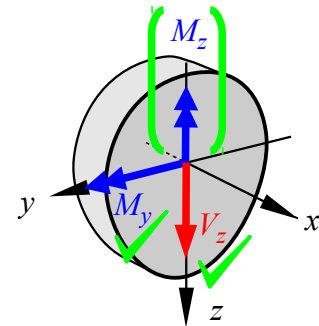


A hajlítással egyidejű nyírás fogalma

Ha a rúd egy keresztmetszetének nemzérus nyíróigénybevételén kívül a nyírásra merőleges hajlítónyomaték-komponense is van, akkor a nyírást hajlítással egyidejűnek nevezzük.



Tipikus esetek a mérnöki gyakorlatban

(szinte minden, amit a tiszta hajlításnál láttunk, csak akkor a nyírással még nem foglalkoztunk)



stb.

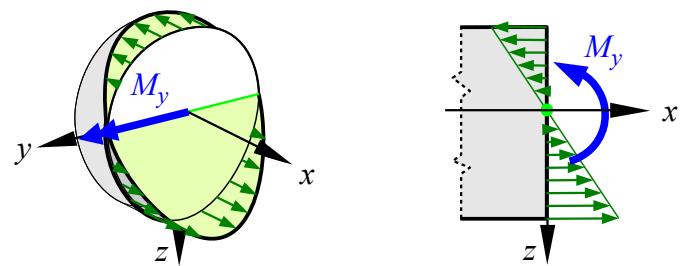
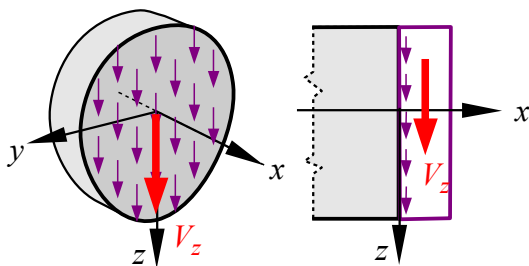
általában: gerendák

A tiszta nyírásra levezetett feszültségképlet ilyenkor nem érvényes.

Az ok: a tiszta nyírásnál elfogadott feszültségeloszlás ellentmondásra vezet azért, hogy a tiszta nyírás lokális jellegét biztosító közvetlen erőbevezetés itt hiányzik (lásd konkrétan a peremen lévő elemi hasábok egyensúlyát).

Emlékeztető: tiszta nyírás

tiszta hajlítás



24. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS II.

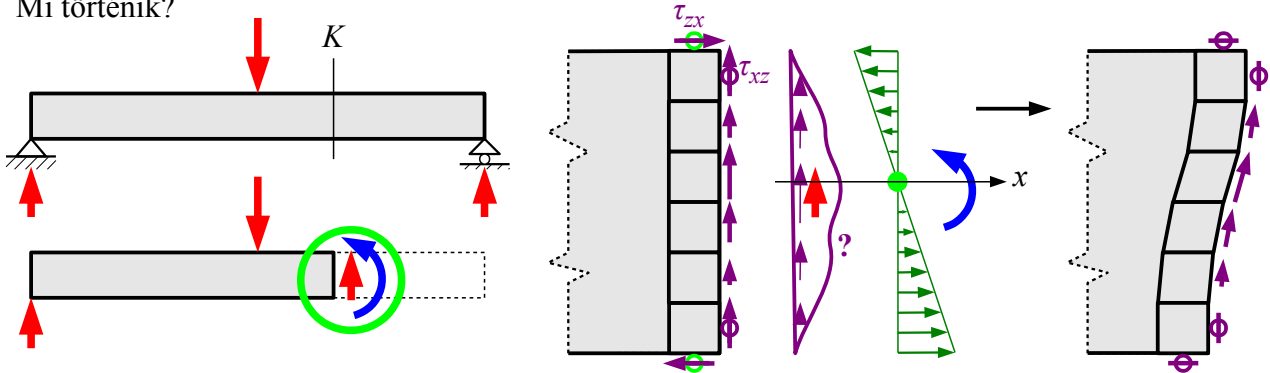
Alapvető feltevések:

- **egyenes** tengelyű rúd
- **állandó** keresztmetszetű (prizmatikus) rúd
- **homogén**, lineárisan **rugalmas** anyag (Hooke-törvény)
- **sík** keresztmetszetek elve ← ellentmondásra vezetne!

Helyette feltesszük, hogy:

- nyíróigénybevételből **csak nyíró-**,
- hajlítónyomatéki igénybevételből **csak normálfeszültségek** keletkeznek

Mi történik?



A nyírófeszültségek reciprocitása miatt (elemi hasábra $\Sigma M_{iy} = 0$) $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, vagyis $\tau_{zx} = 0$ miatt mindkettő 0: ellentmondás a tiszta nyírás feszültségképletével a feszültségek nagyságát illetően.

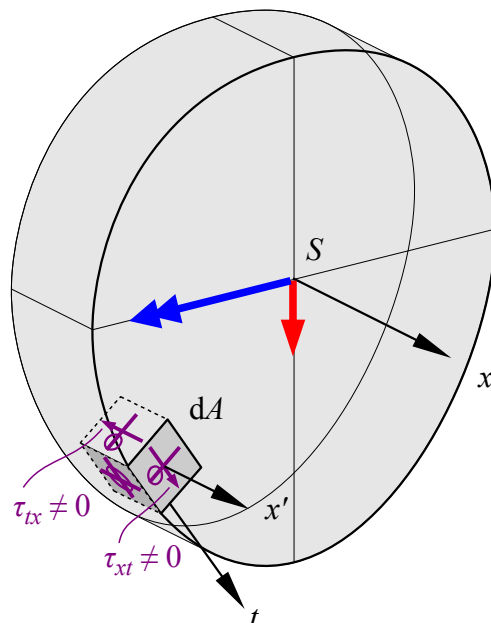
A τ_{zx} nyírófeszültségek z mentén változnak, tehát a γ_{zx} szögtorzulások is.

Következmény: a keresztmetszet nem marad sík \rightarrow nem igaz a hajlítás feszültségképlete sem?

Szerencsére kis magasságú gerendáknál a hiba kicsi: $\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} z$ továbbra is használható.

Ha a keresztmetszet kontúrja valahol yz -hez képest ferde, a tiszta nyírás alapján kapott feszültségirány is ellentmondásra vezet:

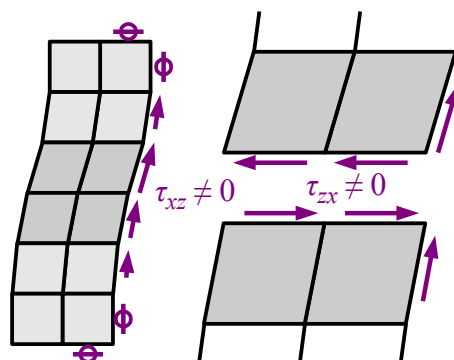
A keresztmetszet síkjában, a kontúrvonal közelében ébredő nyírófeszültség nem a nyíróigénybevétellel, hanem a kontúrvonal érintőjével párhuzamos.



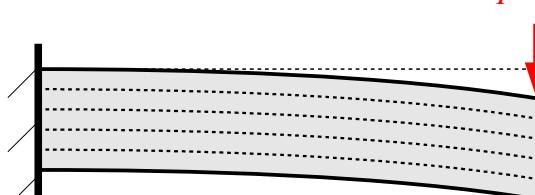
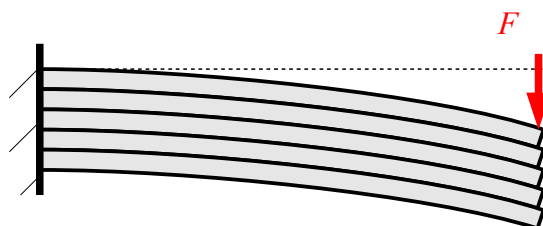
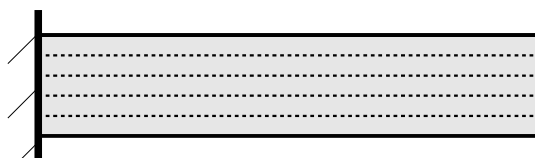
24. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS III.

A reciprocitás következménye a tengelyirányban fellépő (vízszintes) nyírófeszültség (csúsztatófeszültség) :

(eredője csúsztatóerő, jelölése H)



A vízszintes nyíróerők hatásának szemléltetése:

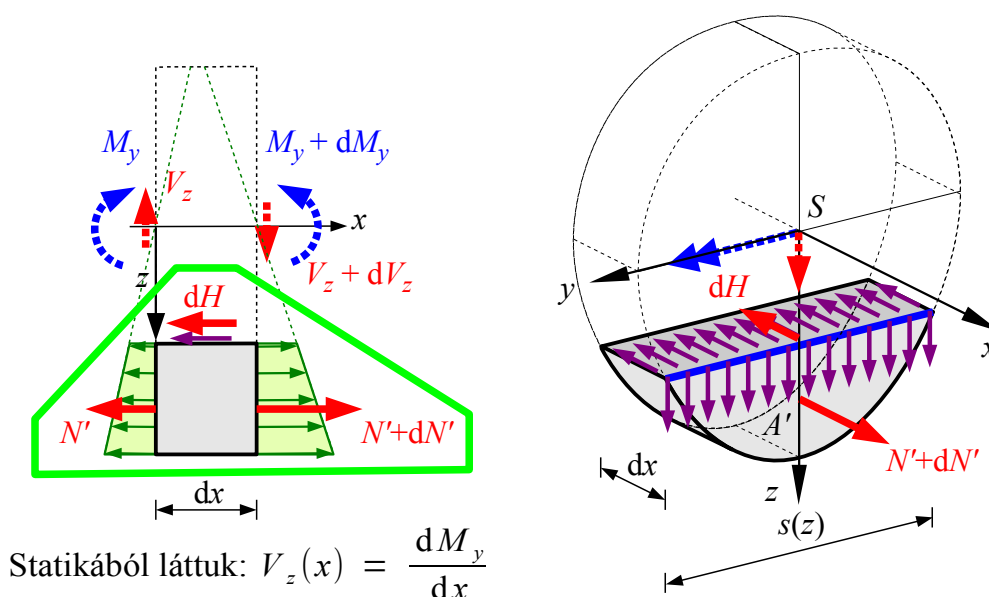


Hajlított és nyírt tömör szelvényű gerenda

Kiegészítő feltevések:

- **szimmetikus** a keresztmetszet (a levezetésben legyen z a szimmetria-tengely)
- a V nyíróerő **hatásvonala a szimmetria-tengelybe esik**
- az M hajlítónyomaték V -re merőleges (azaz egyenesen hajlít)
- a (kizárólag) nyírásból származó függőleges eltolódások y -tól függetlenek (azaz a γ_{xz} szögtorzulás a keresztmetszeten belül y mentén állandó)

Tekintsük a rúdelem z koordinátájú vízszintes síkkal leválasztott alsó részét:



STATIKAI egyenlet

$$\sum F_{ix}: \quad 0 = (N' + dN') - dH - N'$$

Vegyük észre: dN' a normál, dH viszont a nyírófeszültségek eredője: egymást egyensúlyozzák!

STAT

$$\sum F_{ix}: \quad 0 = dN' - dH = d \int_{(A')} \sigma_x(z) dA - s(z) \tau_{zx}(z) dx$$

dx -szel osztva, majd a deriválás és integrálás sorrendjét az első tagban megcserélve:

$$0 = \int_{(A')} \frac{d\sigma_x(z)}{dx} dA - s(z) \tau_{zx}(z)$$

24. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS V.

de σ_x a hajlításból származik, illetve oszthatunk $s(z)$ -vel is:

$$\tau_{zx}(z) = \frac{1}{s(z)} \int_{(A')} \frac{d}{dx} \left(\frac{M_y}{I_y} z \right) dA$$

a nyomaték deriváltja a nyíróerő, illetve z/I_y az x szerinti deriválásban konstans:

$$\tau_{zx}(z) = \frac{1}{s(z)} \int_{(A')} V_z \left(\frac{z}{I_y} \right) dA$$

az A' szerinti integrálban V_z/I_y konstans, illetve $\tau_{zx} = \tau_{xz}$:

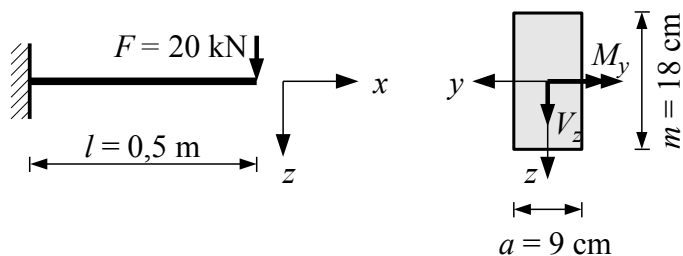
$$\tau_{xz}(z) = \frac{V_z}{I_y s(z)} \int_{(A')} z dA = \frac{V_z S'_y}{I_y s(z)}$$

“Zsuravszkij-képlet”

S'_y az ún. “elcsúszni akaró rész” statikai nyomatéka a súlyponti tengelyre (és ezért mindegy, hogy az alsó vagy a felső területrész statikai nyomatékának abszolút értékét tekintjük), $s(z)$ a metszövonal hossza.

Nyírófeszültségek esetén általános irányelv: az előjeleket inkább szemléletből állapítjuk meg.

1. Határozzuk meg a függőleges nyírófeszültség-eloszlást és a nyírófeszültség maximumát a megadott téglalapkeresztmetszet figyelembe vételével!



$M_y \neq 0$ és x mentén változik
 $V_z = 20 \text{ kN}$

a statikai nyomaték célszerű számítása:

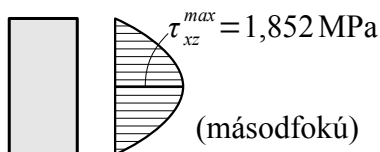
$$S'_y(z) = \frac{ah^2}{2} - \frac{az^2}{2}$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z}{I_y} \frac{S'_y}{s} \rightarrow \tau_{xz} \text{ maximumhelye } S_y(z) = \frac{a}{2} \left(\left(\frac{m}{2} \right)^2 - z^2 \right) \text{ deriváltjából: } \frac{dS_y(z)}{dz} = -az = 0$$

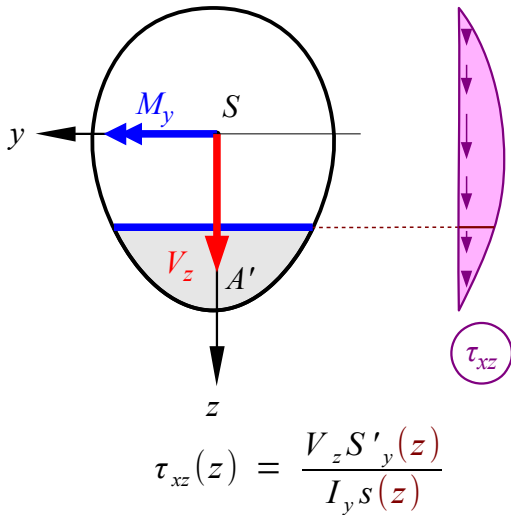
↓

$$z = 0 \text{ (a súlyponti tengelyen)} \rightarrow S_y^{max} = \frac{am^2}{8} \rightarrow$$

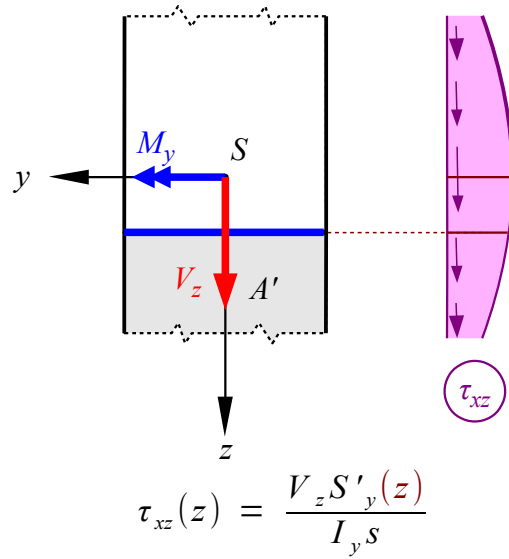
$$\tau_{xz}^{max} = \frac{V_z \frac{am^2}{8}}{\frac{am^3}{12} a} = \frac{3V_z}{2am} = \frac{3 \cdot 20}{2 \cdot 9 \cdot 18} = 0,1852 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



24. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS VI.



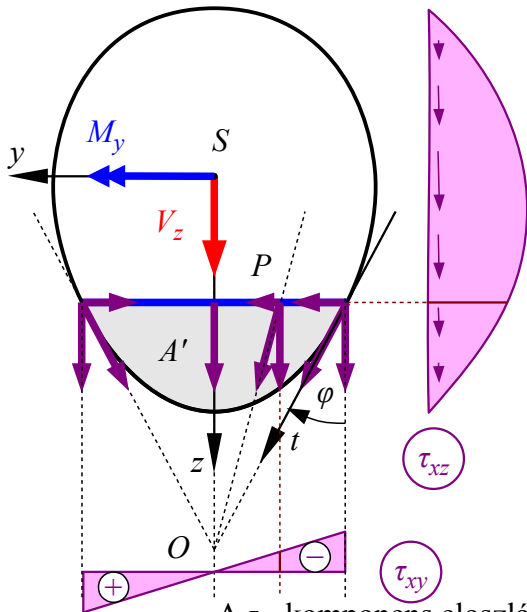
általános keresztmetszetben
 $\tau_{xz,max} : S'_y/s$ szélsőértékénél



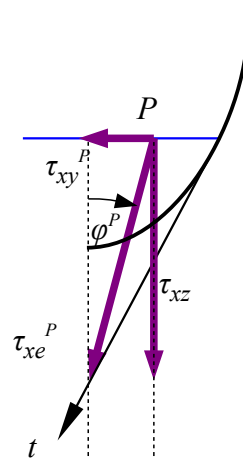
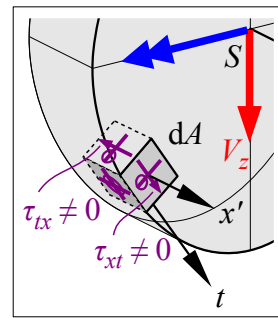
nyírással párhuzamos oldalfalak esetén (s állandó)
 $\tau_{xz,max} : S'_y$ szélsőértékénél, azaz a *súlypontban*

(ezek csupán lokális szélsőértékek: ha s ugrásszerűen csökken, nagyobb érték is adódhat)

Az eredő nyírófeszítés meghatározásának elve:
 a Zsuravszkij-képletből kapott érték csak a V_z -vel
 párhuzamos τ_{xz} komponens, amelyhez még éppen
 akkora merőleges τ_{xy} szükséges, ami az eredőt
 érintő irányúvá teszi.

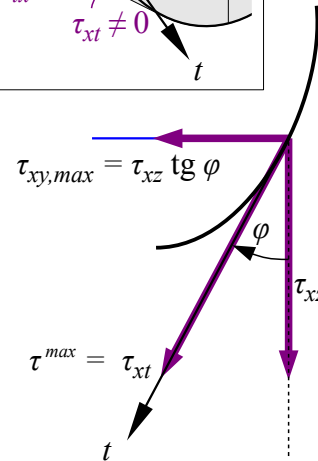


A τ_{xz} komponens eloszlása szimmetrikus, az
 egyszerűség kedvéért lineárisnak feltételezzük.



nyírófeszítési
 eredő P pontban:

$$\tau_{xe}^P = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$



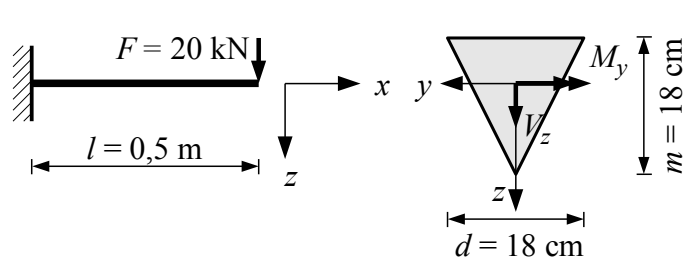
maximális nyírófeszítés
 a széleken:

$$\tau^{max} = \tau_{xt} = \sqrt{\tau_{xy,max}^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\tau^{max} = \frac{\tau_{xz}}{\cos \varphi}$$

24. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS VII.

