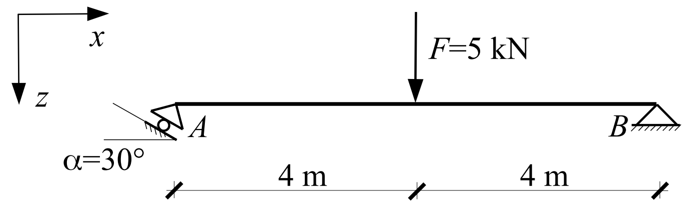
...

...

Eredményvázlat:

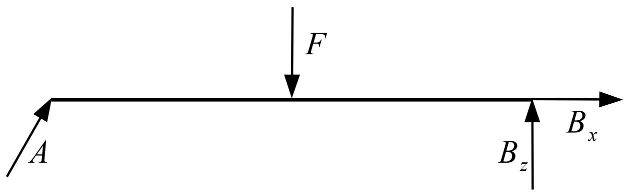


Mintapélda - 5
Határozzuk meg az ábrán látható kéttámaszú tartó reakcióit!



Megoldás
A feladat megoldását kezdjük az elkülönítéssel! A görgőnél egy lejtőre merőleges reakcióerő adódik át, tételezzük fel, hogy ez az erő jobbra-felfelé mutat! A csuklónál ismeretlen hatásvonalú reakcióerő hat a testre, vízszintes komponenséről tételezzük fel, hogy jobbra, függőleges komponenséről tételezzük fel, hogy felfelé mutat!

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Az egyensúlyi kijelentésben az F külső, aktív teher és a támaszoknál átadódó A és B reakcióerők szerepelnek:

$(F, A, B) \doteq 0$.

Egy adott hatásvonalú (A) és egy adott ponton átmenő (B) erő egyensúlyozza az adott külső (F) terhet. Az adott hatásvonalú erőt egy, az adott ponton átmenő erőt két előjeles skalárral meg tudjuk adni egyértelműen, összesen tehát három ismeretlent kell meghatároznunk. Egy szétszórt

síkbeli erőrendszerre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján három független skaláregyenletet lehet felírni. A független skaláregyenletek és a skalár ismeretlenek száma tehát megegyezik.
A csuklóra felírt nyomatéki egyenletben a három ismeretlen közül csak az *A* reakcióerő szerepel, így azt egy egyismeretlenes egyenletből ki tudjuk számítani:

$$\sum M_i^{(B)}: 5\cdot 4 - A\cdot\cos(30°)\cdot 8 = 0 \rightarrow A = 2{,}887\,\text{kN}\ (\nearrow)$$

Az eredmény pozitív előjele azt jelenti, hogy az *A* reakció jobbra-felfelé mutat, ahogy feltételeztük. A *B* reakció vízszintes komponensét egy *x* irányú vetületi egyenletből tudjuk meghatározni:

$$\sum F_{ix}: 2{,}887\cdot\sin(30°) + B_x = 0 \rightarrow B_x = -1{,}444\,\text{kN}\ (\leftarrow)$$

A negatív eredmény azt jelzi, hogy a *B* reakció vízszintes komponense a feltételezettel ellentétes irányba, tehát balra mutat. Ezek után írjunk fel egy nyomatéki egyenletet az *A* pontra, ebben csak a *B* reakció függőleges komponense szerepel ismeretlenként:

$$\sum M_i^{(A)}: -5\cdot 4 + B_z\cdot 8 = 0 \rightarrow B_z = 2{,}5\,\text{kN}\ (\uparrow)$$

(Megjegyezzük, hogy az *A* reakcióerő ismeretében a *z* irányú vetületi egyenletben is csak egy ismeretlen lenne. A nyomatéki egyenlet előnye azonban, hogy abban nem szerepel egyetlen korábban kiszámolt eredmény sem, tehát a számításban nem viszünk tovább esetlegesen rossz részeredményt.)
Az ismeretlen reakciókomponensek meghatározása után ellenőrző egyenletként írjuk fel a *z* irányú vetületi egyenletet:

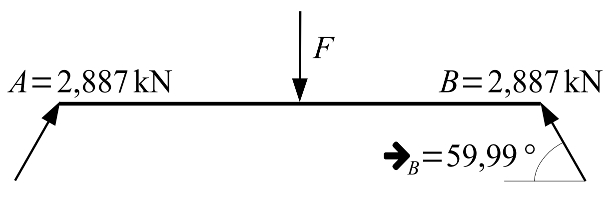
$$\sum F_{iz}: 5 - 2{,}887\cdot\cos(30°) - 2{,}5 = -0{,}0002 \approx 0$$

A kapott hiba az ellenőrző egyenletben szereplő mennyiségeknél nagyságrendekkel kisebb, így azt elfogadhatónak ítéljük és azt mondjuk, hogy az egyensúly *z* irányban teljesül. (Mivel a hibának csak a nagyságrendje érdekes, elég az első értékes jegyét kiírni.)
Az ellenőrzés után határozzuk meg a *B* reakcióerő nagyságát és vízszintessel bezárt szögét!

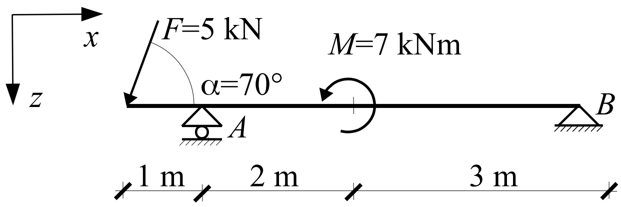
$$B = \sqrt{(1{,}444)^2 + (2{,}5)^2} = 2{,}887\,\text{kN}$$

$$\alpha_B = \text{arctg}\,\frac{2{,}5}{1{,}444} = 59{,}99°$$

Végül készítsük el az eredményvázlatot!



Gyakorlópélda - 5
Határozza meg az ábrán látható tartó reakcióit!



Megoldás

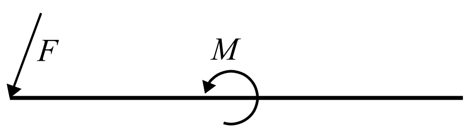
Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentés:

Megoldás számítással:

Ellenőrző egyenlet:

Eredményvázlat:



A statikai határozottság

A szerkezetek viselkedése alapvetően függ támaszaik fokszámától és elrendezésétől. Eddig csak olyan egyszerű tartókkal foglalkoztunk, amelyek támaszainak összfokszáma három és a támaszok elrendezése olyan, hogy a szerkezetre felírt egyensúlyi kijelentés bármilyen teher esetén teljesíthető. Az ilyen szerkezeteknél az egyensúlyi kijelentés alapján felírt három független statikai egyenletből álló egyensúlyi egyenletrendszer alapján a három ismeretlen reakció-komponens egyértelműen meghatározható. A fenti feltételeket tetszőleges számú testből álló szerkezetekre általánosítva fogalmazhatjuk meg a statikai határozottság definícióját.

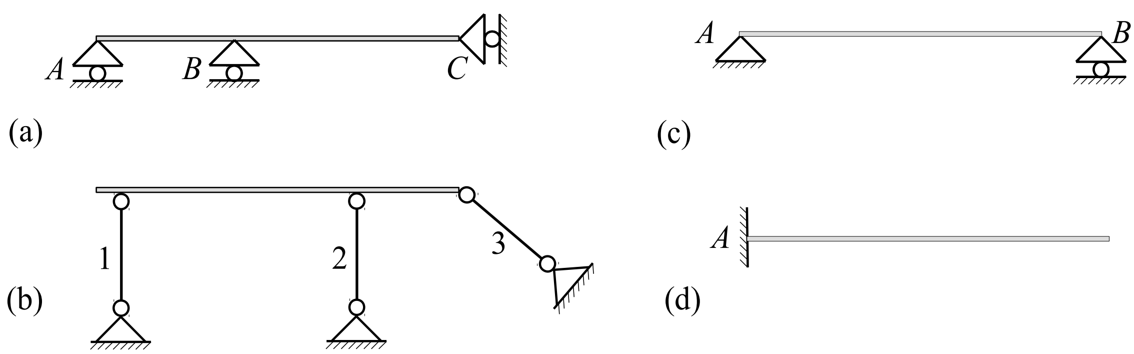
Def.: Egy szerkezetet ***statikailag határozott***nak nevezünk, ha az bármilyen teher esetén egyensúlyban marad és a reakciókat az egyensúlyi egyenletek segítségével egyértelműen meg lehet határozni.

A statikai határozottsághoz tehát két feltételnek kell egyidejűleg teljesülnie. Ha valamelyik feltétel nem teljesül, akkor a szerkezetet máshogy minősítjük.

Def.: Egy szerkezetet ***statikailag túlhatározott***nak nevezünk, ha létezik olyan teher, ami esetén a szerkezet nincs egyensúlyban (tehát az egyensúlyi egyenletrendszernek nincs megoldása).

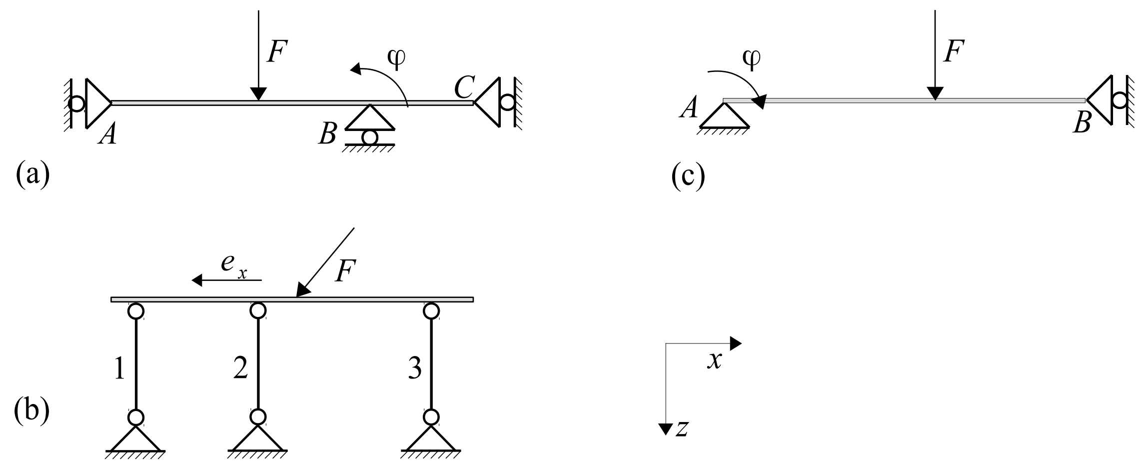
Def.: Egy szerkezetet ***statikailag határozatlan***nak nevezünk, ha létezik olyan teher, ami esetén az egyensúlyi egyenletrendszernek van megoldása (tehát a szerkezet egyensúlyban van), de a megoldás nem egyértelmű. Más szóval a reakcióerők nem határozhatók meg egyértelműen csupán az egyensúlyi egyenletek alapján. (Előnyös tulajdonságaik miatt gyakran alkalmazunk ilyen szerkezeteket az építőmérnöki gyakorlatban. Számításukkal a Tartók statikája I. című tantárgy keretein belül foglalkozunk részletesen.)

Egyetlen testből álló egyszerű szerkezetek közül nézzünk néhány példát a fenti esetekre! A 11.1. ábrán statikailag határozott szerkezeteket láthatunk. Az ábra bal oldalán szereplő tartók 3-3 olyan kényszerrel vannak megtámasztva, amelyeknek a fokszáma egy. A kényszerek elrendezése olyan, hogy a test mindhárom elmozdulás-komponensét megakadályozzák, a test sem eltolódni, sem elfordulni nem tud. A (c) jelű kéttámaszú tartó támaszainak az összfokszáma szintén három és a tartó bármilyen helyzetű teher hatására mozdulatlan marad, hiszen az *A* jelű csukló megakadályozza a gerenda megtámasztott pontjának eltolódását, a görgő viszont nem engedi az *A* pont körüli elfordulást. A (d) ábrán látható konzoltartó *A* jelű befogása megakadályozza a megtámasztott keresztmetszet eltolódását és elfordulását is. Az egyetlen befogással megtámasztott egyszerű tartó mindig statikailag határozott.



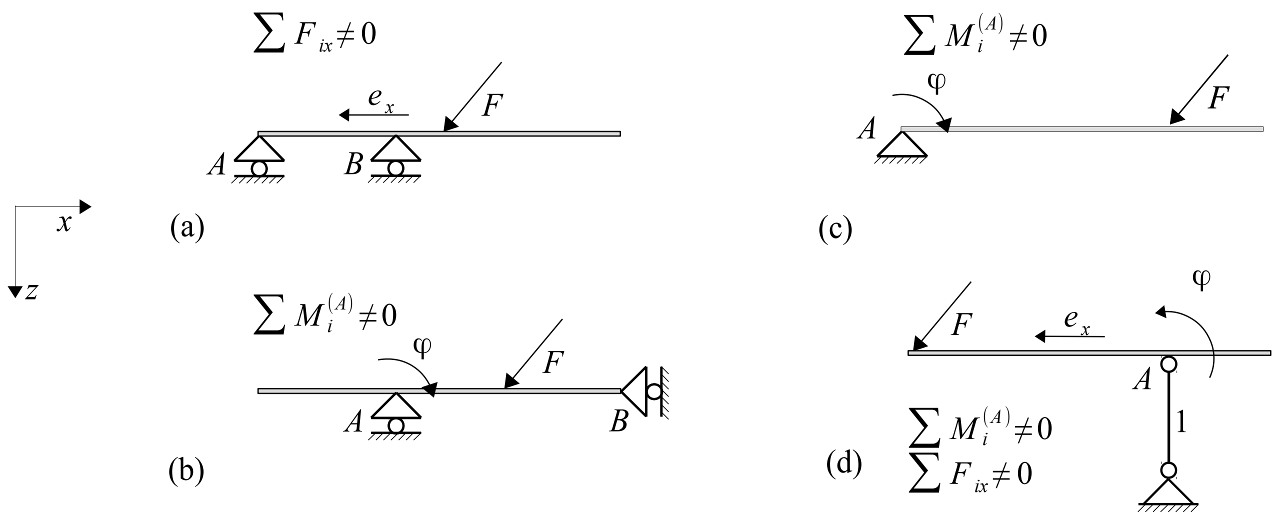
11.1. ábra. Statikailag határozott egyszerű tartók

A 11.2. ábrán statikailag túlhatározott szerkezeteket láthatunk, melyeket a 11.1. ábrán szereplő (a), (b), (c) szerkezetek egy-egy támaszának speciális helyzetbe forgatásával kaptunk. A támaszok összfokszáma mindegyik szerkezet esetén három, mégis mindegyiknél található olyan teher, ami esetén a szerkezet nincs egyensúlyban. Az (a) jelű szerkezetre ható három reakcióerő közös metszéspontú, ez pedig azt jelenti, hogy a gerenda el tud fordulni e körül a (B) pont körül. A B pontra felírt nyomatéki egyenlet nem teljesül, ha a külső aktív terhek eredőjének B pontra vonatkozó nyomatéka zérustól különböző. Az ábrán látható F erő hatására a gerenda az óramutató járásával ellentétes irányban fordul el. A (b) ábrán látható szerkezetre ható mindhárom reakcióerő párhuzamos hatásvonalú. A gerenda szabadon el tud tolódni a reakcióerők hatásvonalára merőleges irányban. A reakcióerők közös hatásvonalra merőleges vetülete zérus, tehát ha a szerkezetre ható aktív terhek eredőjének van a reakciók hatásvonalára merőleges komponense, akkor a hatásvonalra merőleges irányú vetületi egyensúly nem teljesül. Az ábrán szereplő gerenda az F erő hatására eltolódik balra. A (c) ábrán látható gerenda egy csuklóval és egy görgővel van megtámasztva úgy, hogy a görgőnél átadódó reakcióerő hatásvonala átmegy a csukló tengelyén. Ez azt jelenti, hogy mindkét reakcióerő nyomatéka zérus a csukló tengelyére, tehát olyan külső aktív terhet nem tudnak a támaszok felvenni (kiegyensúlyozni), aminek nyomatéka van a csuklóra. Az ábrán látható teher esetén nem teljesül az A pontra felírt nyomatéki egyensúly, a gerenda óramutató járásával megegyezően elfordul az A csukló körül. Jegyezzük meg, hogy az ismeretlen reakció-komponensek számának (a támaszok összfokszámának) és a felírható független egyensúlyi egyenletek számának az egyezése (i=e) nem jelenti azt, hogy a szerkezet statikailag határozott. Ez csupán a statikai határozottság *szükséges, de nem elégséges* feltétele.



11.2. ábra. Statikailag túlhatározott szerkezetek (i=3)

Minden olyan egyszerű (egy testből álló) szerkezet is statikailag túlhatározott, amely támaszainak összfokszáma kevesebb, mint három. Ez a statikai túlhatározottság elégséges, de nem szükséges feltétele. Korábban beláttuk, hogy síkbeli feladatnál egy test három elmozdulás-komponensének megakadályozásához a támaszok összfokszámának minimum háromnak kell lennie, hiszen egy támasz fokszáma az általa megakadályozott elmozdulás-komponensek számával egyezik meg. Másrészt az is belátható, hogy általános teher, szétszórt síkbeli erőrendszer esetén a szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján felírható három független skalár egyenlet háromnál kevesebb reakció-komponenssel nem teljesíthető. A meg nem akadályozott elmozdulás-komponens azért jöhet létre (Newton II. törvényének megfelelően), mert a neki megfelelő egyensúlyi feltétel nem teljesül. A 11.3. ábrán olyan szerkezeteket ábrázoltunk, amelyeknél a támaszok összfokszáma kevesebb, mint 3. Mindegyik szerkezetnél felrajzoltuk a szabad elmozdulás-komponenseket és a nem teljesülő egyensúlyi feltételeket. Nagyon fontos, hogy a statikai túlhatározottság bizonyításához elég egyetlen olyan teherelrendezést találni, ami esetén nincs egyensúlyban a szerkezet! (A statikai túlhatározottság bizonyításához elég egyetlen olyan egyenletet találni, amelyikben nincs ismeretlen.)

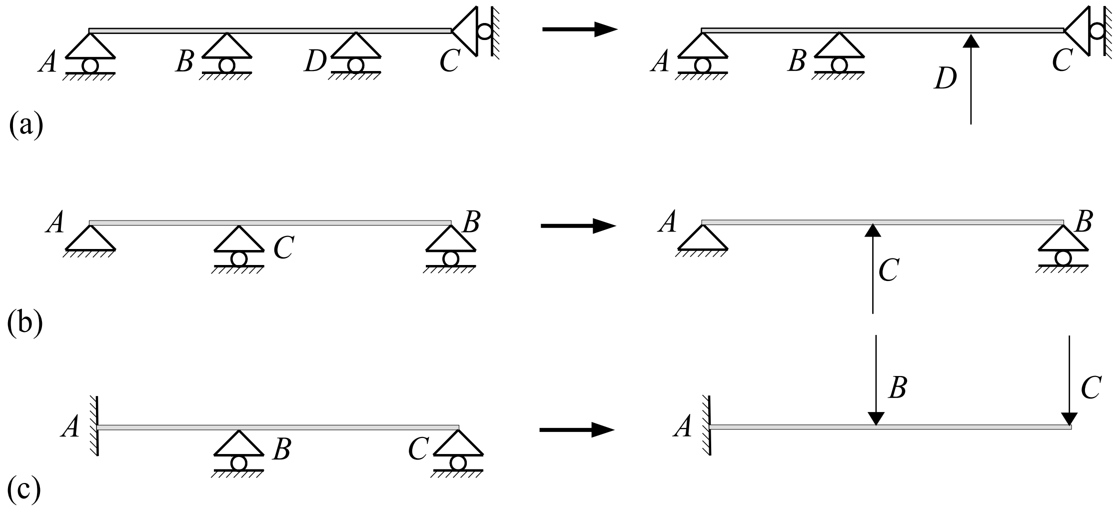


11.3. ábra. Statikailag túlhatározott szerkezetek (i<3)

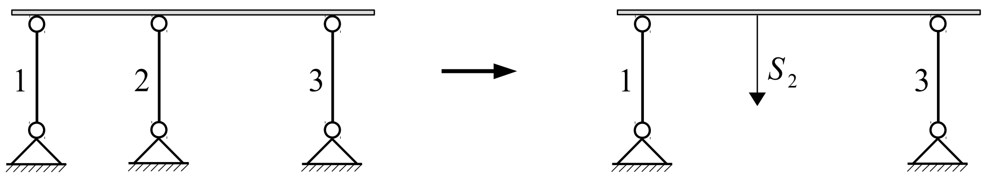
A 11.4. ábra bal oldalán statikailag határozatlan szerkezetek szerepelnek. A támaszok összfokszáma az (a) és a (b) jelű szerkezet esetén négy, a (c) jelű szerkezetnél öt. Ezek a szerkezetek bármilyen elrendezésű teher esetén egyensúlyban vannak, hiszen megfelelően megválasztott támaszok elvételével statikailag határozott szerkezetek alakíthatók ki belőlük. Az ábra jobb oldalán a szerkezetekből támaszok elvételével kialakított statikailag határozott szerkezetek láthatók. Az elvett támaszokat a támasznak megfelelő hatásvonalú reakcióerőkkel helyettesítettük. (Itt jegyezzük meg, hogy a görgőt olyan támasznak tételezzük fel, ahol adott hatásvonalú, de tetszőleges értelmű reakcióerő is felléphet. Tehát vízszintes megtámasztó sík esetén felfelé és lefelé is működhet a reakció, a görgő nem nyílik szét.) A statikailag határozott tartókra ható reakcióerőket helyettesítő erők bármekkorák lehetnek, a tartók egyensúlyban maradnak. Ez egyben azt is jelenti, hogy az eredeti, statikailag határozatlan szerkezetben is bármekkora reakcióerők működhetnek az említett támaszoknál, tehát még aktív terhek nélkül sem határozhatók meg a reakciók egyértelműen. Ha az ismeretlen reakció-komponensek, tehát a támaszok összfokszáma nagyobb, mint a felírható független egyenletek száma, akkor a szerkezet biztosan statikailag határozatlan. Ez a statikai határozatlanság elégséges feltétele, de mint látni fogjuk, ez nem szükséges feltétel.

A 11.5. ábra bal oldalán egy három párhuzamos rúddal megtámasztott gerenda látható. Az egyik rudat eltávolítva és helyettesítve egy függőleges hatásvonalú S_2 erővel egy olyan szerkezetet kapunk, ami tetszőleges nagyságú függőleges S_2 erő esetén egyensúlyban van. Ez azt jelenti, hogy az eredeti szerkezet bármekkora S_2 erő esetén is egyensúlyban van, tehát a reakciókat nem lehet egyértelműen meghatározni még akkor sem, ha semmilyen külső aktív teher nem hat a szerkezetre.

Erről a szerkezetről korábban megállapítottuk, hogy statikailag túlhatározott. Egy szerkezet lehet egyidejűleg statikailag túlhatározott és statikailag határozatlan is. Bebizonyítható, hogy ha a támaszok összfokszáma, tehát az ismeretlen reakció-komponensek száma megegyezik a felírható független statikai egyenletek számával és a szerkezet statikailag túlhatározott, akkor statikailag határozatlan is, illetve ha statikailag határozatlan, akkor statikailag túlhatározott is egyben.



11.4. ábra. Statikailag határozatlan szerkezetek (i>3)

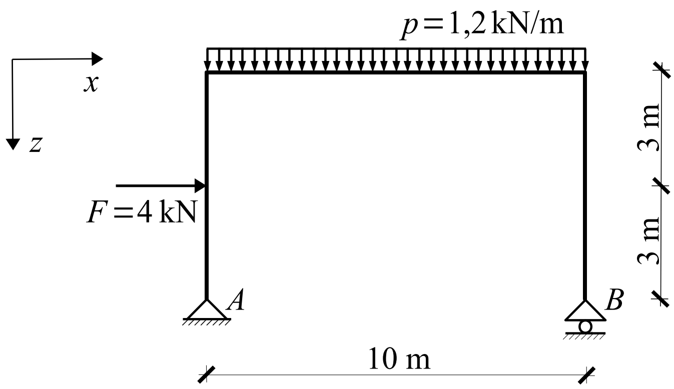


11.5. **ábra.** Statikailag határozatlan szerkezet (i=3)

Egyszerű tartók reakcióerőinek meghatározása II.

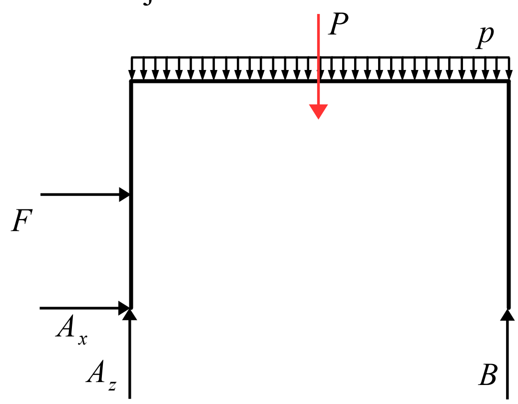
Mintapélda - 1

Vizsgáljuk meg a szerkezetet statikai határozottság szempontjából! Határozzuk meg a reakciókat!



Megoldás

Első lépésben rajzoljuk fel az elkülönített szerkezet ábráját:



Egyensúlyi kijelentésben az elkülönített testre ható összes külső aktív terhet és reakcióerőt szerepeltetnünk kell: $(F,(p),A,B) \doteq 0$.

Vizsgáljuk meg a szerkezetet statikai határozottság szempontjából! Egy adott ponton átmenő (*A*) és egy adott hatásvonalú (*B*) erő egyensúlyozza az aktív külső terheket. Az adott ponton átmenő erőt két, az adott hatásvonalú erőt egy előjeles skalárral meg tudjuk adni egyértelműen, összesen tehát három ismeretlent kell meghatároznunk (*i*=3). Egy szétszórt síkbeli erőrendszerre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján három független skaláregyenletet lehet felírni (*e*=3). A független skaláregyenletek és a skalár ismeretlenek száma megegyezik (*e*=*i*), tehát a statikai határozottság szükséges, de nem elégséges feltétele teljesül. Kéttámaszú szerkezetek számítása során a csuklóra felírt nyomatéki egyenletből a görgős támasznál fellépő reakció meghatározható, ha a görgőnél fellépő erő hatásvonala nem megy át a csuklón. A vizsgált szerkezet teljesíti ezt a feltételt. Ezek után például két vetületi egyenletből a csuklónál fellépő reakció-komponensek számíthatók. A fenti három egyensúlyi egyenlet bármilyen aktív külső teher esetén felírható és három egyismeretlenes egyenletre vezet, amelyek megoldásával az ismeretlen reakció-komponensek meghatározhatók. Ez azt jelenti, hogy a szerkezet statikailag határozott.

A számítás során a megoszló erőt helyettesítsük az eredőjével! A megoszló teher eredőjének hatásvonala függőleges és felezi a támaszközt, nagysága: $P = 1{,}2 \cdot 10 = 12\,\text{kN}\,(\downarrow)$.

Az aktuális feladatban az A pontra felírt nyomatéki egyenletben az ismeretlenek közül csak a B erő szerepel nemzérus karral, így az egyenletből B erő kifejezhető:

$$\sum M_i^{(A)}: -4\cdot 3 - 12\cdot 5 + B\cdot 10 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 7{,}2\ \mathrm{kN}\ (\uparrow)$$

Az eredmény pozitív előjele azt jelenti, hogy a B erő az elkülönítés során feltételezett irányba (felfelé) mutat. A vízszintes, x irányú vetületi egyenletben az ismeretlenek közül csak az A erő vízszintes komponense szerepel:

$$\sum F_{ix}: 4 + A_x = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = -4\ \mathrm{kN}\ (\leftarrow)$$

Az eredmény negatív előjele azt jelenti, hogy az A_x reakció-komponens az elkülönítés során feltételezettel ellentétes irányba (balra) mutat. A függőleges, z irányú vetületi egyenletben csak az A reakció függőleges komponense szerepel ismeretlenként, hiszen a B erőt korábban már meghatároztuk (B előjele az egyenletben azért negatív, mert felfelé, a z tengely negatív irányába mutat):

$$\sum F_{iz}: 12 - A_z - 7{,}2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 4{,}8\ \mathrm{kN}\ (\uparrow)$$

A pozitív eredmény azt jelzi, hogy a feltételezett irányba, felfelé mutat az A_z reakció-komponens. Az ismeretlen reakció-komponensek meghatározása után mindig írjunk fel legalább egy ellenőrző egyenletet! A B pontra felírt nyomatéki egyenletben már nem lesz ismeretlen, azt kell csupán ellenőriznünk, hogy teljesül-e a nyomatéki egyensúly:

$$\sum M_i^{(B)}: -4\cdot 3 + 12\cdot 5 - 4{,}8\cdot 10 = 0$$

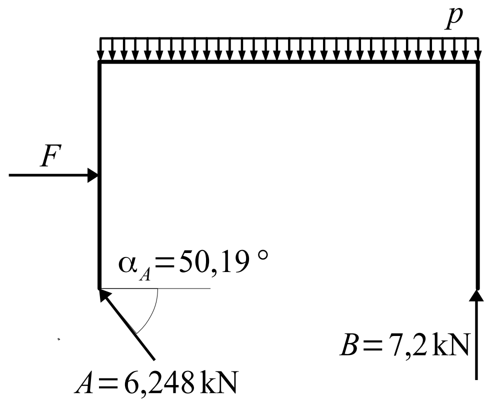
Az eredmény ellenőrzése után határozzuk meg az A reakció nagyságát és hatásvonalának vízszintessel bezárt szögét:

$$A = \sqrt{(4^2 + 4{,}8^2)} = 6{,}248\ \mathrm{kN}$$

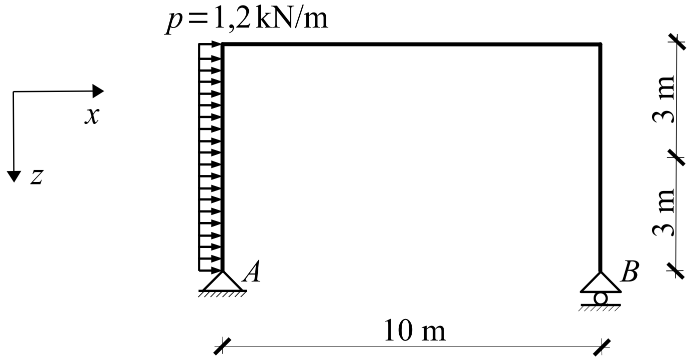
$$\alpha_A = \mathrm{arctg}\frac{4{,}8}{4} = 50{,}19\,°$$

Végül rajzoljuk le az elkülönített testet az összes rá ható erővel! A feladatban ismeretlenként szereplő erőket írjuk be mértékegységgel együtt az eredményvázlatba!

