2. gyakorlat: Koordinátageometriai alapismeretek: Derékszögű és poláris koordinátarendszerek. Átszámítások derékszögű és poláris koordinátarendszerek között számológéppel. Az egyenes egyenlete, egyenesek metszése.

A gyakorlathoz szükséges felszerelés hallgatónként:

1 db tudományos zsebszámológép

A gyakorlat tartalma:

1. A középiskolában tanult koordinátageometriai alapismeretek átismétlése.

2. A geodéziában használt koordinátarendszer megismerése.

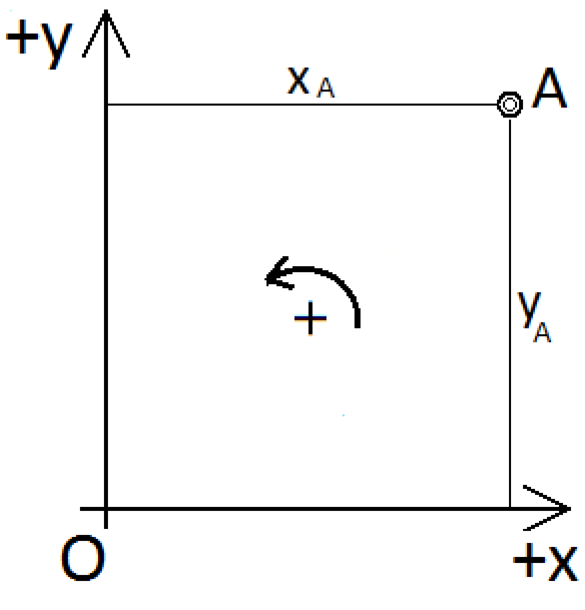
Matematikában használt koordinátarendszerek

Pontok helyzetét a síkon koordinátákkal szoktuk megadni. Ehhez szükség van egy koordinátarendszerre. Általában kétféle koordinátarendszer használunk:

- a derékszögű koordinátarendszert (Descartes-féle koordinátarendszert) és
- a poláris koordinátarendszert.

A derékszögű (Descartes-féle) koordinátarendszer:

A koordinátarendszer definiálásakor először kijelöljük a kezdőpontot. (Origó, az ábrán O-val jelezve.) Ez lesz a két koordinátatengely metszéspontja. Felvesszük az X tengely irányát. Ez a matematikában általában a „vízszintes” tengely. Kiválasztjuk a szögmérés pozitív irányát, a matematikában ez az óramutató járásával ellentétes szokott lenni. Az X tengelyt 90 fokkal, pozitív irányban elfogatva megkapjuk az Y tengely helyzetét. Tehát a matematikában a „függőleges” tengely lesz az Y.

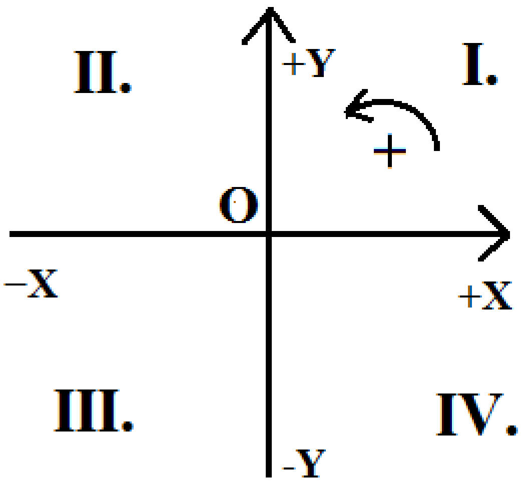


A pozitív X tengely jobbra,
a pozitív Y tengely felfelé mutat.

Az A pont koordinátái: $A(x_A, y_A)$.

X_A: a pont X tengelyre bocsájtott merőleges vetültének az előjeles távolsága az origótól.

Y_A: a pont Y tengelyre bocsájtott merőleges vetültének az előjeles távolsága az origótól.