- 2.) Határozzuk meg a függőleges nyírófeszültség-eloszlást és a nyírófeszültség maximumát a megadott háromszög-keresztmetszet figyelembe vételével!



$$M_y \neq 0 \text{ és } x \text{ mentén változik}$$

$$V_z = 20 \text{ kN}$$

célszerű egy új z' koordinátát bevezetni a statikai nyomaték egyszerűbb számításához:

ez is másodfokú
(de pl. trapézra már nem volna az!)

$$\tau_{xz}(z') = \frac{V_z}{I_y} \frac{S'_y}{s} \rightarrow \frac{S'_y}{s} = \frac{\frac{sz' \cdot 2}{3}(m-z')}{s} = \frac{z'(m-z')}{3} \rightarrow$$

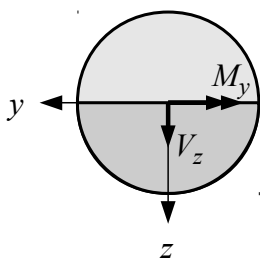
$$m - 2z' = 0 \rightarrow z' = \frac{m}{2}; \quad \tau_{xz}^{\max} = \frac{36 V_z m^2}{dm^3 \cdot 12} = \frac{3 V_z}{dm} = \frac{3 \cdot 20}{18 \cdot 18} = \underline{\underline{0,1852 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

A τ_{xt} eredő nyírófeszültség a *kerületi* pontokban *érintőirányú*:

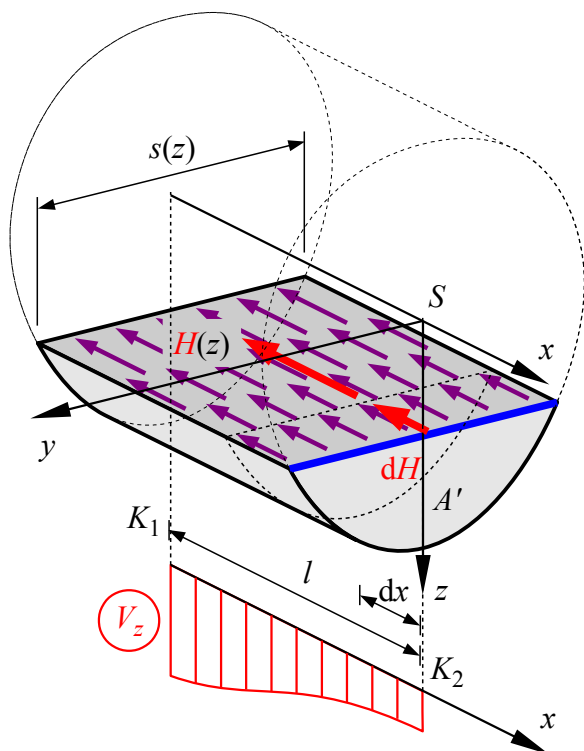
$$\tau_{xy}^{\max} = \tau_{xz}^{\max} \operatorname{tg} \varphi = \tau_{xz}^{\max} \frac{d}{2m} = 0,0926 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2};$$

$$\tau_{xt}^{\max} = \sqrt{(\tau_{xz}^{\max})^2 + (\tau_{xy}^{\max})^2} = \frac{\tau_{xz}^{\max}}{\cos \varphi} = \underline{\underline{0,2070 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

- 3.) Határozzuk meg a függőleges nyírófeszültség maximumát, ha a konzol keresztmetszete most $R = 5 \text{ cm}$ sugarú kör!



Hajlítással egyidejű nyírás: a vízszintes csúsztatóerő



Emlékeztetőül a Zsuravszkij-képlet:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{V_z S'_y}{I_y s}$$

Mitől függhetnek az egyes tagok?

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{V_z(x) S'_y(x, z)}{I_y(x) s(x, z)}$$

prizmatikus rúd: S'_y , I_y és s x -től független

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{V_z(x) S'_y(z)}{I_y s(z)}$$

reciprocitás: $\tau_{xz} = \tau_{zx}$

A K_1 és K_2 keresztmetszetek közötti H csúsztatóerő az elemi dH erők eredője:

$$H = \int_{(H)} dH = \int_{x_1}^{x_2} s(z) \tau_{xz}(x, z) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{V_z(x) S'_y(z)}{I_y} dx$$

Az x -től független tagok kiemelése után

$$H_l = H_l(z) = \frac{S'_y(z)}{I_y} \int_{x_1}^{x_2} V_z(x) dx = \frac{S'_y(z)}{I_y} A_V$$

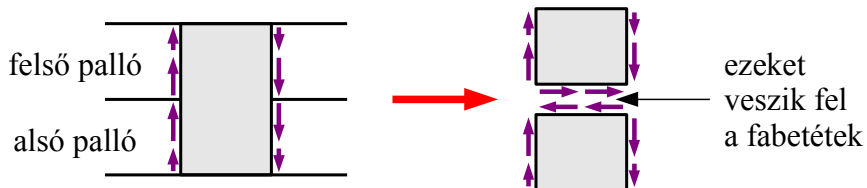
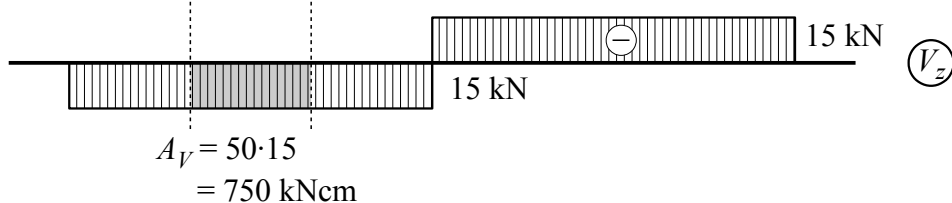
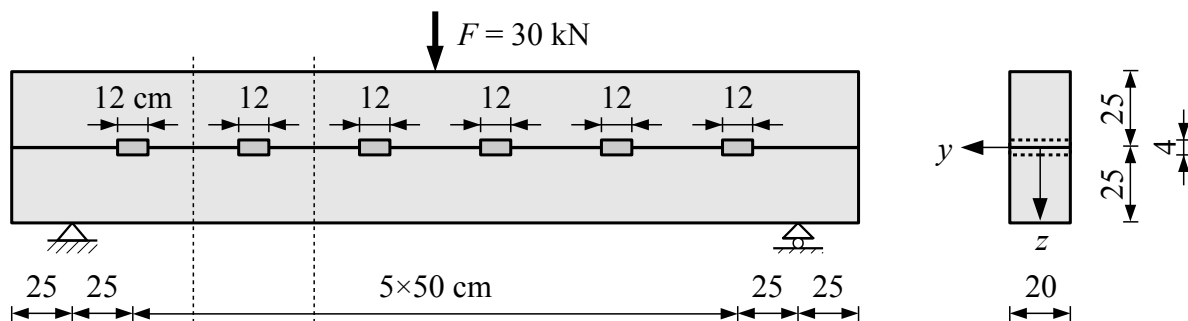
A_V a nyíróerő-ábra x_1 és x_2 közé eső, (l hosszúságú) részének a területe

Egymásra lapolt (rétegelt) szerkezetű gerendák esetén ezt az erőt valaminek föl kell vennie:

- szegecselés / csavarozás
- ragasztás
- fabetétek stb.

25. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS IX.

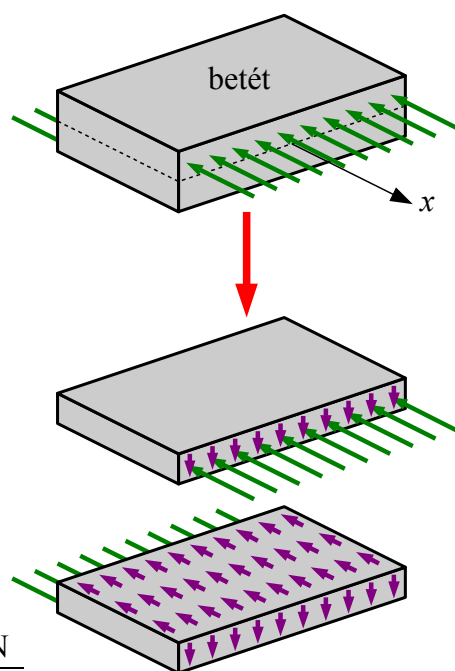
4. Számítsuk ki a fabetétekben keletkező nyírófeszültségek értékét!



$$S'_y = \frac{20 \cdot 25^2}{2} = 6250 \text{ cm}^3$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 208000 \text{ cm}^4$$

$$H = \frac{S'_y}{I_y} A_V = \frac{6250}{208000} \cdot 750 = 22,5 \text{ kN}$$

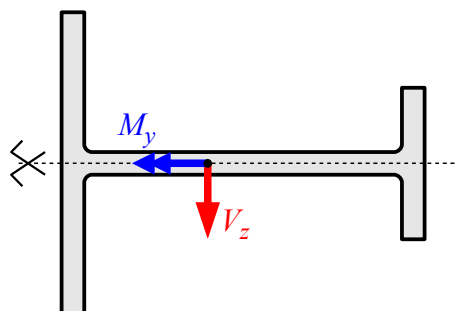
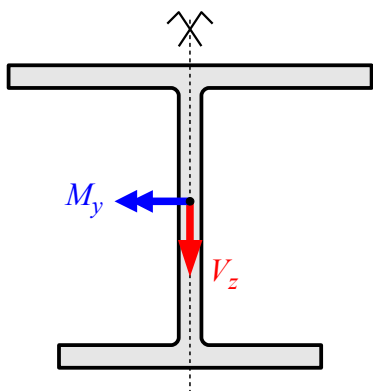


A fabetétekben tiszta nyírás:

$$\tau_{xz} = \frac{H}{A} = \frac{22,5}{20 \cdot 12} = \frac{6250}{208000} \cdot 750 = \underline{\underline{0,09375 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

Vékonyfalú gerendák hajlítással egyidejű nyírása

Két (speciális) esetet vizsgálunk:
 szimmetria-tengellyel párhuzamos nyíróerő szimmetria-tengelyre merőleges nyíróerő

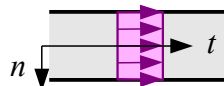


Eddigi feltevések:

- egyenes tengelyű rúd
- állandó keresztmetszetű (prizmatikus) rúd
- homogén, lineárisan rugalmas anyag (Hooke-törvény)
- nyíróigénybevételből csak nyíró-,
- hajlítónyomatéki igénybevételből csak normálfeszültségek keletkeznek
- sík keresztmetszetek elve ← ellentmondásra vezetne!

Ezen felül feltesszük, hogy:

- a nyírófeszültségek a szelvény falával párhuzamosak,
- a nyírófeszültségek falra merőleges irányú eloszlása egyenletes.



A szimmetria-tengellyel párhuzamos nyíróerő esete

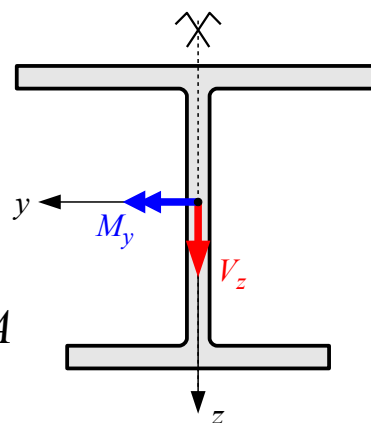
STATIKAI egyenlet

$$\sum F_{iy}: V_y = 0 = \int_{(A)} \tau_{xy}(t) dA$$

$$\sum F_{iz}: V_z = \int_{(A)} \tau_{xz}(t) dA$$

$$\sum M_{ix}: M_x = 0 = \int_{(A)} (\tau_{xz}(t) y - \tau_{xy}(t) z) dA$$

$$\sum M_{iy}: M_y = \int_{(A)} \sigma_x(t) z dA$$



Az első és harmadik egyenlet a szimmetria miatt feltétlenül teljesül.

25. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XI.

Tekintsük a rúdelem alsó övének y koordinátájú függőleges síkkal leválasztott bal oldali részét:

STATIKAI egyenlet

$$\sum F_{ix}: \quad 0 = dN' - dH$$

STAT

$$\sum F_{ix}: \quad 0 = dN' - dH$$

$$= d \int_{(A')} \sigma_x dA - v \tau_{yx}(y) dx$$

dx -szel osztva, majd a deriválás és integrálás sorrendjét az első tagban megcserélve:

$$0 = \int_{(A')} \frac{d\sigma_x}{dx} dA - v \tau_{yx}(y)$$

$$\tau_{yx}(y) = \frac{1}{v} \int_{(A')} \frac{d}{dx} \left(\frac{M_y}{I_y} z \right) dA = \frac{1}{v} \int_{(A')} V_z \left(\frac{z}{I_y} \right) dA = \frac{V_z}{I_y v} \int_{(A')} z dA = \frac{V_z S'_y}{I_y v}$$

Közelítés: h mellett $v/2$ elhanyagolható: $S'_y \approx \frac{h}{2} v(b-y) \rightarrow \tau_{yx}^{\text{öv}}(y) = \frac{V_z h(b-y)}{2I_y}$

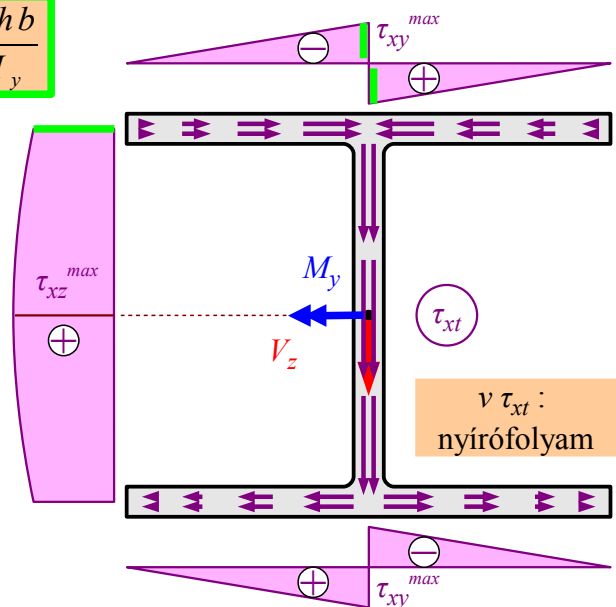
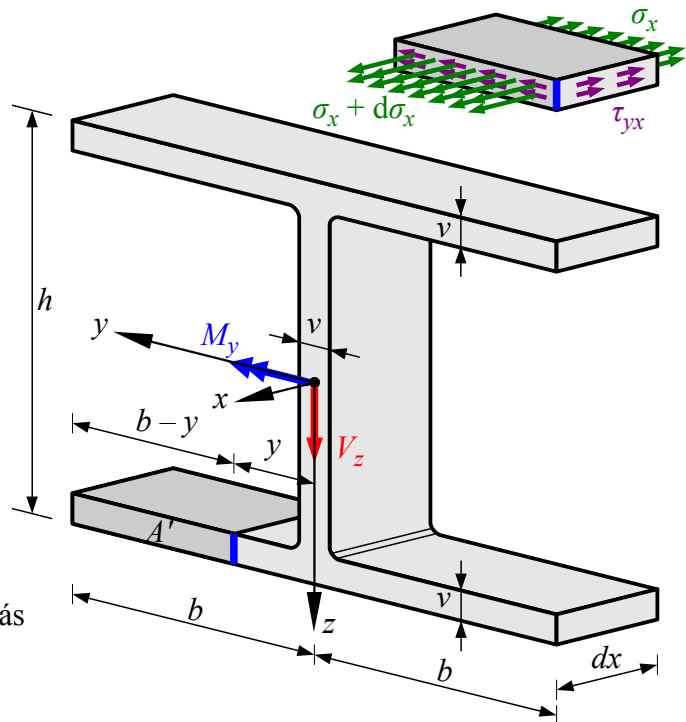
az övekben csak vízszintes nyírófeszültségek:

$$\tau_{xy}^{\text{öv}, \max} = \frac{V_z h b}{2I_y}$$

a gerincben csak függőleges nyírófeszültségek:

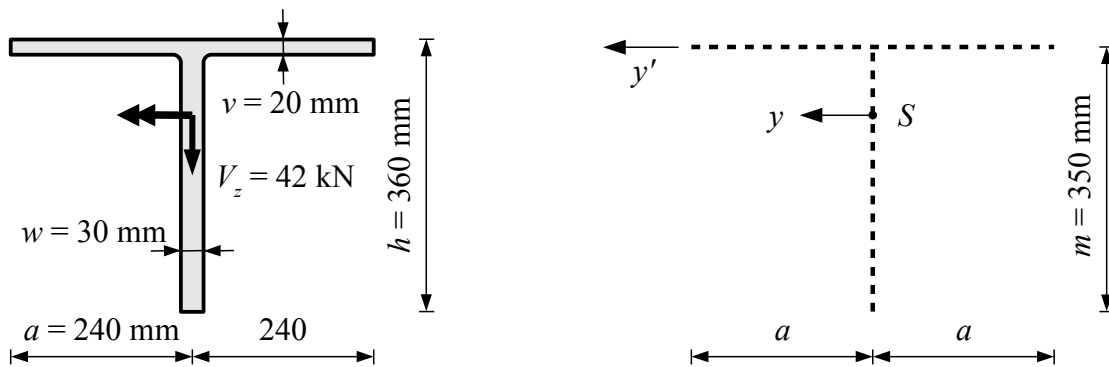
$$S'_{y, \text{fent}} \approx \frac{h}{2} v(2b)$$

$$\tau_{xz}^{\text{gerinc}, \text{fent}} = \frac{V_z h b}{I_y}$$



25. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XII.

5. Határozzuk meg az alábbi vékonyfalú szelvényben ébredő nyírófeszültségi maximumot, illetve rajzoljuk meg a nyírófeszültségi diagramot a jellemző értékek feltüntetésével!



A súlypont helye és a súlyponti tengelyre vett inercia:

$$A = 2(24 \cdot 2) + 35 \cdot 3 = 201 \text{ cm}^2$$

$$S_{y'} = \frac{3 \cdot 35^2}{2} = 1837,5 \text{ cm}^3$$

$$z'_s = \frac{1837,5}{201} = 9,142 \text{ cm}$$

$$I_y = \frac{3 \cdot 35^3}{3} - 201 \cdot 9,142^2 = \underline{\underline{26080 \text{ cm}^4}}$$

y tengellyel párhuzamos *vékony* faldarab I_y inerciájához elég *csak* a Steiner-tag:

nyírófeszültségek a gerincben:

$$S_y^{max} = \frac{3 \cdot (35 - 9,142)^2}{2} = 1003 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz}^{max} = \frac{V_z S_y^{max}}{I_y w} = \frac{42 \cdot 1003}{26080 \cdot 3} = \underline{\underline{0,5385 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

$$S_y^{fent} = \frac{3 \cdot ((35 - 9,142)^2 - 9,142^2)}{2} = 877,6 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz}^{fent} = \frac{42 \cdot 877,6}{26080 \cdot 3} = \underline{\underline{0,4712 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

nyírófeszültségek az övben:

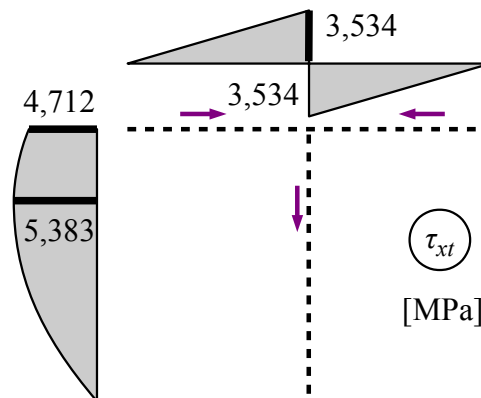
$$S_y^{\text{öv}} = 2 \cdot 24 \cdot 9,142 = 438,8 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xy}^{\text{öv}} = \frac{42 \cdot 438,8}{26080 \cdot 2} = \underline{\underline{0,3534 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

az övek nyírófolyamai itt is összegződnek a gerincben:

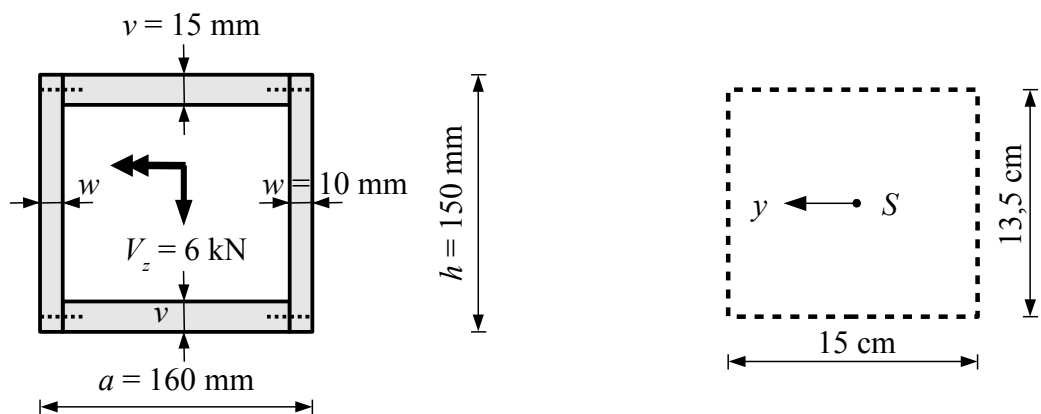
$$2(0,3534 \cdot 2) = 14,13 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

$$0,4712 \cdot 3 = 14,13 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$



25. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XIII.