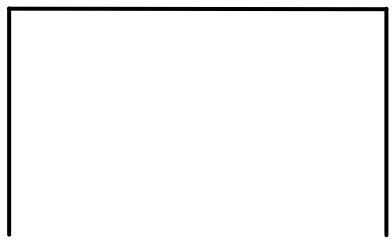
Eredményvázlat:



Gyakorlópélda - 1
Határozzuk meg az ábrán látható tartó reakcióit!



Megoldás
Az elkülönített szerkezet ábrája:



Egyensúlyi kijelentés:
Ismeretlenek: $i=$ A felírható skaláregyenletek száma: $e=$
Határozzuk meg a reakciók hatásvonalát szemlélet alapján!
Megoldás számítással:

.

.

.

Ellenőrző egyenlet:

.

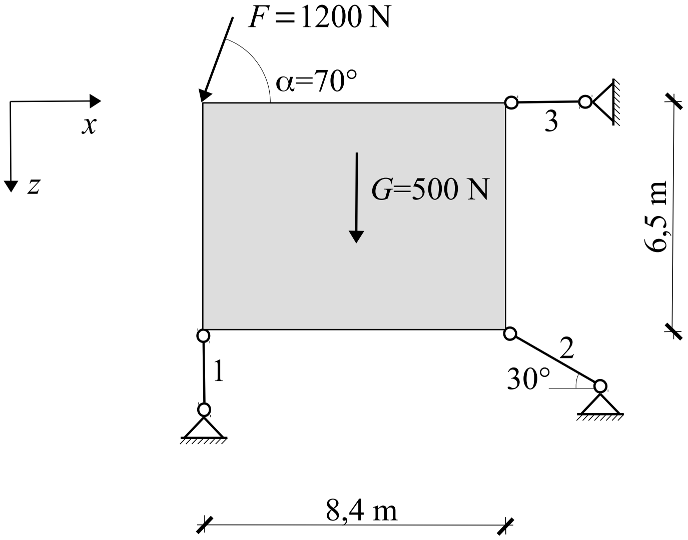
$A=$

$\alpha_A=$

Eredményvázlat:

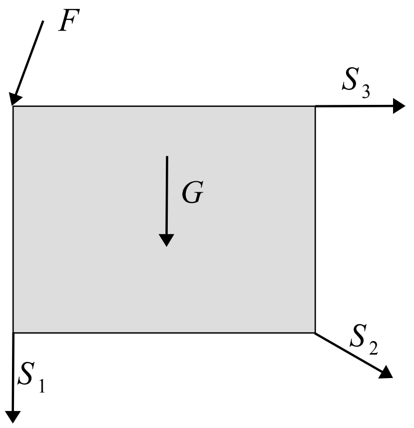
Mintapélda - 2

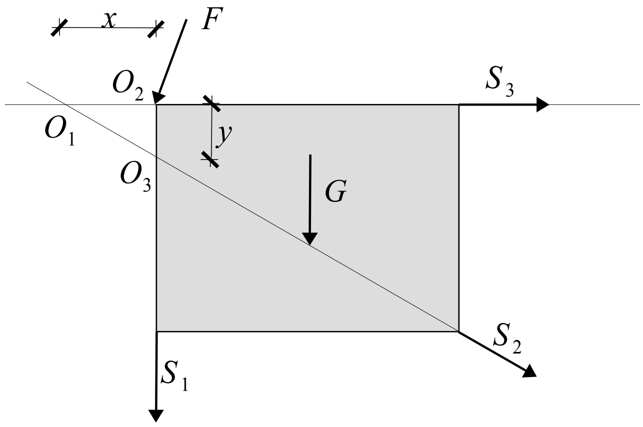
Határozzuk meg az ábrán látható tartó reakcióit!



Megoldás

A feladat megoldását kezdjük az elkülönítéssel (bal oldali ábra)! A rúderőket mindig húzottnak tételezzük fel.





Az egyensúlyi kijelentésben két aktív külső teher és a három támasztórúdban fellépő reakcióerő szerepel: $(F, G, S_1, S_2, S_3) \doteq 0$.

A három rúderőt egy-egy előjeles skalárral lehet megadni, tehát a feladatban szereplő ismeretlenek száma három (*i*=3). A felírható skaláregyenletek száma szintén három, hiszen egy szétszórt síkbeli erőrendszer egyensúlyát vizsgáljuk *(e*=3). Három adott hatásvonalú (reakció)erővel való egyensúlyozás esetén a Ritter-módszert érdemes alkalmazni, aminek az a lényege, hogy három nyomatéki egyenletet írunk fel, mindegyiket két-két ismeretlen erő hatásvonalának a metszéspontjára, az úgynevezett főpontokra. A Ritter-módszer alkalmazásához meg kell határoznunk a főpontok helyét. Az elkülönített szerkezet ábrája melletti rajzon feltüntettük a rúderők hatásvonalait és a főpontok helyzetét. Az x és y távolságokat geometriai összefüggések alapján tudjuk meghatározni.

$(x+8{,}4)\cdot \mathrm{tg}\, 30° = 6{,}5 \quad \rightarrow \quad x = 2{,}858\,\mathrm{m}$

$y = x \cdot \mathrm{tg}\, 30° \quad \rightarrow \quad y = 1{,}650\,\mathrm{m}$

A főpontok helyzetének meghatározása után felírjuk és megoldjuk a három nyomatéki egyenletet:

$\sum M_i^{(O_1)}: -1200 \cdot \sin(70°) \cdot 2{,}858 - 500 \cdot 7{,}058 - S_1 \cdot 2{,}858 = 0 \quad \rightarrow \quad S_1 = -2362\,\mathrm{N}\,(\text{nyomott})$

$\sum M_i^{(O_2)}: -500 \cdot 4{,}2 + S_2 \cdot \cos(30°) \cdot 1{,}650 = 0 \quad \rightarrow \quad S_2 = 1470\,\mathrm{N}\,(\text{húzott})$

$\sum M_i^{(O_3)}: 1200 \cdot \cos(70°) \cdot 1{,}650 - 500 \cdot 4{,}2 - S_3 \cdot 1{,}65 = 0 \quad \rightarrow \quad S_3 = -862{,}3\,\mathrm{N}\,(\text{nyomott})$

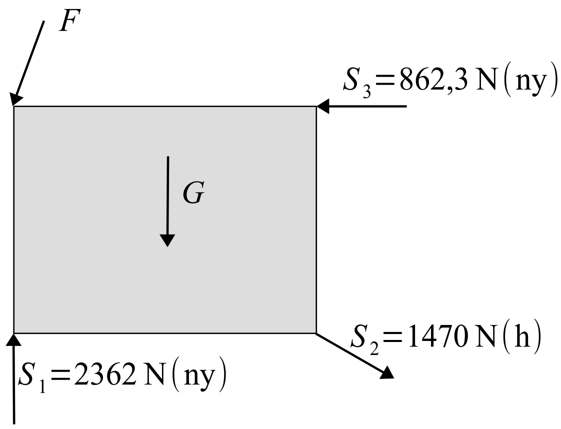
A második egyenletben az S_2 erőt az O_3 pontban bontottuk fel. Mivel csak nyomatéki egyenleteket írtunk fel a rúderők meghatározásához, „megmaradt” a két vetületi egyenlet ellenőrzésre:

$\sum F_{ix}: -1200 \cdot \cos(70°) + 1470 \cdot \cos(30°) - 862{,}3 = 0{,}3 \approx 0$

$\sum F_{iz}: 1200 \cdot \sin(70°) + 500 - 2362 + 1470 \cdot \sin(30°) = 0{,}6 \approx 0$

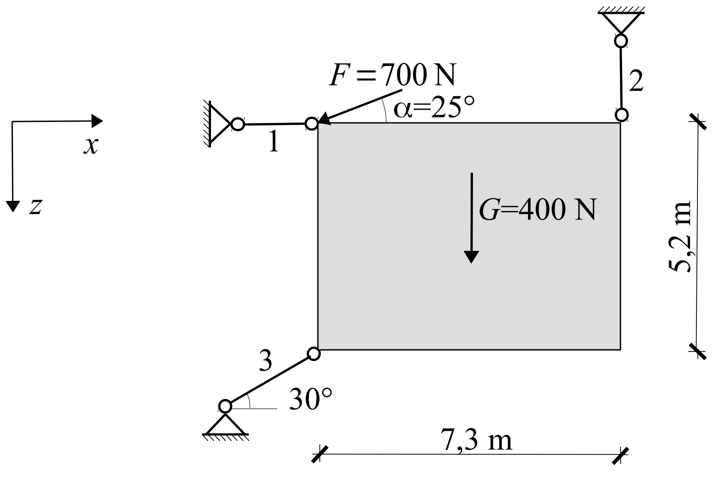
Mivel a kapott hiba mindkét egyenlet esetén nagyságrendekkel kisebb, mint az egyenletekben szereplő mennyiségek, így elfogadhatjuk az eredményeket. Az ellenőrző egyenletek felírása után elkészítjük az eredményvázlatot, ahol a testre ható rúderőket a meghatározott értelemnek (húzás/nyomás) megfelelően rajzoljuk.

Eredményvázlat:



Gyakorlópélda - 2

Határozzuk meg az ábrán látható tartó reakcióit!



Megoldás
Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentés:
A felírható skaláregyenletek száma:
Ismeretlenek:
A főpontok helyének számítása:

Megoldás számítással:

.

.

.

Ellenőrző egyenletek:

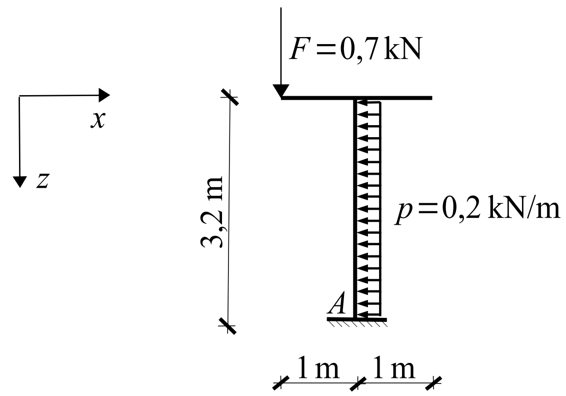
.

.

Eredményvázlat:

Mintapélda - 3

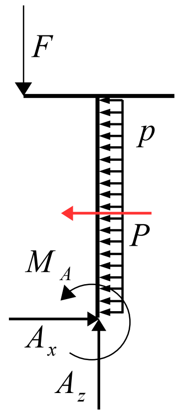
Határozzuk meg az ábrán látható konzoltartó reakcióit! A támaszerőnek elég a komponenseit kiszámolni.



Megoldás

A feladat megoldását kezdjük az elkülönítéssel és az egyensúlyi kijelentés felírásával! A testre az aktív terheken kívül a befogásnál fellépő reakciók hatnak, egy adott ponton átmenő, de ismeretlen hatásvonalú *A* erő és egy M_A befogási nyomaték.

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Az egyensúlyi kijelentés: $(F,(p),A,M_A)\doteq 0$

A testre szétszórt síkbeli erőrendszer hat, tehát az egyensúlyi kijelentés alapján három független skaláregyenletet lehet felírni. Az ismeretlenek száma szintén három, az *A* reakcióerő két komponense és a befogási nyomaték. Konzoltartó esetén két vetületi egyenlet és a befogási keresztmetszet súlypontjára felírt nyomatéki egyenlet mindig három egyismeretlenes egyenletre vezet. A vetületi egyenletekben csak a reakció adott irányú komponense szerepel ismeretlenként, a nyomatéki egyenletben pedig csak a befogási nyomaték, hiszen a reakcióerő karja zérus a befogási keresztmetszet súlypontjára. Írjuk fel és oldjuk meg ezeket a statikai egyenleteket:

$$\sum M_i^{(A)}: 0{,}7\cdot 1+0{,}2\cdot 3{,}2\cdot 1{,}6+M_A=0 \quad \rightarrow \quad M_A=-1{,}724\,\text{kNm} \quad (\;)$$

$$\sum F_{iz}: 0{,}7-A_z=0 \quad \rightarrow \quad A_z=0{,}7\,\text{kN}\,(\uparrow)$$

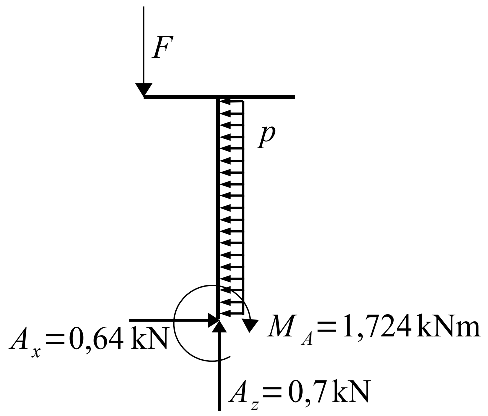
$$\sum F_{ix}: -0{,}2\cdot 3{,}2+A_x=0 \quad \rightarrow \quad A_x=0{,}64\,\text{kN}\,(\rightarrow)$$

A reakciók meghatározása után írjunk fel egy ellenőrző egyenletet az *F* erő támadáspontjára:

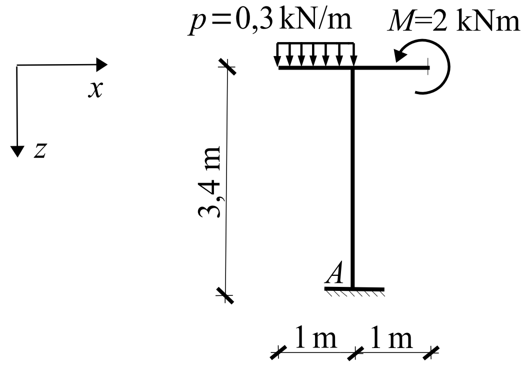
$$\sum M_i^{(F)}: -0{,}2\cdot 3{,}2\cdot 1{,}6-1{,}724+0{,}7\cdot 1+0{,}64\cdot 3{,}2=0$$

Az eredmények ellenőrzése után rajzoljuk meg az eredményvázlatot!

Eredményvázlat:

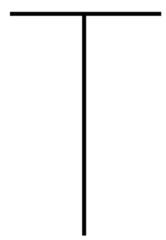


Gyakorlópélda - 3
Határozza meg az ábrán látható tartó reakcióit! A támaszerőnek elég a komponenseit kiszámolni.



Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:

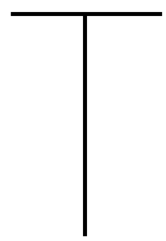


Egyensúlyi kijelentés:
Megoldás számítással:

.

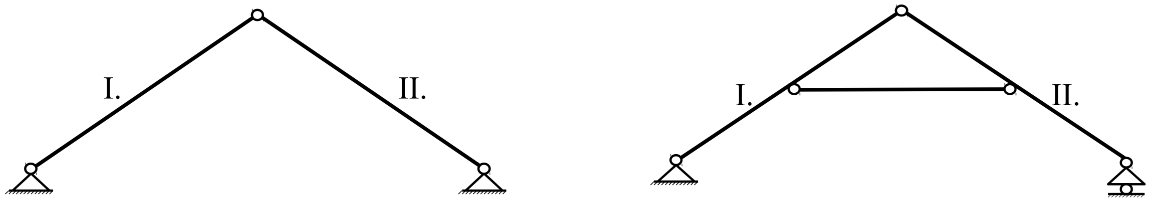
Ellenőrző egyenlet:
.

Eredményvázlat:

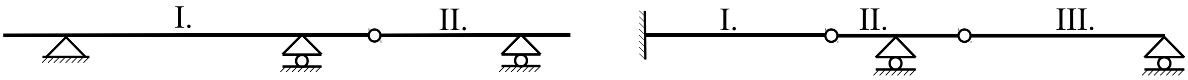


Összetett tartók

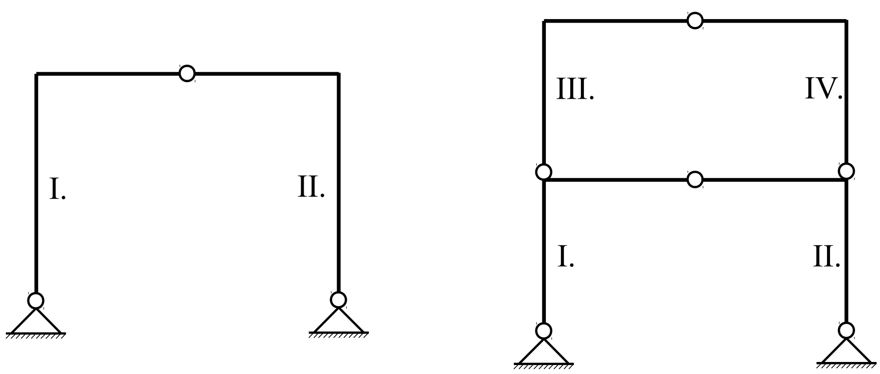
A bármilyen elrendezésű teher viselésére alkalmas, több testből álló szerkezeteket összetett tartóknak nevezzük. A testeket egymáshoz és a földhöz kényszerekkel kapcsoljuk. A testet a földhöz kapcsoló kényszereket külső kényszereknek nevezzük, ezek megegyeznek az egyszerű tartóknál tanultakkal. A testeket egymáshoz kapcsoló kényszereket belső kényszereknek nevezzük. A 13.1. - 13.4. ábrákon a magas- és a hídépítés néhány gyakran előforduló szerkezettípusának statikai modellje látható.



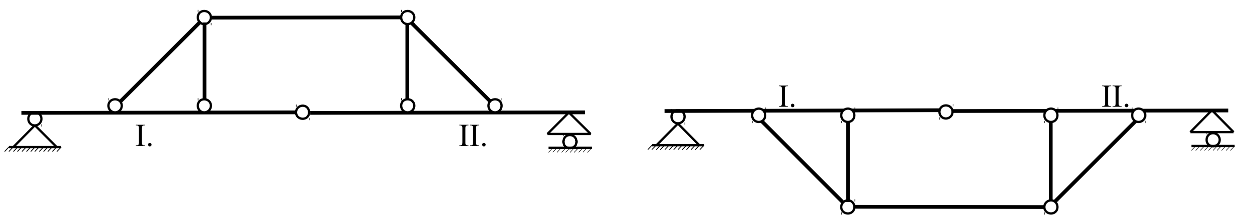
13.1. ábra. Fedélszékek statikai modelljei, üres fedélszék (bal oldali ábra) és fogópárral merevített fedélszék (jobb oldali ábra)



13.2. ábra. Összetett gerendatartók (Gerber-tartók)



13.3. ábra. Összetett keretszerkezetek



13.4. ábra. Függesztőműves (bal oldali ábra) és feszítőműves (jobb oldali ábra) tartó

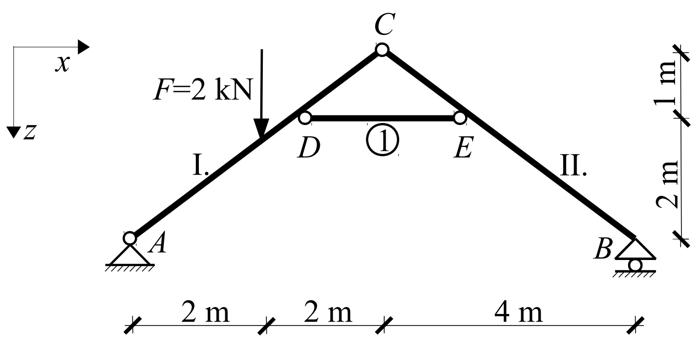
Összetett tartók reakcióinak meghatározása számítással

Egy összetett szerkezet csak akkor lehet egyensúlyban, ha minden alkotórésze egyensúlyban van. A reakciók meghatározása az összetett tartók esetén is az egyszerű tartóknál ismertetett lépésekben történik. Első lépésben elkészítjük az *elkülönített szerkezeti részek ábráját*. Ez azt jelenti, hogy külön-külön lerajzoljuk a szerkezetet alkotó testeket és minden rájuk ható erőt, illetve forgatónyomatékot. Második lépésben felírjuk az elkülönített testekre és a teljes szerkezetre vonatkozó *egyensúlyi kijelentések*et. Az elkülönített testekre vonatkozó egyensúlyi kijelentésekben az összes olyan erő és forgatónyomaték szerepel, ami az adott testre hat. A teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentésben kizárólag a külső aktív és passzív (reakció) erők és nyomatékok szerepelnek, a belső reakciók nem. A tartórészekre vonatkozó egyensúlyi kijelentések alapján testenként három, csuklónként két független skalár egyenletet lehet felírni. A teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján három skalár egyenletet lehet felírni, de ezek nem függetlenek a tartórészekre felírt egyenletektől. A tartórészekre vonatkozó egyensúlyi egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva meghatározhatjuk a reakciókat (statikailag határozott szerkezet esetén). Kézi számítás esetén azonban egyenletrendszer helyett célszerűbb egyismeretlenes egyenletekkel dolgozni. Ezért a megoldás során arra törekszünk, hogy olyan sorrendben írjunk fel a különböző tartórészekre vagy éppen a teljes szerkezetre vonatkozó nyomatéki és vetületi egyenleteket, hogy azokban lehetőleg csak egy ismeretlen legyen. (Akár azon az áron, hogy közben felhasználunk korábban kiszámolt reakciókat is.) Összeszámoljuk egyensúlyi kijelentésenként a felírható független (skalár) egyensúlyi egyenleteket és az ezekben szereplő skalár ismeretleneket, így el tudjuk eldönteni, hogy melyik tartórész vizsgálatával érdemes kezdeni a reakciók számítását. A harmadik lépés tehát az *egyensúlyi egyenletek* (megfelelő sorrendben történő) *felírása* és *a külső és belső reakciók kiszámítása*. A megoldás fontos része az *ellenőrzés*, ami olyan egyensúlyi egyenletek felírását jelenti, amelyekben adott aktív terhek és már meghatározott külső és/vagy belső reakciók szerepelnek. A megoldás utolsó lépése az *eredményvázlat* elkészítése, ez azt jelenti, hogy az elkülönített tartórészekre felrajzoljuk az aktív terheket, illetve a kiszámított külső és belső reakciókat.

A **13.1.** ábrán fedélszékek statikai modelljei láthatók. Alapvető különbség a két szerkezet között, hogy függőleges terhekből a bal oldali szerkezet esetén keletkeznek vízszintes reakciókomponensek is, a jobb oldali szerkezetnél viszont nem. Mindkét szerkezettípusra nézzünk példákat!

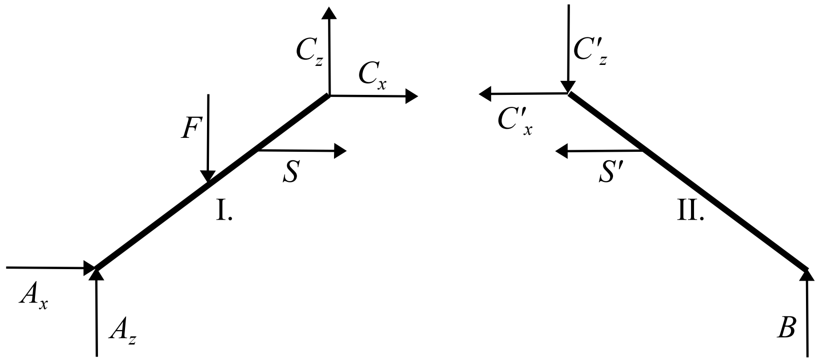
Mintapélda - 1

Határozzuk meg a külső és belső reakciókat! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)

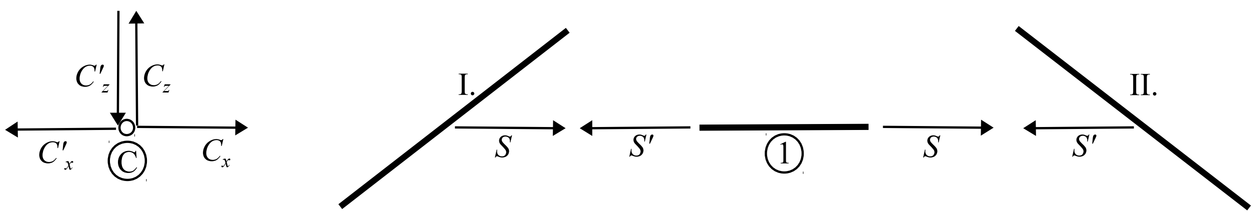


Megoldás

Az elkülönítéssel kezdjük a feladat megoldását. Összetett tartók elkülönítése során fel kell rajzolnunk minden olyan tartórészt (de csak azokat), amelyekre kettőnél több erő vagy forgatónyomaték hat.
Az I. jelű testre négy erő hat, fel kell tehát rajzolnunk elkülönítve. A testre ható erők közül az *F* aktív teher adott. Az *A* jelű támasz egy fix csukló, tehát az *A* reakcióerőnek lehet *x* és *z* irányú komponense is, ezek értelmét tetszőlegesen felvehetjük. A *C* pontban szintén egy csuklóval kapcsolódik egymáshoz az I. illetve a II. jelű test, a *C* belső reakcióerő két komponensének értelmét tetszőlegesen felvehetjük. A két testet összekötő rúdban fellépő *S* rúderő hatásvonala vízszintes, a rudakat pedig mindig húzottnak tételezzük fel, ezért az I. testre egy jobbra mutató *S* erőt rajzolunk.



A II. jelű testre három erő hat, a *C* erő ellentettje (*C'*), az *S'* rúderő és a görgőnél fellépő függőleges *B* erő, amelynek értelme tetszőlegesen felvehető. Az *S'* erő nagysága megegyezik az I. testre ható *S* erő nagyságával, de húzott rúd esetén a II. testre egy balra mutató (húzó-) erő hat.
A következő ábrán megmutatjuk, hogy miért nem kell elkülöníteni a *C* csuklót (és hasonló okok miatt a *D* és *E* csuklókat sem), illetve az *S* jelű rudat. Ha az I. jelű testre a *C* csuklóról *C* erő hat, akkor Newton III. törvényének értelmében az I. testről a csuklóra ennek az ellentettje, tehát *C'* erő. Mivel a *C* csukló az I. és II. testekről rá ható két erő hatására egyensúlyban kell hogy legyen, a II. testről a *C* csuklóra ható erő *C'* ellentettje kell hogy legyen, ami nem más, mint a *C* erő. Ez azt jelenti, hogy a *C* csuklóról a II. testre ható erő ismét a *C'* erő lesz. A két erővel terhelt rúd esetén hasonlóan belátható, hogy a rúdról az I. és II. jelű testekre átadódó erők szintén egymás ellentettjei lesznek, hiszen a rúdra ható erők egymás ellentettjei kell hogy legyenek. Ezért a továbbiakban azokat a tartórészeket, amelyekre csak két erő hat nem rajzoljuk fel külön az elkülönítés során, ezzel egyszerűsítve a megoldást.