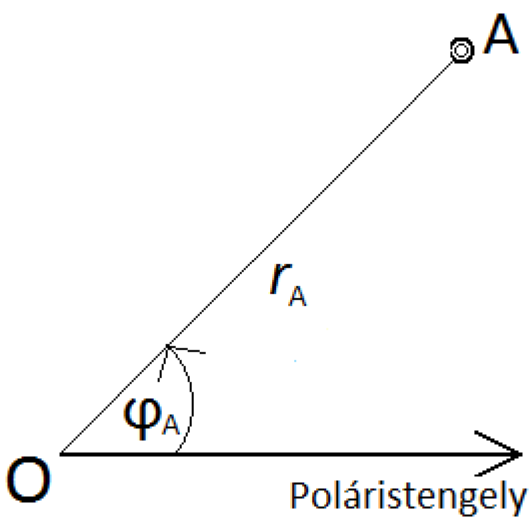


Sík negyed	X	Y
I.	+	+
II.	–	+
III.	–	–
IV.	+	–

A koordinátatengelyek a fenti ábra szerint a síkot négy sík-negyedre osztják fel. Az egyes sík-negyedekben a koordináták előjelét a táblázat foglalja össze.

A poláris koordinátarendszer:

Itt is a koordinátarendszer definiálásakor először kijelöljük a kezdőpontot. (Origó, az ábrán O-val jelezve.) Majd felvesszük a poláristengely irányát, amely a matematikában szokásos módon a vízszintes tengely.

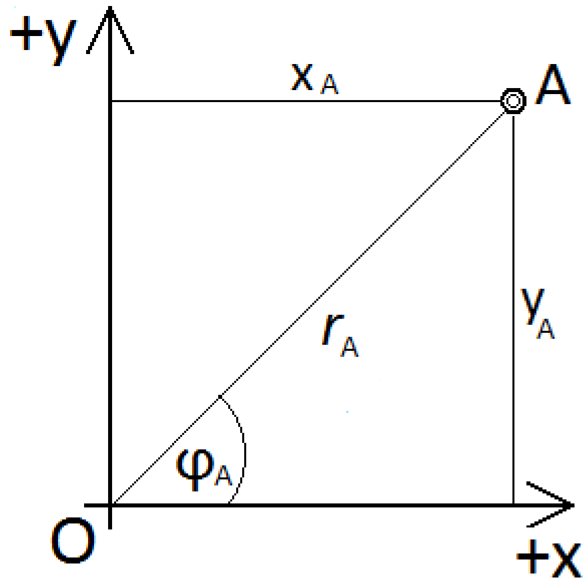


Ebben a rendszerben az A pont koordinátáit $A(r_A, \varphi_A)$ módon jelöljük.

r_A: a pont origótól mért távolsága.

φ_A: az origó és a pont egyenesének a poláristengellyel bezárt szöge.

Abban az esetben, ha a derékszögű és a poláris koordinátarendszer kezdőpontja (O pont) ugyanaz, a pozitív X tengely és a poláris tengely egybeesik, mindkét koordinátarendszernek ugyanaz a hosszmértékegysége, akkor könnyen átszámíthatóak az egyik rendszerből a másikba az A pont koordinátái.



Polárisból derékszögűbe:

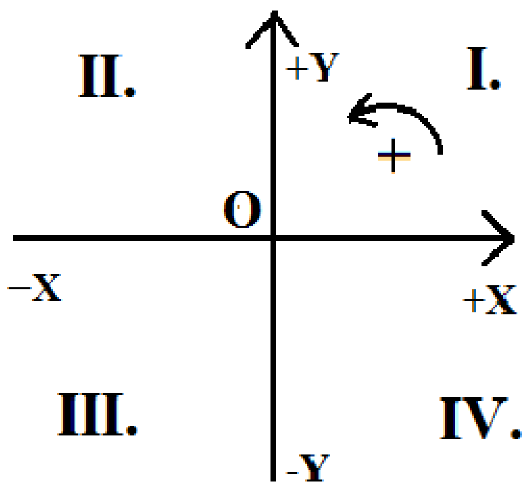
$x_A = r_A \cdot \cos\varphi_A$ $\quad$ $y_A = r_A \cdot \sin\varphi_A$

Példa1:	$r_A = \sqrt{2}$	$\varphi = 45°$
	x_A = 1	**y_A = 1**
Példa2:	$r_A = 10{,}45$	φ_A = 122-52-43
	x_A = -5,67	**y_A = +8,78**

Derékszögűből polárisba:

$$r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

$$\alpha = \arctan\frac{|y_A|}{|x_A|}$$ Ez a szögfüggvény főértéke.



Ebből a koordináták előjelének figyelembevételével az alábbi táblázat alapján számíthatjuk ki a φ_A koordinátát.