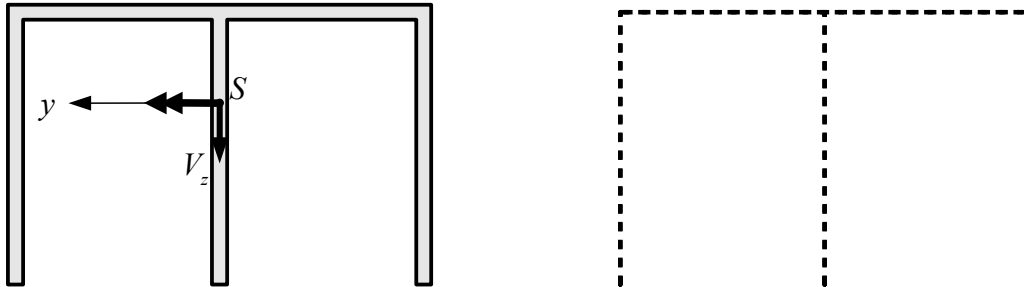
6. Milyen t maximális távolságra lehet elhelyezni az $A = 25 \text{ mm}^2$ keresztmetszeti területű, $\tau_e = 90 \text{ MPa}$ megengedett nyírófeszültségű kapcsolóelemeket a $V_z = 6 \text{ kN}$ függőleges, hossz mentén konstans nyíróerővel terhelt vékonyfalú gerenda jelölt illesztéseinél?



$$t_{alk} = \underline{\underline{12 \text{ cm}}}$$

25. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XIV.

7. Vázoljuk az alábbi állandó falvastagságú vékonyfalú szelvényben V_z hatására keletkező nyírófeszültségek eloszlását az ábrát jellemző tulajdonságok feltüntetésével!



A szimmetria-tengelyre merőleges nyíróerő esete

STATIKAI egyenlet

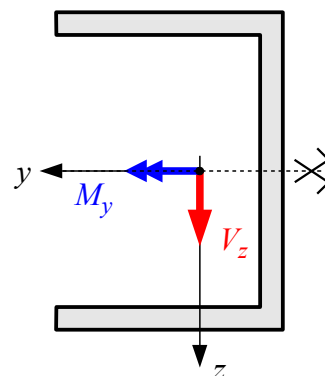
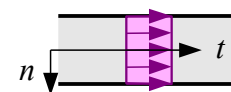
$$\sum F_{iy}: V_y = 0 = \int_{(A)} \tau_{xy}(t) dA$$

$$\sum F_{iz}: V_z = \int_{(A)} \tau_{xz}(t) dA$$

$$\sum M_{iy}: M_y = \int_{(A)} \sigma_x(t) z dA$$

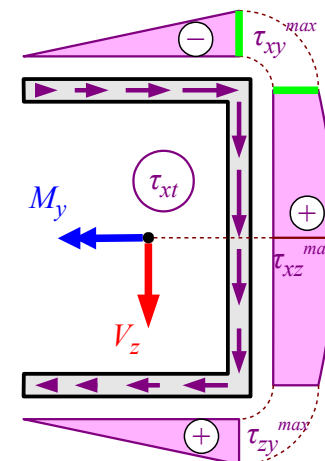
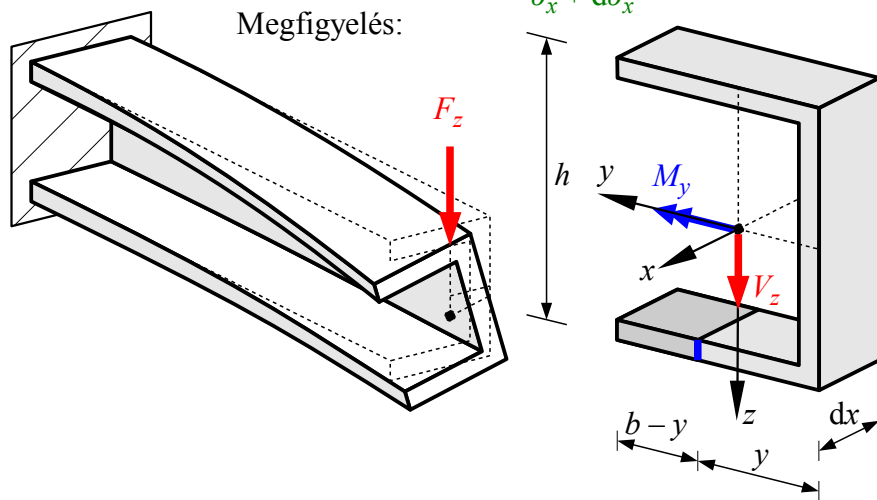
$$\sum M_{ix}: M_x = \int_{(A)} (\tau_{xz}(t) y - \tau_{xy}(t) z) dA = ?$$

Az első egyenlet a szimmetria miatt feltétlenül teljesül.
A negyedik egyenlet jobb oldalán mi van? A változó M_y -ből kapott nyírófeszültségek eredőjének eddig csak a nagyságát tudjuk (V_z), a helyét nem.

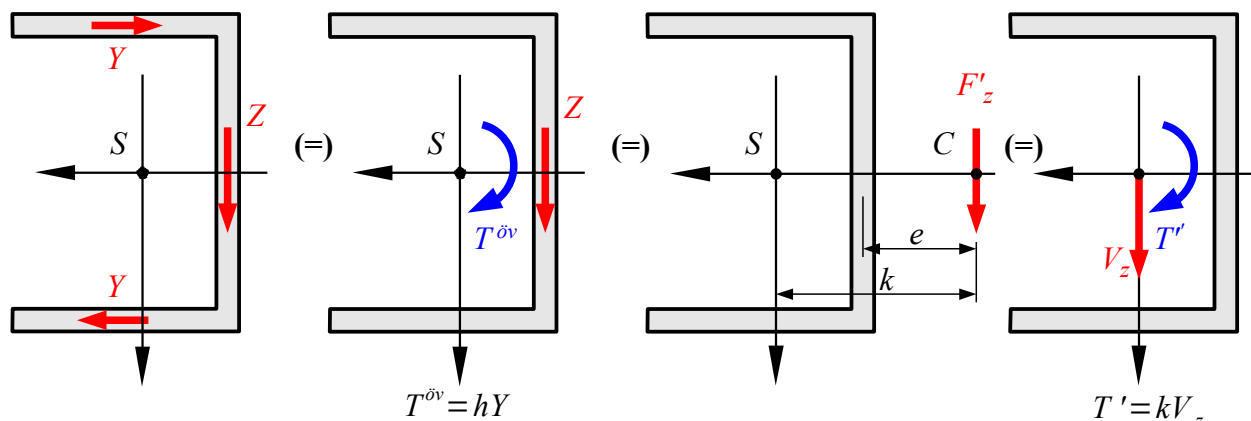


$$\tau_{xy}^{\text{öv, max}} = \tau_{xz}^{\text{g, fent}} = \frac{V_z h b}{2 I_y}$$

Megfigyelés:



A kapott feszültségeloszlás eredője valójában...

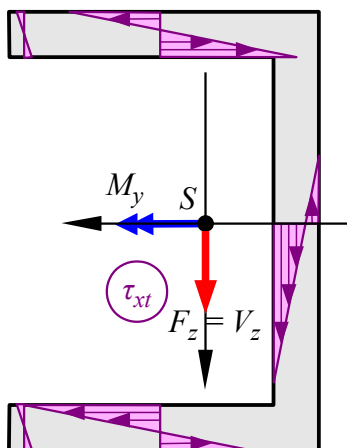
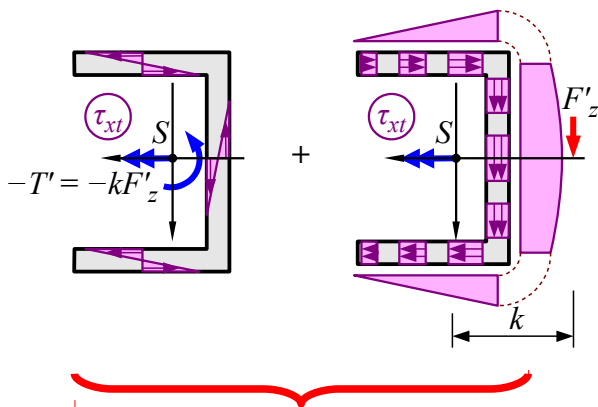
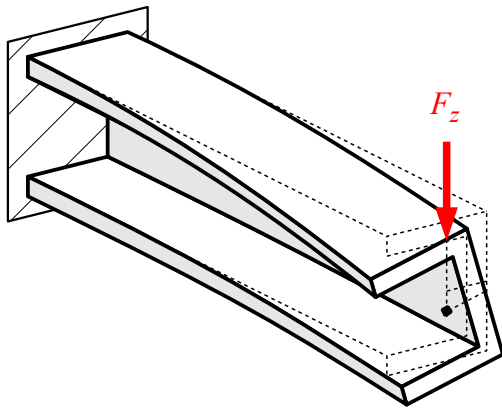


$$|Z| = |F'_z| = |V_z|$$

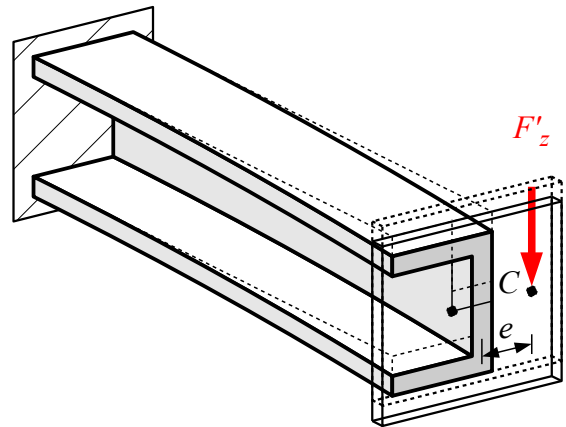
... V_z és egy $T' = kV_z$ nagyságú csavarónyomaték!

26. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XVI.

csavarás nélkül:

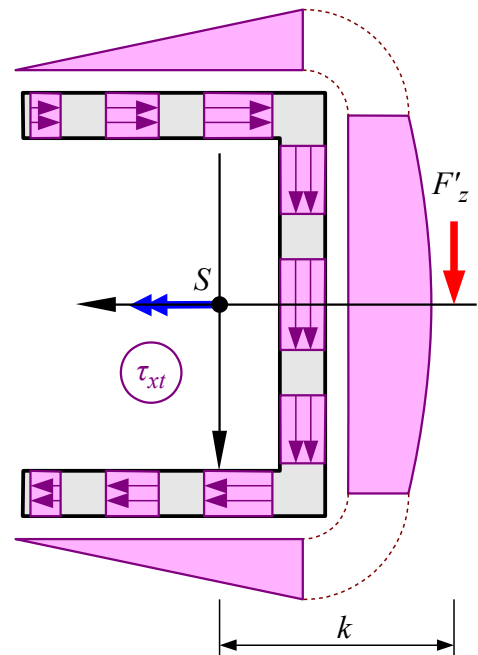


csavarással:



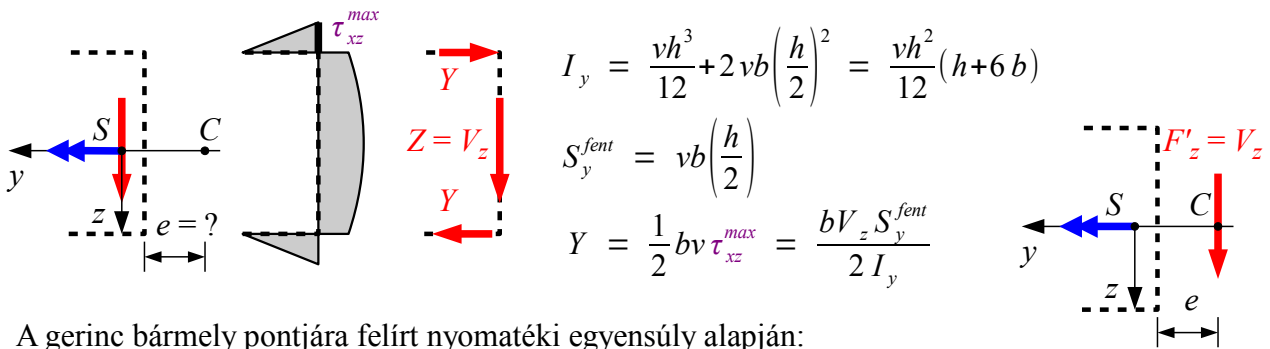
C: nyírási középpont – az itt terhelt vékonyfalú gerenda nem csavarodik el.

C helye: az előbbieken tárgyalt nyírófolyam eredőjének a szimmetria-tengellyel vett metszéspontja.



26. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XVII.

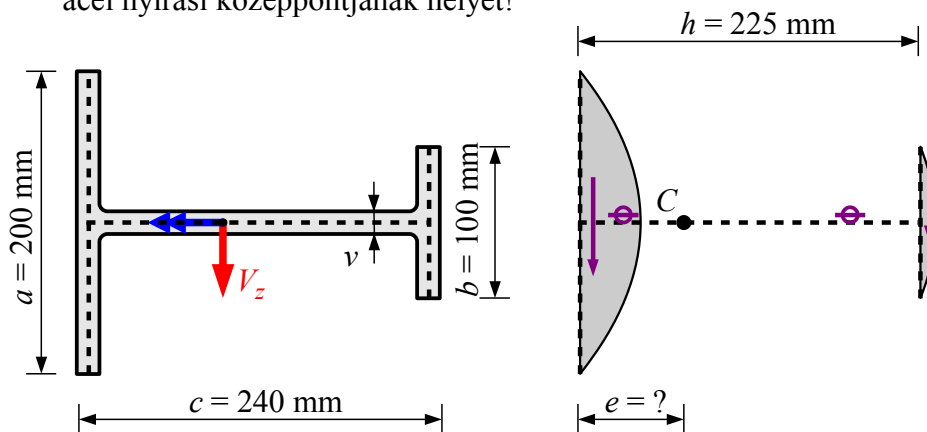
- 8.) Határozzuk meg az iménti, $v = 8$ mm állandó falvastagságú, középvonalában $h = 180$ mm gerincmagasságú és $b = 75$ mm övszélességű U-acél nyírési középpontjának helyét!



A gerinc bármely pontjára felírt nyomatéki egyensúly alapján:

$$e = \frac{hY}{V_z} = \frac{hbS_y^{fent}}{2I_y} = \frac{h^2 b^2 v}{4I_y} = \frac{3b^2}{h+6b} = \underline{\underline{26,79 \text{ mm}}}$$

- 9.) Határozzuk meg az alábbi egyszerűen szimmetrikus, $v = 15$ mm állandó falvastagságú I-acél nyírési középpontjának helyét!

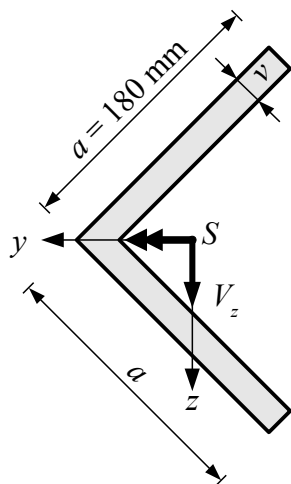


$$e = \underline{\underline{25,00 \text{ mm}}}$$

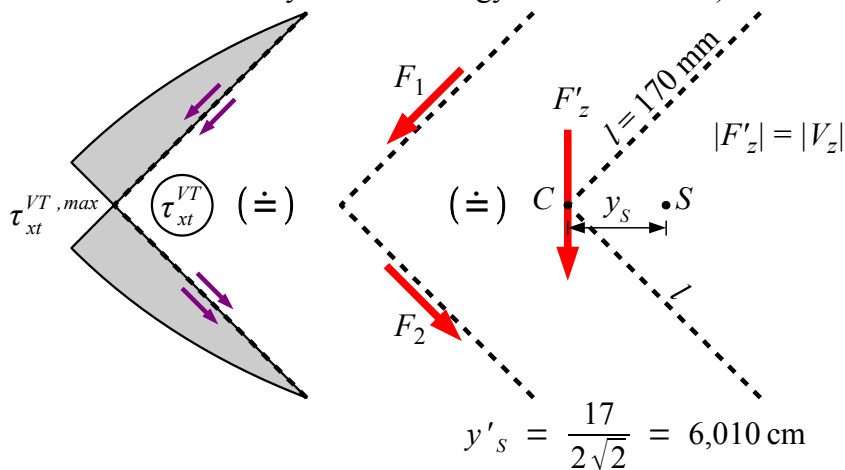
(Összehasonlításképpen a súlypont helye ugyaninnen: $y_s = \underline{\underline{91,67 \text{ mm}}}$)

26. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XVIII.

- ⑩ Az alábbi szimmetrikus, $v = 20$ mm falvastagságú szögacélra a változó M_y mellett csupán $V_z = 10$ kN nyíróigénybevétel hat. Határozzuk meg a maximális nyírófeszültség nagyságát, irányát és helyét! Rajzoljunk nyírófeszültségi diagramokat!