A tartó elkülönített ábrájának megrajzolása után írjuk fel az egyensúlyi kijelentéseket minden olyan tartórészre, amit elkülönítve felrajzoltunk, plusz írjuk fel az egyensúlyi kijelentést a teljes szerkezetre is!

	e.	i.	új i.
I.:$(F, A, C, S) \doteq 0$	3	5	5
II.:$(B, C', S') \doteq 0$	3	4	1
Sz.:$(F, A, B) \doteq 0$	(3)	3	

Az egyensúlyi kijelentések mellett feltüntettük az azok alapján felírható független skaláregyenletek számát (e.), az egyensúlyi kijelentésekben szereplő skalár ismeretlenek számát (i.) és azt is, hogy ezek közül hány számít újnak (új i.), mert nem szerepelt még (az erő ellentettje sem) a korábbi egyensúlyi kijelentésekben. A teljes szerkezet egyensúlyi kijelentése mellett azért szerepel a felírható skalár egyenletek száma zárójelben, mert ezek nem függetlenek a tartórészekre felírt egyenletektől. A teljes szerkezetre felírt egyensúlyi kijelentésben új ismeretlenek nem szerepelnek.
A számításhoz felírt skaláregyenletek sorrendjének eldöntéséhez egyensúlyi kijelentésenként az egyenletek és az ismeretlenek számát érdemes összehasonlítani, és általában azzal a tartórésszel érdemes kezdeni a számítást, ahol ez a két szám megegyezik. Ennél a példánál az I. és a II. tartórésznél is nagyobb az ismeretlenek száma (i.), mint a felírható egyenletek száma (e.), a teljes szerkezetnél viszont ez a két szám megegyezik. Kezdjük tehát a számítást a teljes szerkezet egyensúlyának vizsgálata alapján! A csuklóval és egy rúddal összekapcsolt I. és II. test kezelhető egyetlen testként is, a külső reakciókat ugyanúgy számolhatjuk, mintha egyetlen merev test lenne egy fix csuklóval és egy görgővel megtámasztva.
Összetett szerkezetek esetén mindig meg kell adnunk, hogy egy egyensúlyi egyenlet mire vonatkozik, az egész szerkezetre (Sz.) vagy valamelyik tartórészre (I. vagy II.). Az egész szerkezet egyensúlyát vizsgálva az *A* pontra vonatkozó nyomatéki egyenletből meg tudjuk határozni a *B* reakcióerőt. A *B* pontra felírt nyomatéki egyenletből ki tudjuk számolni az *A* reakció függőleges komponensét. Az *x* irányú vetületi egyenletből pedig azt kapjuk, hogy az *A* reakció vízszintes komponense zérus, tehát az *A* reakció függőleges:

$$\text{Sz.} \sum M_i^{(A)} : -2 \cdot 2 + B \cdot 8 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0{,}5 \text{ kN} (\uparrow)$$
$$\text{Sz.} \sum M_i^{(B)} : 2 \cdot 6 - A_z \cdot 8 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 1{,}5 \text{ kN} (\uparrow)$$
$$\text{Sz.} \sum F_{ix} : A_x = 0$$

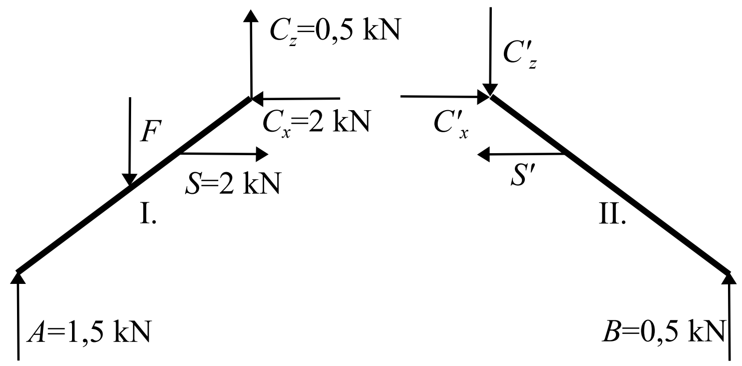
A külső reakciók meghatározása után az I. test egyensúlyi kijelentésében szereplő 5 reakció-komponens közül már csak három számít ismeretlennek, tehát a 3 felírható skaláregyenlet elég a meghatározásukhoz:

$$\text{I.} \sum M_i^{(C)} : 2 \cdot 2 + S \cdot 1 - 1{,}5 \cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad S = 2 \text{ kN (h)}$$
$$\text{I.} \sum F_{ix} : C_x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_x = -2 \text{ kN} (\leftarrow) \quad \rightarrow \quad C_x' = 2 \text{ kN} (\rightarrow)$$
$$\text{I.} \sum F_{iz} : 2 - 1{,}5 - C_z = 0 \quad \rightarrow \quad C_z = 0{,}5 \text{ kN} (\uparrow) \quad \rightarrow \quad C_z' = 0{,}5 \text{ kN} (\downarrow)$$

A *C* belső reakció vízszintes komponense a negatív eredmény miatt a feltételezettel ellentétes irányba mutat. A II. jelű testre ható C' erő komponensei a *C* erő komponenseivel ellentétes irányba mutatnak, amit a mértékegység után szintén felrajzolunk. Megjegyezzük, hogy a C'_x komponensnél már nem tüntetjük fel a negatív előjelet, mert a mértékegység után felrajzolt nyíl egyértelműen megadja, hogy a komponens merre mutat.
Ezzel tulajdonképpen minden külső és belső reakciót meghatároztunk, az eddig fel nem használt, a II. testre vonatkozó skaláregyenletek segítségével pedig ellenőrizhetjük az eredményeinket:

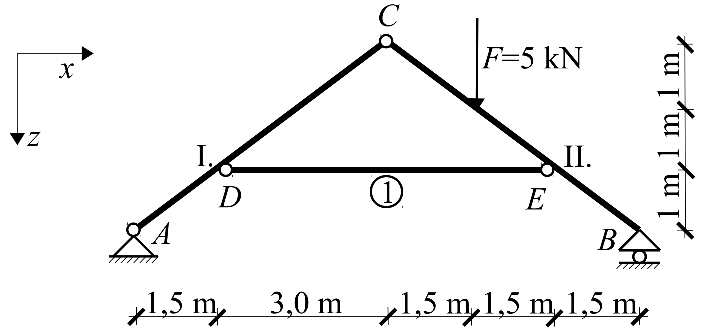
$$\text{II.} \sum F_{ix} : 2 - 2 = 0$$
$$\text{II.} \sum F_{iz} : -0{,}5 + 0{,}5 = 0$$

Miután meggyőződtünk az eredmények helyességéről, készítsük el az eredményvázlatot, tehát rajzoljuk fel ismét az elkülönített tartórészeket, az azokat terhelő aktív terheket és a meghatározott irányú reakció-komponenseket. Az ábrába írjuk be a reakcióerők kiszámított értékeit is! (Belső reakcióknál elég egy helyen feltüntetni a reakció-komponensek nagyságát.)



Gyakorlópélda -1

Határozzuk meg a külső és belső reakciókat! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)



Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentések:

e. i. új i.

I.:

II.:

Sz.:

Megoldás számítással:

$$\text{Sz.} \sum M_i^{(A)}:$$

$$\text{Sz.} \sum M_i^{(B)}:$$

$$\text{Sz.} \sum F_{ix}:$$

$$\text{I.} \sum M_i^{(C)}:$$

$$\text{I.} \sum F_{ix}:$$

$$\text{I.} \sum F_{iz}:$$

Ellenőrző egyenletek:

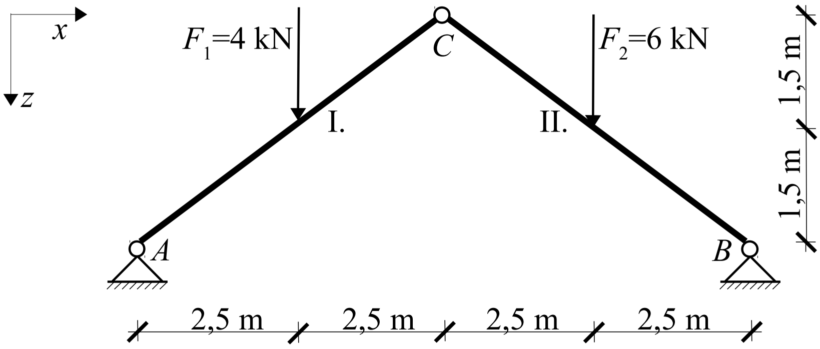
$$\text{II.} \sum F_{ix}:$$

$$\text{II.} \sum F_{iz}:$$

Eredményvázlat:

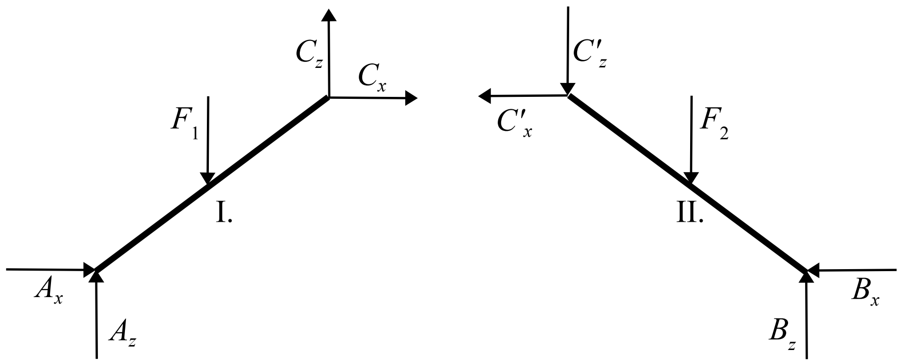
Mintapélda - 2

Határozzuk meg a külső és belső reakciókat! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)



Megoldás

Kezdjük a feladat megoldását az elkülönítéssel! Minden olyan tartórészt fel kell rajzolnunk a rá ható erőkkel együtt, amire ketőnél több erő hat. Az I. jelű testre három erő hat, az F_1 külső, aktív teher, az A külső reakcióerő a külső kényszerről és a C belső reakció az I.-es és II.-es testeket összekapcsoló belső csuklóról. A II. jelű testre szintén három erő hat, az F_2 külső, aktív teher, a B külső reakcióerő a külső kényszerről és egy belső reakció az I. és II. jelű testeket összekapcsoló belső csuklóról. Mivel a C belső csuklóra két erő hat, ezek egymás ellentettjei kell hogy legyenek. Ez egyben azt is jelenti, hogy a C csuklóról a II. jelű testre átadódó erő a C csuklóról az I. jelű testre átadódó erő ellentettje kell hogy legyen. (Ahogy azt az első mintapéldában részletesen bemutattuk.)



Az elkülönítés után írjuk fel az elkülönített tartórészekre és a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentéseket! Az egyensúlyi kijelentések mellett számoljuk össze az adott egyensúlyi kijelentés alapján felírható független skalár egyenletek számát, az egyensúlyi kijelentésben szereplő skalár ismeretleneket és ezek közül azokat, amelyek nem szerepeltek a megelőző egyensúlyi kijelentésekben!

	e.	i.	új i.
I.:$(F_1, A, C) \doteq 0$	3	4	4
II.:$(F_2, B, C') \doteq 0$	3	4	2
Sz.:$(F_1, F_2, A, B) \doteq 0$	(3)	4	

Az egyensúlyi kijelentések alapján hat független skalár egyenletet lehet felírni és az ismeretlenek száma is hat. Az egyensúlyi kijelentésekre jutó skalár egyenletek és ismeretlenek számát összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy mindegyik egyensúlyi kijelentés esetén nagyobb az ismeretlenek száma, mint az egyenletek száma. A speciális geometria miatt azonban mégis el tudjuk kezdeni a számítást egyismeretlenes egyenletekkel. A teljes szerkezetre vonatkozó, valamelyik külső támaszra felírt nyomatéki egyenletben ugyanis a négy ismeretlen reakciókomponens közül csak az egyik szerepel:

Sz. $\sum M_i^{(A)}: -4\cdot 2{,}5 - 6\cdot 7{,}5 + B_z\cdot 10 = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = 5{,}5\ \text{kN}\ (\uparrow)$

Sz. $\sum M_i^{(B)}: +4\cdot 7{,}5 + 6\cdot 2{,}5 - A_z\cdot 10 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 4{,}5\ \text{kN}\ (\uparrow)$

A külső reakcióerők függőleges komponenseinek meghatározása után a két elkülönített testre vonatkozó egyensúlyi kijelentésekben már csak 3-3 ismeretlen maradt, így azokat ki tudjuk számolni. Az I. jelű testre felírt három egyensúlyi egyenletből meg tudjuk határozni a külső reakció vízszintes komponensét és a *C* belső reakció komponenseit.

I. $\sum M_i^{(C)}: 4\cdot 2{,}5 - 4{,}5\cdot 5 + A_x\cdot 3 = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = 4{,}167\,\text{kN}\ (\rightarrow)$

I. $\sum F_{ix}: 4{,}167 + C_x = 0 \quad \rightarrow \quad C_x = -4{,}167\ \text{kN}\ (\leftarrow) \quad \rightarrow \quad C'_x = 4{,}167\ \text{kN}\ (\rightarrow)$

I. $\sum F_{iz}: 4 - 4{,}5 - C_z = 0 \quad \rightarrow \quad C_z = -0{,}5\ \text{kN}\ (\downarrow) \quad \rightarrow \quad C'_z = 0{,}5\ \text{kN}\ (\uparrow)$

A belső reakció komponensei a negatív eredmény miatt a feltételezettel ellentétes irányba mutatnak. A II. jelű testre ható C' erő komponensei a *C* erő komponenseivel ellentétes irányba mutatnak, amit a mértékegység után szintén felrajzolunk. Megjegyezzük, hogy a C'_x, C'_z komponenseknél már nem tüntetjük fel a negatív előjelet, mert a mértékegység után felrajzolt nyilak egyértelműen megadják, hogy a komponensek merre mutatnak. Egyetlen ismeretlen maradt, a *B* külső reakció vízszintes komponense, amit például a II. jelű test egyensúlya alapján a *C* csuklóra felírt nyomatéki egyenletből meg tudunk határozni.

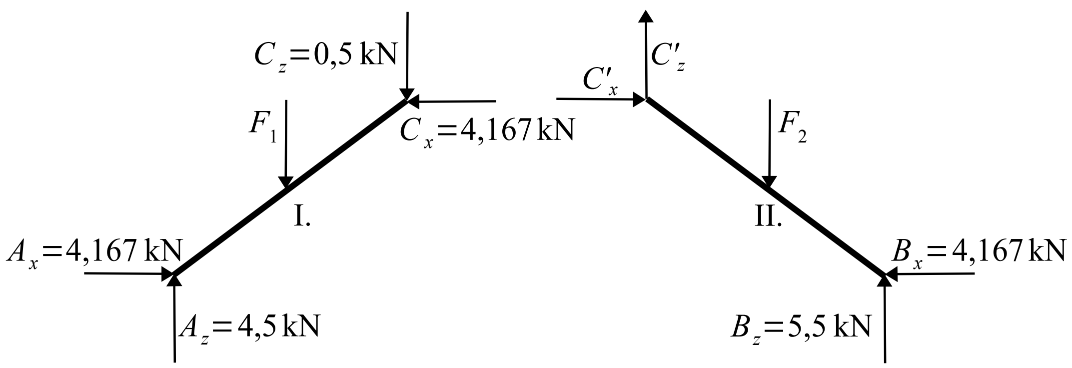
II. $\sum M_i^{(C)}: -6\cdot 2{,}5 + 5{,}5\cdot 5 - B_x\cdot 3 = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 4{,}167\ \text{kN}\ (\leftarrow)$

Az eredményeket ellenőrizzük a II. jelű testre felírt két vetületi egyenlettel!

II. $\sum F_{ix}: 4{,}167 - 4{,}167 = 0$

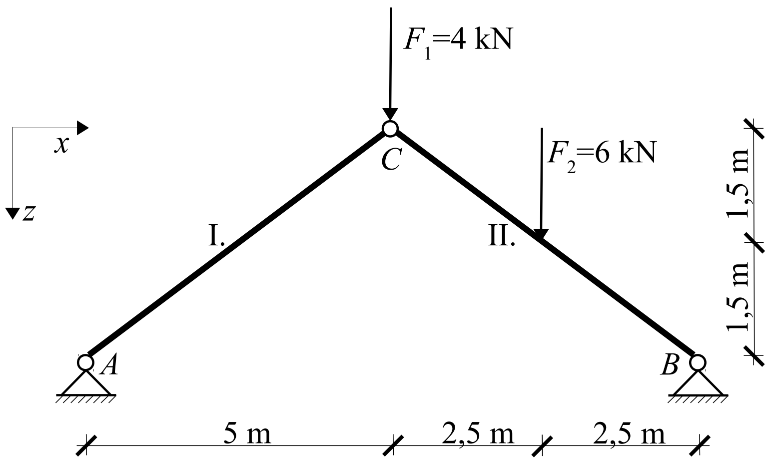
II. $\sum F_{iz}: 6 - 5{,}5 - 0{,}5 = 0$

Az eredmények ellenőrzése után készítsük el az eredményvázlatot!



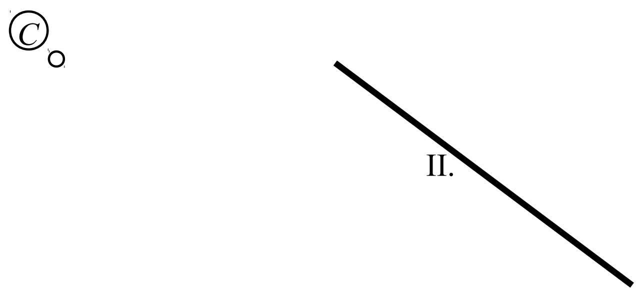
Gyakorlópélda - 2

Határozzuk meg az ábrán látható szerkezet külső és belső reakcióit! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)



Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Egyensúlyi kijelentések:

e. i. új i.

II.:

C:

Sz.:

Megoldás számítással:

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

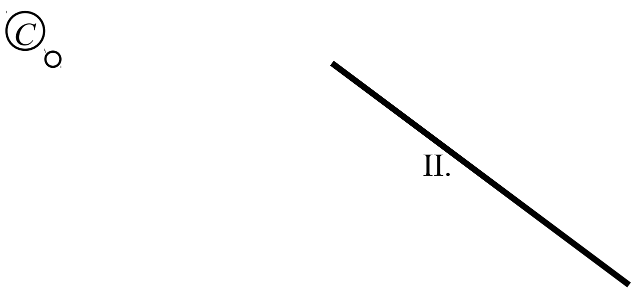
$\sum$

Ellenőrző egyenletek:

$\sum$

$\sum$

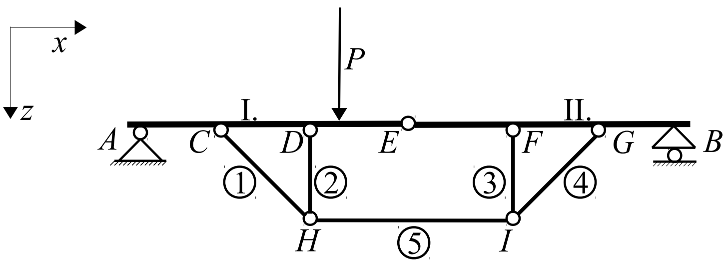
Eredményvázlat:



Mintapélda - 3

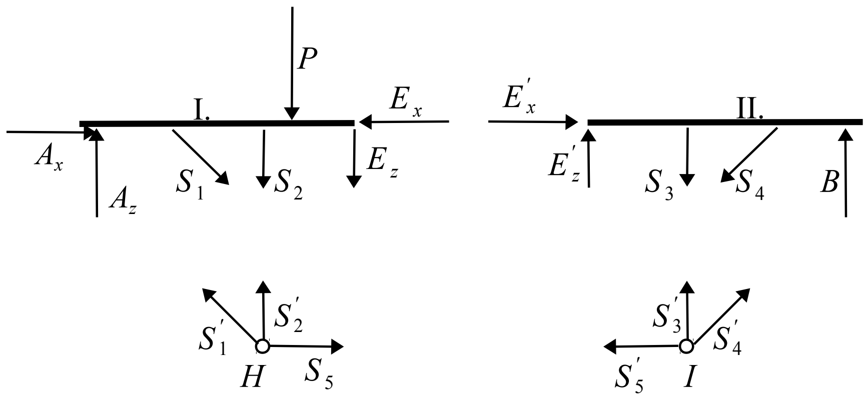
Megoldás

Végezzük el a szerkezet elkülönítését, írjuk fel az egyensúlyi kijelentéseket, számoljuk össze az ismeretleneket és a független skalár egyensúlyi egyenleteket!



Első lépésben végezzük el az elkülönítést! Minden olyan tartórészt fel kell rajzolnunk, amire kettőnél több erő hat. Az I. jelű gerendára öt erő hat, a *P* aktív teher, az *A* külső reakcióerő, az S_1, S_2 rúderők és az *E* csuklóerő (az utolsó három erő belső reakcióerő). A II. jelű testre négy erő hat, a *B* külső reakcióerő, az S_3, S_4 rúderők és az *E'* csuklóerő (az utolsó három erő belső reakcióerő). Mivel az E csuklóra csak két erő hat, ezek egymás ellentettjei lesznek és így az *E* csuklóról a II. jelű testre ható erő az *E* csuklóról a I. jelű testre ható erő ellentettje lesz. A csuklók közül a *H* és *I* jelűeket kell elkülöníteni, mindkettőre három rúderő hat.

Az elkülönített szerkezet ábrája:



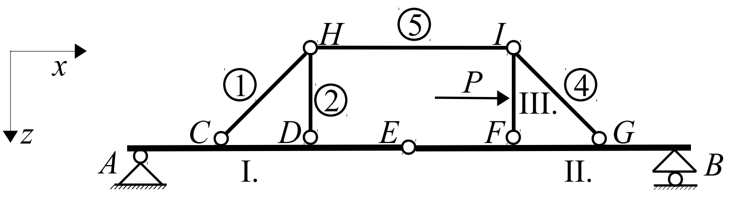
Az elkülönítés alapján írjuk fel a tartórészekre és a teljes tartóra vonatkozó egyensúlyi kijelentéseket. Az egyensúlyi kijelentések mellett számoljuk össze az adott egyensúlyi kijelentés alapján felírható független skalár egyenletek számát, az egyensúlyi kijelentésben szereplő skalár ismeretleneket és ezek közül azokat, amelyek nem szerepeltek a megelőző egyensúlyi kijelentésekben!

	e.	i.	új i.
I.:$(P, S_1, S_2, E, A) \doteq 0$	3	6	6
II.:$(S_3, S_4, E', B) \doteq 0$	3	5	3
H:$(S'_1, S'_2, S_5) \doteq 0$	2	3	1
I:$(S'_3, S'_4, S'_5) \doteq 0$	2	3	0
Sz.:$(P, A, B) \doteq 0$	(3)	3	

A felírható független egyensúlyi egyenletek száma és a skalár ismeretlenek száma egyaránt 10 (*e*=*i*), tehát a szerkezet teljesíti a statikai határozottság szükséges, de nem elégséges feltételét.

Gyakorlópélda – 3

Végezzük el a szerkezet elkülönítését, írjuk fel az egyensúlyi kijelentéseket, számoljuk össze az ismeretleneket és a független skalár egyensúlyi egyenleteket!



Megoldás

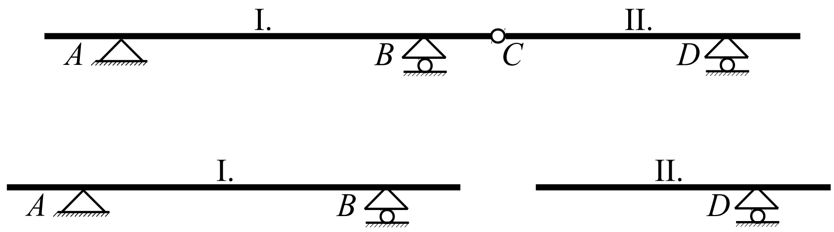
Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentések:

Összetett tartók II.

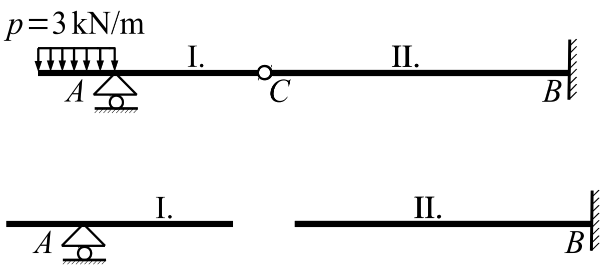
*Gerber-tartó*nak nevezzük az olyan összetett tartókat, amelyeknek van legalább egy *fix* és egy *befüggesztett tartórész*ük. Egy összetett tartót alkotó testek közül azt nevezzük a tartó fix részének, amely csupán a külső kényszereivel (a tartó többi része nélkül) statikailag határozott módon van megtámasztva. A tartó befüggesztett része ezzel szemben csupán külső kényszereivel statikailag túlhatározott szerkezet lenne, teherviselésre csak a többi tartórészre támaszkodva alkalmas. (Egy Gerber-tartónak lehet több fix és befüggesztett része is.) A Gerber-tartók vizsgálatát egyszerű tartók sorozatának számítására vezetjük vissza. A befüggesztett rész egyensúlya alapján meghatározott belső reakció-komponenseket, mint külső terheket működtetjük a tartó fix részére. Ezek után a fix rész reakciói hasonlóan számíthatók, mint egy egyszerű tartó reakciói.

A **14.1.** ábrán látható szerkezet egy Gerber-tartó, ahol az I. jelű test a tartó fix része, a II. jelű test a tartó befüggesztett része. Az I. jelű test külső kényszereivel egy statikailag határozott kéttámaszú tartónak felel meg, külső kényszereinek összfokszáma három. A II. jelű test külső kényszereinek összfokszáma egy, tehát önmagában statikailag túlhatározott lenne. A befüggesztett rész egy csuklóval kapcsolódik a tartó fix részéhez, és a *D* jelű külső kényszer mellett ezzel kettes fokszámú belső kényszerrel megtámasztva válik teherviselővé.



14.1. ábra. Gerber-tartó (felső ábra) és a tartó fix (I.), illetve befüggesztett (II.) része külön ábrázolva, saját külső kényszereikkel (alsó ábra)

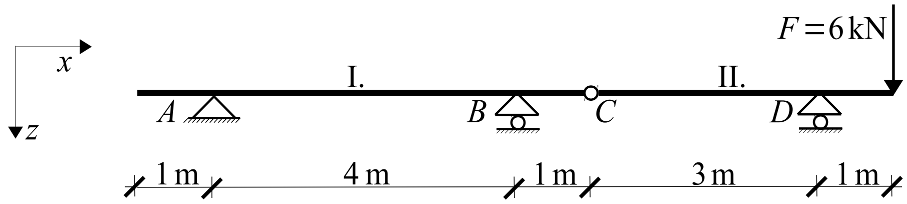
A **14.2.** ábrán látható szerkezet szintén egy Gerber-tartó, ahol a II. jelű test a tartó fix része, az I. jelű test a tartó befüggesztett része. Az II. jelű test külső kényszereivel egy statikailag határozott konzoltartónak felel meg, külső kényszereinek összfokszáma három. A II. jelű test külső kényszereinek összfokszáma egy, tehát önmagában statikailag túlhatározott lenne. A befüggesztett rész egy csuklóval kapcsolódik a tartó fix részéhez, az *A* jelű külső kényszer mellett ezzel a kettes fokszámú belső kényszerrel megtámasztva válik teherviselővé.



14.2. ábra. Gerber-tartó (felső ábra) és a tartó fix (II.), illetve befüggesztett (I.) része külön ábrázolva, saját külső kényszereikkel (alsó ábra)

Mintapélda - 1

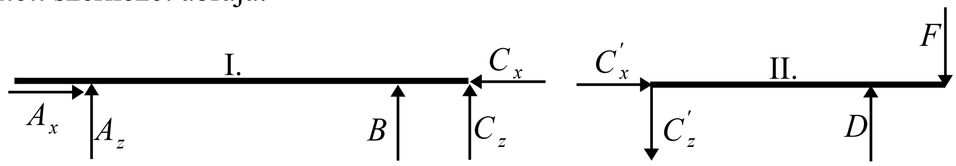
Határozzuk meg a Gerber-tartó külső és belső reakcióit! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)



Megoldás

Az elkülönítéssel kezdjük a feladat megoldását. Elkülönítve fel kell rajzolnunk minden olyan tartórészt (de csak azokat), amelyekre kettőnél több erő hat. A Gerber-tartó fix részére (I.) az *A* és *B* külső reakcióerők és a *C* belső reakcióerő hat. A *C* csuklóra csak két erő hat, ezért nem kell külön vizsgálnunk. A tartó befüggesztett részére (II.) az *F* aktív teher, a *C'* belső reakció és a *D* külső reakcióerő hat.

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Az elkülönítés után írjuk fel az elkülönített tartórészekre és a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentéseket! Az egyensúlyi kijelentések mellett pedig számoljuk össze az adott egyensúlyi kijelentés alapján felírható független skaláregyenleteket, az egyensúlyi kijelentésben szereplő skalár ismeretleneket és ezek közül azokat, amelyek nem szerepeltek a megelőző egyensúlyi kijelentésekben!

	e.	i.	új i.
I.: $(A, B, C) \doteq 0$	3	5	5
II.: $(F, C', D) \doteq 0$	3	3	1
Sz.: $(F, A, B, D) \doteq 0$	(3)	4	

Az egyensúlyi kijelentések alapján hat független skaláregyenletet lehet felírni és az ismeretlenek száma is hat, teljesül tehát a statikai határozottság szükséges feltétele. A számításhoz felírt skaláregyenletek sorrendjének eldöntéséhez egyensúlyi kijelentésenként az egyenletek és az ismeretlenek számát hasonlítjuk össze, és általában azzal a tartórésszel érdemes kezdeni a számítást, ahol ez a két szám megegyezik. Gerber-tartók esetén mindig a befüggesztett tartórészen kezdjük a számítást. (Ha több befüggesztett része van a tartónak, akkor azon kezdjük a számítást, amelyiknél megegyezik a független skaláregyenletek és az ismeretlenek száma.)