Sík negyed	X	Y	φ_A
I.	+	+	$\varphi_A = \alpha$
II.	–	+	$\varphi_A = 180° - \alpha$
III.	–	–	$\varphi_A = 180° + \alpha$
IV.	+	–	$\varphi_A = 360° - \alpha$

Példa3:

$x_A = +1$ $y_A = +1$

$\mathbf{r_A = \sqrt{2}}$ $\mathbf{\alpha = 45°}$ $\mathbf{\varphi_A = \alpha = 45°}$

Példa4:

$x_A = -1$ $y_A = +1$

$\mathbf{r_A = \sqrt{2}}$ $\mathbf{\alpha = 45°}$ $\mathbf{\varphi_A = 180° - \alpha = 135°}$

Példa5:

$x_A = -1$ $y_A = -1$

$\mathbf{r_A = \sqrt{2}}$ $\mathbf{\alpha = 45°}$ $\mathbf{\varphi_A = 180° + \alpha = 225°}$

Példa6:

$x_A = +1$ $y_A = -1$

$\mathbf{r_A = \sqrt{2}}$ $\mathbf{\alpha = 45°}$ $\mathbf{\varphi_A = 360° - \alpha = 315°}$

Példa7:

$x_A = -5{,}67$ $y_A = +8{,}78$

$\mathbf{r_A = 10.45}$ $\mathbf{\alpha = 57\text{-}08\text{-}46°}$ $\mathbf{\varphi_A = 180° - \alpha = 122\text{-}51\text{-}14}$

Miért nem egyezik meg a kiszámított φ_A a Példa2 kiinduló értékével?

Átszámítás a tudományos zsebszámológép beépített programjával:

A legtöbb tudományos zsebszámológépben megtalálható a poláris-derékszögű és a derékszögű-poláris átszámítás programja. Természetesen itt nem lehetséges valamennyi típusú zsebszámológépre receptet adni, hogyan történik velük az átszámítás. Javasolható, hogy mindenki tanulmányozza a saját számológépét, illetve annak használati utasítását. Ilyen, illetve ehhez hasonló feladatok nagyon sokszor előfordulnak majd a geodéziai tanulmányaink során.

Mintaként egy, számos hallgató által használt zsebszámológép típusra, megadjuk a számítás módját.

Polárisból derékszögűbe:

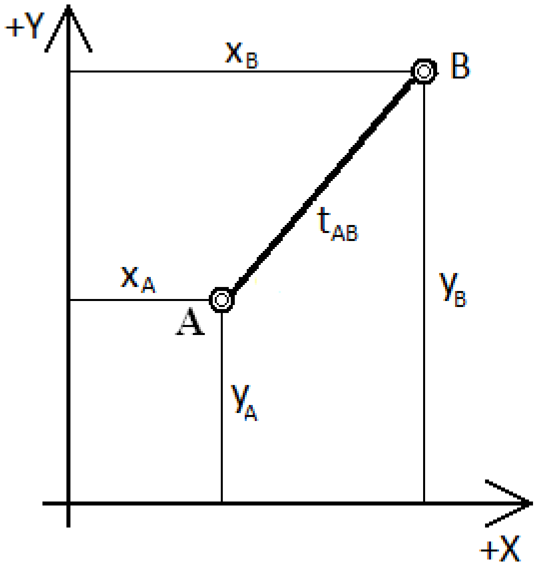
SHIFT	**Rec(**	r_A	,	φ_A	=	$\mathbf{x_A}$	RCL	F	$\mathbf{y_A}$

Derékszögűből polárisba:

Pol(	x_A	,	y_A	=	$\mathbf{r_A}$	RCL	F	$\mathbf{\varphi_A}$

Szürke alapon, dőlt betűk a bemenő adatokat, dupla vonalú kerettel a kiírandó eredményeket, egy vonallal határolt kerettel pedig a számológépen megnyomandó gombokat jelöltük.