1. Ha az (F'_z) erő a nyírási középpontban működne:
(ezzel egy $T = F'_z \cdot y_s$ nagyságú, óramutató járásával ellentett csavarónyomatékot is figyelembe vennénk)



$$y'_s = \frac{17}{2\sqrt{2}} = 6,010 \text{ cm}$$

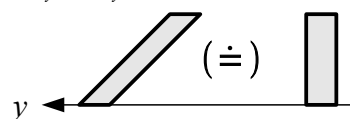
$$I_y =$$

$$S_y^{max} =$$

$$\tau_{xt}^{VT, max} =$$

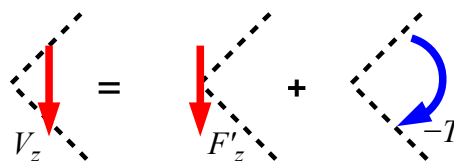
$$\underline{\underline{0,3120 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

I_y és S_y szempontjából:



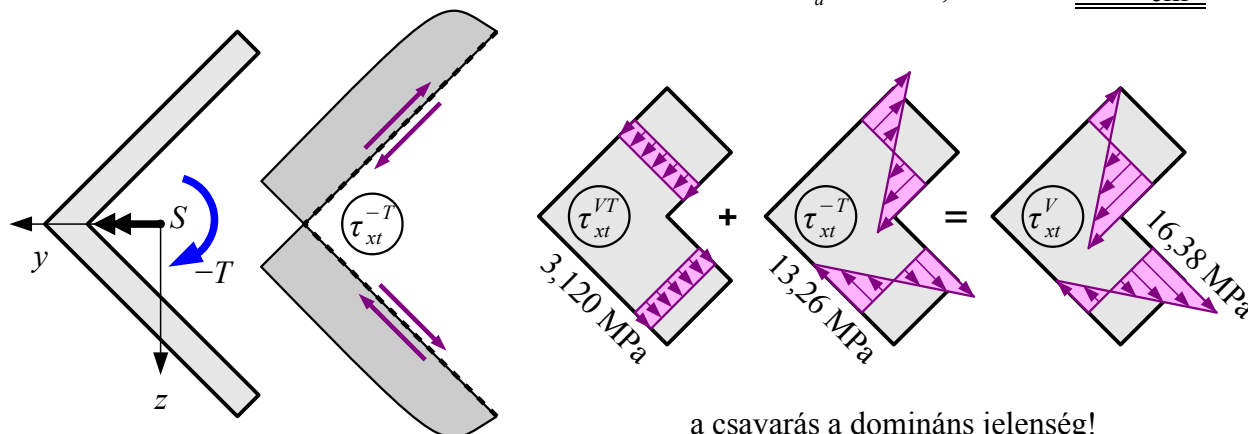
2. V_z azonban a súlypontban működik:

$T = F'_z \cdot y_s = 10 \cdot 6,010 = 60,10$ kNcm
ellentétjét működtetnünk kell a keresztmetszetre, ahol (a végpontok környezetét kivéve)



$$I_a =$$

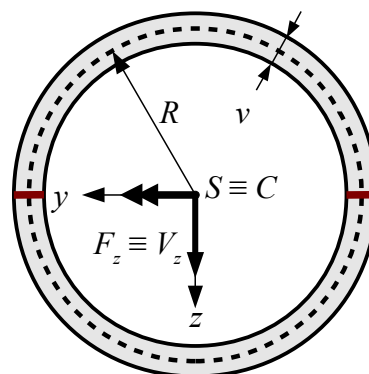
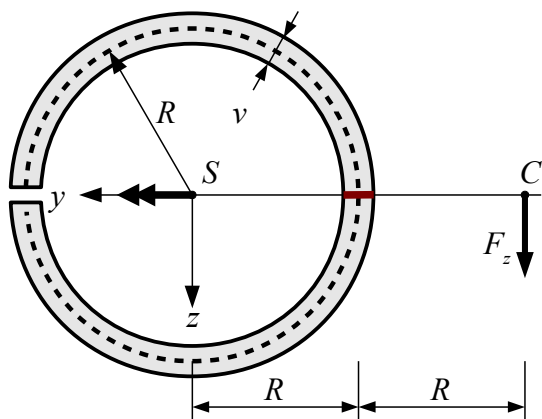
$$90,67 \text{ cm}^4, \text{ ebből } \tau_{xt}^{-T, max} = \frac{T}{I_a} v = \frac{60,10}{90,67} \cdot 2 = \underline{\underline{1,326 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$



a csavarás a domináns jelenség!

26. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XIX.

- 11) Fejezzük ki a nyírási középpontjukban terhelte nyílt és zárt vékonyfalú szelvényekben keletkező feszültségmaximumokat a megadott paraméterekkel!



$$I_y = \frac{(R+v/2)^4 - (R-v/2)^4}{4} \pi =$$

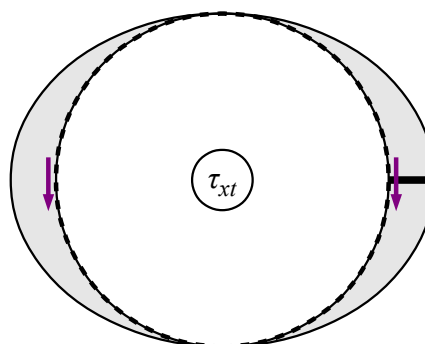
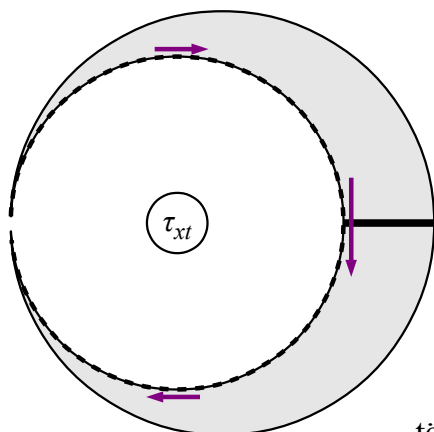
$$S_y^{max} = \frac{(R+v/2)^3 - (R-v/2)^3}{3} \cdot 2 =$$

$$\tau_{xz}^{ny, max} =$$

$$\frac{4 V_z}{A}$$

$$\tau_{xz}^{z, max} =$$

$$\frac{2 V_z}{A}$$



(összehasonlításképp:
tömör körszelvény esetén
a Zsuravszkij-képlet szerint

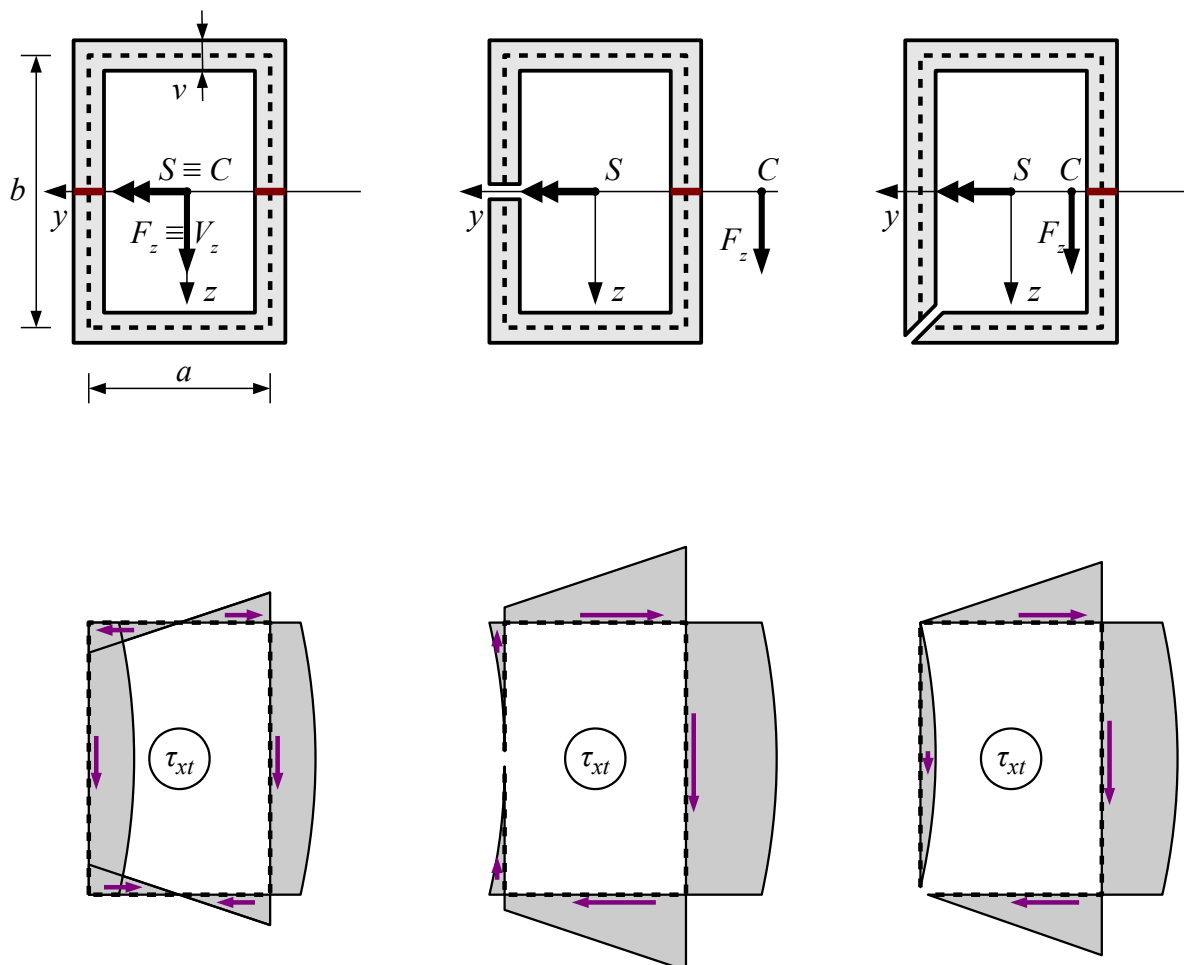
$$\tau_{xz}^{max} = \frac{V_z \cdot 2 R^3 / 3}{R^4 \pi / 4 \cdot 2 R} = \frac{4 V_z}{3 A})$$

Megjegyzés:

a zárt gyűrű vízszintes átmérőjében keletkező nyírófeszültségek számításakor nem használtuk ki, hogy a szelvény vékonyfalú (hiszen az ottani nyírófeszültségek ugyanúgy állandó intenzitásúak és függőlegesek, mint a függőleges falú tömör szelvények esetében), ezért az alapvetően tömör szelvényekre levezetett Zsuravszkij-képlet vastag falú körgyűrű-szelvények feszültség-maximumának számítására is alkalmas.

26. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS XX.

- 12) Fejezzük ki a nyírási középpontjukban terhelte zárt és többféle nyílt vékonyfalú szelvényben keletkező feszültségmaximumokat! Vázoljuk a nyírófeszültségek diagramjait!



Megjegyzések:

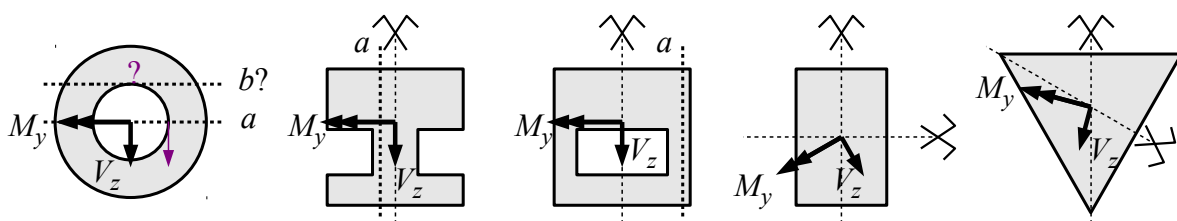
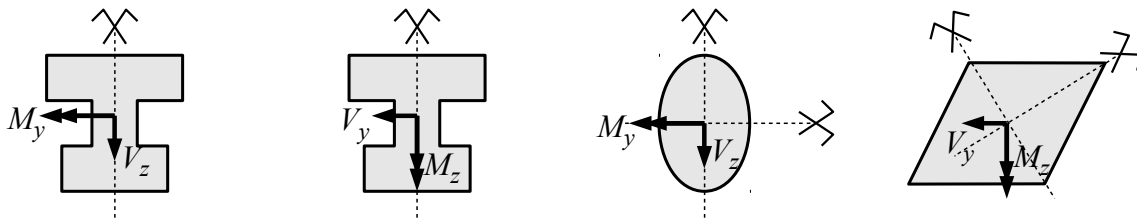
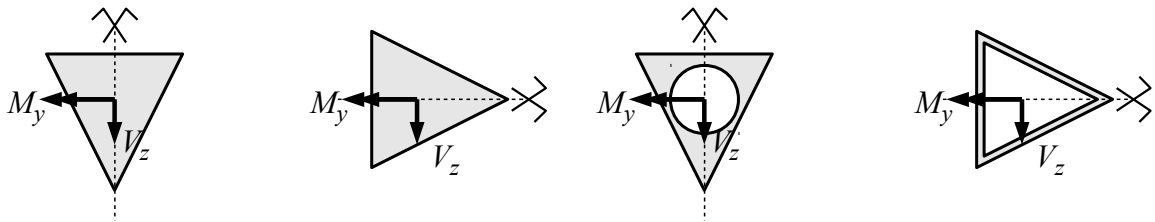
- A zárt szelvény függőleges falának egy metszetében a nyírófeszültség ugyanúgy állandó és függőleges, mint a függőleges falú tömör szelvényeknél, ezért az alapvetően tömör szelvényekre levezetett Zsuravszkij-képlet azon üreges esetekre is alkalmazható, ahol a szelvényfalak vizsgált metszetbe eső érintői mind függőlegesek.

- Tudatosítsuk az eltérő feltételezést vékony- és vastag falú esetekre:



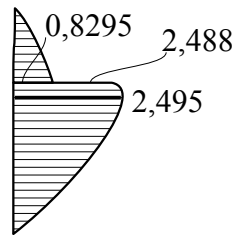
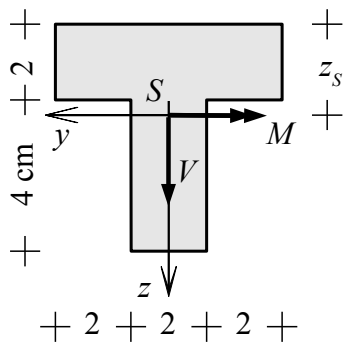
27. HAJLÍTOTT ÉS NYÍRT GERENDÁK FESZÜLTSÉGEI, PÉLDÁK I.

0. Döntsük el, hogy használható-e Zsuravszkij elmélete az alábbi esetekben!



27. HAJLÍTOTT ÉS NYÍRT GERENDÁK FESZÜLTSEGEI, PÉLDÁK II.

1. Határozzuk meg a hajlított-nyírt keresztmetszet legnagyobb nyírófeszültségét és ábrázoljuk a nyírófeszültségek eloszlását a jellemző értékekkel együtt.



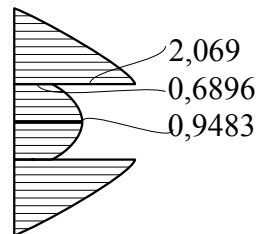
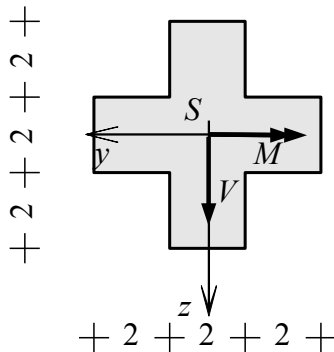
$$M = 10 \text{ kNm}$$

$$V = 20 \text{ kN}$$

$$z_s = 2,2 \text{ cm}$$

$$I_y = 57,867 \text{ cm}^4$$

2. Határozzuk meg a hajlított-nyírt keresztmetszet legnagyobb nyírófeszültségét és ábrázoljuk a nyírófeszültségek eloszlását a jellemző értékekkel együtt.



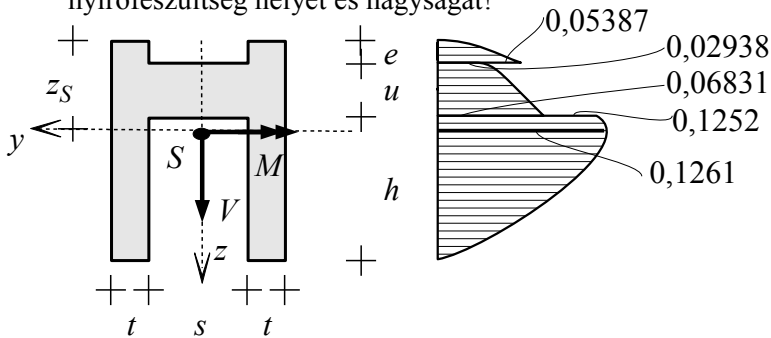
$$M = 10 \text{ kNm}$$

$$V = 20 \text{ kN}$$

$$I_y = 38,667 \text{ cm}^4$$

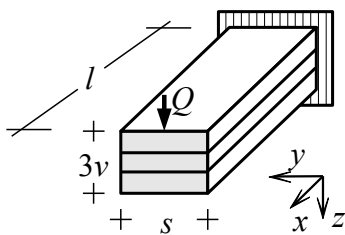
27. HAJLÍTOTT ÉS NYÍRT GERENDÁK FESZÜLTSGEI, PÉLDÁK III.

3. Az ábrán egy tartó keresztmetszete látható az x tengellyel szemközti nézetben. Határozzuk meg a keresztmetszetben ébredő legnagyobb nyírófeszültség irányát és értékét! Rajzoljunk alakhelyes nyírófeszültségi diagramot, egyértelműen megadva a maximális nyírófeszültség helyét és nagyságát!



$$\begin{aligned}
 e &= 5 \text{ cm} \\
 s &= 10 \text{ cm} \\
 t &= 6 \text{ cm} \\
 h &= 18 \text{ cm} \\
 u &= 8 \text{ cm} \\
 z_S &= 14,35 \text{ cm} \\
 I_y &= 32999 \text{ cm}^4 \\
 V &= 30 \text{ kN} \\
 M &= 25 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

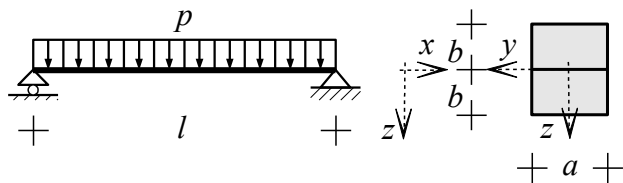
4. Az ábrán látható konzolt három azonos vastagságú lemezből erősítjük össze ragasztással. Milyen irányú a ragasztóban ébredő nyírófeszültség, és mekkora a legnagyobb értéke?



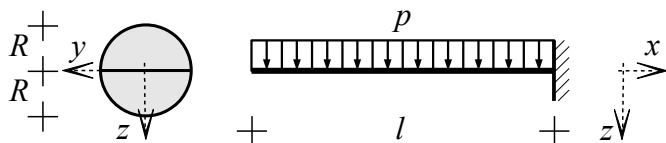
$$\begin{aligned}
 s &= 19 \text{ cm} \\
 v &= 2,5 \text{ cm} \\
 l &= 1,6 \text{ m} \\
 Q &= 20 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

27. HAJLÍTOTT ÉS NYÍRT GERENDÁK FESZÜLTSÉGEI, PÉLDÁK IV.

5. a) A gerenda a vázolt módon két téglalapszelvény összeragasztásával készült. Hol keletkezik a ragasztott felületben a legnagyobb nyírófeszültség? Hogyan fejezhető ez ki az ábrán szereplő paraméterekkel? Indokoljuk válaszunkat!

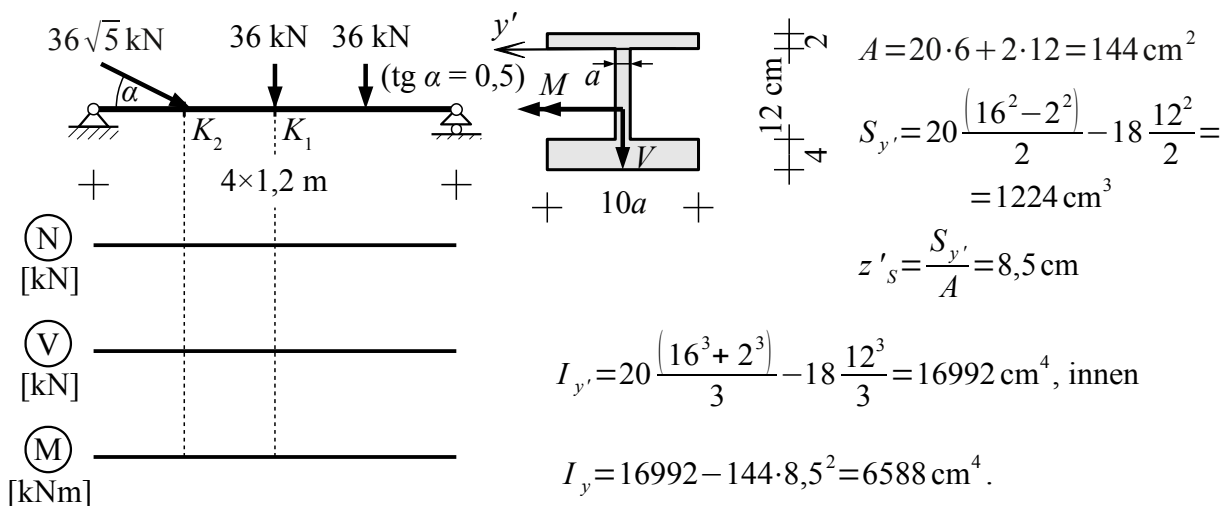


- b) A gerenda a vázolt módon két félkörszelvény összeragasztásával készült. Hol keletkezik a ragasztott felületben a legnagyobb nyírófeszültség? Hogyan fejezhető ez ki az ábrán szereplő paraméterekkel? Indokoljuk válaszunkat!