Kezdjük tehát a számítást a tartó befüggesztett részén:

$$\text{II.} \sum M_i^{(C)}: -6 \cdot 4 + D \cdot 3 = 0 \quad \rightarrow \quad D = 8\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$$

$$\text{II.} \sum F_{ix}: C'_x = 0 \quad \rightarrow \quad C_x = 0$$

$$\text{II.} \sum F_{iz}: 6 + C'_z - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad C'_z = 2\,\mathrm{kN}\,(\downarrow) \quad \rightarrow \quad C_z = 2\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$$

A *C* belső reakció komponenseinek meghatározása után az I. test egyensúlyi kijelentésében szereplő öt ismeretlen közül már csak három számít ismeretlennek, tehát a három felírható skaláregyenlet elég azoknak a meghatározásához.

I. $\sum M_i^{(A)}: B\cdot 4 + 2\cdot 5 = 0 \quad \rightarrow \quad B = -2{,}5\ \mathrm{kN}\ (\downarrow)$

I. $\sum F_{ix}: A_x = 0$

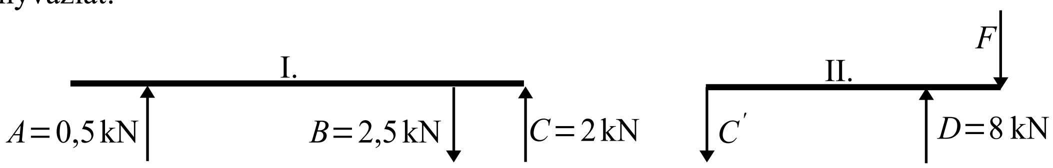
I. $\sum M_i^{B}: -A_z\cdot 4 + 2\cdot 1 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 0{,}5\,\mathrm{kN}\ (\uparrow)$

Ezzel minden külső és belső reakciót meghatároztunk, írjuk fel ellenőrzésül a teljes szerkezetre vonatkozó függőleges vetületi egyenletet:

Sz. $\sum F_{iz}: 6 - 0{,}5 + 2{,}5 - 8 = 0$

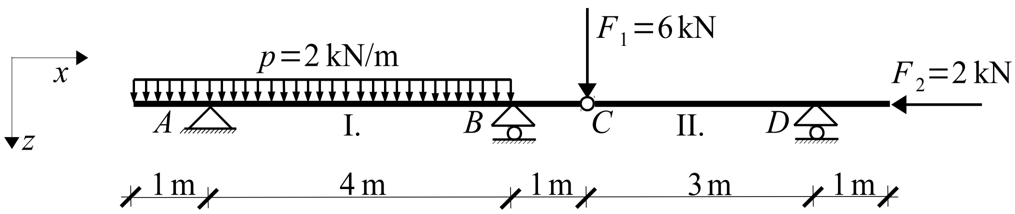
Miután meggyőződtünk az eredmények helyességéről, készítsük el az eredményvázlatot, tehát rajzoljuk fel ismét az elkülönített tartórészeket, az azokat terhelő aktív terheket és a meghatározott irányú reakció komponenseket. Az ábrába írjuk be a reakcióerők kiszámított értékeit is!

Eredményvázlat:



Gyakorlópélda -1

Határozzuk meg a Gerber-tartó külső és belső reakcióit! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)



Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentések:

e. i. új i.

I.:

C:

II.:

Sz.:

Megoldás számítással:

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

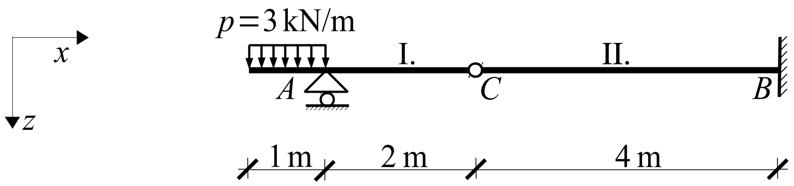
Ellenőrzés:

$\sum$

Eredményvázlat:

Mintapélda - 2

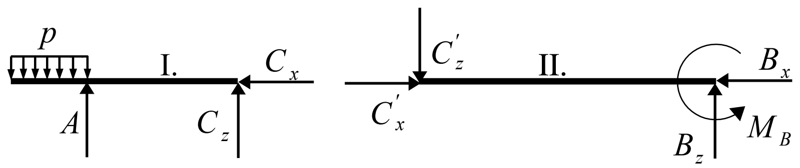
Határozzuk meg a Gerber-tartó külső és belső reakcióit! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)



Megoldás

Kezdjük a feladat megoldását az elkülönítéssel! Minden olyan tartórészt külön vizsgálnunk kell, amire kettőnél több erő vagy forgatónyomaték hat. Az I. jelű testre a *p* aktív megoszló teher, az *A* külső reakcióerő és a *C* belső reakció hat. Mivel a *C* belső csuklóra csak két erő hat, ezek egymás ellentettjei kell, hogy legyenek. A II. jelű testre a *C* belső reakció ellentettje, a *B* külső reakcióerő és az M_B befogási nyomaték hat.

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Az elkülönítés után írjuk fel az elkülönített tartórészekre és a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentéseket! Az egyensúlyi kijelentések mellett számoljuk össze az adott egyensúlyi kijelentés alapján felírható független skaláregyenleteket, az egyensúlyi kijelentésben szereplő skalár ismeretleneket és ezek közül azokat, amelyek nem szerepeltek a megelőző egyensúlyi kijelentésekben!

	e.	i.	új i.
I.:$((p), A, C) \doteq 0$	3	3	3
II.:$(C', B, M_B) \doteq 0$	3	5	3
Sz.:$((p), A, B, M_B) \doteq 0$	(3)	4	

Az egyensúlyi kijelentések alapján hat független skaláregyenletet lehet felírni és az ismeretlenek száma is hat, teljesül tehát a statikai határozottság szükséges feltétele. Az egyensúlyi kijelentésekre jutó skaláregyenletek és ismeretlenek számát összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy csak a befüggesztett tartórészre felírt egyensúlyi kijelentés esetén egyezik meg az ismeretlenek és az egyenletek száma. Ezért a befüggesztett részre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján felírt egyensúlyi egyenletekkel kezdjük a számítást. Továbbra is törekszünk az egyismeretlenes egyenletek felírására.

I. $\sum M_i^{(C)}: 3\cdot 1\cdot 2{,}5 - A\cdot 2 = 0 \;\rightarrow\; A = 3{,}75\ \text{kN}(\uparrow)$

I. $\sum F_{ix}: C_x = 0 \;\rightarrow\; C'_x = 0$

I. $\sum F_{iz}: 3\cdot 1 - 3{,}75 - C_z = 0 \;\rightarrow\; C_z = -0{,}75\ \text{kN}(\downarrow) \;\rightarrow\; C'_z = 0{,}75\ \text{kN}(\uparrow)$

A C' reakcióerő komponenseinek meghatározása után a fix tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentésben már csak 3 ismeretlen maradt, így azokat ki tudjuk számolni.

$$\text{II.} \sum F_{ix}: B_x = 0$$

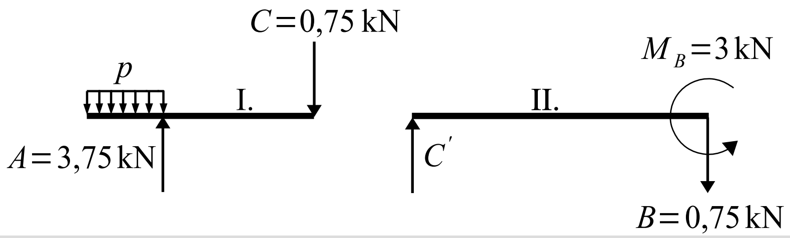
$$\text{II.} \sum F_{iz}: -0{,}75 - B_z = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = -0{,}75\ \text{kN}(\downarrow)$$

$$\text{II.} \sum M_i^{(B)}: -0{,}75 \cdot 4 + M_B = 0 \quad \rightarrow \quad M_B = 3\ \text{kNm}(\curvearrowleft)$$

Ezzel az összes ismeretlen külső és belső reakciót meghatároztuk. Ellenőrzésként írjunk fel egy a teljes szerkezetre vonatkozó nyomatéki egyenletet az A pontra:

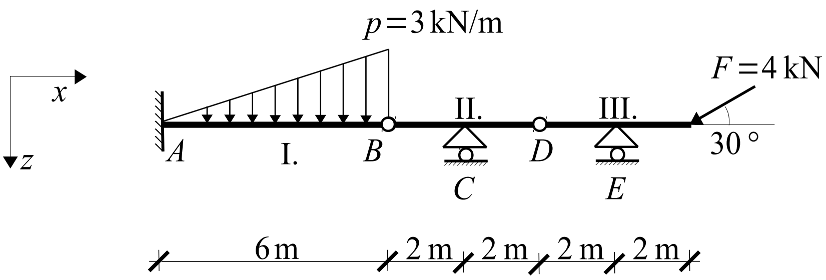
$$\text{Sz.} \sum M_i^{(A)}: 3 \cdot 1 \cdot 0{,}5 - 0{,}75 \cdot 6 + 3 = 0$$

Az eredmények ellenőrzése után készítsük el az eredményvázlatot:



Gyakorlópélda -2

Határozzuk meg az ábrán látható Gerber-tartó külső és belső reakcióit! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)



Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentések:

e. i. új i.

I.:

II:

III.:

Sz.:

Megoldás számítással:

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

Ellenőrzés:

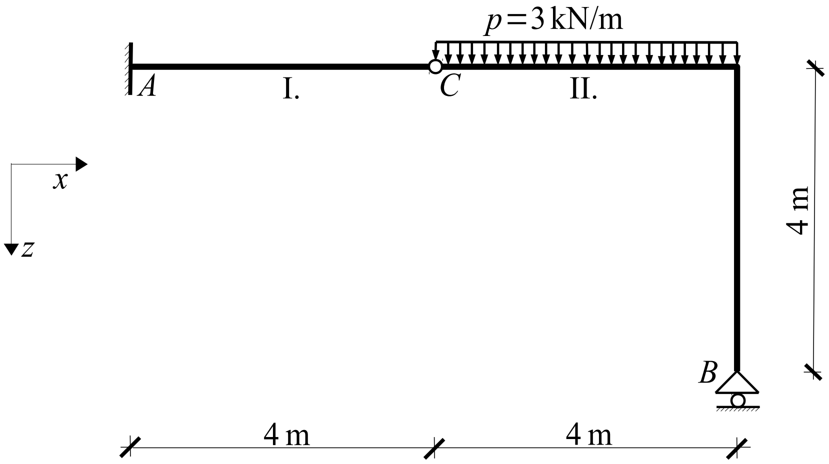
$\sum$

Eredményvázlat:

I. II. III.

Mintapélda - 3

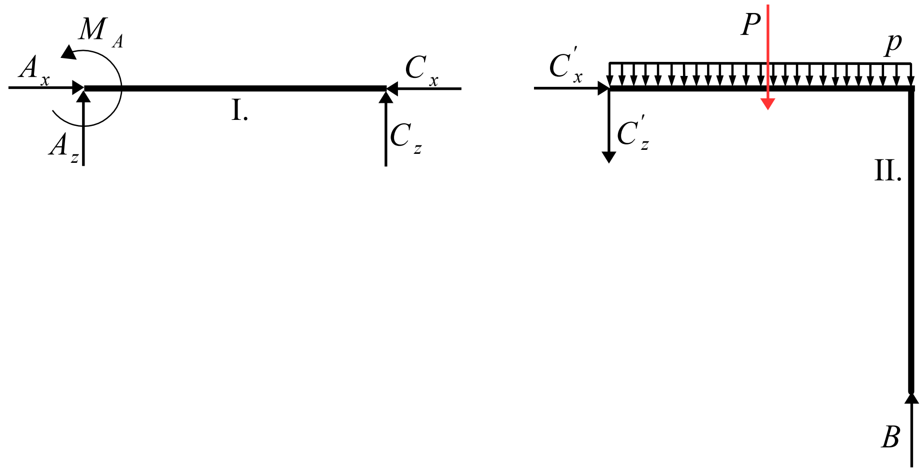
Határozzuk meg a tartó külső és belső reakcióit! (Elég a reakciók komponenseit meghatározni.)



Megoldás

Kezdjük a feladat megoldását az elkülönítéssel! A I. jelű testre az A külső reakcióerő, M_A befogási nyomaték és a C belső reakció hat. Mivel a C belső csuklóra csak két erő hat, ezek egymás ellentettjei kell, hogy legyenek. A II. jelű testre a p aktív megoszló teher, a C' belső reakció és a B külső reakcióerő hat.

Az elkülönített szerkezet ábrája:



A reakcióerők meghatározása során a megoszló terhet helyettesíthetjük az eredőjével, melynek nagysága:

$P = 3 \cdot 4 = 12\ \text{kN}$

Az elkülönítés után írjuk fel az elkülönített tartórészekre és a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentéseket és számoljuk össze a független skaláregyenleteket, illetve a skalár ismeretleneket!

	e.	i.	új i.
I.:$(A, M_A, C) \doteq 0$	3	5	5
II.:$((p), C', B) \doteq 0$	3	3	1
Sz.:$((p), A, M_A, B) \doteq 0$	(3)	4	

Az egyensúlyi kijelentések alapján hat független skaláregyenletet lehet felírni és az ismeretlenek száma is hat, teljesül tehát a statikai határozottság szükséges feltétele. A II. jelű tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján három független skaláregyenletet tudunk felírni és az egyenletekben szereplő ismeretlenek száma is három, kezdjük tehát ezen a tartórészen a számítást!

II. $\sum M_i^{(C)}: -12\cdot 2 + B\cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 6\ \text{kN}(\uparrow)$

II. $\sum F_{ix}: C'_x = 0 \quad \rightarrow \quad C_x = 0$

II. $\sum F_{iz}: 12 + C'_z - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad C'_z = -6\ \text{kN}(\uparrow) \quad \rightarrow \quad C_z = 6\ \text{kN}(\downarrow)$

A C reakcióerő komponenseinek meghatározása után az I. jelű tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentésben már csak 3 ismeretlen maradt, így azokat ki tudjuk számolni.

I. $\sum F_{ix}: A_x = 0$

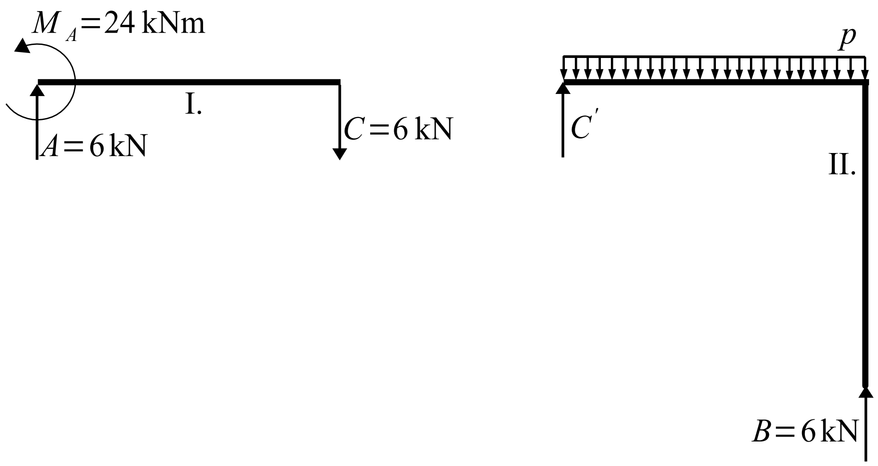
I. $\sum F_{iz}: -A_z + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 6\ \text{kN}(\uparrow)$

I. $\sum M_i^{(A)}: M_A - 6\cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 24\,\text{kNm}(\curvearrowleft)$

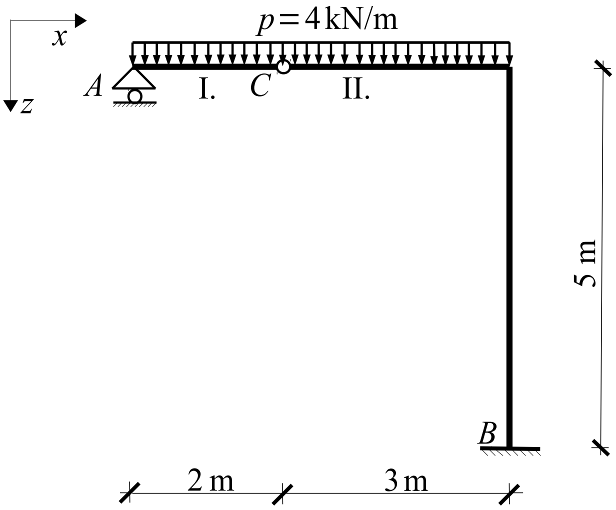
Ezzel az összes ismeretlen külső és belső reakciót meghatároztuk. Ellenőrzésként írjunk fel egy a teljes szerkezetre vonatkozó nyomatéki egyenletet az B pontra:

Sz. $\sum M_i^{(B)}: 12\cdot 2 - 6\cdot 8 + 24 = 0$

Az eredmények ellenőrzése után készítsük el az eredményvázlatot:



Gyakorlópélda - 3
Határozzuk meg az ábrán látható szerkezet külső és belső reakcióit!



Megoldás
Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentések:

e. i. új i.

I.:

II:

Sz.:

Megoldás számítással:

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

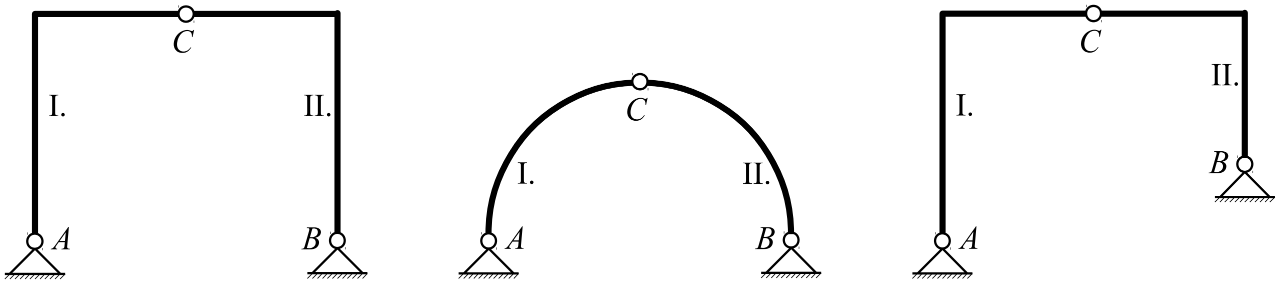
Ellenőrzés:

$\sum$

Eredményvázlat:

Összetett tartók III.

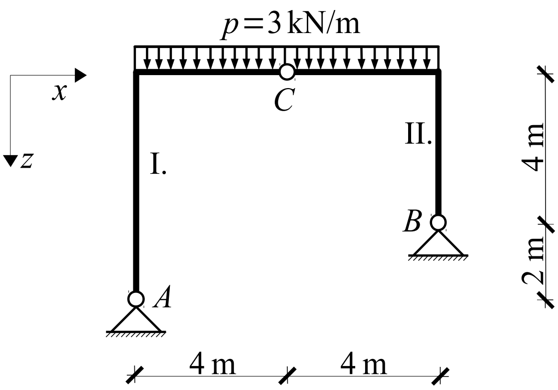
Gyakran alkalmazott tartószerkezet a *háromcsuklós tartó*, amely két, egymáshoz csuklóval kapcsolódó testből áll, a két test a földhöz szintén egy-egy csuklóval kapcsolódik. A **15.1.** ábrán különböző geometriájú háromcsuklós tartók láthatók.



15.1. ábra. Háromcsuklós tartók

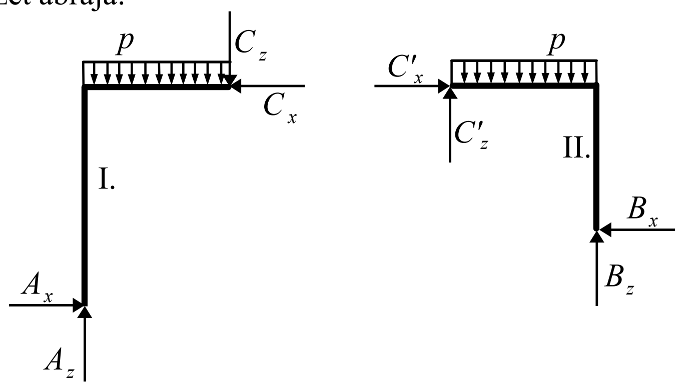
A háromcsuklós tartók számításának jellemzője, hogy a tartórészekre és a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentések alapján is kevesebb független skalár egyenlet írható fel, mint ahány skalár ismeretlen szerepel bennük. Mégsem kell azonban sokismeretlenes egyenletrendszert kezelnünk, egy kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával mindig el tudjuk kezdeni a számítást, utána pedig egyismeretlenes egyenletek megoldásával az összes reakcióerő meghatározható. Sőt, abban az esetben, ha a két külső támasz egy magasságban van, akkor kizárólag egyismeretlenes egyenletek megoldásával is meghatározhatók a reakciók.

Mintapélda - 1
Határozzuk meg az ábrán látható háromcsuklós tartó külső és belső reakcióit!



Megoldás
Az elkülönítéssel kezdjük a feladat megoldását. A szerkezetet alkotó mindkét testre kettőnél több erő hat. Az I. jelű testre hat az adott p megoszló teher bal oldali fele, az ismeretlen hatásvonalú A külső reakcióerő és a C csuklóról egy szintén ismeretlen hatásvonalú C belső reakcióerő. A C csuklót nem kell elkülöníteni, mert csak a két testről hat rá egy-egy erő. Megjegyezzük, hogy a csuklót végtelen kis kiterjedésűnek tekintjük, így a csuklóra ható megoszló erő eredőjének nagysága is végtelen kicsi. A II. jelű testre a megoszló teher jobboldali fele, az ismeretlen

hatásvonalú B külső reakcióerő és a C csuklóról a C' belső reakcióerő hat.
Az elkülönített szerkezet ábrája:



Az elkülönítés után írjuk fel az elkülönített tartórészekre és a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentéseket! Az egyensúlyi kijelentések mellett számoljuk össze az adott egyensúlyi kijelentés alapján felírható független skaláregyenleteket, az egyensúlyi kijelentésben szereplő skalár ismeretleneket és ezek közül azokat, amelyek nem szerepeltek a megelőző egyensúlyi kijelentésekben!

	e.	i.	új i.
I.:$((p), A, C) \doteq 0$	3	4	4
II.:$((p), C', B) \doteq 0$	3	4	2
Sz.:$((p), A, B) \doteq 0$	(3)	4	

Az egyensúlyi kijelentések alapján hat független skaláregyenletet lehet felírni és az ismeretlenek száma is hat, teljesül tehát a statikai határozottság szükséges feltétele. A háromcsuklós tartók számításának jellemzője, hogy a tartórészekre és a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentések alapján is kevesebb független skalár egyenlet írható fel, mint ahány skalár ismeretlen szerepel bennük. Mégsem kell azonban a hat független egyenletből álló egyenletrendszert kezelnünk, egy kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával mindig el tudjuk kezdeni a számítást, utána pedig egyismeretlenes egyenletek megoldásával az összes reakcióerő meghatározható. A teljes szerkezetre vonatkozó, A pontra felírt és a II. jelű testre vonatkozó, C pontra felírt nyomatéki egyenletekben egyaránt a B_x, B_z reakció-komponensek szerepelnek ismeretlenként:

$$\text{Sz.} \sum M_i^{(A)}: -3 \cdot 8 \cdot 4 + B_z \cdot 8 + B_x \cdot 2 = 0$$

$$\text{II.} \sum M_i^{(C)}: -3 \cdot 4 \cdot 2 + B_z \cdot 4 - B_x \cdot 4 = 0$$

Az első egyenletből fejezzük ki a B_x komponenst:

$$B_x = 48 - 4 \cdot B_z$$

amit a második egyenletbe helyettesítve az alábbi egyenletre jutunk:

$$-24 + 4 \cdot B_z - 192 + 16 \cdot B_z = 0$$

A fenti egyenletből B_z kifejezhető:

$$B_z = 10{,}8\,\text{kN}\,(\uparrow)$$

amit az első vagy a második egyenletbe helyettesítve B_x is meghatározható:

$$B_x = 4{,}8\,\text{kN}\,(\leftarrow)$$

A B reakció komponenseinek meghatározása után a teljesz szerkezetre vonatkozó vetületi egyenletekből számoljuk ki az A reakció komponenseit:

$$\text{Sz.} \sum F_{ix}: A_x - 4{,}8 = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = 4{,}8\,\text{kN}\,(\rightarrow)$$

$$\text{Sz.} \sum F_{iz}: 3\cdot 8 - A_z - 10{,}8 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 13{,}2\,\text{kN}\,(\uparrow)$$

Ezzel a külső reakciókat meghatároztunk, ellenőrzésül írjuk fel az I. jelű testre vonatkozó nyomatéki egyenletet a C pontra:

$$\text{I.} \sum M_i^{(C)}: 3\cdot 4\cdot 2 - 13{,}2\cdot 4 + 4{,}8\cdot 6 = 0$$

Miután meggyőződtünk a külső reakció-komponensek helyességéről, határozzuk meg a C belső reakció komponenseit az I. jelű test egyensúlya alapján:

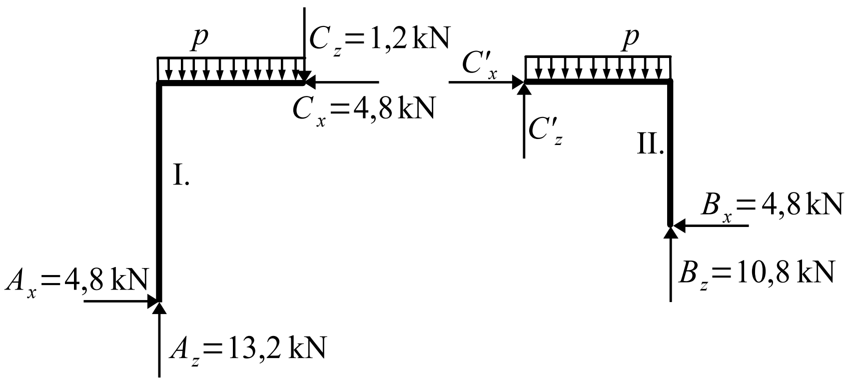
$$\text{I.} \sum F_{ix}: 4{,}8 - C_x = 0 \quad \rightarrow \quad C_x = 4{,}8\,\text{kN}\,(\leftarrow) \quad \rightarrow \quad C'_x = 4{,}8\,\text{kN}\,(\rightarrow)$$

$$\text{I.} \sum F_{iz}: 3\cdot 4 - 13{,}2 + C_z = 0 \quad \rightarrow \quad C_z = 1{,}2\,\text{kN}\,(\downarrow) \quad \rightarrow \quad C'_z = 1{,}2\,\text{kN}\,(\uparrow)$$

Ezzel az összes belső reakció-komponenst is meghatároztuk. A II. jelű testre vonatkozó, B pontra felírt nyomatéki egyenlettel ellenőrizzük az eredményeket:

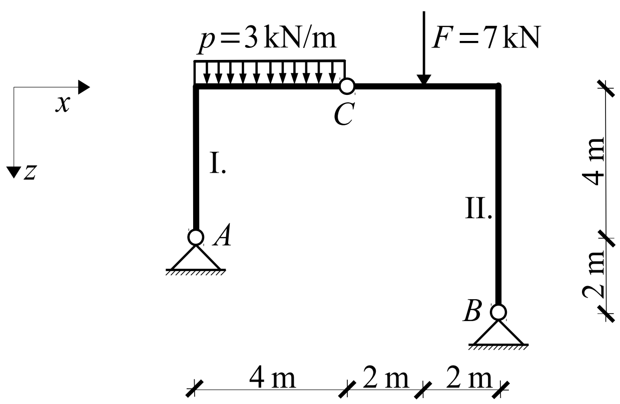
$$\text{II.} \sum M_i^{(B)}: 3\cdot 4\cdot 2 - 1{,}2\cdot 4 - 4{,}8\cdot 4 = 0$$

Az eredmények helyességének ellenőrzése után készítsük el az eredményvázlatot:



Gyakorlópélda -1

Határozzuk meg a háromcsuklós tartó külső és belső reakcióit!



Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:

Egyensúlyi kijelentések:

e. i. új i.