Két, koordinátáival adott, pont távolsága:



$$t_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Példa8:

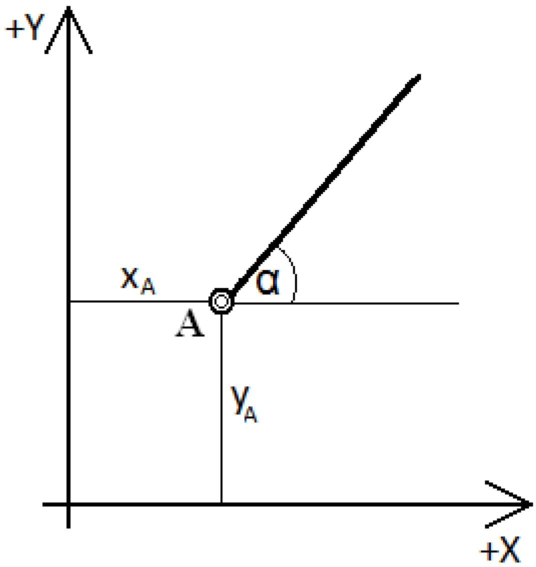
x_A = +87,59 y_A =   -32,14
x_B = +11,42 y_B =   +15,89

t_{AB} = 90,05

Egyenes egyenlete:

Későbbi geodézia tanulmányaink során még hasznát vehetjük, ha ismerjük az egyenes egyenletének különböző alakjait.

Adott ponton átmenő, adott irányú egyenes egyenlete:



$m = \tan\alpha$ (Ezt nevezzük iránytangensek.)

$$y - y_A = m \cdot (x - x_A) \cdot$$

Példa9:

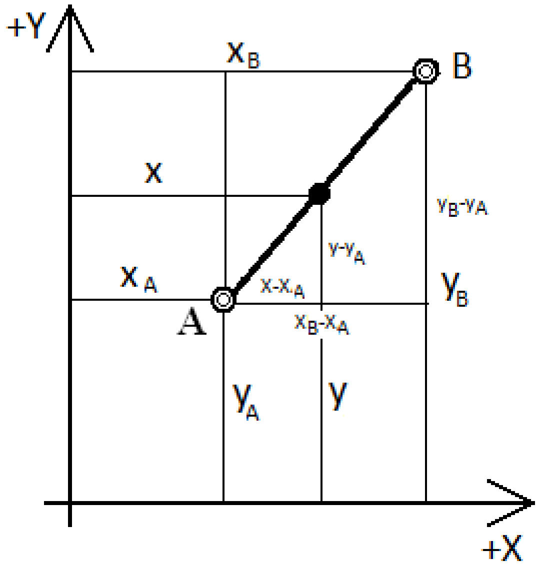
x_A = 45,25 y_A = 59,47

α = 54-25-59

m = 1,398489

y-59,47 = 1,398·(x-45,25)

Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete:



$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}$$

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\cdot(x-x_A)$$

Példa10:

x_A = 45,25 y_A = 59,47

x_B = 87,53 y_B = 100,57

$$y-59{,}47=\frac{100{,}57-59{,}47}{87{,}53-45{,}25}\cdot(x-45{,}25)=0{,}9721\cdot(x-45{,}25)$$

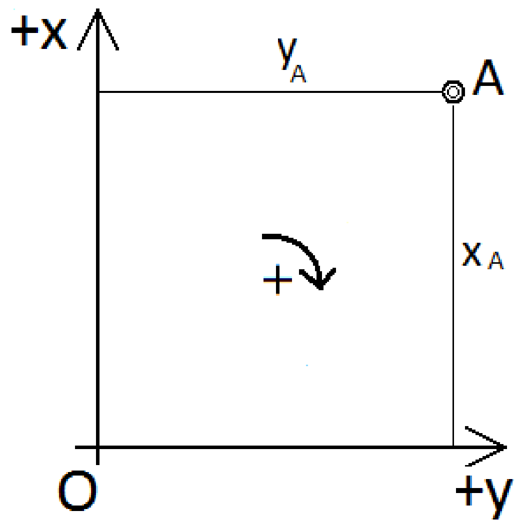
A geodéziában használt koordinátarendszer

Magyarországon a geodéziai gyakorlatban a matematikai rendszertől eltérő koordinátarendszert alakult ki.

Hazánkban jelenleg az Egységes Országos Vetület (EOV) koordinátarendszerének használata a kötelező. Azt, hogy mi a vetület, miért egységes, miért országos majd az 4. előadáson tárgyaljuk részletesen. Most még csak a koordinátarendszert ismerjük meg. Ez is derékszögű (Descartes-féle) koordinátarendszer.

A koordinátarendszer kezdőpontját a vetület definiálásakor több szempont figyelembevételével, egy alkalmas helyen, az ország területétől DNy-ra jelölték ki.