27. HAJLÍTOTT ÉS NYÍRT GERENDÁK FESZÜLTSÉGEI, PÉLDÁK V.

6. Ellenőrizzük a vázolt szerkezet keresztmetszetének $a = 2$ cm-es méretét a mértékadó keresztmetszetekben, ha a megengedett feszültségek $\sigma_e = \pm 140$ MPa és $\tau_e = \pm 40$ MPa! Rajzoljunk nyírófeszültségi diagramot!



a) Ellenőrzés nyomásra (mértékadó a nyomás a felső szálban):

b) Ellenőrzés húzásra (mértékadó a húzás az alsó szálban):

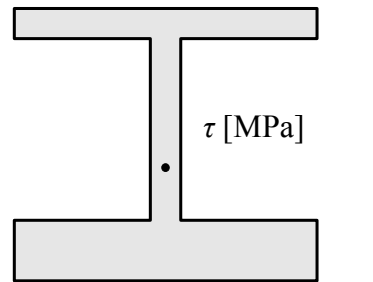
27. HAJLÍTOTT ÉS NYÍRT GERENDÁK FESZÜLTSÉGEI, PÉLDÁK VI.

c) maximális nyíróerő a K_2 keresztmetszetben (a feszültségek irányának értelmezése az igénybevételekkel azonos):

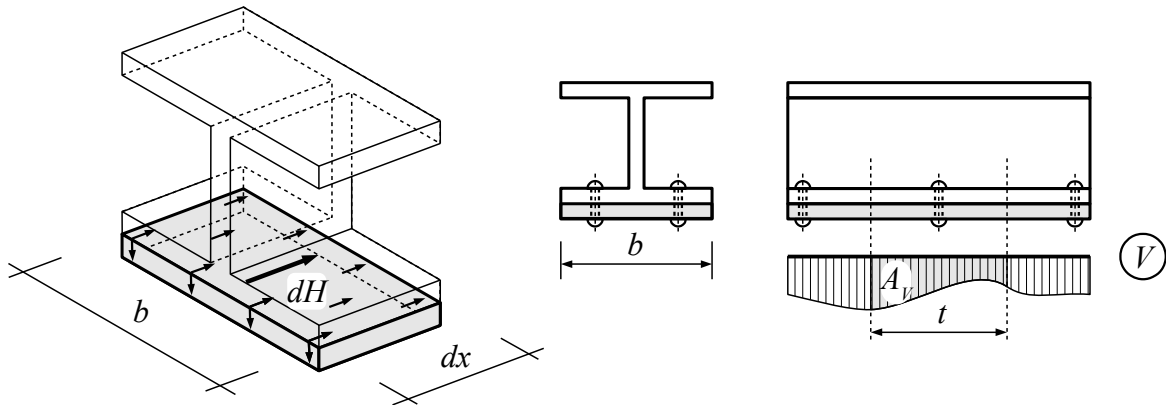
a gerinc tetején:

a súlypontban:

A jellemző feszültségek:



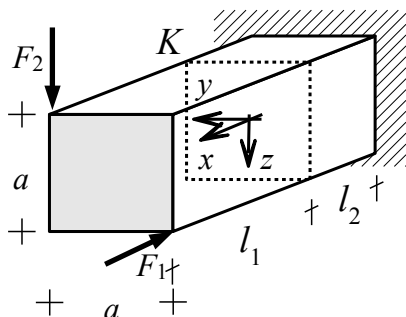
d) ha az alsó öv két egyforma vastag lemezből áll, mekkora feszültség keletkezik a tartó tengelye mentén $t = 30$ cm távolságra elhelyezett, $d = 20$ mm átmérőjű szegecsekben, feltéve, hogy a szegecset párosával alkalmazzuk?



Reciprocitás: $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $dH = \tau_{xz} b dx = \frac{V S_y}{I_y} dx \rightarrow H = \frac{S_y}{I_y} \int V dx = \frac{S_y}{I_y} A_V$ — V -ábra területe
 $\leftarrow x$ mentén állandó!

28. TÉRBELI RÚDSZERKEZETEK IGÉNYBEVÉTELEI I.

1. Redukáljuk az F_1 és F_2 erőket a K keresztmetszet középpontjára, majd határozzuk meg a K keresztmetszet igénybevételeit és ábrázoljuk a keresztmetszet ábráján!



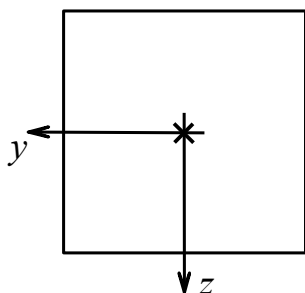
A konzol végén ható F_1 erő párhuzamos az x tengellyel, az F_2 a z -vel.

$$F_1 = 10 \text{ kN} \quad F_2 = 8 \text{ kN} \quad l_1 = 3 \text{ m}$$

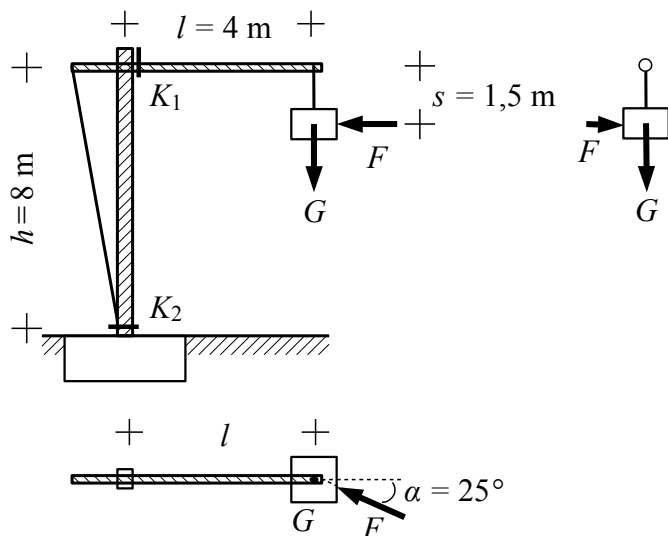
$$a = 30 \text{ cm} \quad l_2 = 1,5 \text{ m}$$

A K keresztmetszet középpontjára redukált társelő és társelőpár komponensei, *szemből* számolva:

A K keresztmetszet igénybevételei:

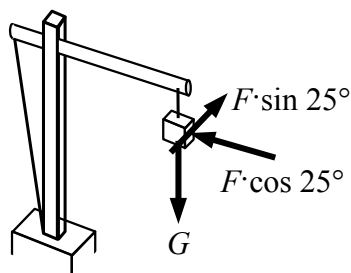


2. Határozzuk meg az álló daru K_1 és K_2 keresztmetszeteinek igénybevételeit a G teher és az F erő együttes hatására! (A daru önsúlyát elhanyagoljuk, a teher a daruhoz mereven rögzített.)

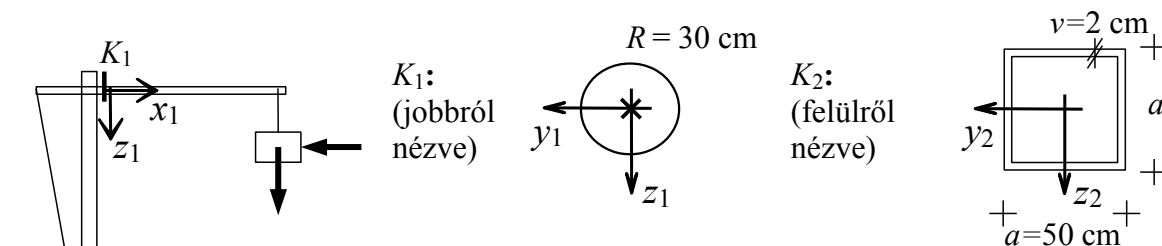


$$F = 2,2 \text{ kN}$$

$$G = 3,5 \text{ kN}$$

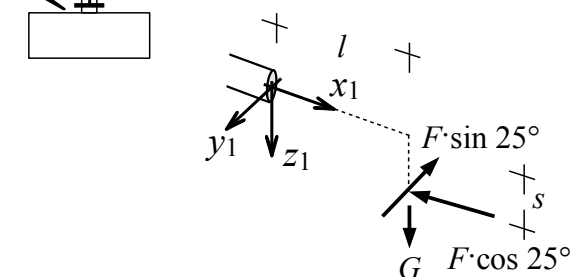


28. TÉRBELI RÚDSZERKEZETEK IGÉNYBEVÉTELEI II.

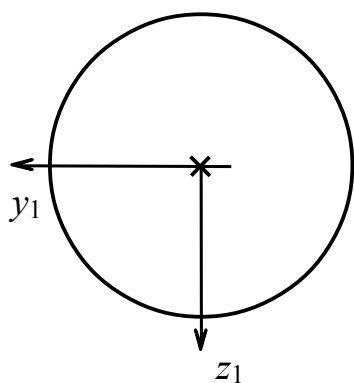


K_1 keresztmetszet vizsgálata (*jobbról* számolva)

Redukálás a keresztmetszet súlypontjára:

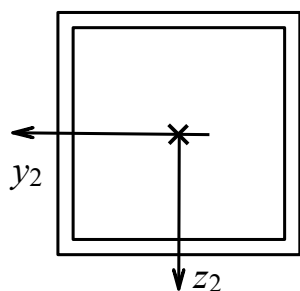
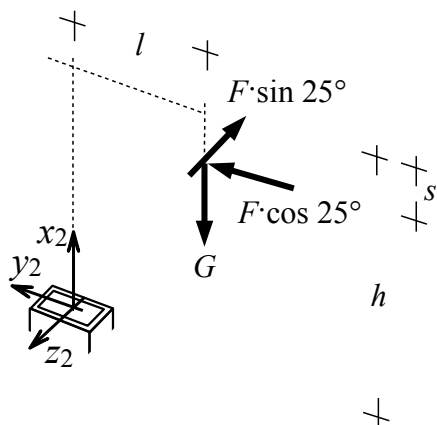


Az igénybevételek:



K_2 keresztmetszet vizsgálata (*felülről* számolva)

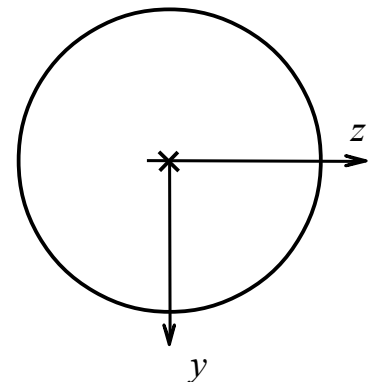
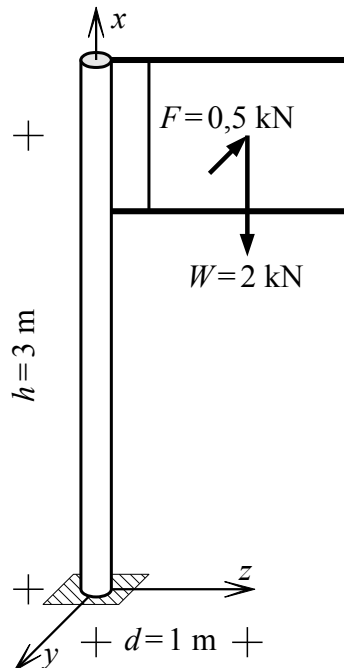
Redukálás a keresztmetszet súlypontjára:



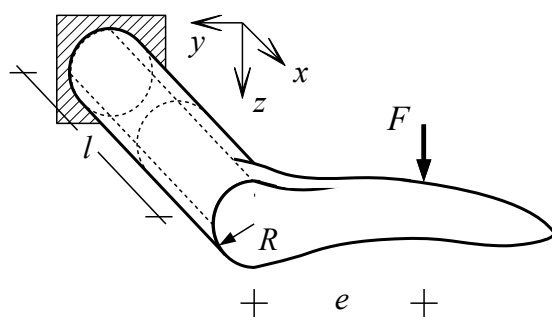
Az igénybevételek:

28. TÉRBELI RÚDSZERKEZETEK IGÉNYBEVÉTELEI III.

3. *Tartalék példa:* Redukáljuk a kör keresztmetszetű zászlóra ható erőket a befogási keresztmetszet középpontjára, majd határozzuk meg a befogási keresztmetszet igénybevételeit és ábrázoljuk a keresztmetszet ábráján!



4. OTTHONI GYAKORLÓ FELADAT. Redukáljuk a kör keresztmetszetű kilincstre ható erőket a befogási keresztmetszet középpontjára, majd határozzuk meg a befogási keresztmetszet igénybevételeit és ábrázoljuk a keresztmetszet ábráján!



$$F = 50 \text{ N} \quad l = 15 \text{ cm}$$

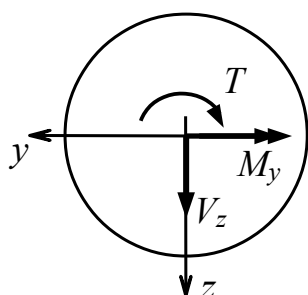
$$R = 1,5 \text{ cm} \quad e = 10 \text{ cm}$$

Redukálás a befogási keresztmetszet súlypontjára:

$$F_x = 0 \quad M_x = -F \cdot e = -500 \text{ Ncm}$$

$$F_y = 0 \quad M_y = -F \cdot l = -750 \text{ Ncm}$$

$$F_z = F = 50 \text{ N} \quad M_z = 0$$



$$N = 0 \quad T = 5 \text{ Nm}$$

$$V_y = 0 \quad M_y = 7,5 \text{ Nm (felül húz)}$$

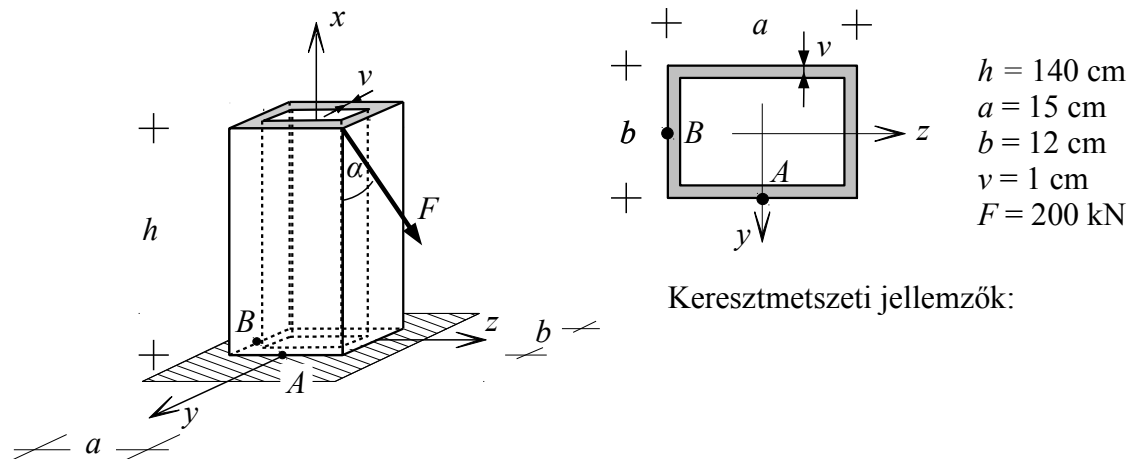
$$V_z = 50 \text{ N (↓)} \quad M_z = 0$$

29. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK I.

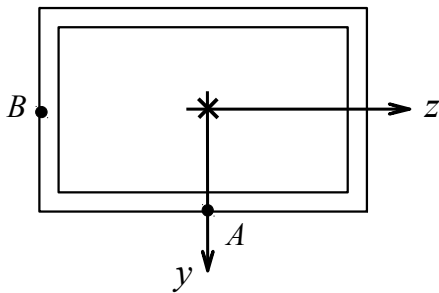
1. Határozza meg az ábrán látható vékonyfalú konzol befogási keresztmetszetének összes nemzérus igénybevételét, majd ábrázolja is ezeket egy yz síkú, x irányával szembeni nézetben!

Határozza meg a befogási keresztmetszet A pontjában keletkező normál- és nyírófeszültségi értékeket, és a B pontjában ébredő normálfeszültség értékét!

(Az F erő az xz síkkal párhuzamos és az x tengellyel $\alpha=25^\circ$ -os szöget zár be.)



Igénybevételek:

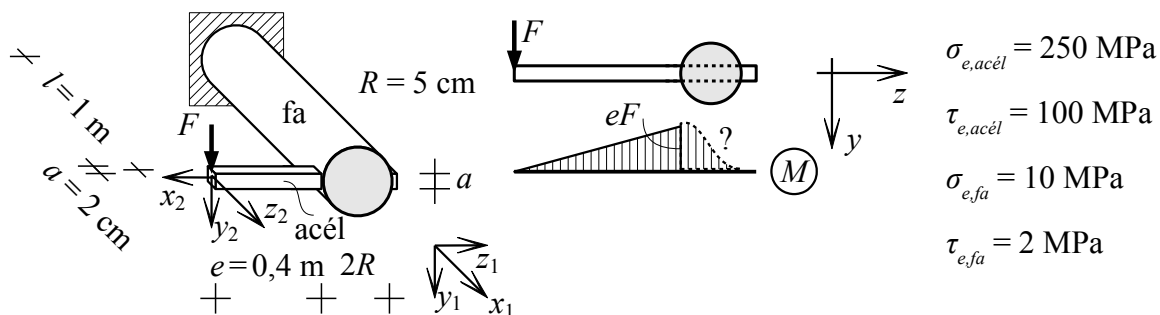


Az A pont feszültségei:

A B pont normálfeszültsége:

29. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK II.

2. a) Határozzuk meg az F teher maximumát a megadott normál- és nyírófeszültségi határértékeknek megfelelően!



az acélgerenda hajlítása:

a fagerenda hajlítása:

az acélgerenda nyírása:

a fagerenda nyírása:

a négy kritérium alapján tehát $F_{max} = \underline{\underline{0,8125 \text{ kN}}}$

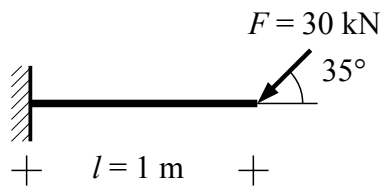
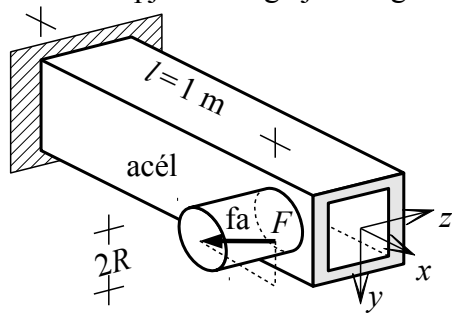
- b) Mekkora F erő engedhető meg, ha az acélgerenda végkeresztmetszetének x_1 tengely körüli elfordulása nem haladhatja meg a másfél fokot?

$$E_a = 200 \text{ GPa}, \quad G_f = 5 \text{ GPa}.$$

$$F_{max} = \underline{\underline{0.6684 \text{ kN}}}$$

29. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEK III.

3. Ellenőrizzük az alábbi külpontosan terhelt szerkezetet a megadott *normálfeszültségi* értékek alapján! Vizsgáljuk meg a fagerendát és az acélgerenda *B* pontját nyírásra.