I.:

II.:

Sz.:

Megoldás számítással:

$$Sz. \sum M_i^{(B)}:$$

$$I. \sum M_i^{(C)}:$$

Fejezzük ki az A_x komponenst az első egyenletből:

$$A_x =$$

és helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$\ldots$$

amiből:

$$A_z =$$

$$A_x =$$

Ezek után egyismeretlenes egyenletekkel tudunk tovább számolni.

$$\sum$$

$$\sum$$

A külső reakciók ellenőrzése:

$$\sum$$

Határozzuk meg a *C* reakció komponenseit:

$$\sum$$

$$\sum$$

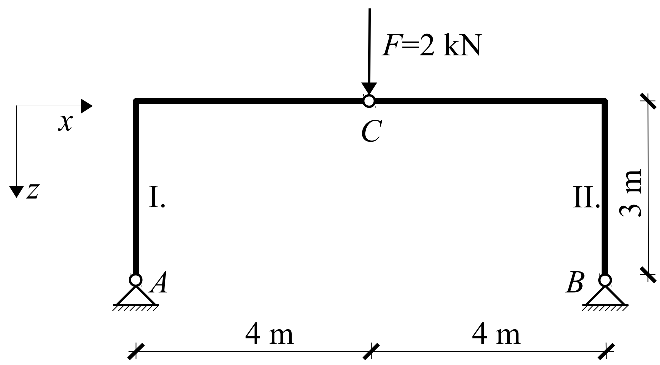
Ellenőrzés:

$$\sum$$

Eredményvázlat:

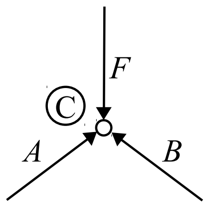
Mintapélda - 2

Határozzuk meg a háromcsuklós tartó külső és belső reakcióit!



Megoldás

Kezdjük a feladat megoldását az elkülönítéssel! Az I. jelű testre csak az *A* külső reakcióerő és a *C* csuklóról egy belső reakció hat, tehát ezek egymás ellentettjei kell, hogy legyenek. Hasonlóan a II. jelű testre csak a *B* külső reakcióerő és a *C* csuklóról egy belső reakció hat, tehát ezek is egymás ellentettjei kell, hogy legyenek. Ez egyben azt is jelenti, hogy az I. jelű testről a *C* csuklóra átadódó erő megegyezik az *A* erővel, a II. jelű testről a *C* csuklóra átadódó erő pedig megegyezik a *B* erővel és mindkét külső reakcióerő hatásvonala átmegy a C ponton. A *C* belső csuklót külön vizsgálnunk kell, mert három erő hat rá. Az elkülönített szerkezet ábrája tehát csak a *C* csukló elkülönített rajzát tartalmazza:



Az elkülönítés után írjuk fel a *C* csuklóra vonatkozó egyensúlyi kijelentést:

	e.	i.	új i.
$C.:(F, A, B) \doteq 0$	2	2	2

(Mivel a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentésben ugyanez a három erő szerepel, nincs értelme azt külön felírni.) Az egyensúlyi kijelentés alapján két független skaláregyenletet lehet felírni és az ismeretlenek száma is kettő, hiszen a külső reakcióerők hatásvonalát ismerjük. Írjunk fel egy-egy nyomatéki egyenletet a támaszokra:

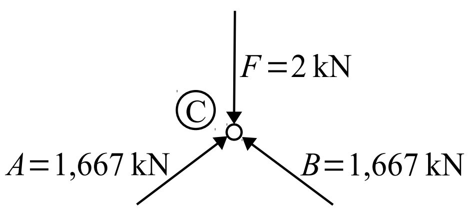
$$C.\sum M_i^{(B)}: 2\cdot 4 - A\cdot\frac{3}{5}\cdot 8 = 0 \quad \rightarrow \quad A = 1{,}667 \text{ kN}$$

$$C.\sum M_i^{(A)}: -2\cdot 4 + B\cdot\frac{3}{5}\cdot 8 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 1{,}667 \text{ kN}$$

(Az első egyenletben *A* erőt az *A* pontban, a második egyenletben *B* erőt a *B* pontban bontottuk fel.)
Ellenőrzésként írjunk fel egy vetületi egyenletet a *C* csuklóra:

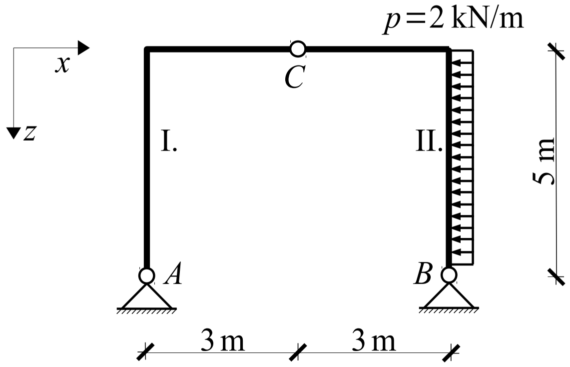
$$C.\sum F_{ix}: 1{,}667\cdot\frac{4}{5} - 1{,}667\cdot\frac{4}{5} = 0$$

Végül készítsük el az eredményvázlatot:



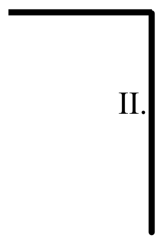
Gyakorlópélda -2

Határozzuk meg az ábrán látható háromcsuklós tartó külső és belső reakcióit!

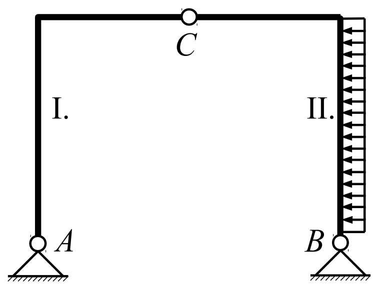


Megoldás

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Egyensúlyi kijelentés(ek):



Rajzoljuk be az ábrába a reakcióerők hatásvonalát!

Megoldás számítással:

$\sum$

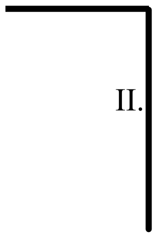
$\sum$

$\sum$

Ellenőrző egyenlet:

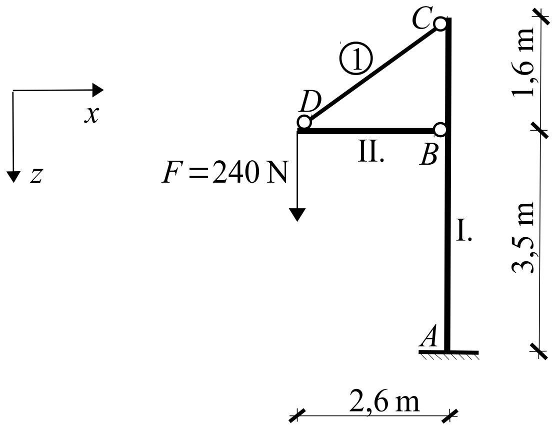
$\sum$

Eredményvázlat:



Mintapélda - 3

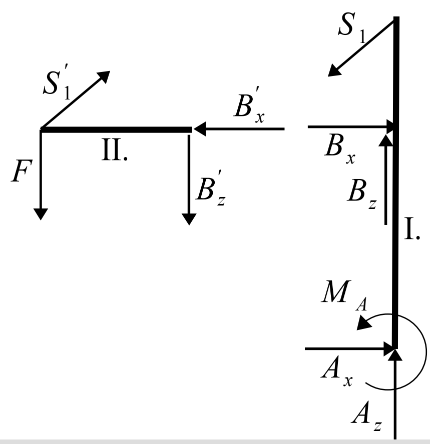
Határozzuk meg a tartó külső és belső reakcióit!



Megoldás

Kezdjük a feladat megoldását az elkülönítéssel! A I. jelű testre az A külső reakcióerő, az M_A befogási nyomaték, a B belső reakcióerő és az adott hatásvonalú S_1 rúderő hat. Mivel a B, C és D belső csuklókra csak két-két erő hat, ezek páronként egymás ellentettjei kell, hogy legyenek. A II. jelű testre az F aktív teher, a B' belső reakció és az S'_1 rúderő hat.

Az elkülönített szerkezet ábrája:



Az elkülönítés után írjuk fel az elkülönített tartórészekre és a teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentéseket és számoljuk össze a független skaláregyenleteket, illetve a skalár ismeretleneket!

	e.	i.	új i.
I.:$(A, M_A, B, S_1) \doteq 0$	3	6	6
II.:$(F, S'_1, B') \doteq 0$	3	3	0
Sz.:$(F, A, M_A) \doteq 0$	(3)	3	

Az egyensúlyi kijelentések alapján hat független skaláregyenletet lehet felírni és az ismeretlenek száma is hat, teljesül tehát a statikai határozottság szükséges feltétele. A II. jelű tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján három független skaláregyenletet tudunk felírni és az egyenletekben szereplő ismeretlenek száma is három, kezdjük tehát ezen a tartórészen a számítást!

$$\text{II.} \sum M_i^{(B)}: 240 \cdot 2{,}6 - S'_1 \cdot \frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 + 2{,}6^2}} \cdot 2{,}6 = 0 \quad \rightarrow \quad S_1 = 458{,}0\ \mathrm{N}(\mathrm{h})$$

$$\text{II.} \sum M_i^{(C)}: 240 \cdot 2{,}6 - B'_x \cdot 1{,}6 = 0 \quad \rightarrow \quad B'_x = 390\,\mathrm{N}(\leftarrow) \quad \rightarrow \quad B_x = 390\,\mathrm{N}(\rightarrow)$$

$$\text{II.} \sum M_{iz}^{(D)}: B'_z = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = 0$$

A teljes szerkezetre vonatkozó egyensúlyi kijelentés alapján szintén három független skaláregyenletet lehet felírni és az ismeretlenek száma is három. Folytassuk a számítást a külső reakciók meghatározásával:

$$\text{Sz.} \sum M_i^{(A)}: 240 \cdot 2{,}6 + M_A = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = -624\ \mathrm{Nm}\,(\curvearrowright)$$

$$\text{Sz.} \sum F_{ix}: A_x = 0$$

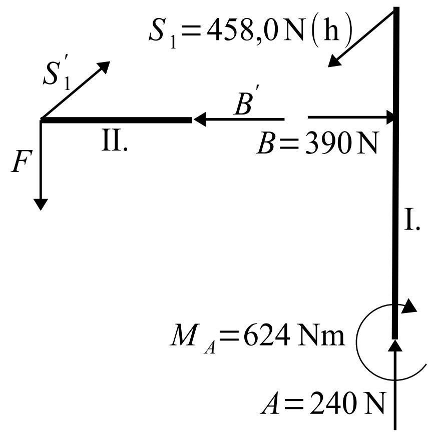
$$\text{Sz.} \sum F_{iz}: 240 - A_z = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 240\ \mathrm{N}(\uparrow)$$

Ezzel az összes ismeretlen külső és belső reakciót meghatároztuk. Ellenőrzésként írjunk fel két vetületi egyenletet az I. jelű tartórészre:

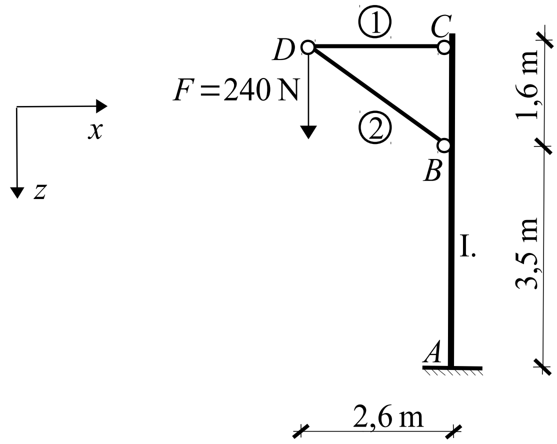
$$\text{Sz.} \sum F_{ix}: 390 - 458{,}0 \cdot \frac{2{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 + 2{,}6^2}} = 0{,}04 \approx 0$$

$$\text{Sz.} \sum F_{iz}: -240 + 458{,}0 \cdot \frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 + 2{,}6^2}} = 0{,}03 \approx 0$$

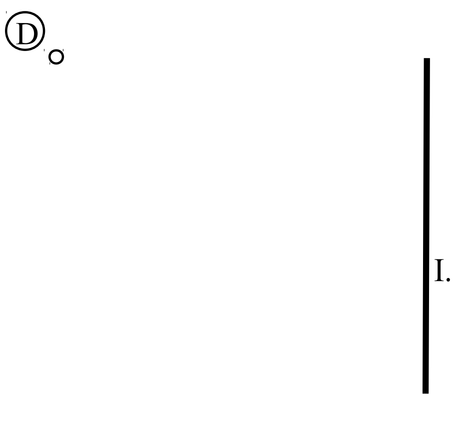
Az eredmények ellenőrzése után készítsük el az eredményvázlatot:



Gyakorlópélda - 3
Határozzuk meg az ábrán látható szerkezet külső és belső reakcióit!



Megoldás
Az elkülönített szerkezet ábrája:



Egyensúlyi kijelentések:

e. i. új i.

I.:

D:

Sz.:

Megoldás számítással:

$\sum$

$\sum$

$\sum$

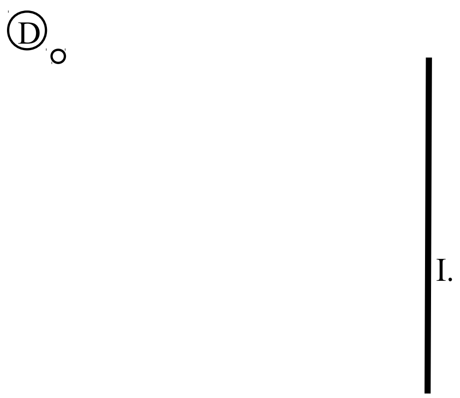
$\sum$

$\sum$

Ellenőrzés:

$\sum$

Eredményvázlat:



A statikai határozottság

A statikai határozottsággal kapcsolatos definícióinkat az egyszerű tartók vizsgálata során úgy fogalmaztuk meg, hogy azok összetett tartókra is érvényesek. Eddig csak statikailag határozott összetett tartókkal foglalkoztunk, de most mutatunk példát statikailag túlhatározott és statikailag határozatlan összetett szerkezetekre is. Ismételjük át a korábban tanult definíciókat!

Def: Egy szerkezetet ***statikailag határozott***nak nevezünk, ha az bármilyen teher esetén egyensúlyban marad és a reakciókat az egyensúlyi egyenletek segítségével egyértelműen meg lehet határozni.

A statikai határozottsághoz tehát két feltételnek kell egyidejűleg teljesülnie. Ha valamelyik feltétel nem teljesül, akkor a szerkezetet máshogy minősítjük.

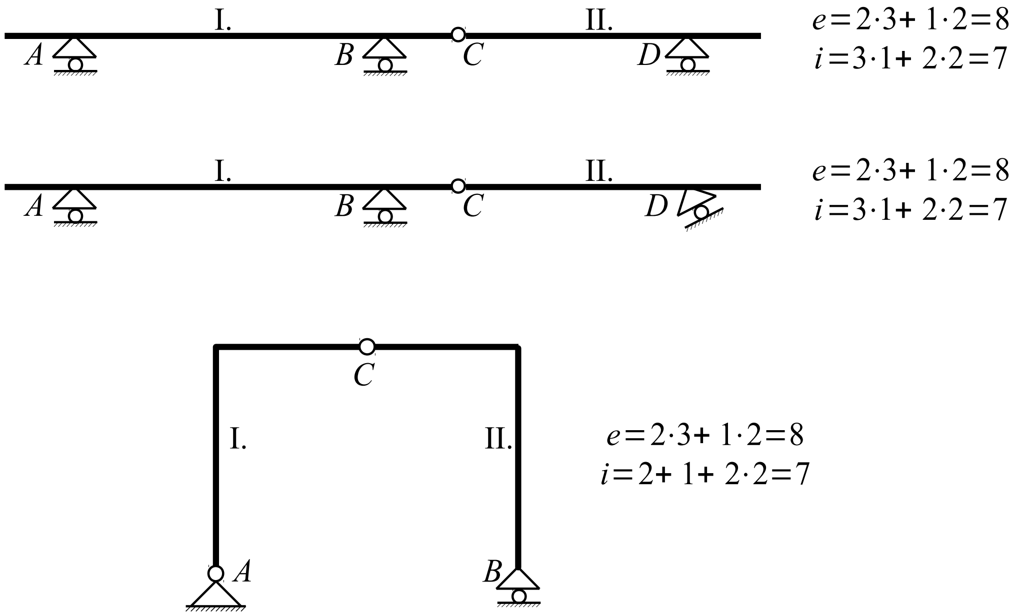
Def: Egy szerkezetet ***statikailag túlhatározott***nak nevezünk, ha létezik olyan teher, ami esetén a szerkezet nincs egyensúlyban (tehát az egyensúlyi egyenletrendszernek nincs megoldása).

Def: Egy szerkezetet ***statikailag határozatlan***nak nevezünk, ha létezik olyan teher, ami esetén az egyensúlyi egyenletrendszernek van megoldása (tehát a szerkezet egyensúlyban van), de a megoldás nem egyértelmű. Más szóval a reakcióerők nem határozhatók meg egyértelműen csupán az egyensúlyi egyenletek alapján.

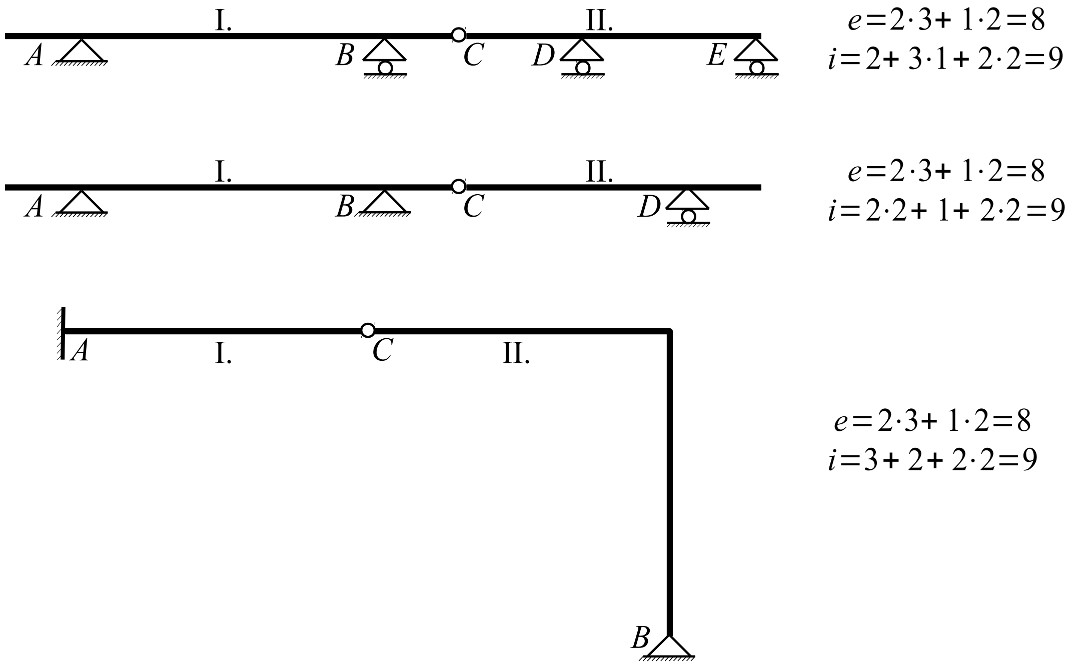
A szerkezet statikai határozottságának vizsgálatát általában az egyensúlyi kijelentések alapján felírható független skaláregyenletek (*e*) és a bennük szereplő skalár ismeretlenek (*i*) számának összehasonlításával kezdjük. Ha az egyenletek száma nagyobb, mint az ismeretlenek száma, akkor a szerkezet biztosan statikailag túlhatározott. Az $e>i$ feltétel a statikai túlhatározottság elégséges (de nem szükséges) feltétele. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ezek a szerkezetek további támaszokat igényelnek ahhoz, hogy bármilyen elrendezésű terhet viselni tudjanak. 15.2. ábrán olyan statikailag túlhatározott szerkezetek láthatók, amelyek esetén teljesül az $e>i$ feltétel. Az egyenletek és a skalár ismeretlenek számát a szerkezet úgynevezett *teljes elkülönítés*e alapján határoztuk meg. A teljes elkülönítés során azt feltételezve, hogy minden belső csuklóra és a szerkezetet alkotó összes testre hathat aktív teher, minden tartórészt elkülönítünk és külön vizsgálunk. Megjegyezzük, hogy egy szerkezet statikai határozottsága, határozatlansága vagy túlhatározottsága független a rá ható tehertől, az kizárólag a szerkezet jellemzője.

Abban esetben, ha az ismeretlenek száma nagyobb, mint a felírható skaláregyenletek száma, akkor biztosan van olyan teher, ami esetén nem tudjuk a reakcióerőket csupán az egyensúlyi egyenletek alapján egyértelműen meghatározni. Az $i>e$ feltétel a statikai határozatlanság elégséges (de nem szükséges) feltétele. 15.3. ábrán olyan statikailag határozatlan szerkezetek láthatók, amelyek esetén teljesül az $i>e$ feltétel. Fogalmazhatunk úgy is, hogy ezeknek a szerkezeteknek túl sok támasza van ahhoz, hogy az egyensúlyi egyenletekből egyértelműen meghatározhatók legyenek a reakciók.

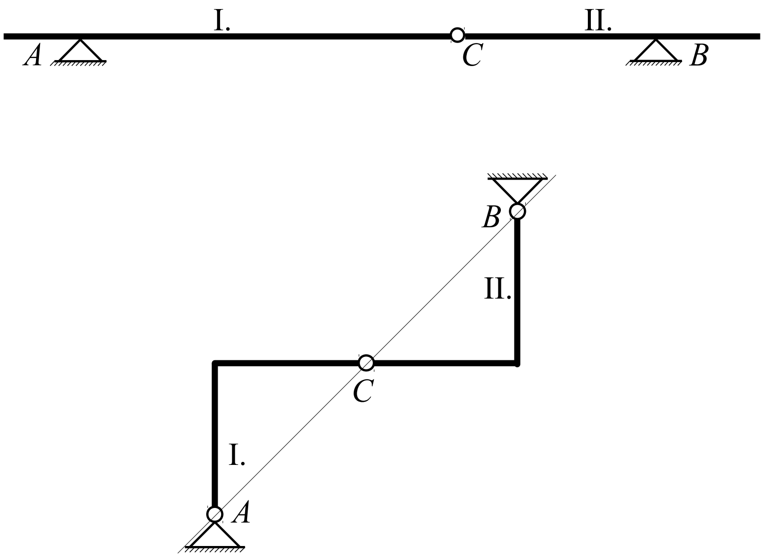
Ahogy azt már az egyszerű tartóknál is láttuk, az $e=i$ feltétel teljesülése nem jelenti azt, hogy a szerkezet statikailag határozott (ez csak a határozottság szükséges, de nem elégséges feltétele). A 15.4. ábrán látható háromcsuklós tartók egyszerre statikailag túlhatározottak és határozatlanok. Mindkét szerkezet esetén egy vonalra esik a három csukló, tehát ha kizárólag a csuklón van külső aktív teher, akkor a szerkezetet alkotó két testre csak két-két erő hat, tehát a reakcióerők hatásvonalának át kell mennie a *C* csuklón. A csuklóra vonatkozó, erre a közös hatásvonalra merőleges irányú vetületi egyensúly nem teljesül, ha az aktív tehernek van a reakciók közös hatásvonalára merőleges komponense. Ez azt jelenti, hogy van olyan teher ami mellett a szerkezet nincs egyensúlyban, tehát a szerkezet statikailag túlhatározott. Abban az esetben, ha a szerkezetre nem hat külső aktív teher, akkor tetszőleges nagyságú, de ellentett értelmű, az *A, B, C* pontokon átmenő hatásvonalú reakcióerők esetén egyensúlyban van a szerkezet. Ez azt jelenti, hogy teljesül a statikai határozatlanság feltétele, létezik olyan teher, ami esetén az egyensúlyi egyenletrendszernek van megoldása (tehát a szerkezet egyensúlyban van), de a megoldás nem egyértelmű.



15.2. ábra. Statikailag túlhatározott összetett szerkezetek



15.3. ábra. Statikailag határozatlan összetett szerkezetek



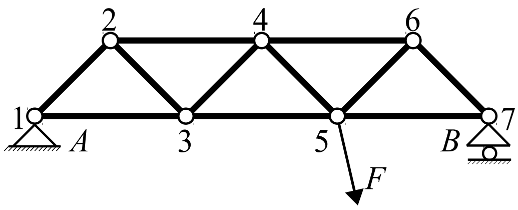
$$e = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$$
$$i = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$$

$$e = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$$
$$i = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$$

15.4. ábra. Statikailag határozatlan és túlhatározott összetett szerkezetek

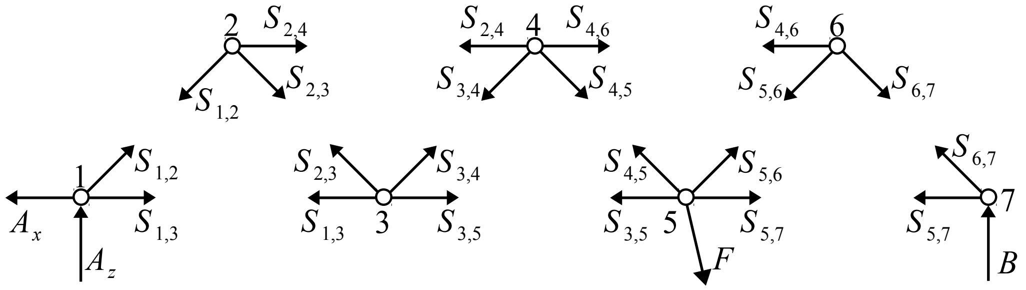
Rácsos tartók

*Rácsos tartó*knak nevezzük az olyan összetett tartókat, amelyek egymáshoz a végeiken csuklókkal kapcsolódó rudakból állnak (16.1. ábra). A rácsos tartó rúdjai általában egyenes tengelyűek. A rácsos tartó külső támaszai görgők, támasztórudak és csuklók lehetnek. A rácsos tartók terhei jellemzően a csomópontokon működnek. Megjegyezzük, hogy a valódi szerkezeteknél gyakran nem csuklós kialakítású a csomópont, a csuklós statikai modell viszont lényegesen leegyszerűsíti a számítást és jó közelítést ad merev (pl. hegesztett) csomópontok esetén is.



16.1. ábra. Csomópontján terhelt rácsos tartó

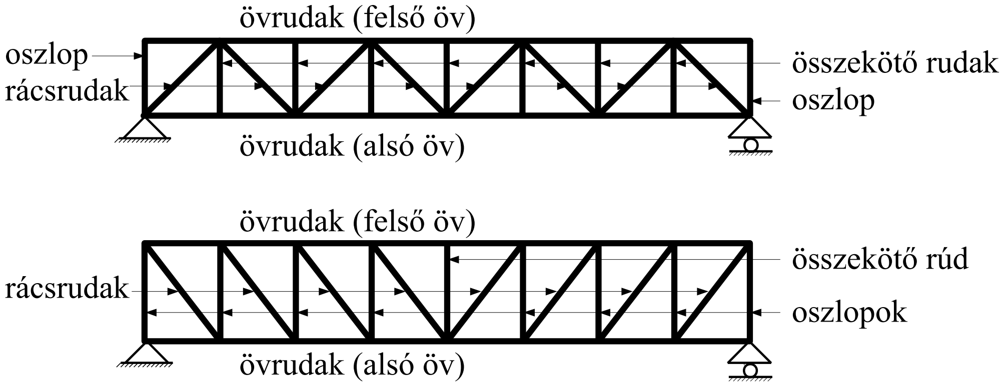
A rácsos tartók összetett szerkezetek és a síkbeli, statikailag határozott rácsos tartók külső és belső erői az eddig tanult eszközökkel meghatározhatók. A rácsos tartók külön tárgyalását egyrészt az indokolja, hogy nagyon gyakori szerkezetek, másrészt speciális eljárások terjedtek el a rúderők számítására. A statikai határozottság elégséges feltételének meghatározásához végezzük el a rácsos tartó elkülönítését (16.2. ábra)! A továbbiakban az i és j jelű ($i<j$) csomópontokat összekötő rúdban működő úgynevezett rúderőnek a nagyságával $S_{i,j}$-vel jelöljük. A rúderő jelölésében az első index mindig a kisebb sorszámú végpontra, a második index a nagyobb sorszámú végpontra utal. Az elkülönítés során a csomópontokra rajzolt nyilakkal jelöljük a rúdról a csomópontokra ható erők irányát és a nyilak mellé írjuk a rúderő nagyságát. Egy rúdról a két végén lévő csomópontokra ható erők egymás ellentettjei, ezt a csomópontokra rajzolt nyilak egyértelműen mutatják. Az ellentett erők jelöléséből az egyszerűség kedvéért kihagyjuk a korábban megszokott vesszőt.