A pozitív X tengely irányát északra tájolták. Amennyiben a térképeknél szokásos módom a térképlapon az északi irány felfelé mutat, akkor az X tengely lesz a „függőleges”. A szögmérés pozitív iránya a geodéziai koordinátarendszereknél az óramutató járásával megegyezik. Az +X tengelyt 90 fokkal, pozitív irányban elfogatva, megkapjuk a +Y tengely helyzetét. Tehát geodéziában ez a „vízszintes” tengely lesz.



Amikor egy pont geodéziai koordinátáit leírjuk első helyre az y kerül, majd második helyen az x értéke következik. Pl:

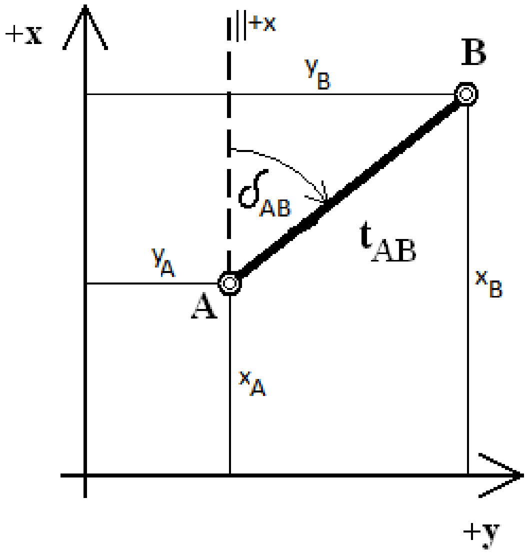
A(y_A; x_A)

A(636 457,12; 241 821, 32)

Tehát első helyen a vízszintes tengely mentén növekvő y, a második helyre függőleges tengely mentén növekvő x kerül.

A hat egész jegyű koordináták az eltolt origó miatt alakultak ki. Az x koordináták 400 000 méternél kisebbek, az y koordináták pedig 400 000 méternél nagyobbak. Így kisebb a koordináták felcserélésének veszélye.

Amennyiben a koordináták után nem írunk mértékegységet, akkor azok mindig méterben értendők.



Egy iránynak az +x tengellyel párhuzamos iránnyal bezárt szögét irányszögnek nevezzük. Ennek jele δ_{AB}. Az irányszöget pozitív forgási értelemben, $0° \le \delta_{AB} < 360°$ tartományban értelmezzük.

Két pont távolsága: t_{AB} .

A „B” pont koordinátáinak számítása y_A, x_A és δ_{AB}, t_{AB} ismeretében:

$$y_B = y_A + t_{AB} \cdot \sin\delta_{AB}$$

$$x_B = x_A + t_{AB} \cdot \cos\delta_{AB}$$

Példa12:

y_A	x_A	δ_{AB}	t_{AB}	y_B	x_B
658 785,15	246 595,59	173-27-42	547,45	**658 847,49**	**246051,70**

A irányszög és a távolság számítása y_A, x_A és y_B, x_B ismeretében:

$$\Delta y = y_B - y_A \qquad \Delta x = x_B - x_A$$

$$\alpha = \arctan \frac{|\Delta y|}{|\Delta x|}$$

$$t_{AB} = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2}$$

Δy	Δx	δ_{AB}
+	+	α
+	–	$180-\alpha$
–	–	$180+\alpha$
–	+	$360-\alpha$

Példa13:

Koordinátajegyzék		
Pontszám	Y	X
A	658 310,44	248 489,88
B	658 604,69	247 832,58

$$\Delta y_{AB} = +294{,}25 \qquad \Delta x_{AB} = -657{,}30$$

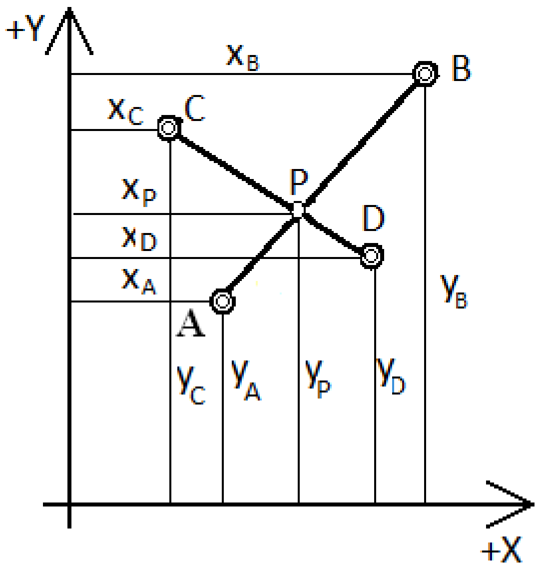
$$\alpha = 24-06-59$$

Δy	Δx	δ_{AB}
+	–	$180-\alpha$

δ_{AB} **= 155-53-01**

t_{AB} **= 720,16**

Két egyenes metszése



Példa14:

Kiszámítandók az A– B és a C– D egyenesek P metszéspontjának koordinátái!

Koordinátajegyzék		
Pontszám	Y	X
A	657 173,57	247 943,81
B	657 251,91	247 567,45
C	656 890,32	247 670,69
D	657 638,80	247 759,38

$$m_A = tg\delta_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -0,208151769$$

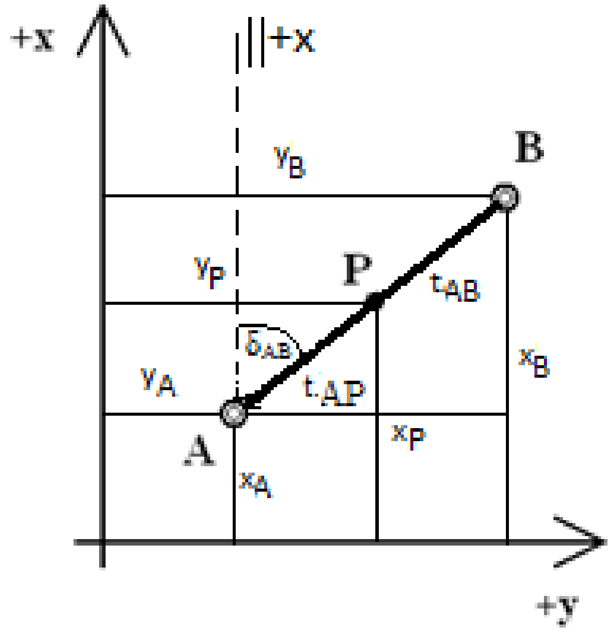
$$m_C = tg\delta_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = 8,439282895$$

$$b_A = y_A - m_A \cdot x_A = 708\ 783,5128 \qquad b_C = y_C - m_C \cdot x_C = \text{-}1\ 433\ 272,698$$

$$x_P = \frac{b_A - b_C}{m_C - m_A} = \mathbf{247\ 710,020} \qquad y_P = m_C \cdot x_P + b_C = \mathbf{657\ 222,237}$$

Pontszám	**Y**	**X**
P	**657 222,24**	**247 710,02**

Az A-B szakasz egyenesébe eső pont (mérési vonalpont) koordinátái



$$\Delta y = y_B - y_A \qquad \Delta x = x_B - x_A$$

$$t_{AB} = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2}$$

$$\sin\delta_{AB} = \frac{y_B - y_A}{t_{AB}} \qquad \cos\delta_{AB} = \frac{x_B - x_A}{t_{AB}}$$

$$y_P = y_A + t_{AP} \cdot \sin\delta_{AB}$$
$$x_P = x_A + t_{AP} \cdot \cos\delta_{AB}$$

Példa15:

Számítsuk ki a P pont koordinátáit!

Pontszám	**Y**	**X**
A	654 238,81	221 489,09
B	654 386,04	221 435,57
t_{AP}	53,14	

$$t_{AB} = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x)^2} = 156{,}656$$

$$\sin\delta_{AB} = \frac{y_B - y_A}{t_{AB}} = 0{,}939638 \qquad \cos\delta_{AB} = \frac{x_B - x_A}{t_{AB}} = -0{,}341640$$

$$y_P = y_A + t_{AP}\cdot\sin\delta_{AB} = 654288{,}742 \qquad x_P = x_A + t_{AP}\cdot\cos\delta_{AB} = 221470{,}935$$

Pontszám	**Y**	**X**
P	**654 288,74**	**221470,94**

A gyakorlat előtt elolvasásra javasolt irodalom:

1. A középiskolájában használt matematika tankönyv megfelelő fejezete.
2. Krauter: Geodézia (283-286. oldal)