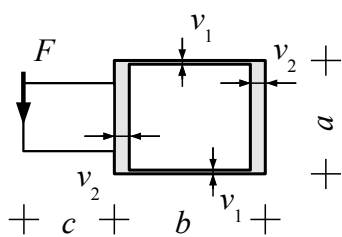


$$\sigma_{e,acél} = 250 \text{ MPa}$$

$$\tau_{e,acél} = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{e,fa} = 10 \text{ MPa}$$

$$\tau_{e,fa} = 2 \text{ MPa}$$



$$R = 11 \text{ cm}$$

$$a = 30 \text{ cm}$$

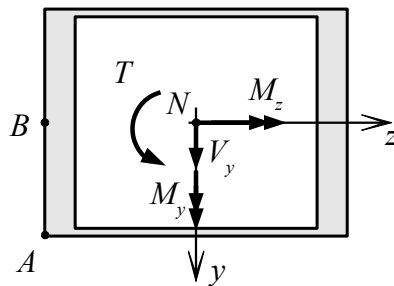
$$b = 40 \text{ cm}$$

$$c = 30 \text{ cm}$$

$$v_1 = 1 \text{ cm}$$

$$v_2 = 4 \text{ cm}$$

Az acélgerenda ellenőrzése:



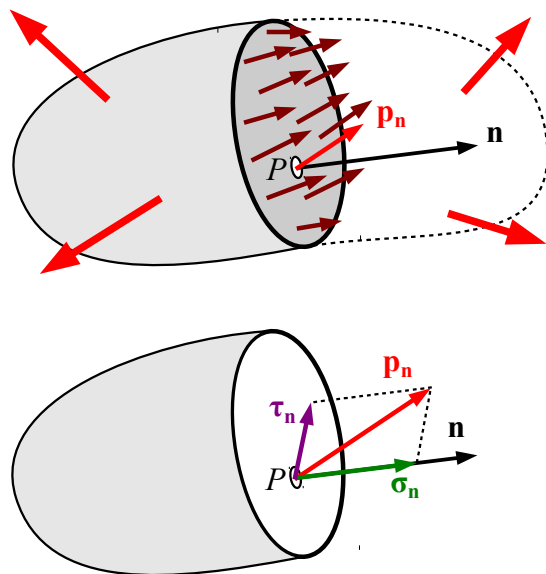
A fagerenda ellenőrzése:

A feszültségállapot jellemzése

Az anyag valamely pontjában bekövetkező tönkremenetel esélye nem ítéhető meg pusztán egy, a pontot tartalmazó metszethez tartozó normál- és nyírófeszültség ismeretében.

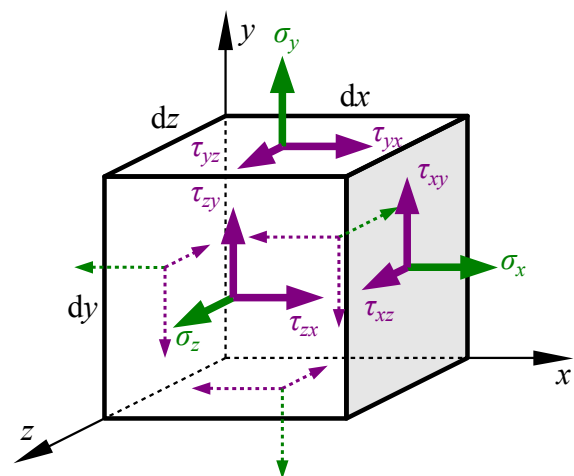
Emlékeztető:

a feszültségvektor fogalma



az elemi hasábra ható feszültségek

három sík, legyen **n** rendre *x*, *y*, *z* irányú:



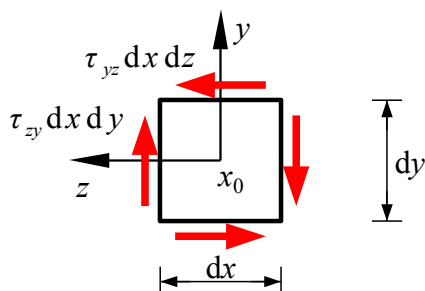
Adott *P* ponttól és a rajta keresztül fektetett **n** normálisú síktól függ; felbontható **n** irányú (normál-) és arra merőleges (nyíró-) feszültségekre.

$$\mathbf{p}_x = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_y = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_z = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Adott pontbeli feszültségállapot: a pontban értelmezett feszültségvektorok összessége.

A nyírófeszültségek reciprocitása

Nyomatéki egyenlet a hasáb súlypontján átmenő x_0 tengelyre:



$$\sum M_i^{x_0}: (\tau_{yz} dx dz) dy - (\tau_{zy} dx dy) dz = 0$$

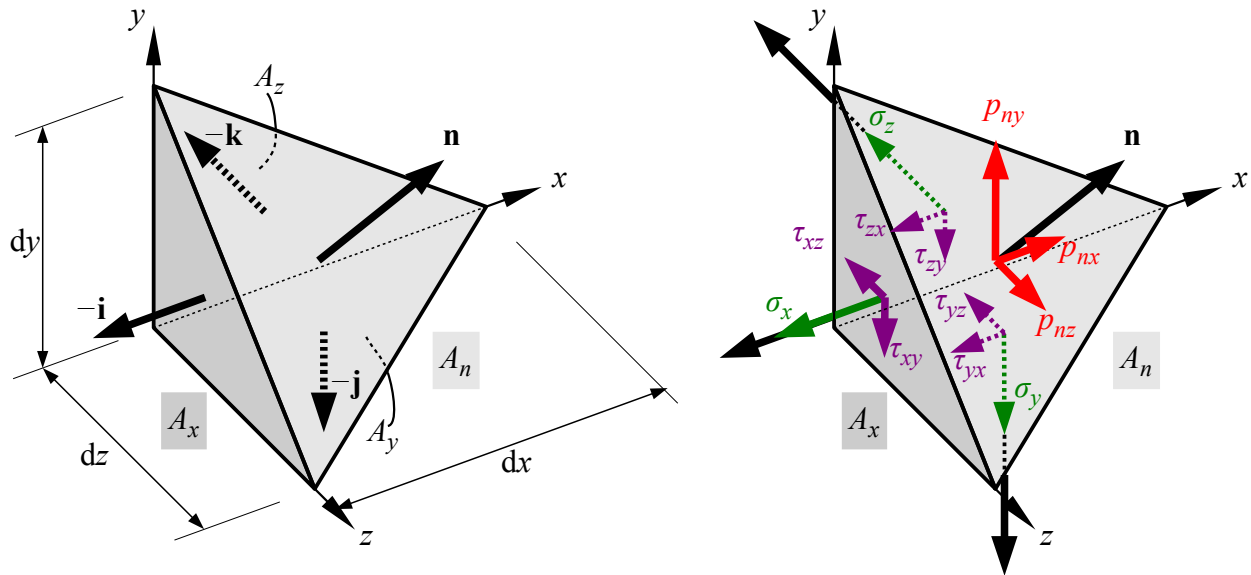
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \text{stb.}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}:$$

\mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y , \mathbf{p}_z tehát 9 helyett csupán 6 adattal leírható.

A feszültségtenzor

Tegyük föl, hogy az x , y és z normálisú síkokhoz tartozó P -beli feszültségvektorok ismertek. Mit állíthatunk egy általános \mathbf{n} normálisú síkhoz tartozó feszültségvektorról?



A tetraéder vetületi egyensúlya x , y és z irányokban:

$$\sum F_{ix}: p_{nx} \cdot A_n - \sigma_x \cdot A_x - \tau_{yx} \cdot A_y - \tau_{zx} \cdot A_z = 0$$

$$\sum F_{iy}: p_{ny} \cdot A_n - \tau_{xy} \cdot A_x - \sigma_y \cdot A_y - \tau_{zy} \cdot A_z = 0$$

$$\sum F_{iz}: p_{nz} \cdot A_n - \tau_{xz} \cdot A_x - \tau_{yz} \cdot A_y - \sigma_z \cdot A_z = 0$$

Belátható, hogy $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \frac{1}{A_n} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$

A_n -nel osztva és rendezve:

$$\sum F_{ix}: p_{nx} - \sigma_x \cdot n_x - \tau_{yx} \cdot n_y - \tau_{zx} \cdot n_z = 0$$

$$\sum F_{iy}: p_{ny} - \tau_{xy} \cdot n_x - \sigma_y \cdot n_y - \tau_{zy} \cdot n_z = 0 \quad , \quad \text{azaz}$$

$$\sum F_{iz}: p_{nz} - \tau_{xz} \cdot n_x - \tau_{yz} \cdot n_y - \sigma_z \cdot n_z = 0$$

$$\begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

Megjegyzések:

- a feszültségtenzor sorait a \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y , \mathbf{p}_z feszültségvektorok alkotják,

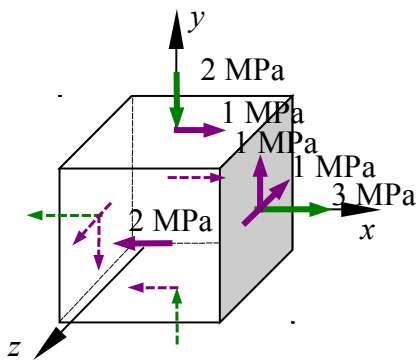
- a tenzor mátrixának segítségével bármely síkhoz tartozó \mathbf{p}_n feszültségvektor egyszerű szorzással megkapható, tehát a tenzor 9 eleme (6 független eleme) valóban meghatározza a pont feszültségállapotát.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

feszültségtenzor
(szimmetrikus másodrendű tenzor)

30. FŐFESZÜLTSEGEK ÉS FESZÜLTSEGI FŐIRÁNYOK III.

1.



Az elemi hasáb oldallapjaira az ábrán megadott feszültségek hatnak. Írjuk fel a feszültségtenzor mátrixát az (x, y, z) koordináta-rendszerben!

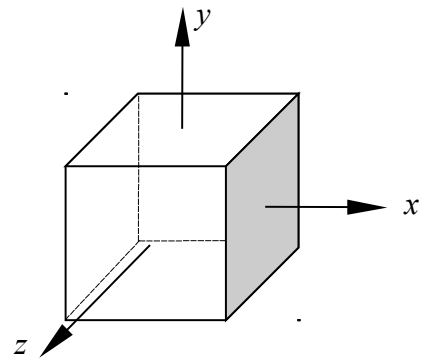
Megoldás:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} +3 & +1 & -1 \\ +1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

2.

Adottak egy pont feszültségtenzorának elemei. Ábrázoljuk, hogy milyen normál- és nyírófeszültségek hatnak a pontot tartalmazó elemi hasáb oldallapjaira!

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -2 & +3 & 0 \\ +3 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



A feszültségi főirányok és a főfeszültségek

Keressük a $\boldsymbol{\sigma}$ mátrixának sajátértékeit ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) és sajátvektorait ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$) az (x, y, z) koordináta-rendszerben. Mivel $\boldsymbol{\sigma}$ szimmetrikus, sajátértékei mindig valósak, sajátvektorai egymásra merőlegesek. A sajátérték-feladat matematikából ismert alakja:

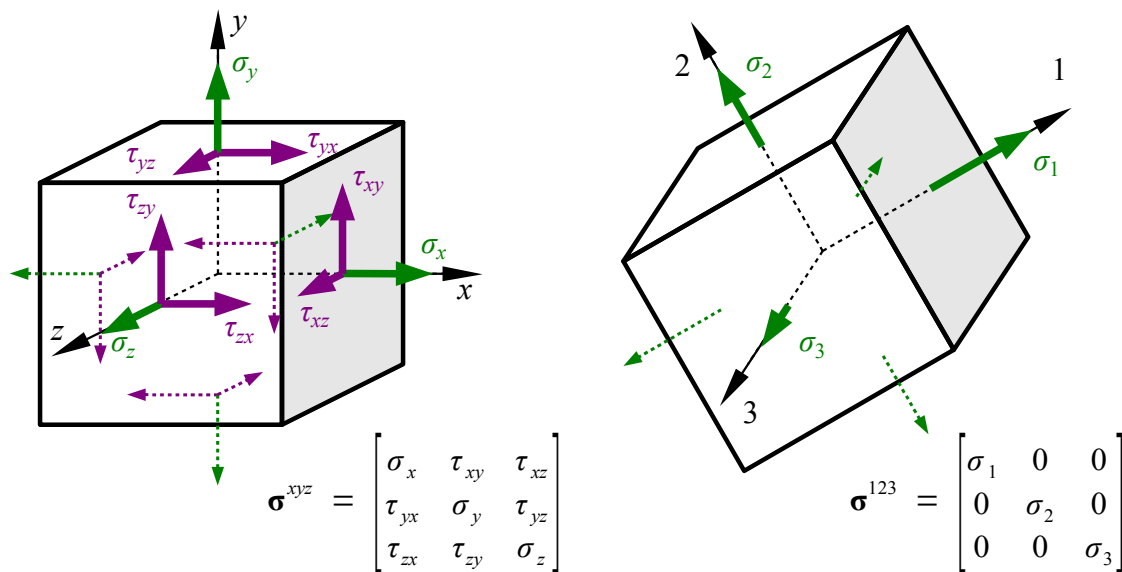
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_i = \sigma_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (i=1,2,3)$$

1. (matematikai) definíció: a P pontbeli $\boldsymbol{\sigma}$ feszültségtenzor sajátvektorai által meghatározott irányokat P pontbeli *feszültségi főirányoknak*, a hozzájuk tartozó sajátértékeket P pontbeli *főfeszültségeknek* nevezzük. Konvenció: $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$.

2. (mechanikai) definíció: bármely P anyagi pontban létezik három olyan, egymásra páronként merőleges irány, melyekhez mint normálisokhoz tartozó síkokon a feszültségvektor is normális irányú (azaz nyírófeszültségi komponense zérus). Ezt a három irányt, illetve normálfeszültséget a P pontbeli feszültségi főirányoknak, illetve főfeszültségeknek nevezzük.

Megjegyzés: amennyiben a főirányokhoz tartozó koordináta-tengelyeket úgy irányítjuk, hogy 1,2 és 3 jobbsodrású rendszert alkossanak (ez mindig megtehető), akkor az eddigi képletek átírhatók az $(x, y, z) \rightarrow (1, 2, 3)$ átalakítással. Mivel $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, a feszültségtenzor a főirányok koordináta-rendszerében felírva valóban diagonális alakú.

30. FŐFESZÜLTSÉGEK ÉS FESZÜLTSÉGI FŐIRÁNYOK IV.



Feszültségi fősíkok: két feszültségi főirány által kifeszített sík.

- ③ Egy szerkezeti elem A , B és C pontjában ismerjük a feszültségtenzornak az (x, y, z) koordináta-rendszerben felírt mátrixát. Főirány-e valamelyik koordináta-tengely az egyes pontokban?

A pontban:

$$\sigma^{(A)} = \begin{bmatrix} +3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Az első sor elemei a \mathbf{p}_x feszültségvektor koordinátái ($\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$) sorrendben $\rightarrow \tau_{xz} \neq 0, x$ tehát nem főirány.
A második sorban $\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$, tehát y főirány.
A harmadik sorban $\tau_{zx} = -1 \neq 0, z$ sem főirány.

B pontban:

$$\sigma^{(B)} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

C pontban:

$$\sigma^{(C)} = \begin{bmatrix} +3 & +1 & -2 \\ +1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

30. FŐFESZÜLTSEGEK ÉS FESZÜLTSEGI FŐIRÁNYOK V.

A főfeszültségek és főirányok mechanikai jelentősége:

1. Feszültségek meghatározása a keresztmetszeti síkktól eltérő síkokban.

Eddig csak a keresztmetszet síkjában értelmezett feszültségvektorokat határoztuk meg. Hátha ugyanazon pontban, de más síkra vett feszültségvektor normál- és nyíróirányú komponensei nagyobbak? Belátható, hogy σ_3 a legkisebb (a "legnegatívabb"), σ_1 a legnagyobb lehetséges normálfeszültség az adott pontban.

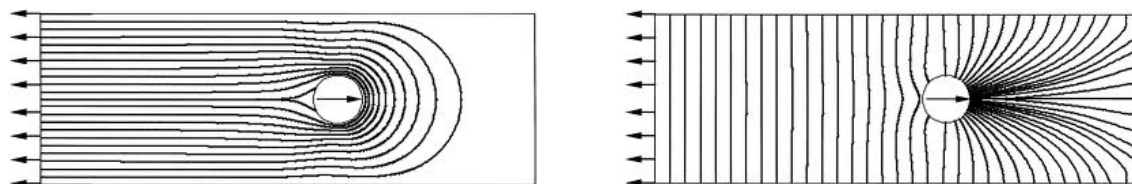
Szintén igazolható, hogy az 1,3 feszültségi fősíkban (tehát a hasábot arra merőlegesen forgatva):

$$|\tau^{max}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

2. Az erőjáték szemléltetése.

Főfeszültségi trajektóriák: olyan görbesereg, melynek érintői minden pontban egy adott sorszámú főirányba esnek.

Az első és harmadik főfeszültségi trajektóriák rendre a legnagyobb húzások és nyomások jellemző irányát illusztrálják.



Szegeccsel megtámasztott húzott lemez 1. (balra) és 3. (jobbra) főfeszültségi trajektóriái

Még egy felhasználási terület: a von Mises-féle egyenértékű feszültség.

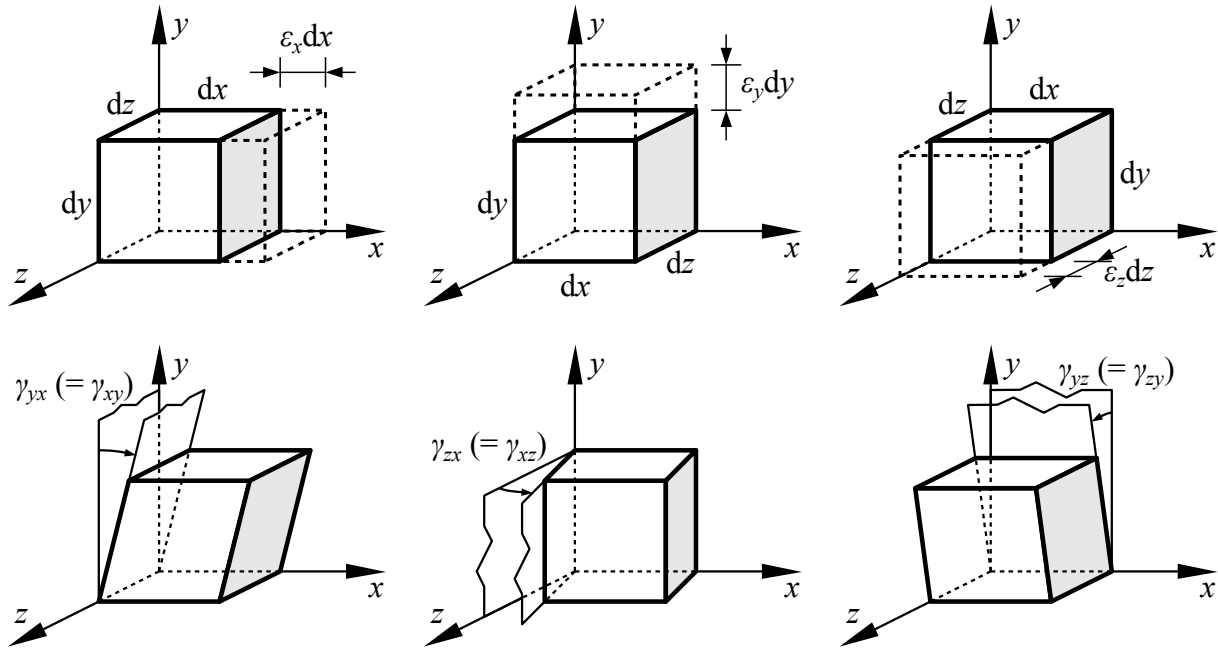
Ez adott pontban a főfeszültségekből számított egyetlen feszültségérték, jelentése: mennyire van az anyag az adott pontban nyírásra igénybe véve?

(duktilis, azaz képlékeny viselkedésre hajlamos anyagok esetén alkalmas a tönkremenetel előrejelzésére).

Az alakváltozási állapot jellemzése

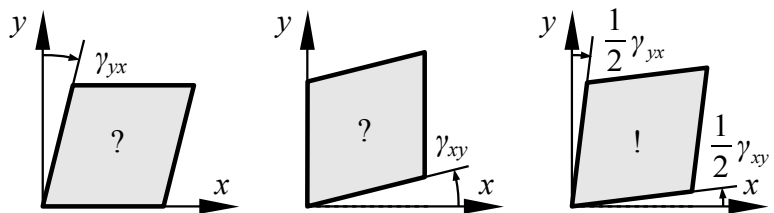
Emlékeztető:

az elemi hasáb alakváltozásai



Az alakváltozás-tenzor, főirányok, főnyúlások

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



1. (matematikai) definíció: a P pontbeli $\boldsymbol{\varepsilon}$ alakváltozás-tenzor sajátvektorai által meghatározott irányokat P pontbeli *alakváltozási főirányoknak*, a hozzájuk tartozó sajátértékeket P pontbeli *főnyúlásoknak* nevezzük. Konvenció: $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$.