16.2. ábra. A csomópontján terhelt rácsos tartó elkülönített csomópontjai

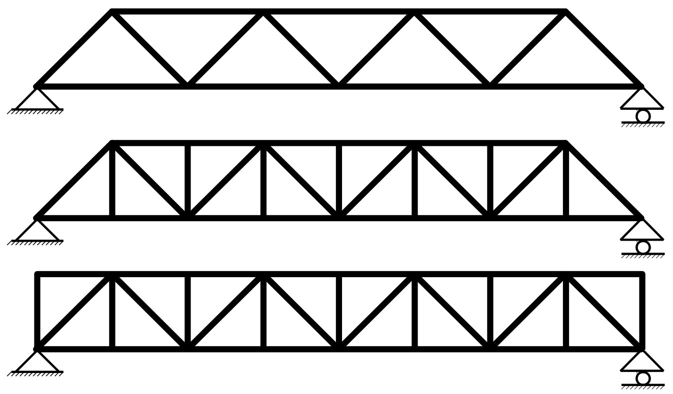
Az elkülönítés során csak a csomópontokat kell külön vizsgálnunk, hiszen a rudakra csak két erő hat, ezért ez a két erő közös hatásvonalú és a közös hatásvonal átmegy a rúd két végén lévő csuklón. Az elkülönített csomópontokra vonatkozó egyensúlyi kijelentések alapján csuklónként két független skaláregyenletet lehet felírni (hiszen közös metszéspontúak az erők), tehát a független egyenletek száma $2c$, ahol c a rácsos tartó belső csuklóinak a száma. Az egyensúlyi egyenletrendszerben a rúderők és a külső reakciók jelentik az ismeretleneket. Az ismeretlenek száma tehát $r+k$, ahol r a rudak száma, k a kényszerek fokszámának összege. A statikai határozottság szükséges (de nem elégséges) feltétele, hogy a független egyenletek száma megegyezzen a skalár ismeretlenek számával ($e=i$), ami a fentiek szerint rácsos tartók esetén a $2c=r+k$ feltételnek felel meg.

A rácsos tartó különböző helyzetű rúdjai speciális elnevezéseket is kaphatnak. A rácsozat rajzán keresztül húzott függőleges vonal által elmetszett legalsó és legfelső rudakat övrudaknak nevezzük. Az övrudakat együtt, elhelyezkedésük alapján a tartó alsó és felső övének nevezzük. Ha az alsó és a felső övrudak mind párhuzamosak, akkor a szerkezetet párhuzamos övű rácsos tartónak nevezzük. Az alsó és a felső öv közötti ferde rudakat rácsrudaknak nevezzük. A függőleges rudat, ha az egyik végéhez csak két, egy egyenesbe eső övrúd kapcsolódik összekötő rúdnak, egyébként oszlopnak nevezzük. A 16.3. ábrán a különböző helyzetű rudakra láthatunk példákat. Megjegyezzük, hogy a rácsos tartó csomópontjaiba általában nem rajzoljuk be a csuklókat, de a számítást a csuklók figyelembevételével végezzük.

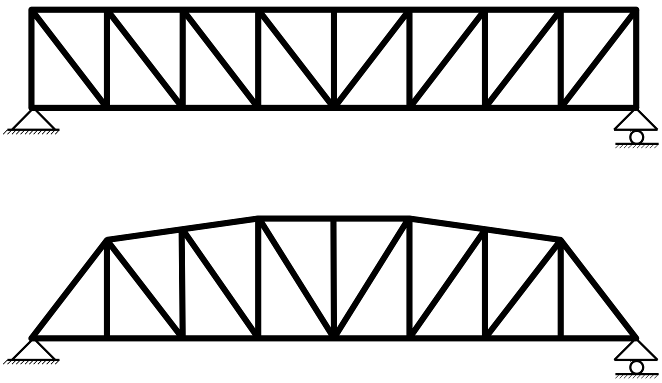


16.3. ábra. A különböző helyzetű rudak elnevezése

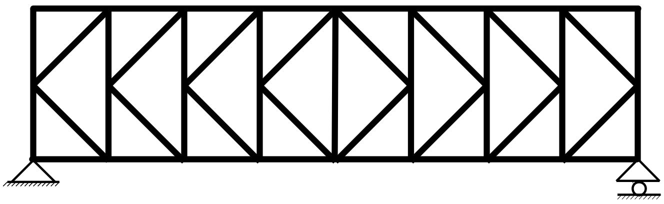
A 16.4.-16.8. ábrákon különböző típusú rácsos tartók láthatók, amelyek a 16.7. ábrán látható statikailag határozatlan X-rácsozású tartók kivételével mind statikailag határozottak. Az X-rácsozású tartók statikai határozottságát nem befolyásolja, hogy az X alakzatok közepén egy csomópontban csatlakozik a négy rácsrúd vagy a két rácsrúd egymás mellett helyezkedik el közös csomópont nélkül. Előbbi esetben ugyan új csomópontonként kettővel több az ismeretlen rúderő, de az ezekre a csomópontokra vonatkozó egyensúlyi kijelentések alapján fel lehet írni két-két független skaláregyenletet.



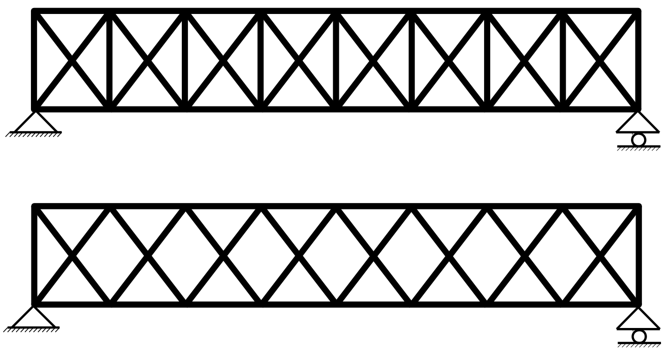
16.4. ábra. Szimmetrikus vagy Warren-féle rácsozású rácsos tartók



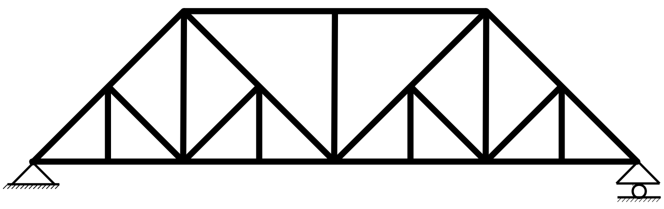
16.5. ábra. Oszlopos vagy Pratt-féle rácsozású rácsos tartók.



16.6. ábra. K-rácsozású tartó



16.7. ábra. X-rácsozású tartók



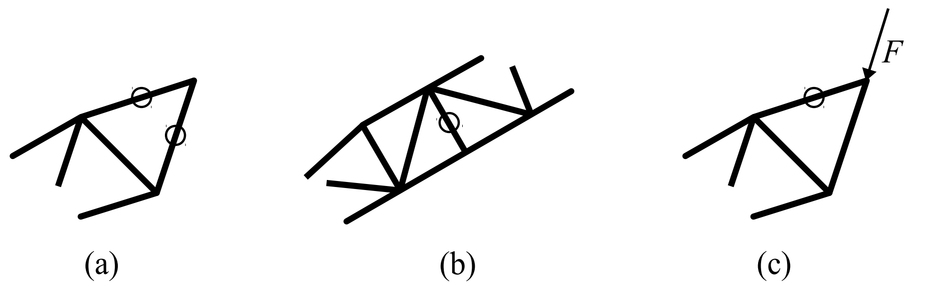
16.8. ábra. Mellékrácsozású tartó

A kizárólag csuklókon terhelt rácsos tartók rúderőinek meghatározására két eljárást ismertetünk, a *csomóponti módszer*t és a *hármas átmetszés* módszerét.

A csomóponti módszer alkalmazása során egy elkülönített csomópontra vonatkozó egyensúlyi egyenletekből határozzuk meg a csomópontra ható rúderőket. Ez a módszer két esetben alkalmazható. 1.) Ha a csomópontra legfeljebb két ismeretlen rúderő hat, akkor azokat két egyensúlyi (vetületi vagy nyomatéki) egyenletből meg lehet határozni. 2.) Ha a csomópontra ható három ismeretlen rúderő közül kettő közös hatásvonalú, akkor a harmadikat egy, a közös hatásvonalra merőleges irányú vetületi egyenletből ki lehet számolni.

A hármas átmetszés módszerének az a lényege, hogy ha úgy vágjuk át (távolítjuk el) képzeletben a rácsos tartó három rúdját, hogy ezáltal a szerkezet két részre essen szét és az átvágott rudakban működő erőket az átmetszéstől balra és jobbra lévő tartórész megfelelő csomópontjaira működtetjük, akkor mindkét tartórész továbbra is egyensúlyban marad. Az átmetszéstől balra és jobbra lévő két tartórészre felírt egyensúlyi kijelentések alapján három független egyensúlyi egyenletet lehet felírni, amiből a három ismeretlen rúderő meghatározható (ha a vizsgált tartórészre ható reakcióerőket korábban már meghatároztuk).

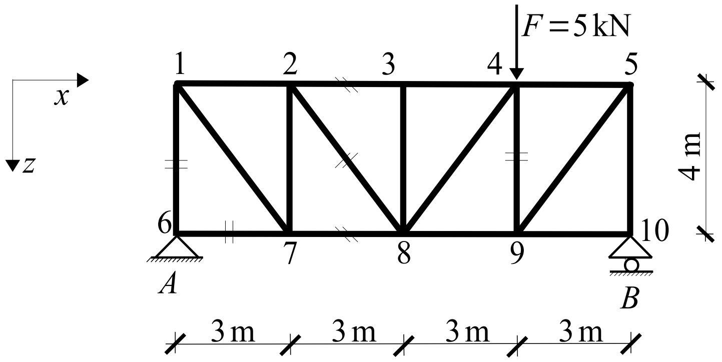
Azokat a rudakat, amelyekben az adott teherből nem keletkezik erő *vakrud*aknak nevezzük. A vakrudat a rúd tengelyére rajzolt kis körrel jelöljük. Van néhány speciális eset, amikor a vakrudakat könnyen felismerhetjük. Ha egy terheletlen csomóponthoz csak két rúd csatlakozik és a rudak nem esnek egy egyenesbe, akkor mindkét rúd vakrúd (16.9a ábra). Ez a rudak tengelyére merőleges irányú vetületi egyenletekből közvetlenül adódik. Ha egy terheletlen csomóponthoz három rúd csatlakozik, amiből kettő egy egyenesbe esik, akkor az erre az egyenesre merőleges irányú vetületi egyenletből következik, hogy a harmadik rúd vakrúd (16.9b ábra). Hasonló a helyzet, ha egy csomóponthoz két rúd csatlakozik és a csomópontra ható teher hatásvonala egybeesik az egyik rúddal. Ilyenkor a közös hatásvonalra merőleges irányú vetületi egyenletből következik, hogy a másik rúd vakrúd (16.9c ábra).



16.9. ábra. Speciális csomópontok vakrudakkal

A kiszámított rúderőket általában eredményvázlat helyett rúderőtáblázatban adjuk meg. A rúderőtáblázat első oszlopában a rudak jele, a második oszlopban a húzott rudakban működő erők nagysága, a harmadik oszlopban pedig a nyomott rudakban működő erők nagysága szerepel.

Mintapélda - 1
Határozzuk meg a rácsos tartó jelölt rúdjaiban ébredő erőket!



Megoldás
A feladat megoldását kezdjük a reakcióerők meghatározásával! A reakciók számítása során a rácsos tartót egyetlen merev testként kezeljük, ugyanúgy számoljuk a reakciókat, mint egy kéttámaszú tartó esetén. (A kéttámaszú tartó elkülönítését most már nem rajzoljuk fel.) A rácsos tartóra vonatkozó egyensúlyi kijelentésben három erő szerepel, a külső, aktív F erő és a két reakcióerő:

$Sz.:(F, A, B) \doteq 0$

A két támaszra felírt nyomatéki egyenletből és a vízszintes irányú vetületi egyenletből a reakciókomponensek számíthatók:

$\text{Sz.} \sum M_i^{(A)}: -5 \cdot 9 + B \cdot 12 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 3{,}75 \text{ kN} (\uparrow)$

$\text{Sz.} \sum M_i^{(B)}: 5 \cdot 3 - A_z \cdot 12 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 1{,}25 \text{ kN} (\uparrow)$

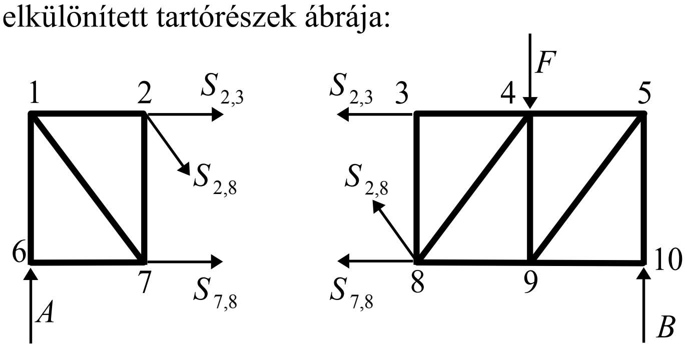
$\text{Sz.} \sum F_{ix}: A_x = 0$

Ellenőrzésül írjunk fel egy z irányú vetületi egyenletet:

$\text{Sz.} \sum F_{iz}: 5 - 1{,}25 - 3{,}75 = 0$

A reakciók ismeretében az $S_{2,3}$, $S_{2,8}$, $S_{7,8}$ rúderőket hármas átmetszéssel tudjuk meghatározni. Távolítsuk el a három érintett rudat a szerkezetből és helyettesítsük azokat a bennük fellépő erőkkel! Így a hármas átmetszéstől balra és jobbra lévő tartórész továbbra is egyensúlyban marad. Rajzoljuk fel az átmetszéstől balra, illetve jobbra lévő tartórészeket a rájuk ható erőkkel és írjuk fel mindkét részre az egyensúlyi kijelentéseket!

Hármas átmetszés, az elkülönített tartórészek ábrája:



A két tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentés:

$bal:(S_{2,3}, S_{2,8}, S_{7,8}, A) \doteq 0$

$jobb:(F, S_{2,3}, S_{2,8}, S_{7,8}, B) \doteq 0$

Mindkét egyensúlyi kijelentésben ugyanaz a három ismeretlen rúderő szerepel és mindkét egyensúlyi kijelentés alapján fel lehet írni három független skaláregyenletet. A bal és jobb oldal egyensúlya alapján felírható egyenletek nem függetlenek egymástól, tehát összesen három független egyenlet írható fel. Általában annak a résznek az egyensúlya alapján számoljuk a rúderőket, amelyikre kevesebb erő hat (ezért a másikat nem is szoktuk felrajzolni). Számoljunk most a bal oldal egyensúlya alapján! Három adott hatásvonalú rúderő egyensúlyozza az A reakcióerőt. Mindig felírható három egyismeretlenes egyenlet a hármas átmetszésben szereplő rúderők meghatározásához. Az $S_{2,3}$ rúderőt a másik két rúd metszéspontjára, a 8-as pontra felírt nyomatéki egyenletből érdemes számolni:

$\text{bal}\sum M_i^{(8)}: -S_{2,3}\cdot 4-1{,}25\cdot 6=0 \quad \rightarrow \quad S_{2,3}=\text{-}1{,}875\ \text{kN}(\text{ny})$

Az $S_{2,8}$ rúderőt a másik két párhuzamos rúderő hatásvonalára merőleges vetületi egyenletből számoljuk:

$\text{bal}\sum F_{iz}: S_{2,8}\cdot\frac{4}{5}-1{,}25=0 \quad \rightarrow \quad S_{2,8}=1{,}563\ \text{kN}(\text{h})$

Az $S_{7,8}$ rúderőt is olyan egyenletből számoljuk, amiben nem szerepel a korábban kiszámított két rúderő. Írjunk fel a másik két rúd metszéspontjára, a 2-es pontra egy nyomatéki egyenletet:

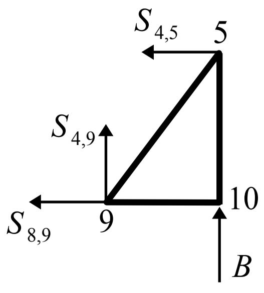
$\text{bal}\sum M_i^{(2)}: S_{7,8}\cdot 4-1{,}25\cdot 3=0 \quad \rightarrow \quad S_{7,8}=0{,}9375\ \text{kN}(\text{h})$

A hármas átmetszésben szereplő rúderők ellenőrzésére írjunk fel egy x irányú vetületi egyenletet:

$\text{bal}\sum F_{ix}: -1{,}875+1{,}563\cdot\frac{3}{5}+0{,}9375=0{,}0003\approx 0$

Az $S_{4,9}$ rúderőt a (4,5), (4,9), (8,9) rudakon keresztül felvett hármas átmetszésből tudjuk meghatározni. Számoljunk a hármas átmetszéstől jobbra lévő tartórész egyensúlya alapján!

Elkülönítés:



Egyensúlyi kijelentés:

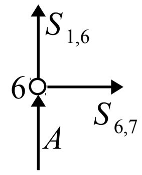
$jobb:(S_{4,5}, S_{4,9}, S_{8,9}, A) \doteq 0$

Mivel a két övrúd párhuzamos, a keresett rúderőt az övekre merőleges irányú vetületi egyenletből meg tudjuk határozni:

$\text{jobb}\sum F_{iz}: -S_{4,9}-3{,}75=0 \quad \rightarrow \quad S_{4,9}=\text{-}3{,}75\ \text{kN}(\text{ny})$

Az (1,6) és a (6,7) rudakban működő erőket a 6-os csomópontra alkalmazott csomóponti módszerrel határozzuk meg.

Elkülönítés:



Egyensúlyi kijelentés:

$6:(S_{1,6}, S_{6,7}, A) \doteq 0$

A vízszintes irányú vetületi egyenletből következik, hogy a (6,7) rúd vakrúd ($S_{6,7}$=0).

Az $S_{1,6}$ rúderő a függőleges irányú vetületi egyenletből meghatározható:

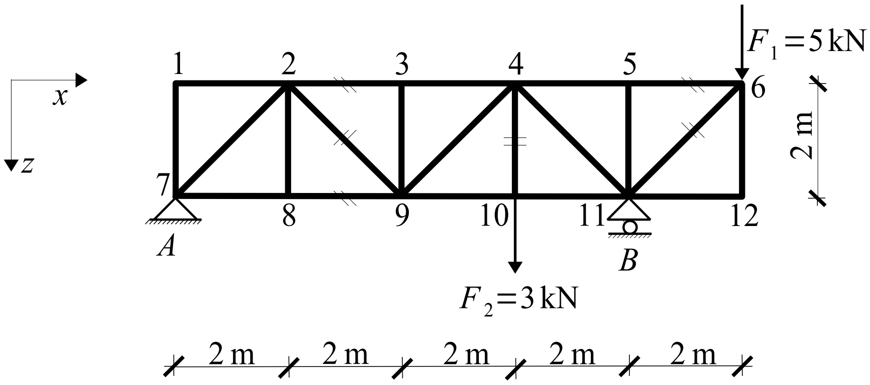
$6\sum F_{iz}: -1{,}25 - S_{1,6} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{1,6} = \text{-}1{,}25$ kN(ny)

A kiszámított rúderőket általában rúderőtáblázatban adjuk meg. A táblázat első oszlopában a rudak jele, a második oszlopban a húzott rudakban működő erők nagysága, a harmadik oszlopban pedig a nyomott rudakban működő erők nagysága szerepel.

Rúderőtáblázat:

Rúd jele	Húzott [kN]	Nyomott [kN]
(1,6)		1,25
(2,3)		1,875
(2,8)	1,563	
(4,9)		3,75
(6,7)	0	0
(7,8)	0,9375	

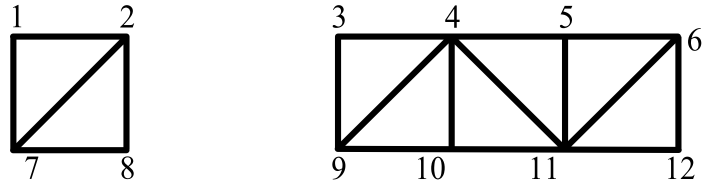
Gyakorlópélda -1
Keressük meg a vakrudakat! Határozzuk meg a rácsos tartó jelölt rúdjaiban ébredő erőket!



Megoldás
Vakrudak:

A reakciók meghatározása:

Hármas átmetszés:



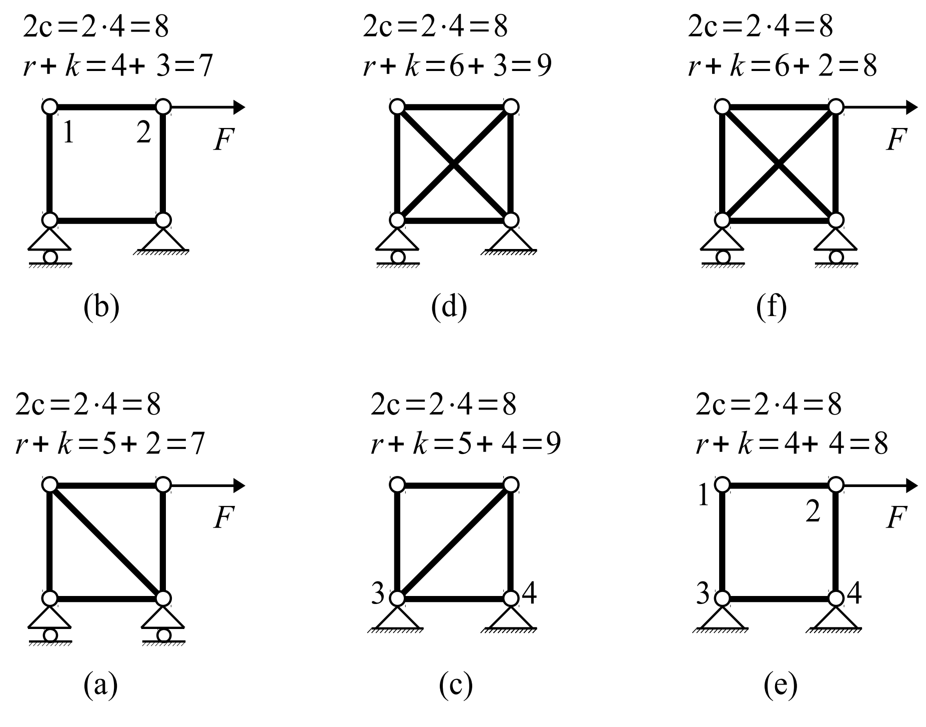
Rúderőtáblázat:

Rúd jele	Húzott [kN]	Nyomott [kN]

Rácsos tartók, statikai határozottság

A statikai határozottság, határozatlanság, túlhatározottság definícióival korábban már találkoztunk. Ezek a definíciók és a szerkezetek minősítéséhez alkalmazott feltételek rácsos szerkezetekre is érvényesek.

A statikai túlhatározottság elégséges, de nem szükséges feltételét $i<e$ alakban határoztuk meg, ez rácsos szerkezetek esetén $i=r+k$ és $e=2c$ miatt $r+k<2c$ alakban írható. A 17.1a és a 17.1b ábrákon látható szerkezetek esetén teljesül a statikai túlhatározottság elégséges feltétele, $r+k<2c$. A 17.1a ábrán látható szerkezet a rá ható vízszintes erő hatására nincs egyensúlyban, a teljes szerkezetre felírt vízszintes irányú vetületi egyenlet nem teljesül. A 17.1b ábrán látható szerkezet (1,2) rúdjában a 2-es csomópontra ható vízszintes aktív teherrel megegyező nagyságú húzóerőnek kell működnie a 2-es csomópontra felírt vízszintes irányú vetületi egyenlet alapján. Ez viszont ellentmondásra vezet, hiszen így az 1-es csomópont egyensúlya nem teljesül. Tehát mindkét szerkezet esetén találtunk olyan terhet, ami mellett nincs egyensúly (az egyensúlyi egyenletrendszernek nincs megoldása).



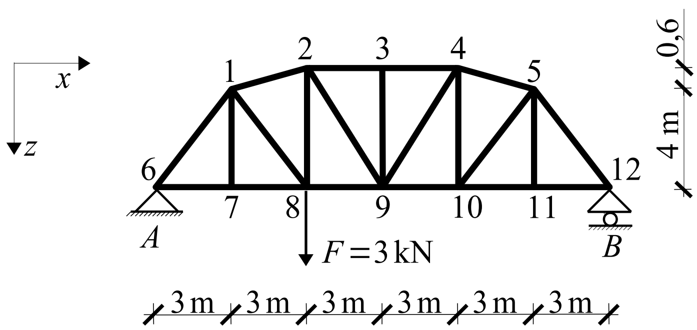
17.1. ábra. Statikailag túlhatározott (a,b), statikailag határozatlan (c,d) és egyidejűleg statikailag határozatlan és statikailag túlhatározott (e,f) rácsos szerkezetek

A statikai határozatlanság elégséges, de nem szükséges feltételét $i>e$ alakban adtuk meg, ez rácsos szerkezetek esetén $r+k>2c$ alakban írható. A 17.1c és a 17.1d ábrákon látható szerkezetek statikailag határozatlanok, mert teljesül az $r+k>2c$ feltétel. A 17.1c ábrán látható szerkezet (3,4) rúdjában tetszőleges nagyságú erő működhet, a két külső támasz felveszi a rúdról rájuk ható erőket. Ez azt jelenti, hogy az $S_{3,4}$ rúderőt még akkor sem lehet egyértelműen meghatározni, ha nem hat külső, aktív teher a tartóra. A 17.1d ábrán látható szerkezet bármelyik rúdjának eltávolításával statikailag határozott szerkezethez jutunk. Az eltávolított rúdban működő erőt a rúd két végén lévő csomópontokra működtetve a többi rúdban a rúderők meghatározhatók, a szerkezet egyensúlyban marad. Ez azt jelenti, valamelyik rúderőt szabadon előírhatjuk, a többi rúd egyensúlyozni tudja azt, tehát a szerkezet belső erői külső terhek nélküli állapotban sem határozhatók meg egyértelműen.

A statikai határozottság szükséges, de nem elégséges feltételét $i=e$ alakban adtuk meg, ez rácsos szerkezetek esetén $r+k=2c$ alakban írható. A 16. és 17. óra Mintapéldáiban és Gyakorlópéldáiban szereplő szerkezetek mind statikailag határozott rácsos tartók. A 17.1e és a 17.1f ábrán látható szerkezetek esetén szintén teljesül az $r+k=2c$ feltétel, a szerkezetek azonban egyszerre statikailag határozatlanok és túlhatározottak. A túlhatározottság bizonyításához berajzoltunk a szerkezetekre egy-egy olyan terhet ami esetén a szerkezetek nincsenek egyensúlyban. A 17.1e ábrán látható szerkezet esetén az $S_{1,2}$ rúderő számítása esetén jutunk ellentmondásra, a 17.1f ábrán látható szerkezet esetén a teljes szerkezetre felírt vízszintes vetületi egyenlet nem teljesül. A statikai határozatlanságot hasonlóan bizonyíthatjuk, mint a 17.1c és a 17.1d szerkezetek esetén. A 17.1e ábrán látható szerkezet (3,4) rúdjában tetszőleges nagyságú erő működhet még külső terhek nélkül is. A 17.1f ábrán látható szerkezet rúdjai közül az egyikben tetszőlegesen előírhatjuk a rúderőt, a többi rúd felveszi azt (zérus nagyságú külső reakciók mellett), tehát a szerkezet belső erői nem határozhatók meg egyértelműen az egyensúlyi egyenletek alapján még külső terhektől mentes állapotban sem.

Mintapélda - 1

Határozzuk meg a rácsos tartó (1,2), (1,8), (7,8), (2,8) rúdjaiban ébredő erőket!



Megoldás

A feladat megoldását kezdjük a reakcióerők meghatározásával! A reakciók számítása során a rácsos tartót egyetlen merev testként kezeljük, ugyanúgy számoljuk a reakciókat, mint egy kéttámaszú tartó esetén. (A kéttámaszú tartó elkülönítését most már nem rajzoljuk fel.) A rácsos tartóra vonatkozó egyensúlyi kijelentésben három erő szerepel, a külső, aktív F erő és a két reakcióerő:

$Sz.:(F, A, B) \doteq 0$

A két támaszra felírt nyomatéki egyenletből és a vízszintes irányú vetületi egyenletből a reakciókomponensek számíthatók:

$\text{Sz.} \sum M_i^{(A)}: -3\cdot 6 + B\cdot 18 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 1\ \text{kN}(\uparrow)$

$\text{Sz.} \sum M_i^{(B)}: 3\cdot 12 - A_z\cdot 18 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = 2\ \text{kN}(\uparrow)$

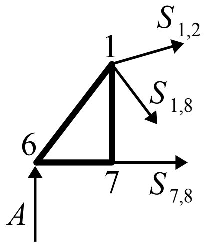
$\text{Sz.} \sum F_{ix}: A_x = 0$

Ellenőrzésül írjunk fel egy *z* irányú vetületi egyenletet:

$$\text{Sz.} \sum F_{iz} : 3-2-1=0$$

A reakciók ismeretében az $S_{1,2}$, $S_{1,8}$, $S_{7,8}$ rúderőket egy hármas átmetszésből meg tudjuk határozni. Távolítsuk el a három érintett rudat a szerkezetből és helyettesítsük azokat a bennük fellépő erőkkel! Így a hármas átmetszéstől balra és jobbra lévő tartórész továbbra is egyensúlyban marad. Vizsgáljuk a bal oldali tartórész egyensúlyát, mert arra az átmetszésben szereplő rúderőkön kívül csak az *A* reakcióerő működik. Rajzoljuk fel a vizsgált tartórészt a rá ható erőkkel és írjuk fel az egyensúlyi kijelentést!

Az elkülönített tartórész ábrája:



A vizsgált tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentés:

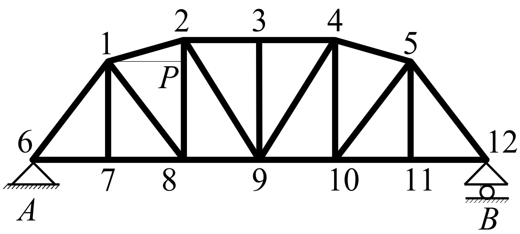
$$\text{bal}: (S_{1,2}, S_{1,8}, S_{7,8}, A) \doteq 0$$

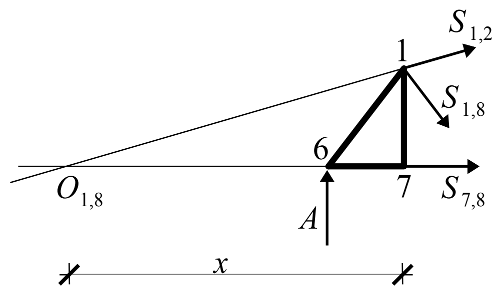
Három adott hatásvonalú rúderő egyensúlyozza az *A* reakcióerőt. Mindig felírható három egyismeretlenes egyenlet a hármas átmetszésben szereplő rúderők meghatározásához. Alkalmazzuk a főponti módszert, az ismeretlen erőket számoljuk az átmetszésben szereplő másik két ismeretlen erő hatásvonalának metszéspontjára felírt nyomatéki egyenletből!

Az $S_{1,2}$ rúderőt a másik két rúd metszéspontjára, a 8-as pontra felírt nyomatéki egyenletből számoljuk, az $S_{1,2}$ erőt a 2-es csomópontban felbontva:

$$\text{bal} \sum M_i^{(8)} : -S_{1,2} \cdot \frac{3}{\sqrt{(3^2+0{,}6^2)}} \cdot 4{,}6 - 2 \cdot 6 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{1,2} = \text{-}2{,}660 \text{ kN(ny)}$$

Az $S_{1,8}$ rúderő számításához határozzuk meg az átmetszésben szereplő másik két erő metszéspontjának, az $O_{1,8}$ főpontnak a helyét!





Az $O_{1,8}$ főpont és az (1), (7) csomópontok, illetve az (1) csomópont, a (2,8) rúdra levetített képe (*P* pont) és a (2) csomópont által meghatározott derékszögű háromszögek hasonlósága alapján:

$$x/4 = 3/0{,}6 \quad \rightarrow \quad x = 20 \text{ m}$$

Ezek után már fel tudjuk írni az $O_{1,8}$ főpontra a nyomatéki egyenletet, az $S_{1,8}$ erőt a 8-as csomópontban felbontva:

$$\text{bal} \sum M_i^{(O_{1,8})} : -S_{1,8} \cdot \frac{4}{5} \cdot 23 + 2 \cdot 17 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{1,8} = 1{,}848 \text{ kN(h)}$$

Az $S_{7,8}$ rúderőt a másik két rúd metszéspontjára, az 1-es pontra felírt nyomatéki egyenletből számoljuk:

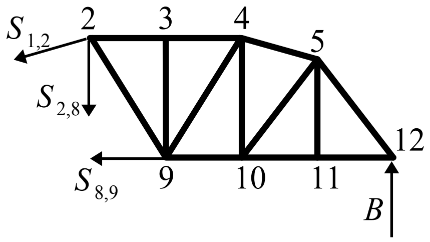
$$\text{bal} \sum M_i^{(1)} : S_{7,8} \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{7,8} = 1{,}5 \text{ kN(h)}$$

A hármas átmetszésben szereplő rúderők ellenőrzésére írjunk fel egy *x* irányú vetületi egyenletet:

$$\text{bal} \sum F_{ix} : -2{,}660 \cdot \cos(11{,}31°) + 1{,}848 \cdot \frac{3}{5} + 1{,}5 = 0{,}0005 \approx 0$$

Az $S_{2,8}$ rúderőt az (1,2), (2,8), (8,9) rudakon keresztül felvett hármas átmetszésből határozzuk meg. Számoljunk a hármas átmetszéstől jobbra lévő tartórész egyensúlya alapján!

Elkülönítés:



A vizsgált tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentés:

$$\text{jobb} : (S_{1,2}, S_{2,8}, S_{8,9}, B) \doteq 0$$

Az $S_{2,8}$ rúderőt az ($O_{1,8}$ főponttal egybeeső) $O_{2,8}$ főpontjára, az $S_{1,2}$ és az $S_{8,9}$ rúderők metszéspontjára felírt nyomatéki egyenletből számoljuk:

$$\text{bal} \sum M_i^{(O_{2,8})} : -S_{2,8} \cdot 23 + 1 \cdot 35 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{2,8} = 1{,}522 \text{ kN(h)}$$

Ellenőrizzük az $S_{1,8}$ és az $S_{2,8}$ rúderőket a 8-as csomópontra felírt függőleges irányú vetületi egyenlet felírásával:

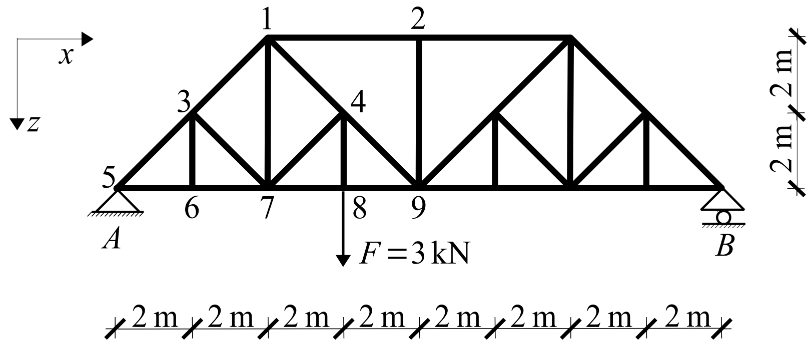
$$8 \sum F_{iz} : 3 - 1{,}848 \cdot \frac{4}{5} - 1{,}522 = -0{,}0004 \approx 0$$

A kiszámított rúderőket adjuk meg rúderőtáblázatban!

Rúd jele	Húzott [kN]	Nyomott [kN]
(1,2)		2,660
(1,8)	1,848	
(2,8)	1,522	
(7,8)	1,5	

Gyakorlópélda -1

Határozzuk meg a rácsos tartó jelölt csomópontjai közötti rúdjaiban ébredő erőket!



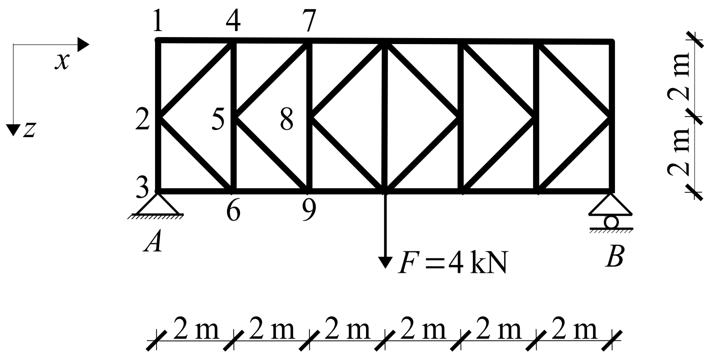
Megoldás

Rúderőtáblázat:

Rúd jele	Húzott [kN]	Nyomott [kN]
(1,2)		
(1,3)		
(1,4)		
(1,7)		
(2,9)		
(3,5)		
(3,6)		
(3,7)		
(4,7)		
(4,8)		
(4,9)		
(5,6)		
(6,7)		
(7,8)		
(8,9)		

Mintapélda - 2

Határozzuk meg a K-rácsozású tartó (4,7), (5,7), (5,9), (6,9), (7,8), (8,9) rúdjaiban ébredő erőket!

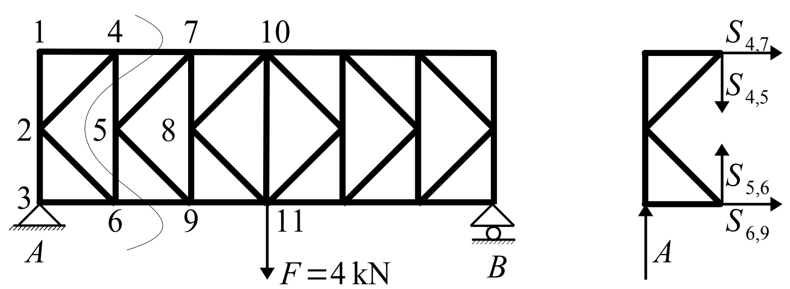


Megoldás

A megoldást a reakcióerők meghatározásával kezdjük (de ennek lépéseit már nem részletezzük):

$A = 2\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$; $B = 2\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$

A K-rácsozású tartó számítása speciális, ugyanis nem alkalmazható a hármas átmetszés módszere, három rúd átvágásával (eltávolításával) nem tudjuk „kettévágni” a tartót. A tartó kettévágásához négy rudat kell átvágni. Ez azt jelenti, hogy az átvágástól balra és jobbra lévő tartórészekre vonatkozó egyensúlyi kijelentésekben négy ismeretlen rúderő szerepel, az egyensúlyi kijelentések alapján felírható független skaláregyenletek száma azonban továbbra is három. A rácsozat speciális geometriájának köszönhetően mégis meg tudjuk határozni a rúderőket.
Az $S_{4,7}$ és az $S_{6,9}$ rúderők meghatározásához vágjuk át a (4,7), (4,5), (5,6), (6,9) rudakat. Ennek a *négyes átmetszés*nek az az előnye (a tartó függőleges egyenes mentén történő átvágásával szemben), hogy az átvágásban szereplő erők közül kettő közös hatásvonalú. Ennek köszönhetően fel lehet írni két olyan nyomatéki egyenletet, amelyben csak egy-egy ismeretlen rúderő szerepel. Vizsgáljuk a tartó átmetszéstől balra lévő részének egyensúlyát!



A vizsgált tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentés:

$$\text{bal}:(A, S_{4,7}, S_{4,5}, S_{5,6}, S_{6,9}) \doteq 0$$

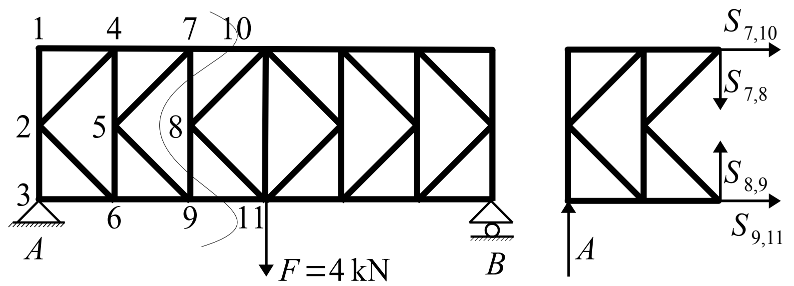
Az $S_{4,7}$ rúderőt az átmetszésben szereplő másik három erő metszéspontjára, a 6-os csomópontra felírt nyomatéki egyenletből határozhatjuk meg:

$$\text{bal}\sum M_i^{(6)}: -2\cdot 2 - S_{4,7}\cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{4,7} = \text{-1 kN}(\text{ny})$$

Az $S_{6,9}$ rúderőt a 4-es csomópontra felírt nyomatéki egyenletből számíthatjuk:

$$\text{bal}\sum M_i^{(4)}: -2\cdot 2 + S_{6,9}\cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{6,9} = 1\text{ kN}(\text{h})$$

Az $S_{5,7}$, $S_{5,9}$ rúderőket a 7-es és 9-es csomópontok egyensúlya alapján határozzuk meg, de előbb egy négyes átmetszésből meghatározzuk az $S_{7,10}$, $S_{9,11}$ rúderőket. (Erre azért van szükség, mert a 7-es és 9-es csomópontok egyensúlyi kijelentéseiben egyelőre 3-3 ismeretlen rúderő szerepel.) Vágjuk át a tartót a (7,10), (7,8), (8,9), (9,11) rudakon keresztül és vizsgáljuk a négyes átmetszéstől balra lévő tartórész egyensúlyát!



A vizsgált tartórészre vonatkozó egyensúlyi kijelentés:

$$\text{bal}:(A\,, S_{7,10}, S_{7,8}, S_{8,9}, S_{9,11}) \doteq 0$$

Két nyomatéki egyenletből határozzuk meg az övrudakban fellépő erőket:

$$\text{bal} \sum M_i^{(9)} : -2\cdot 4 - S_{7,10}\cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{7,10} = \text{-2 kN(ny)}$$

$$\text{bal} \sum M_i^{(7)} : -2\cdot 4 + S_{9,11}\cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{9,11} = \text{2 kN(h)}$$

Az (5,7), (7,8) rudakban fellépő erőket most már a csomóponti módszer segítségével meg tudjuk határozni. A 7-es csomópontra vonatkozó egyensúlyi kijelentés:

$$7:(S_{4,7}, S_{5,7}, S_{7,8}, S_{7,10}) \doteq 0$$

A vízszintes irányú vetületi egyenletben csak az $S_{5,7}$ rúderő szerepel ismeretlenként:

$$7 \sum F_{ix} : 1 - S_{5,7}\cdot\cos(45°) - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{5,7} = \text{-1,414 kN(ny)}$$

Az $S_{5,7}$ rúderő ismeretében a függőleges irányú vetületi egyenletben már csak egy ismeretlen szerepel:

$$7 \sum F_{iz} : -1{,}414\cdot\sin(45°) + S_{7,8} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{7,8} = \text{1 kN(h)}$$

Az (5,9), (8,9) rudakban fellépő erőket hasonlóan számoljuk a 9-es csomópontra vonatkozó egyensúlyi kijelentés

$$9:(S_{5.9}, S_{6.9}, S_{8,9}, S_{9,11}) \doteq 0$$

alapján.

$$9 \sum F_{ix} : -S_{5,9}\cdot\cos(45°) - 1 + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{5,9} = \text{1,414 kN(h)}$$

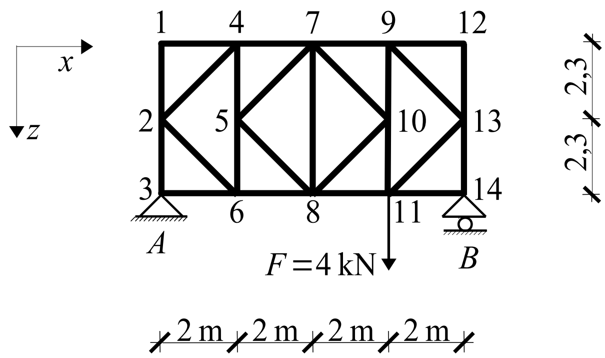
$$9 \sum F_{iz} : -1{,}414\cdot\sin(45°) - S_{8,9} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{8,9} = \text{-1 kN(ny)}$$

Végül készítsük el a rúderőtáblázatot a feladat kiírásában szereplő rúderőkkel!

Rúd jele	Húzott [kN]	Nyomott [kN]
(4,7)		1
(5,7)		1,414
(5,9)	1,414	
(6,9)	1	
(7,8)	1	
(8,9)		1

Gyakorlópélda -2

Keressük meg a vakrudakat (indoklással)! Határozzuk meg a K-rácsozású tartó jelölt rúdjaiban ébredő erőket!



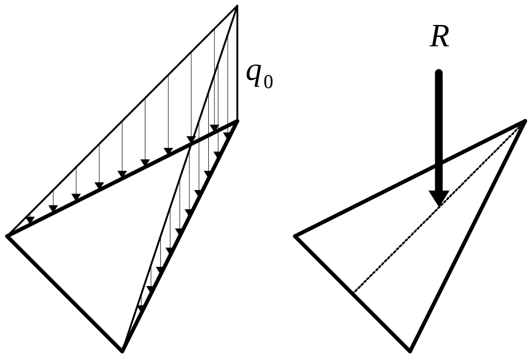
Megoldás

Rúderőtáblázat

Rúd jele	Húzott [kN]	Nyomott [kN]

Térbeli szerkezetek

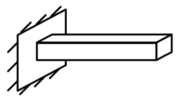
Térbeli tartók esetén előfordul, hogy valamelyik teher felület mentén megoszló, lineárisan változó intenzitású erő. Az ilyen teher eredője egy olyan erő, melynek nagysága a terhelési test térfogatával azonos, hatásvonala pedig átmegy a test súlypontján. A triviális eseteken kívül megemlítjük, hogy az olyan lineárisan változó megoszló tehernek, mely egy háromszög felületén oszlik meg, a háromszög egyik oldalán zérus intenzitású, az ezzel az oldallal szemközti csúcsban pedig q_0 az intenzitása, az eredőjének a helye a maximális intenzitású csúcsponthoz tartozó súlyvonalnak a csúcs és a szemközti oldal közötti felezőpontja. Az eredő nagysága a háromszög területe és a maximális intenzitás szorzatának harmada: $R = \frac{1}{3} A \cdot q_0$.



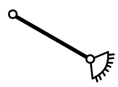
Térbeli szerkezetek kényszerei

Térbeli szerkezetek megtámasztására lényegesen több lehetőségünk van, mint egy síkbeli feladatnál, hiszen minden megtámasztott pont esetében három irányú eltolódást és három tengely körüli elfordulást gátolhatunk meg a megfelelő reakciókomponenssel. A kényszerek ezeknek az elmozdulásoknak különböző kombinációit gátolhatják meg. Mi csak az alábbi kapcsolatokkal foglalkozunk.

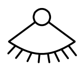
A *merev befogás* a síkbeli feladathoz hasonlóan sem eltolódást, sem elfordulást nem enged, ezért három reakcióerő-komponenssel és három befogási nyomatékkomponenssel jellemezhetjük a reakciót. Ez hat ismeretlen skalárt jelent, a merev befogás fokszáma tehát hat.



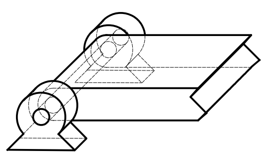
A *támasztórúd* most is csak rúdirányú erőt képes felvenni, ezért fokszáma egy, az egyetlen ismeretlen a rúderő nagysága.



A *gömbcsukló* a megtámasztott pont semmilyen irányú eltolódását nem engedi, de a támasz pontján átmenő bármely tengely körül szabadon elfordulhat a kapcsolódó test. A reakció tehát három erőkomponenssel adható meg, a gömbcsukló fokszáma három.



A *síkbeli* feladatoknál megismert *csukló* forgástengelye általában két ponton rögzített, így a tengelyre merőleges forgástengelyek körüli elfordulások gátoltak. A tengelyről való lecsúszás elkerülése érdekében a tengelyirányú mozgás is gátolt, azaz egyetlen, a tengely körüli elfordulás lehetséges, a másik két tengely körüli forgást egy-egy reakciónyomaték gátolja meg, az eltolódásokat pedig három erőkomponens. Az ismeretlenek száma öt, a kényszer fokszáma öt.



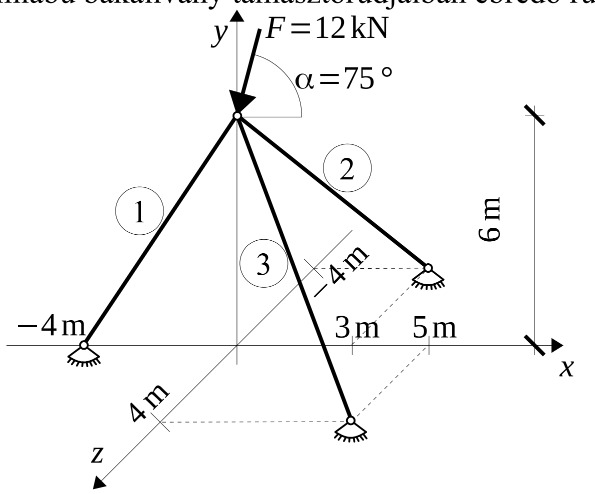
A reakciók számításának lépései a síkbeli feladatoknál látottakhoz hasonlóak. Az elkülönítésben felrajzoljuk az összes testre ható erőt (a kényszerekben ébredő reakciók irányát feltételezve), majd egyensúlyi egyenleteket írunk fel és oldunk meg (lehetőleg minél kevesebb ismeretlennel).

Térbeli feladatoknál a határozottság vizsgálata bonyolultabb, mint síkban, de a definíciók továbbra is érvényesek. Ha bármilyen teher esetén *egyértelmű* megoldást kapunk, akkor a tartó *statikailag határozott.* Ha bizonyos terhekre létezik *nem egyértelmű* megoldása az egyensúlyi egyenleteknek, akkor a szerkezet *statikailag határozatlan*. Végül ha van olyan teher, amelyiknél *nincs megoldása* az egyensúlyi egyenletrendszernek, akkor a szerkezet *statikailag túlhatározott* (azaz mozogni fog). A határozottság szükséges, de nem elégséges feltétele miatt a kényszerek fokszámainak összege egy merev testből álló szerkezet esetén hat kell legyen.

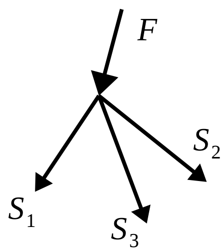
Háromlábú bakállvány

Ha három támasztórúd egyetlen csuklóhoz kapcsolódik és a csuklót egy koncentrált erő terheli, akkor a szerkezetet háromlábú bakállványnak nevezzük. Ebben az esetben a csuklóra egy közös metszéspontú erőrendszer hat, melyre elegendő a három vetületi egyenletet felírni, hiszen a csuklón keresztül haladó tengelyekre felírt nyomatéki egyenletek azonosságra vezetnek.

Mintapélda – 3
Számítsuk ki a háromlábú bakállvány támasztórúdjaiban ébredő rúderőket!



Megoldás
Első lépésben különítsük el a szerkezetet (vagyis a belső csuklót) és rajzoljuk fel a rá ható erőket (a rúderőket húzottnak feltételezve):



Az egyensúlyi kijelentés: $(F, S_1, S_2, S_3) \doteq 0$
Az egyensúlyi egyenletekben a rúderők vetületeinek számításához szükségünk lesz a rudak hosszára:
$l_1 = \sqrt{4^2+6^2+0^2} = 7{,}211\,\mathrm{m}$, $l_2 = \sqrt{3^2+6^2+4^2} = 7{,}810\,\mathrm{m}$, $l_3 = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = 8{,}775\,\mathrm{m}$
A vetületi egyenletek:

$$\sum F_{ix}: -\frac{4}{7{,}211}S_1 + \frac{3}{7{,}810}S_2 + \frac{5}{8{,}775}S_3 - 12\cdot\cos 75° \qquad = 0$$

$$\sum F_{iy}: -\frac{6}{7{,}211}S_1 - \frac{6}{7{,}810}S_2 - \frac{6}{8{,}775}S_3 - 12\cdot\sin 75° \qquad = 0$$

$$\sum F_{iz}: +\frac{0}{7{,}211}S_1 - \frac{4}{7{,}810}S_2 + \frac{4}{8{,}775}S_3 + 0 \qquad = 0$$

Bár a fenti egyenletet átírhatnánk mátrixos alakba, hogy az együtthatómátrix invertálásával oldjuk meg az egyenletrendszert, mi most inkább behelyettesítünk egymás után. A harmadik egyenletből: $S_2 = 0{,}8900\,S_3$, ezt behelyettesítjük az első két egyenletbe:

$$\begin{aligned} -0{,}5547\,S_1 + 0{,}9117\,S_3 &= 3{,}106 \\ -0{,}8321\,S_1 - 1{,}368\,S_3 &= 11{,}59 \end{aligned}$$

. Az elsőből $S_1 = 1{,}644\,S_3 - 5{,}599$, amit felhasználunk a másodikban: $-1{,}368\,S_3 + 4{,}659 - 1.368\,S_3 = 11{,}59$.
Ezt megoldva: $S_3 = -2{,}533\,\mathrm{kN}\,(ny)$,

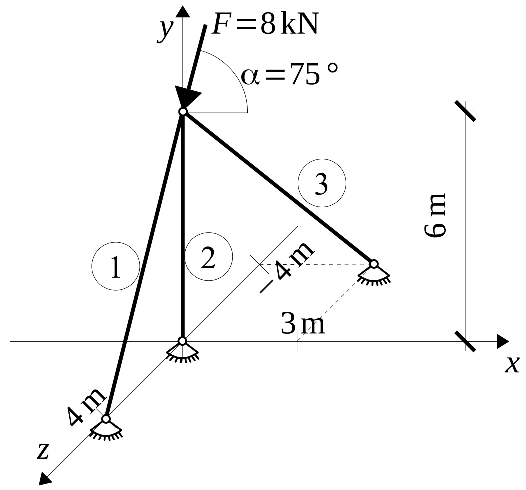
majd visszahelyettesítve a másik két kifejezésbe: $S_2 = -2{,}255\,\mathrm{kN}\,(ny)$,
$S_1 = -9{,}763\,\mathrm{kN}\,(ny)$.

Az ellenőrző egyenlet felírását és kiszámítását az olvasóra bízzuk.

Megjegyzés: Itt most egyértelmű megoldást kaptunk. Mivel az egyenletek és ismeretlenek száma azonos volt, ez egyben azt jelenti, hogy a tartó statikailag határozott. Erről úgy bizonyosodhattunk volna meg, ha a három ismeretlen számítására egyismeretlenes egyenleteket kerestünk volna. Az 1-jelű rúdban ébredő erőt számíthattuk volna egy olyan (ferde) vetületi egyenletből amelynek iránya egyszerre merőleges a másik két rúdra, azaz az általuk meghatározott síkra, vagy egy olyan (ferde) tengelyre felírt nyomatéki egyenletből, melynek tengelye körül nem forgat a másik két ismeretlen erő. (Ilyen tengely lehet a két rúd alsó végpontjait összekötő egyenes.) Mivel a keresett rúderő nemzérus együtthatóval szerepelne ezekben az egyenletekben, ezért annak egyértelmű megoldása lenne. Hasonló megfontolások alapján a 2-es és 3-as jelű rudak egyismeretlenes egyenleteit is meg lehet keresni.
A háromlábú bakállvány tehát jellemzően statikailag határozott. Kivételt képez az az eset, ha a három rúd egy síkba esik. (Ilyenkor a fenti kizárásos egyenletkeresésben a keresett mennyiség együtthatója is zérus lenne mindig.)

Gyakorlópélda – 3

Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket és számítsuk ki a háromlábú bakállvány támasztórúdjaiban ébredő rúderőket!



Megoldás

Különítsük el a csuklót a támaszoktól rajzoljuk fel a rá ható erőket és írjuk fel az egyensúlyi kijelentést:

Írjuk fel a három egyensúlyi egyenletet:

$\sum F_{ix}$:

$\sum F_{iy}$:

$\sum F_{iz}$:

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

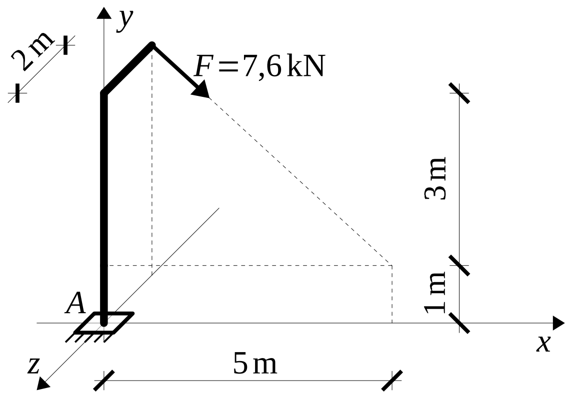
A megoldás:

$S_1 =$
$S_2 =$
$S_3 =$

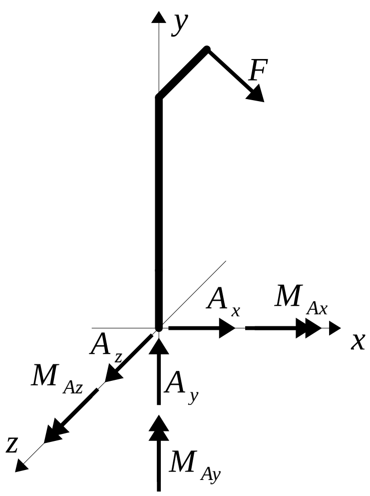
Mereven befogott konzol

Ez a megtámasztás a legegyszerűbb, hiszen hasonlóan a síkbeli konzol reakcióinak számításához, itt is egyismeretlenes egyenletekre esik szét az egyenletrendszer.

Mintapélda – 4
Számítsuk ki az ábrán látható szerkezet reakcióit!



Megoldás
Az elkülönítés során a befogásnál ébredő reakciókat feltételezzük mindig a koordinátatengelyek irányába mutatónak.



Egyensúlyi kijelentés: $(F, A, M_A) \doteq 0$

A teher vetületeinek számításához a hatásvonal kiválasztott szakaszának hossza: $l=\sqrt{5^2+3^2+2^2}=6{,}164\,\text{m}$. A reakcióerő komponenseit a vetületi egyenletekből számíthatjuk:

$$\sum F_{ix}: +7{,}6\cdot\frac{5}{6{,}164}+A_x=0 \qquad A_x=-6{,}165\,\text{kN}$$

$$\sum F_{iy}: -7{,}6\cdot\frac{3}{6{,}164}+A_y=0 \qquad A_y=3{,}699\,\text{kN}$$

$$\sum F_{iz}: +7{,}6\cdot\frac{2}{6{,}164}+A_z=0 \qquad A_z=-2{,}466\,\text{kN}$$

A befogási nyomatékok számításához a befogási ponton átmenő tengelyekre írjunk fel nyomatéki egyenleteket (hiszen így az előbb kiszámított erők esetleges hibái nem halmozódnak):

$$\sum M_{ix}: -7{,}6\cdot\frac{3}{6{,}164}\cdot 2+7{,}6\cdot\frac{2}{6{,}164}\cdot 4+M_{Ax}=0 \qquad M_{Ax}=-2{,}466\,\text{kNm}$$

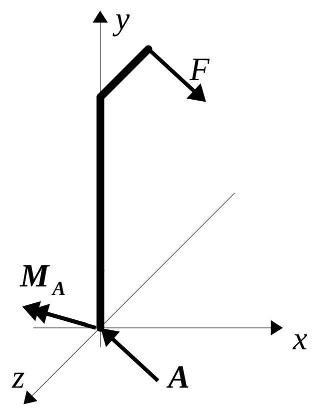
$$\sum M_{iy}: -7{,}6\cdot\frac{5}{6{,}164}\cdot 2+0+M_{Ay}=0 \qquad M_{Ay}=+12{,}33\,\text{kNm}$$

$$\sum M_{iz}: -7{,}6\cdot\frac{5}{6{,}164}\cdot 4+0+M_{Az}=0 \qquad M_{Az}=+24{,}66\,\text{kNm}$$

Ellenőrző egyenletnek írjuk fel a törésponton átmenő, x-tengellyel párhuzamos tengelyre a nyomatékok egyensúlyát:

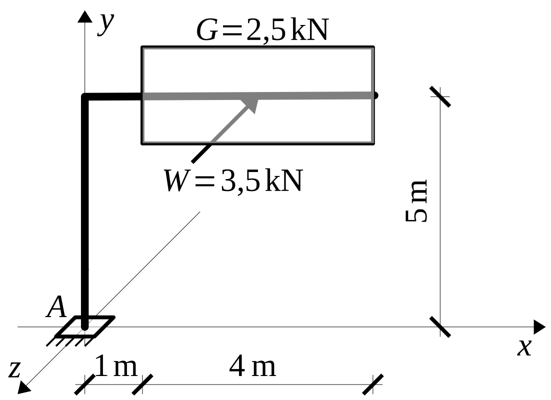
$$\sum M_{ix}^{T}: -7{,}6 \cdot \frac{3}{6{,}164} \cdot 2 + 2{,}466 \cdot 4 - 2{,}466 = 0{,}0002 \approx 0$$

Eredményvázlat:



Gyakorlópélda – 4

Az ábrán látható közlekedési tábla súlya G. A szél a z-tengellyel párhuzamosan terheli a táblát, az eredő nagysága W. (Mindkét eredő erőt a tábla közepén hatónak feltételezhetjük.) Számítsuk ki a befogásban ébredő reakciókat!



Megoldás

Elkülönítés, egyensúlyi kijelentés:

Egyensúlyi egyenletek és megoldásuk

Vetületi egyenletek:

$$\sum F_{ix}:$$

$$\sum F_{iy}:$$

$$\sum F_{iz}:$$

Nyomatéki egyenletek:

$\sum M_{ix}$:

$\sum M_{iy}$:

$\sum M_{iz}$:

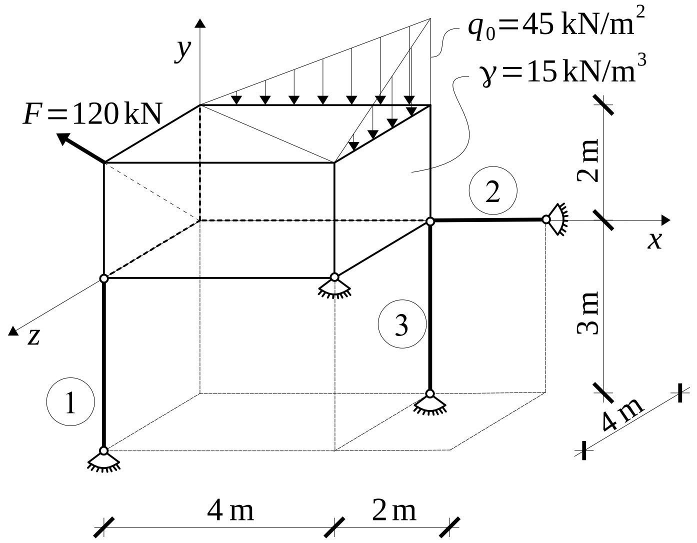
Ellenőrzés:

$\sum$

Eredményvázlat:

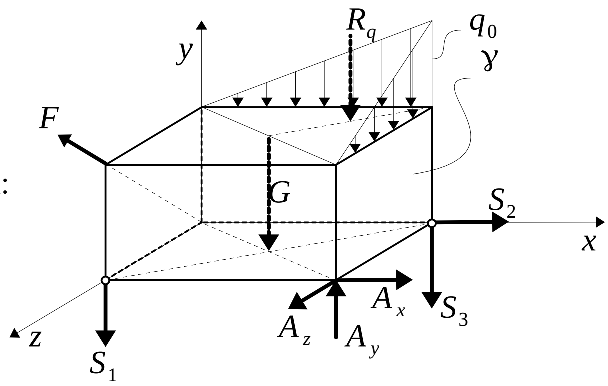
Mintapélda – 1

Számítsuk ki az ábrán látható tartó reakcióit.



Megoldás

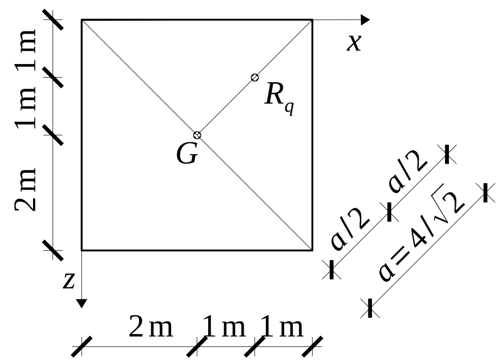
A megoldást az elkülönítéssel kezdjük:



A térfogat mentén megoszló önsúlynak és a felület mentén megoszló tehernek berajzoltuk az eredőjét is. A felület mentén megoszló erő nagysága:

$$R_q = \frac{1}{3} A\, q_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} 4 \cdot 4\right) 45 = 120\,\mathrm{kN}$$

A helye a zérus intenzitású lapátló felezőpontja és a maximumot tartalmazó csúcsot összekötő szakasz felezőpontja.



Az önsúly esetén (ha nem tudjuk közvetlenül, hogy mennyi a téglatest térfogata, és hol van a súlypontja) a térfogat mentén megoszló erőt a magassággal szorozva egy felület mentén megoszló erőt kapunk. Ennek intenzitása most $q_g = \gamma \cdot h = 30\,\mathrm{kN/m^2}$ állandó, így az eredő az intenzitás és az alapterület szorzata:

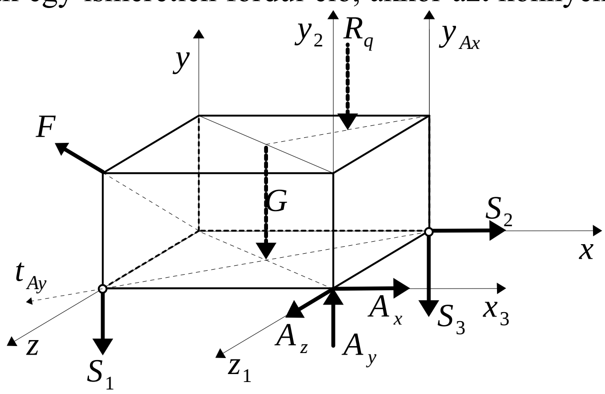
$$G = 30 \cdot 4 \cdot 4 = 480\,\mathrm{kN}$$

Az eredők helyének szemléltetéséhez ábrázoltuk ezeket az erőket felülnézetben is.

Fentieket is felhasználva az egyensúlyi kijelentés:

$$\left(F, (q), (\gamma), S_1, S_2, S_3, A\right) \doteq 0$$

A reakciók számításához felírhatnánk az x, y, z tengelyekre a három vetületi egyenletet és ugyanezekre a három nyomatéki egyenletet, majd betáplálhatnánk egy erre alkalmas számítógépes programba (vagy megkérhetnénk valakit), hogy oldja meg. Ha mégis magunknak kell megoldani a feladatot, akkor viszont bármelyik egyenlet felírása előtt gondoljuk végig, hogy melyik ismeretlen szerepelne abban, hiszen ha csak egy ismeretlen fordul elő, akkor azt könnyen meg lehet oldani (bár néha ennek a könnyen megoldható egyenletnek a felírása nem annyira egyszerű). A megoldás fontos lépése tehát a célszerű egyenletek keresése. A keresés során jelöltek lehetnek a vetületi egyenletek (van-e olyan irány, amelyikre egy kivételével mindegyik ismeretlen erő merőleges?), és a nyomatéki egyenletek (van-e olyan tengely, amelyik körül csak egy ismeretlen forgat?). Az oldalsó ábrán berajzoltuk az elkülönítésbe a felhasználható tengelyeket is.



A ferde F erő könnyebb kezelhetősége érdekében kiszámítjuk annak komponenseit:

$$F_x = 0, F_y = 120 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+4^2}} = 53{,}67\,\mathrm{kN}, F_z = 120 \cdot \frac{4}{\sqrt{2^2+4^2}} = 107{,}3\,\mathrm{kN}.$$

A vetületi egyenletek közül most csak a z irányú tartalmaz egyetlen ismeretlent:

$$\sum F_{iz} : 107{,}3 + A_z = 0 \qquad A_z = -107{,}3\,\mathrm{kN}$$

Az 1-es jelű rúd rúderejének számításához a z_1 tengelyre írhatunk nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_{iz1} : -53{,}67 \cdot 4 + 120 \cdot 1 + 480 \cdot 2 + S_1 \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow S_1 = -216{,}3\,\mathrm{kN}\,(ny)$$

A 2-es jelű rúd rúderejének számításához az y_2 tengelyre írhatunk nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_{iy2} : +107{,}3 \cdot 4 - S_2 \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow S_2 = +107{,}3\,\mathrm{kN}\,(h)$$

A 3-es jelű rúd rúderejének számításához az x_3 tengelyre írhatunk nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_{ix3} : +53{,}67 \cdot 4 - 120 \cdot 3 - 480 \cdot 2 - S_3 \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow S_3 = -276{,}3\,\mathrm{kN}\,(ny)$$

Az A_x komponenst az y_{Ax} tengelyre írt nyomatéki egyenletből számoljuk:

$$\sum M_{iyAx} : +107{,}3 \cdot 4 + A_x \cdot 4 = 0 \qquad \rightarrow A_x = -107{,}3\,\mathrm{kN}$$

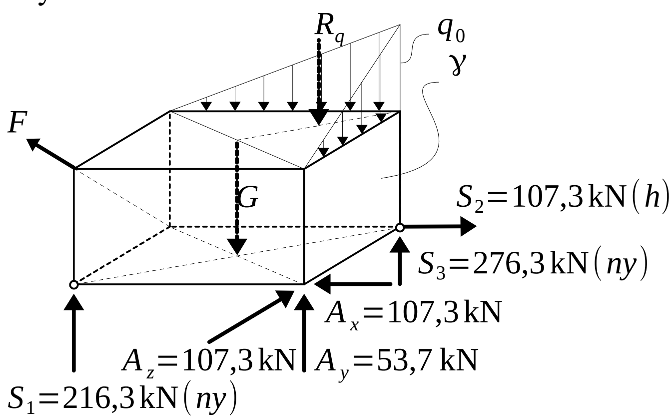
Az A_y komponens az egyetlen ismeretlen erő, amelyik a t_{Ay} tengely körül forgat, így az erre a ferde tengelyre felírt egyenletben egyetlen ismeretlen lenne. Mivel a ferde tengelyre nem szeretnénk egyenletet felírni, ezért ehelyett olyan egyenletet írunk fel és oldunk meg, melyben felhasználunk egy már kiszámított reakciót (az S_1 -et) is:

$$\sum M_{ix}: +120\cdot 1+480\cdot 2-216{,}3\cdot 4-A_y\cdot 4=0 \qquad A_y=+53{,}7\ \text{kN}$$

Ellenőrzésképpen írjuk fel a függőleges vetületi egyensúlyi egyenletet:

$$\sum F_{iy}: +53{,}67-120-480+216{,}3+276{,}3+53{,}7=-0{,}03\approx 0$$

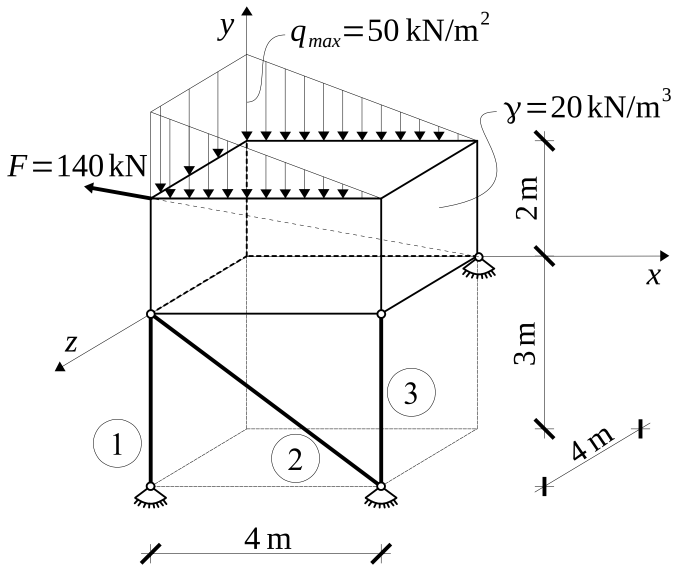
Eredményvázlat:



Egyfajta ökölszabályként kijelenthetjük, hogy ha a hat reakcióból három párhuzamos, akkor az irányukkal párhuzamos tengelyek közül többnyire találhatóak olyan tengelyek, amik a maradék három ismeretlen reakció hatásvonalai közül kettőt metszenek, így a rájuk felírt nyomatéki egyenletből a harmadik ismeretlen számítható.

Gyakorlópélda – 1

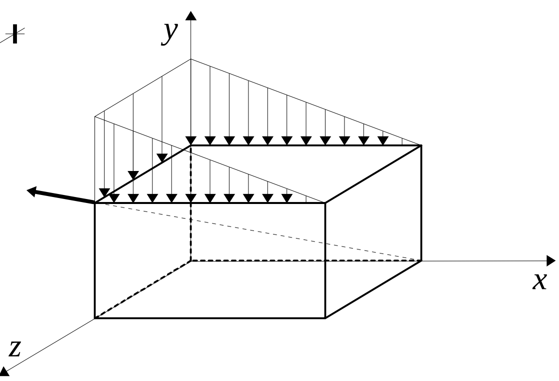
Számítsuk ki az ábrán látható tartó reakcióit!



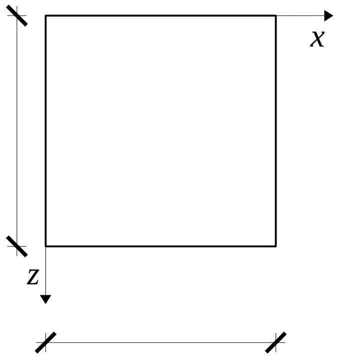
Megoldás

Elkülönítés

Rajzoljuk be az ábrába a testre ható erőket!



Határozzuk meg a megoszló erők eredőit, az eredők helyeit:



A ferde erő komponensei:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Keressünk megfelelő egyenleteket (a tengelyeket jelöljük a kiindulási ábrán) a reakciók meghatározására, és számítsuk ki a reakciókat:

$\sum$

$\sum$

$\sum$

$\sum$

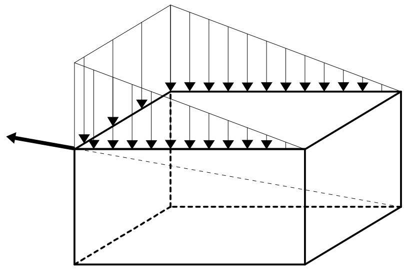
$\sum$

$\sum$

Ellenőrizzük az eredményeket:

$\sum$

Készítsünk eredményvázlatot:

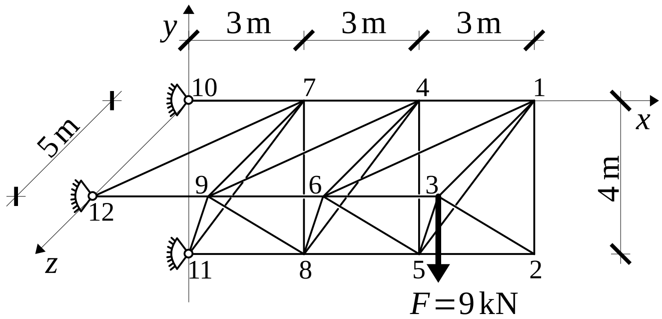


Térbeli rácsos tartók

Térbeli rácsos tartók esetén a síkbeli feladatokhoz hasonló eszközeink vannak. *Csomóponti módszerrel* egyszerre mindig egy csomópontra ható közös metszéspontú erőrendszer egyensúlyozását kell megoldanunk. Mivel három független egyenletet írhatunk fel, ezt olyan csomópontoknál alkalmazhatjuk, ahol még három, nem egy síkban levő rúd rúdereje ismeretlen. *Átmetszéses* módszer esetén rudak és csomópontok egy halmazának az egyensúlyát vizsgálhatjuk. Mivel az így kapott erőrendszer szétszórt térbeli erőrendszer, amire hat független egyensúlyi egyenletet írhatunk fel, és azokból hat ismeretlen számolható, ezért az átmetszést úgy kell végrehajtanunk, hogy hat rúd átvágásával különítsük el a tartó egy részét.

Mintapélda – 2

Számítsuk ki az ábrán látható rácsos tartó rúderőit!



Megoldás

A vetületek számításához a ferde rudak hossza:

$l_{15}=l_{48}=l_{711}=\sqrt{3^2+4^2}=5\,\mathrm{m}$ $\quad l_{16}=l_{49}=l_{712}=\sqrt{3^2+5^2}=5{,}831\,\mathrm{m}$

$l_{23}=l_{56}=l_{89}=\sqrt{4^2+5^2}=6{,}403\,\mathrm{m}$ $\quad l_{35}=l_{68}=l_{911}=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=7{,}071\,\mathrm{m}$

A számítást a 2-es csomópontban tudjuk kezdeni. Itt három erő hat, amiknek a hatásvonalai nem egy síkba esnek, így mindegyiknek nullának kell lennie: $S_{12}=S_{23}=S_{25}=0\,\mathrm{kN}$

(Ez gyakorlatilag egy terheletlen háromlábú bakállvány volt. A következő két csomópontban terhelt háromlábú bakállványokat fogunk megoldani.)

Ezután a 3-as csomópontban már csak 3 ismeretlen maradt:

$$3\sum F_{iz}: -9-S_{35}\frac{4}{7{,}071}=0 \qquad \rightarrow\ S_{35}=-15{,}91\,\mathrm{kN}\,(ny)$$

$$3\sum F_{ix}: +15{,}91\frac{3}{7{,}071}-S_{36}=0 \qquad \rightarrow\ S_{36}=+6{,}75\,\mathrm{kN}\,(h)$$

$$3\sum F_{iz}: +15{,}91\frac{5}{7{,}071}-S_{13}=0 \qquad \rightarrow\ S_{13}=11{,}25\,\mathrm{kN}\,(h)$$

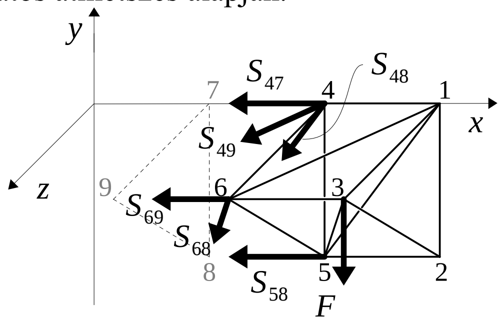
Ezután az 1-es csomópontban már csak 3 ismeretlen maradt:

$$1\sum F_{iz}:+11{,}25+S_{16}\frac{5}{5{,}831}=0 \qquad \rightarrow S_{16}=-13{,}12\,\mathrm{kN}(ny)$$

$$1\sum F_{iy}:-S_{15}\frac{4}{5}=0 \qquad \rightarrow S_{15}=0\,\mathrm{kN}$$

$$1\sum F_{ix}:+13{,}12\frac{3}{5{,}831}-S_{14}=0 \qquad \rightarrow S_{14}=6{,}75\,\mathrm{kN}(h)$$

Ezután lehetne folytatni a számítást az 5-ös, majd a 6-os, majd a 4-es csomóponttal (utána pedig a 8-as, majd a 9-es, végül a 7-es csomópontokkal). Ehelyett számítsuk a 4-5-6 kezdőpontú, és 7-8-9 végpontú rudak rúderejét hatos átmetszés alapján.



$$\text{1-6}\sum M_{i,47}:9\cdot 5+S_{68}\frac{4}{7{,}071}\cdot 5=0 \qquad \rightarrow S_{68}=-15{,}91\,\mathrm{kN}(ny)$$

$$\text{1-6}\sum M_{i,69}:9\cdot 0-S_{48}\frac{4}{5}\cdot 5=0 \qquad \rightarrow S_{48}=0\,\mathrm{kN}$$

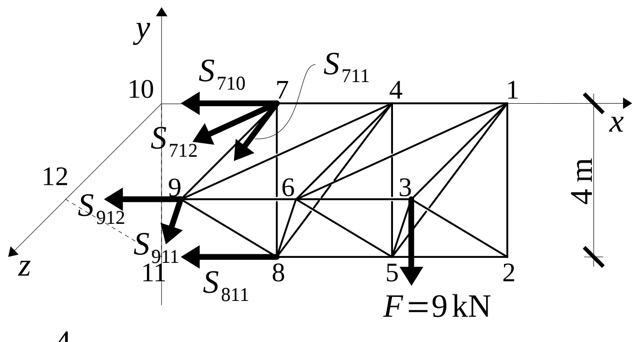
$$\text{1-6}\sum M_{i,58}:9\cdot 5+S_{49}\frac{5}{5{,}831}\cdot 4=0 \qquad \rightarrow S_{49}=-13{,}12\,\mathrm{kN}(ny)$$

$$\text{1-6}\sum M_{i,46}:-9\cdot 3-S_{58}\cdot 4=0 \qquad \rightarrow S_{58}=-6{,}75\,\mathrm{kN}(ny)$$

$$\text{1-6}\sum M_{i,78}:+13{,}12\frac{5}{5{,}831}\cdot 3-S_{69}\cdot 5=0 \qquad \rightarrow S_{69}=6{,}75\,\mathrm{kN}(h)$$

$$\text{1-6}\sum F_{ix}:-S_{47}+0+13{,}12\frac{3}{5{,}831}+6{,}75+15{,}91\frac{3}{7{,}071}-6{,}75=0 \qquad \rightarrow S_{47}=+13{,}50\,\mathrm{kN}(h)$$

A 7-8-9 kezdőpontú, és 10-11-12 végpontú rudak rúderejét is hatos átmetszés alapján számíthatjuk:



$$\text{1-9}\sum M_{i,710}:9\cdot 5+S_{911}\frac{4}{7{,}071}\cdot 5=0 \qquad \rightarrow S_{911}=-15{,}91\,\mathrm{kN}(ny)$$

$$\text{1-9}\sum M_{i,912}:9\cdot 0-S_{711}\frac{4}{5}\cdot 5=0 \qquad \rightarrow S_{711}=0\,\mathrm{kN}$$

$$\text{1-9}\sum M_{i,811}:9\cdot 5+S_{712}\frac{5}{5{,}831}\cdot 4=0 \qquad \rightarrow S_{712}=-13{,}12\,\mathrm{kN}(ny)$$

$$\text{1-9}\sum M_{i,79}:-9\cdot 6-S_{811}\cdot 4=0 \qquad \rightarrow S_{811}=-13{,}50\,\mathrm{kN}(ny)$$

$$1\text{-}9 \sum M_{i,1011}: +13{,}12\frac{5}{5{,}831}\cdot 3 - S_{912}\cdot 5 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{912} = 6{,}75\,\text{kN}(h)$$

$$1\text{-}9 \sum F_{ix}: -S_{710} + 0 + 13{,}12\frac{3}{5{,}831} + 13{,}50 + 15{,}91\frac{3}{7{,}071} - 6{,}75 = 0 \quad \rightarrow \quad S_{710} = +20{,}25\,\text{kN}(h)$$

A maradék rúderőket csomóponti módszerrel számoljuk:

$$5 \sum F_{iz}: -15{,}91\frac{5}{7{,}071} + S_{56}\frac{5}{6{,}403} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{56} = 14{,}41\,\text{kN}(h)$$

$$5 \sum F_{iy}: 0 - 15{,}91\frac{4}{7{,}071} + 14{,}41\frac{4}{6{,}403} + S_{45} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{az eredmény } S_{45} = -0{,}002,$$

gyanúsan közel van a nullához. Ha az egész számítást újra végrehajtanánk eggyel több (5) értékes jeggyel számolva, a kerekítések miatti hiba nagyságrendje is várhatóan eggyel csökkenne. Ha tehát az újraszámolás után egy nagyságrenddel kisebb eredményt kapnánk, akkor a nullától való eltérés csak a kerekítések miatti hiba lenne és a valódi eredmények a nullát tekinthetnénk. Most ezt nem kell végrehajtanunk, mivel a rúd másik végén is számítható ez a rúderő:

$$4 \sum F_{iy}: 0 - S_{45} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{45} = 0\,\text{kN}$$

$$4 \sum F_{iz}: -13{,}12\frac{5}{5{,}831} + S_{46} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{46} = 11{,}25\,\text{kN}(h)$$

A 7-es, 8-as, 9-es csomópontok közötti rudak rúderői:

$$8 \sum F_{iz}: -15{,}91\frac{5}{7{,}071} + S_{89}\frac{5}{6{,}403} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{89} = 14{,}41\,\text{kN}(h)$$

$$8 \sum F_{iy}: 0 - 15{,}91\frac{4}{7{,}071} + 14{,}41\frac{4}{6{,}403} + S_{78} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{az eredmény } S_{78} = -0{,}002,$$

hasonlít az előző esethez, és most is:

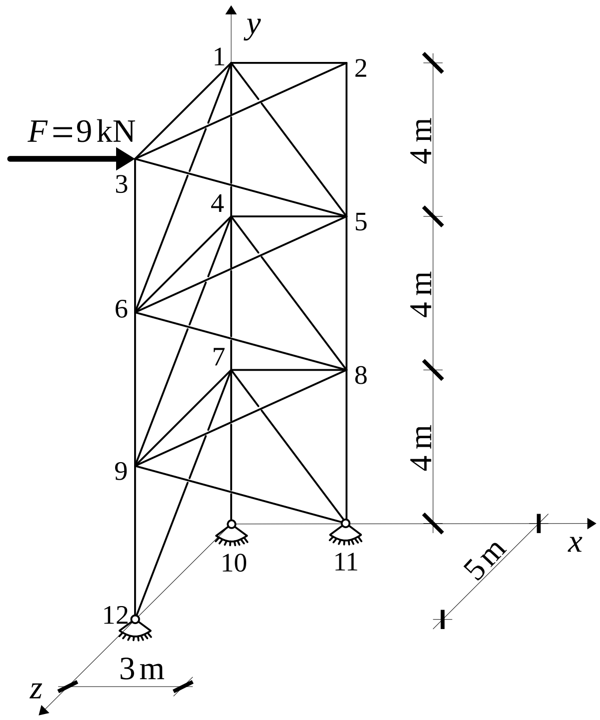
$$7 \sum F_{iy}: 0 - S_{78} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{78} = 0\,\text{kN}$$

$$7 \sum F_{iz}: -13{,}12\frac{5}{5{,}831} + S_{712} = 0 \quad \rightarrow \quad S_{712} = 11{,}25\,\text{kN}(h)$$

Rúderőtáblázat

jel	H	NY	jel	H	NY	jel	H	NY
1-2	0	0	4-5	0	0	7-8	0	0
1-3	11,25 kN		4-6	11,25 kN		7-9	11,25 kN	
1-4	6,75 kN		4-7	13,50 kN		7-10	20,25 kN	
1-5	0	0	4-8	0	0	7-11	0	0
1-6		-13,12 kN	4-9		-13,12 kN	7-12		-13,12 kN
2-3	0	0	5-6	14,41 kN		8-9	14,41 kN	
2-5	0	0	5-8		-6,75 kN	8-11		-13,50 kN
3-5		-15,91 kN	6-8		-15,91 kN	9-11		-15,91 kN
3-6	6,75 kN		6-9	6,75 kN		9-12	6,75 kN	

Gyakorlópélda – 2
Számítsuk ki az ábrán látható rácsos tartón a rúderőket!



Megoldás

Rúderőtáblázat

jel	H	NY	jel	H	NY	jel	H	NY