2. (mechanikai) definíció: bármely P anyagi pontban létezik három olyan, egymásra páronként merőleges irány, melyekkel párhuzamos élű elemi hasáb a deformáció után is azokkal párhuzamos élű marad (azaz szögtorzulás nem keletkezik). Ezt a három irányt és a megfelelő fajlagos nyúlásokat a P pontbeli *alakváltozási főirányoknak*, illetve *főnyúlásoknak* nevezzük.

30. FŐFESZÜLTSEGEK ÉS FESZÜLTSEGI FŐIRÁNYOK VII.

Az alakváltozási főirányok meghatározása legegyszerűbb a feszültségi főirányok koordináta-rendszerében (lásd a mechanikai definíciókat):

$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$, azaz $\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G} = 0 \rightarrow$ a feszültségi főirány egyben alakváltozási főirány is és viszont.

A főnyúlások számítása:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \end{aligned} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{123} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Speciális feszültségi és alakváltozási állapotok

A feszültségi állapot általános esetben *térbeli*: ilyenkor egyik főfeszültség sem zérus. Speciális esetek:

Hidrosztatikus feszültségi állapot:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

pl. folyadékok belsejében

Lineáris feszültségi állapot:

pontosan egy főfeszültség nemzérus

pl. rácsos tartók rúdjaiban
(tiszta húzás, tiszta nyomás)

Síkbeli feszültségi állapot:

pontosan két főfeszültség nemzérus

pl. faltartók, tárcsák pontjaiban,
terheletlen felületi pontokban
(közelítőleg a gerendákban is)

A tiszta nyírás feszültségi állapota:

$$\sigma_2 = 0 \text{ és } \sigma_1 = -\sigma_3$$

(a síkbeli feszültségi állapot egy speciális esete)

Az alakváltozási állapot általános esetben *térbeli*: ilyenkor egyik főnyúlás sem zérus. Speciális esetek:

Hidrosztatikus alakváltozási állapot:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$$

Lineáris alakváltozási állapot:

pontosan egy főnyúlás nemzérus

Síkbeli alakváltozási állapot:

pontosan két főnyúlás nemzérus

30. FŐFESZÜLTSEGEK ÉS FESZÜLTSEGI FŐIRÁNYOK VIII.

A feszültségi és alakváltozási állapotok összefüggései:

Hidrosztatikus feszültségi állapot esetén: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_1$
 szintén hidrosztatikus alakváltozási állapot

Lineáris feszültségi állapot esetén (tfh. $\sigma_1 \neq 0$): $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(0+0)) = \frac{1}{E}\sigma_1 > 0$
 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(0 - \nu(\sigma_1 + 0)) = \frac{-\nu}{E}\sigma_1 < 0$
 térbeli alakváltozási állapot

Síkbeli feszültségi állapot esetén

a) ha $\sigma_1 = 0$:

$$\varepsilon_1 = \frac{-\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_3) ?$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu\sigma_2) < 0$$

térbeli (speciális
 esetben síkbeli)
 alakváltozási
 állapot

b) ha $\sigma_2 = 0$:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_3) > 0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{-\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) ?$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu\sigma_1) < 0$$

térbeli (speciális
 esetben síkbeli)
 alakváltozási
 állapot

Térbeli feszültségi állapothoz általában térbeli, de speciálisan síkbeli, sőt akár lineáris alakváltozási állapot is tartozhat.

tipikus: ———

speciális: - - - - -

feszültségi állapot	alakváltozási állapot
lineáris	lineáris
síkbeli	síkbeli
térbeli	térbeli

Gerendák pontjainak feszültségi állapota

A feszültségi állapot meghatározása általános esetben a feszültségtenzor sajátérték-feladatának megoldását jelenti, ez kézi számítással bonyolult lehet.

Rudak (gerendák) esetén az eljárás néhány feltétel teljesülése révén egyszerűsíthető.

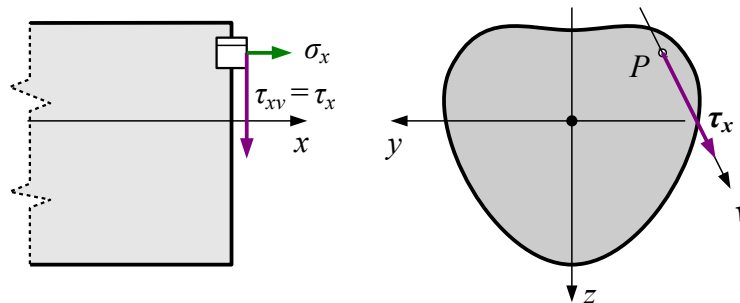
Kiegészítő feltevések:

- **egyenes** tengelyű, **prizmatikus** rúd
- a vizsgált pont környezetében **nincs** a rúd felületére ható **közvetlen** terhelés

Az eddig használt elméleti rúdmodellből a fentiek mellett csak az x normálisú felületben keletkező normál- és nyírófeszültség vektorára (σ_x és τ_x) következtettünk, ahol a nyírófeszültség eredő iránya az yz síkba esik; legyen ez az irány mostantól v . Ennek alapján tegyük is föl, hogy

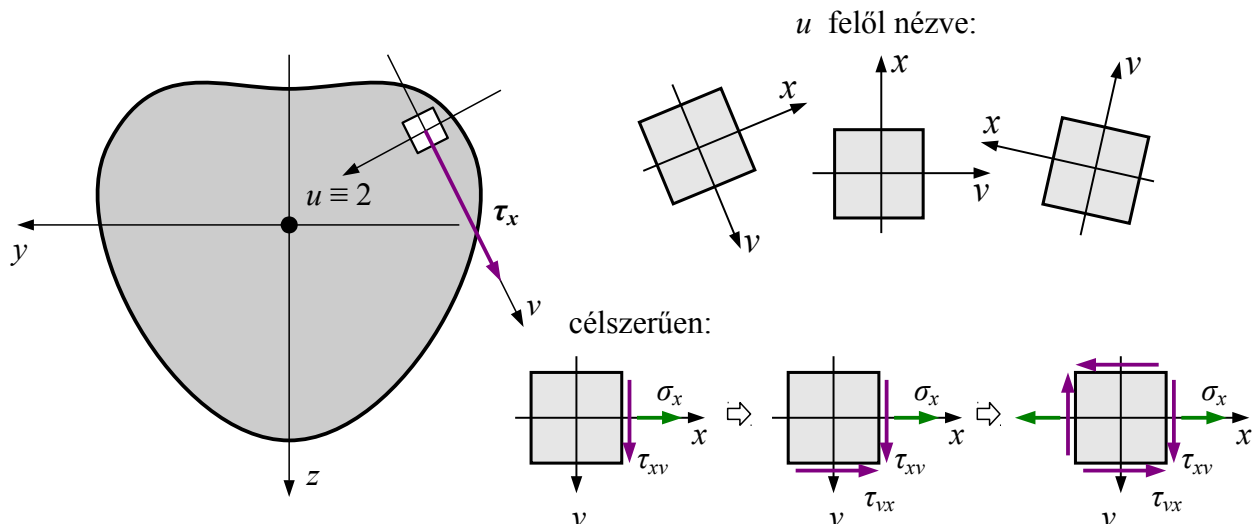
- a ponton átmenő, x -re **merőleges normálisú** metszetek semelyikében **nem keletkezik** x -re **merőleges** feszültségkomponens (azaz csak σ_x és $\tau_{xv} = \tau_{vx}$ lehet nemzérus).

Következmény: a pont **síkbeli feszültségállapotban** van, ahol a feszültségi állapot síkja vx , illetve $\sigma_v = 0$.



Az elemi hasáb feszültségállapota

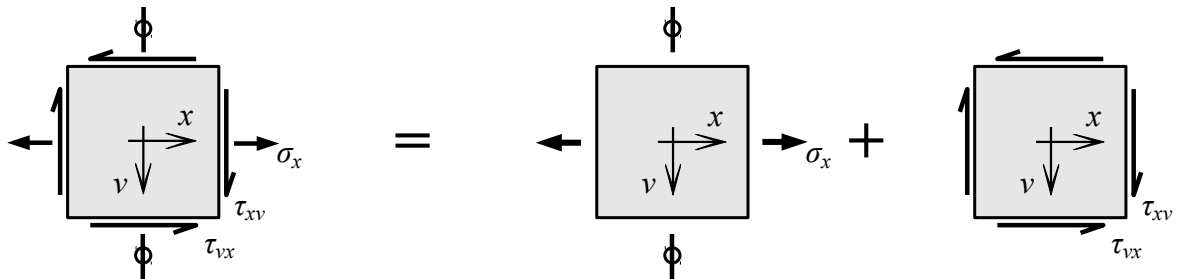
Legyen (u, v, x) jobbsodrású koordináta-rendszer úgy, hogy v iránya megegyezzen τ_{xv} -ével:



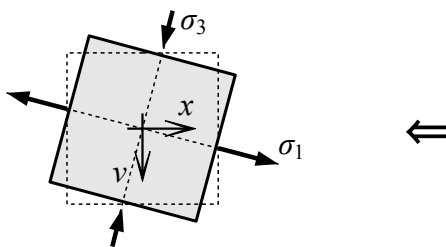
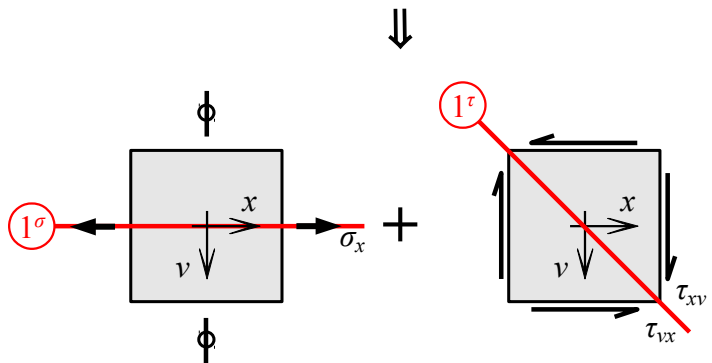
31. FŐFESZÜLTSÉGEK ÉS FESZÜLTSÉGI FŐIRÁNYOK X.

Az 1. és 3. főirányok közelítő meghatározása szemléletből

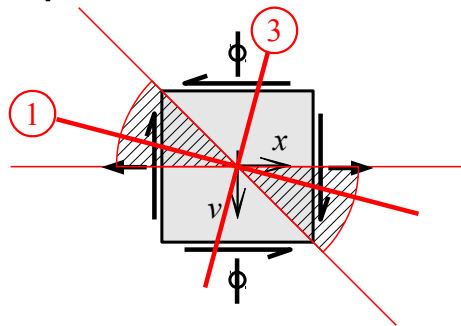
A főirányok a vx síkon egymásra merőlegesen helyezkednek el. Egymásra halmozás: külön-külön csak a normálfeszültségek, illetve csak a nyírófeszültségek hatását vesszük figyelembe. Az "eredő" főirány az így kapott szélső helyzetek között van.



Ha a normálfeszültség nem húzás, hanem nyomás lenne, akkor a legnagyobb megnyúlás iránya a nyomás irányára merőleges volna.

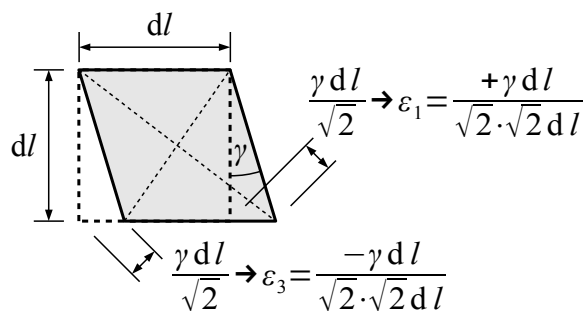


Ha $\sigma_v = 0$, akkor σ_1 és σ_3 ellentétes előjelű



Megjegyzés (ismeretterjesztő jelleggel...):

a harántkontrakció a *feszültségek* számításakor nem jelentkezik, de a csak nyírt hasáb átlói mentén tapasztalt *fajlagos nyúlást* a főfeszültségek függvényében is felírva az E , G és ν paraméterek közti összefüggés könnyedén belátható:

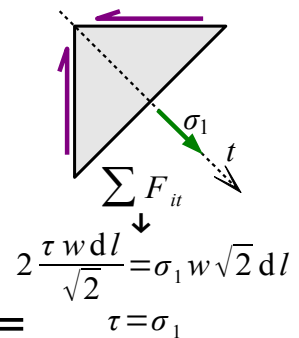


$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(0 - \sigma_1))$$

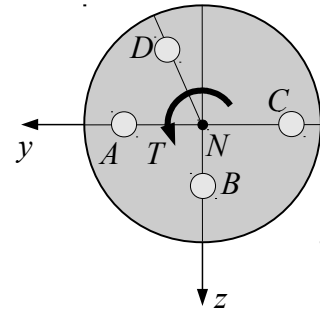
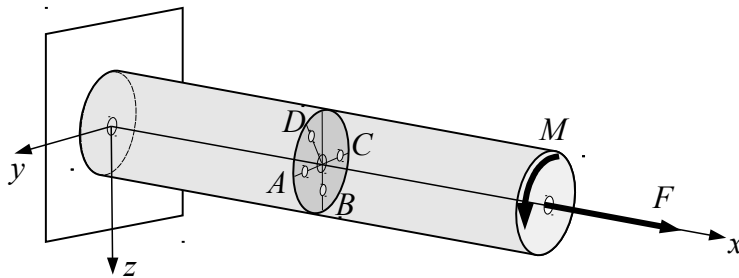
$$\frac{\tau}{2G} = \frac{1}{E} (\sigma_1(1 + \nu))$$

$$\boxed{E = 2G(1 + \nu)}$$



31. FŐFESZÜLTSÉGEK ÉS FESZÜLTSÉGI FŐIRÁNYOK XI.

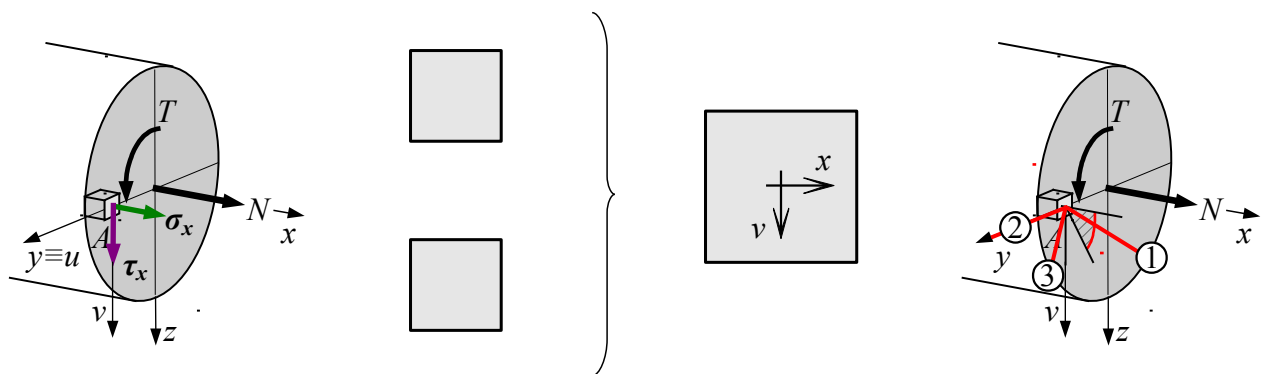
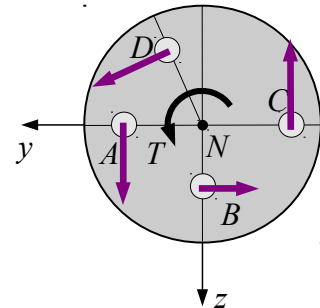
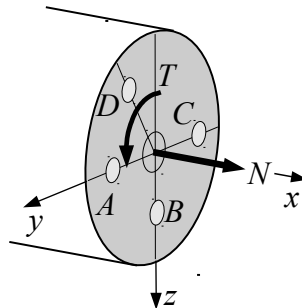
4. Állapítsuk meg a húzott és csavart körszelvényű rúd jelölt keresztmetszetének megadott pontjaiban a feszültségi főirányokat becsléssel!



A normáligenybevételből konstans $\sigma_x > 0$, a csavarónyomatékból az adott ponthoz tartozó sugárra merőleges τ_{xt} keletkezik. x tengellyel szembenézve:

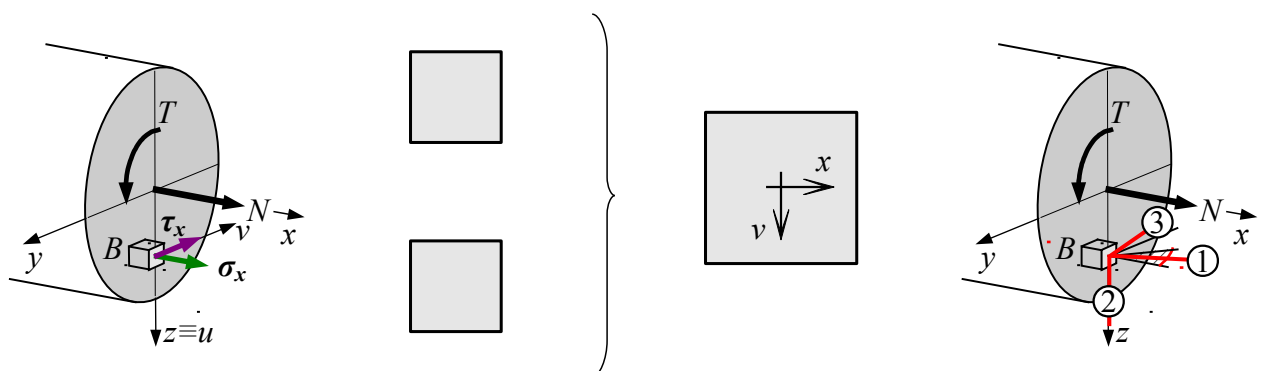
A pontban:

A feszültségállapot síkját a σ_x és $\tau_{xt} = \tau_{xv}$ feszültségkomponensek feszítik ki, tehát az $u \equiv 2$. főirány egybeesik az y iránnyal.

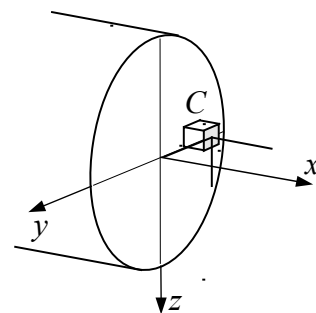
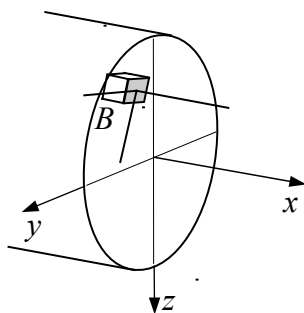
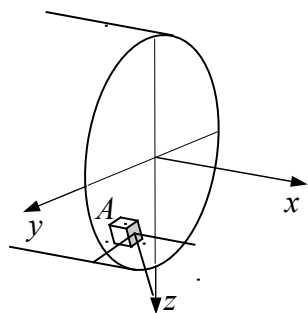
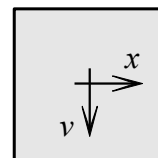
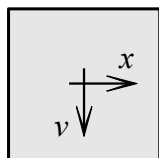
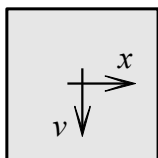
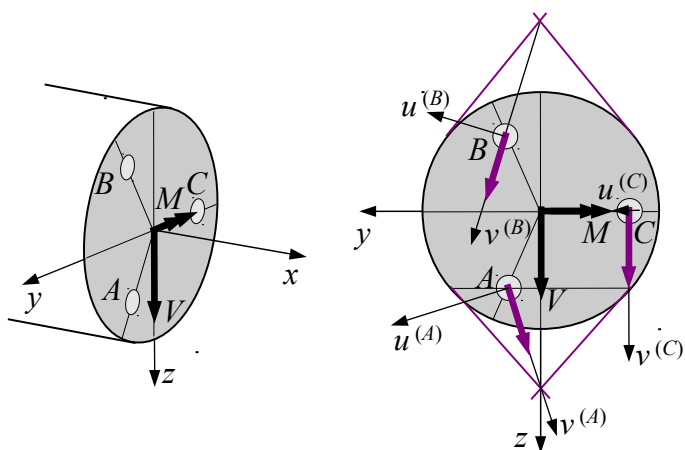


B pontban:

A feszültségállapot síkja ismét xv , a 2. főirány most a z iránnyal esik egybe:



31. FŐFESZÜLTSÉGEK ÉS FESZÜLTÉGI FŐIRÁNYOK XIII.



Gerendák főfeszültségeinek számítása

A gerendák pontjaihoz rendelt feszültségtenzor speciális: a korábban bevezetett (u, v, x) koordináta-rendszerben felírva csupán három eleme nemzérus:

$$\sigma^{(u, v, x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{vx} \\ 0 & \tau_{xv} & \sigma_x \end{bmatrix}$$

Ennek a (már csak kétdimenziós) sajátérték-feladatnak a megoldása:

Sajátértékek:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xv}^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xv}^2}$$

A (v, x) síkban fekvő sajátvektorok (v, x) tengelyekkel bezárt szöge:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xv}}{\sigma_x}, \text{ azaz}$$

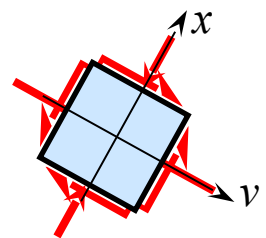
$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{-2\tau_{xv}}{\sigma_x} + k \cdot 90^\circ$$

A képletek hasonló szerkezetűek, mint amelyeket a tehetetlenségi nyomatékokkal kapcsolatban már láttunk, azaz itt is alkalmas szemléltetőesztöz a Mohr-kör. Különbség, hogy $\sigma_v = 0$ miatt az átmérőt kijelölő egyik végpont a függőleges tengelyre esik, azaz – az inerciáktól eltérően – itt a legkisebb főérték (σ_3) negatív lesz.

- ①. Az ábrán egy gerenda egy pontja körül felvett elemi hasáb látható. Az oldallapokra ható nemzérus feszültségkomponensek:

$$\sigma_x = -8 \text{ MPa}, \quad \tau_{xv} = \tau_{vx} = 3 \text{ MPa}.$$

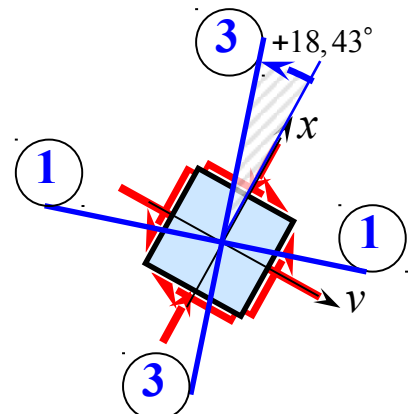
Írjuk fel a feszültségtenzor mátrixát, majd határozzuk meg a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat! Készítsünk eredményvázlatot!



A feszültségtenzor mátrixa:

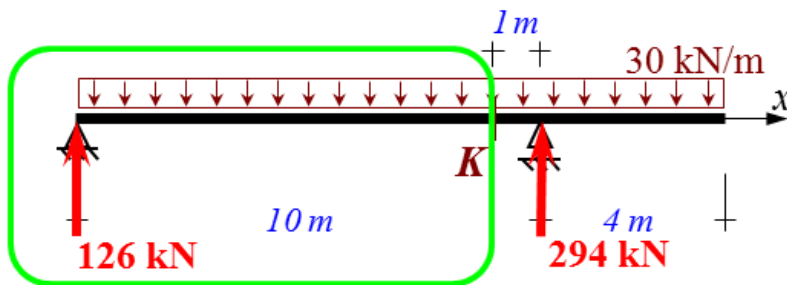
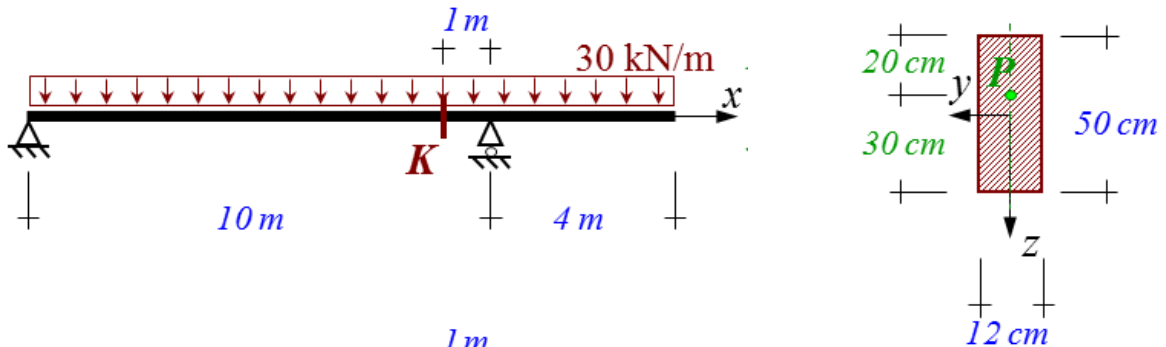
A főfeszültségek:

Az x tengelyt az 1-es főirányba forgató szög:



32. FŐFESZÜLTSÉGEK ÉS FESZÜLTSÉGI FŐIRÁNYOK SZÁMÍTÁSA II.

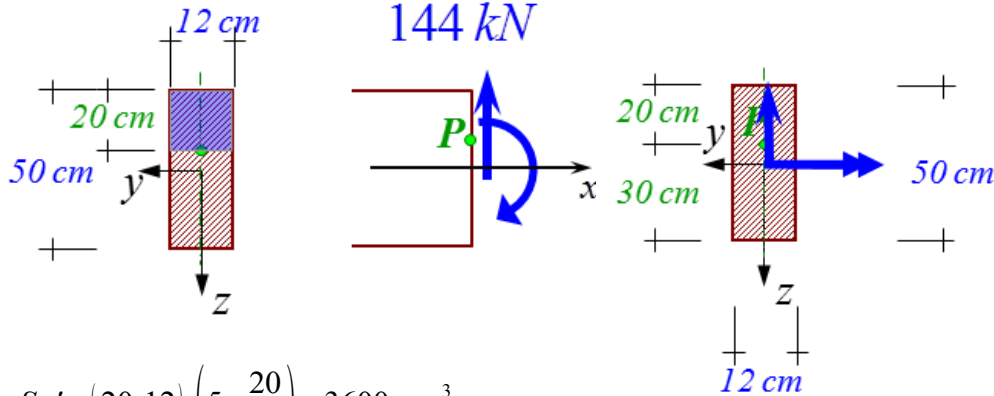
- ② Határozzuk meg P -ben a σ_x és τ_x normál- és nyírófeszültségi komponenseket!
 Állítsuk össze a feszültségtenzor mátrixát az (x, y, z) koordinátarendszerben!
 Határozzuk meg a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat!



Igénybevételek K -ban:

$N_K = 0$
 $V_K = +126 - 30 \cdot 9 = -144 \text{ kN}$
 $M_K = +126 \cdot 9 - 30 \cdot 9 \cdot 4,5 = -81 \text{ kNm}$

I_y és S'_y számítása:



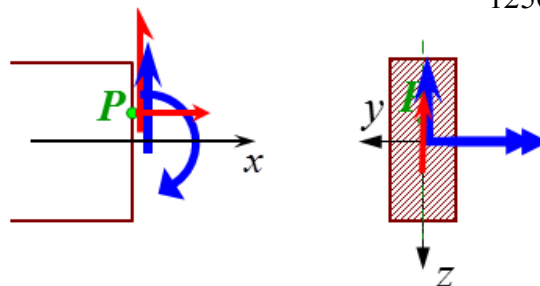
$$S'_y = (20 \cdot 12) \cdot \left(5 + \frac{20}{2}\right) = 3600 \text{ cm}^3$$

$$I_y = \frac{12 \cdot 50^3}{12} = 125000 \text{ cm}^4$$

feszültségek P pontban:

$$\sigma_x^P = + \frac{8100}{125000} \cdot 5 = 0,3240 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad (+)$$

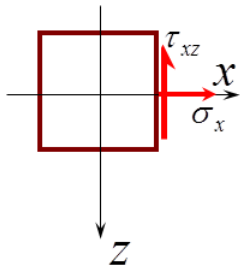
$$\tau_{xz}^P = \frac{144 \cdot 3600}{125000 \cdot 12} = 0,3455 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



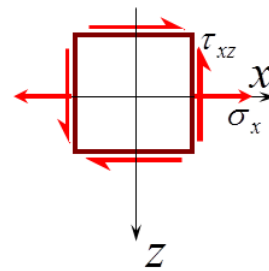
A feszültségállapot síkja az x - z sík!

32. FŐFESZÜLTSÉGEK ÉS FESZÜLTSÉGI FŐIRÁNYOK SZÁMÍTÁSA III.

Az elemi hasáb oldallapjaira ható feszültségkomponensek:

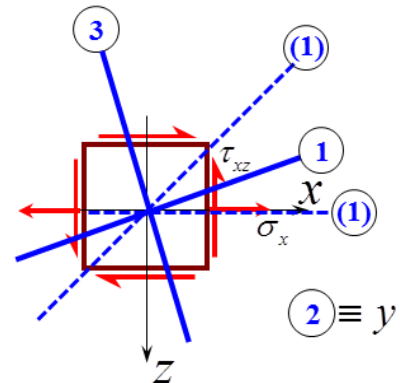


→ egyensúly és reciprocitás →

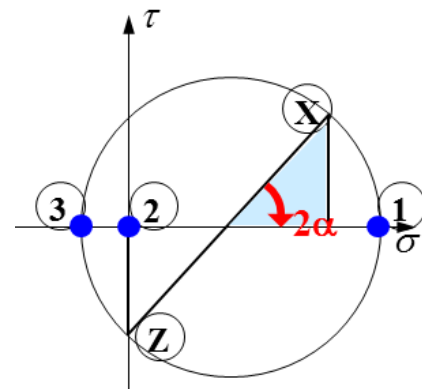
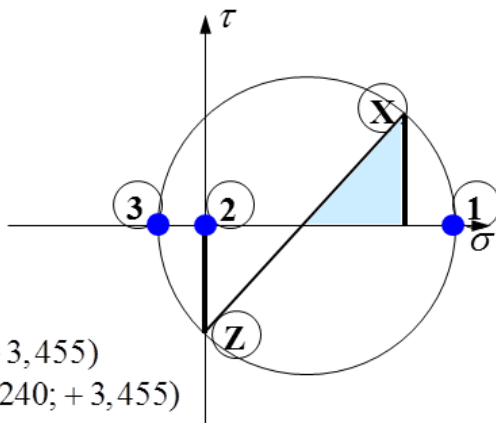


$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +3,240 & 0 & -3,455 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3,455 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

A főirányok közelítő meghatározása egymásra halmozással:



A főirányok közelítő meghatározása a Mohr-kör segítségével:



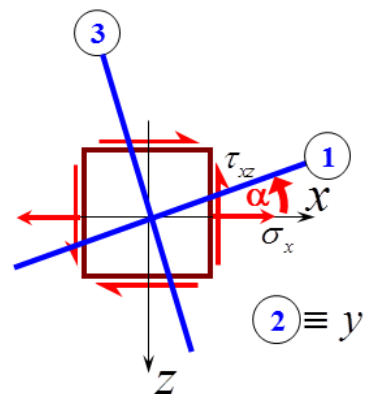
A főirányok meghatározása számítással:

$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xz}}{\sigma_x} = \frac{-2 \cdot (-3,455)}{3,240}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \underline{\underline{+32,48^\circ}}$$

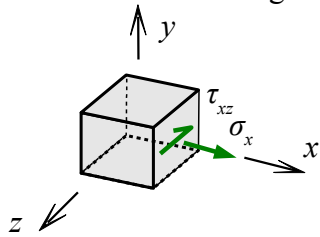
$$\sigma_{1,3} = \frac{3,240}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3,240}{2}\right)^2 + (-3,455)^2}$$

$$\sigma_1 = \underline{\underline{+5,44 \text{ MPa}}}, \quad \sigma_2 = \underline{\underline{0}}, \quad \sigma_3 = \underline{\underline{-2,20 \text{ MPa}}}$$



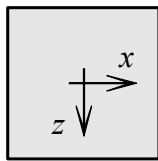
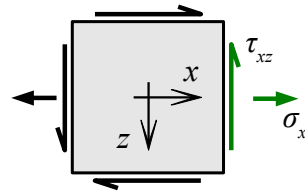
32. FŐFESZÜLTÉSÉK ÉS FESZÜLTÉSI FŐIRÁNYOK SZÁMÍTÁSA IV.

3. Becsüljük meg a feszültségi főirányokat, ha ismerjük az elemi hasáb $+x$ oldallapján ébredő feszültségeket és az y irányú feszültségmentes!

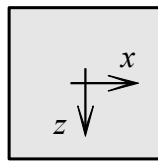


- síkbeli feszültségi állapot
- a feszültségi állapot síkjá: x - z sík

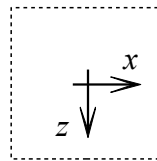
Felülről (+y-nal szemben) nézve:



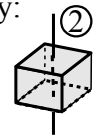
+



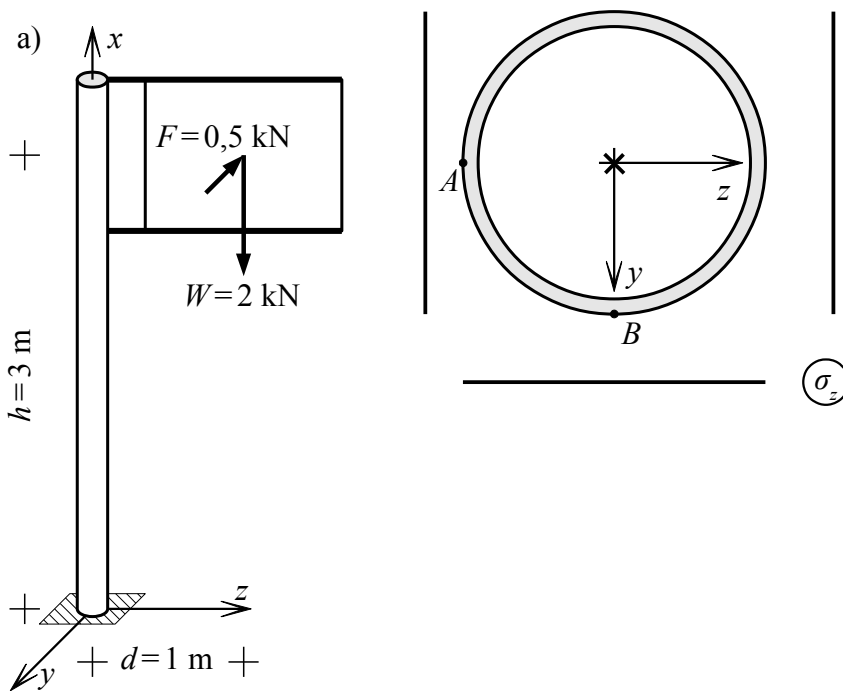
=



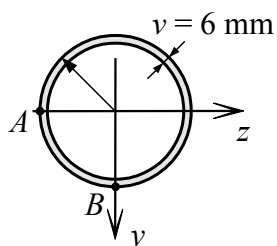
A 2. főirány a feszültségi állapot síkjára merőleges y irány:



4. a) Határozzuk meg a feszültségeket a befogási keresztmetszet A és B pontjaiban!
 b) Számítsuk ki a B pontbeli főfeszültségek értékét!



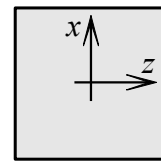
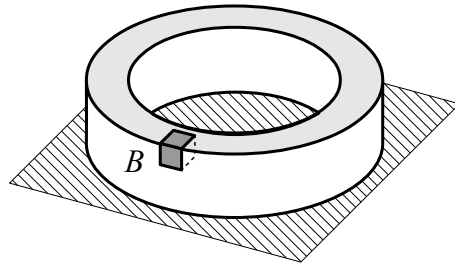
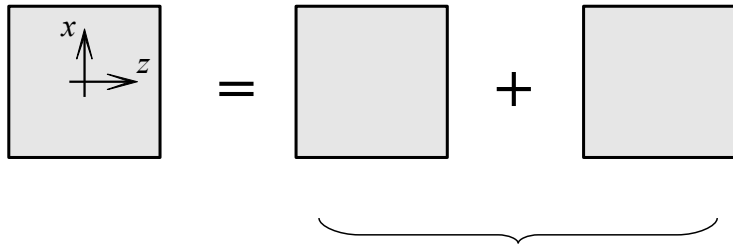
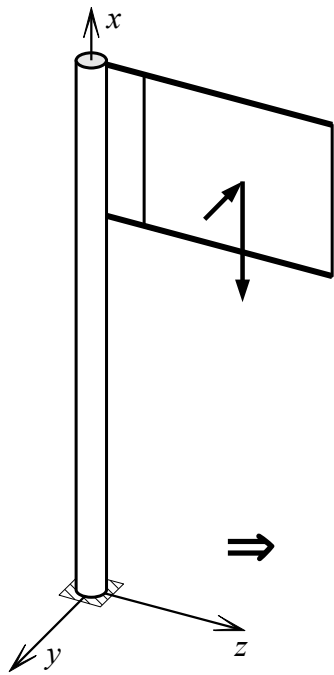
$R = 5 \text{ cm}$



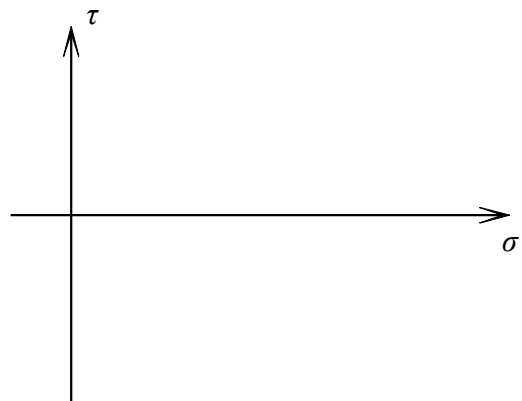
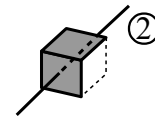
32. FŐFESZÜLTSEGEK ÉS FESZÜLTSEGI FŐIRÁNYOK SZÁMÍTÁSA V.

b)

Becsüljük meg az 1. és 3. főirány helyzetét!

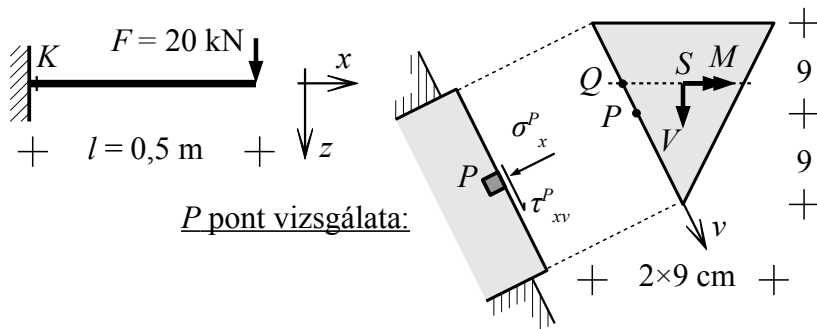


A 2. főirány a feszültségi állapot síkjára merőleges (most y irányú):



32. FŐFESZÜLTSEGEK ÉS FESZÜLTSÉGI FŐIRÁNYOK SZÁMÍTÁSA VI.

5. Határozzuk meg a háromszögkeresztmetű konzol befogási keresztmetszetének P és Q pontjában keletkező főfeszültségeket és azok irányát!



Önálló órai gyakorlás:

Q pont vizsgálata: