

A tiszta hajlítás fogalma

A rúd keresztmetszetére ható erőrendszer eredője
keresztmetszeti síkban fekvő erőpár
(másképpen: a keresztmetszet egyetlen nemzérus igénybevétele a **hajlítónyomaték**).

A hajlítás tipikus esetei a mérnöki gyakorlatban



általában: gerendák

sőt:



Rendszerint tehát **nem tiszta**, hanem **nyírással egyidejű** hajlítás!

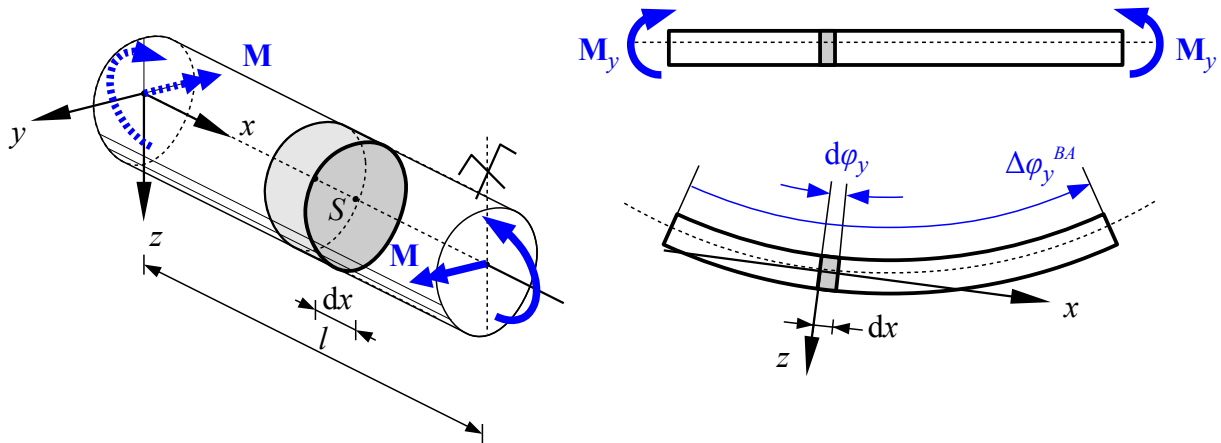
Látni fogjuk: a nyíróerő jelenléte a hajlításból származó feszültségek és alakváltozások számítása szempontjából elhanyagolható hibát okoz.

13. HAJLÍTÁS II.

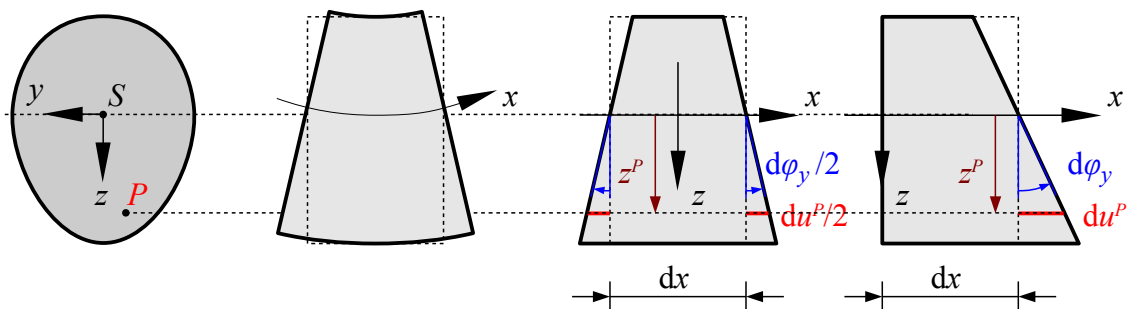
Alapvető feltevések:

- **egyenes** tengelyű rúd
- **sík** keresztmetszetek elve
- **homogén**, lineárisan **rugalmas** anyag (Hooke-törvény)
- a rúdelem pontjai csak **tengelyirányú** eltolódásokat szenvednek
- *egyelőre* csak (z-re) **szimmetrikus** keresztmetszet
- *egyelőre* csak z-től **függő** eltolódások

Kiegészítés: a deformációt követően a keresztmetszet a súlyvonalra merőleges marad (Bernoulli – Navier hipotézis)

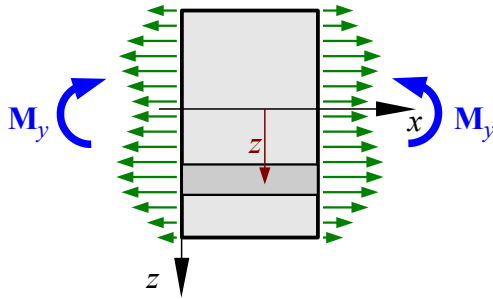


Feltesszük (később igazoljuk is), hogy a keresztmetszeti súlypontokat összekötő vonal (súlyvonal) nyúlásmentes.

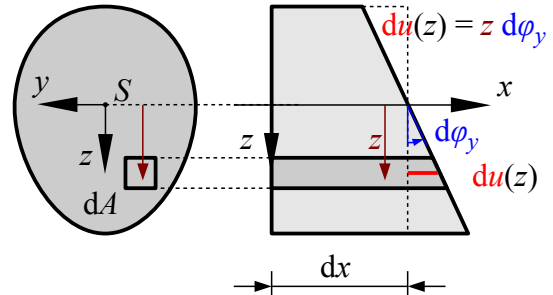


Definíció: egy keresztmetszeten belül az $\varepsilon_x = 0$ fajlagos nyúlású pontok halmazát *semleges tengelynek* nevezzük.

A szimmetriasíkban tisztán hajlított rúdelem egyenletei



STATIKAI egyenlet



GEOMETRIAI egyenlet

$$\sum F_{ix}: N = 0 = \int_{(A)} \sigma_x(x,z) dA$$

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{du(x,z)}{dx}$$

$$\sum M_{iy}: M_y = \int_{(A)} \sigma_x(x,z) z dA$$

helyette inkább:

$$y \text{ tengely körüli fajlagos elfordulás} \rightarrow \kappa_y(x) = \frac{d\phi_y(x)}{dx}$$

és

$$\varepsilon_x(x,z) = \kappa_y(x)z$$

ANYAGmodell

(az x -től való függés adott rúdelem esetében csupán formális)

$$\sigma_x(x,z) = E \cdot \varepsilon_x(x,z)$$

A vetületi egyensúlyból:

STAT

$$\sum F_{ix}: 0 = \int_{(A)} \sigma_x(z) dA = \int_{(A)} E \varepsilon_x(z) dA = \int_{(A)} E \kappa_y z dA = E \kappa_y \int_{(A)} z dA = E \kappa_y S_x$$

↑

a z menti feszültségeloszlás egyelőre ismeretlen!

↑

ANYAG

$$\sigma_x(y,z) = E \varepsilon_x(y,z)$$

↑

GEOM

$$\varepsilon_x(z) = \kappa_y z$$

↑

κ_y viszont már állandó

↑

a statikai nyomaték a súlypontra valóban 0!

13. HAJLÍTÁS IV.

A nyomatéki egyensúlyból:

$$\sum M_{iy}: \boxed{M_y} = \int_{(A)} \sigma_x(z) z \, dA = \int_{(A)} (E\kappa_y z) z \, dA = E\kappa_y \int_{(A)} z^2 \, dA = E\kappa_y \boxed{I_y}$$

ANYAG + **GEOM**

$I_y := \int_{(A)} z^2 \, dA$ y tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték vagy inercianyomaték
 I_y mindig pozitív, mértékegysége: hossz^4

Ebből az alakváltozás $\kappa_y = \frac{M_y}{EI_y}$ (EI_y elnevezése: (y tengely körüli) hajlítómerevség),
 majd a geometriai összefüggés és az anyagmodell ismételt használatával a feszültség

$$\sigma_x(z) = E\varepsilon_x(z) = E\kappa_y z = \frac{M_y}{I_y} z$$

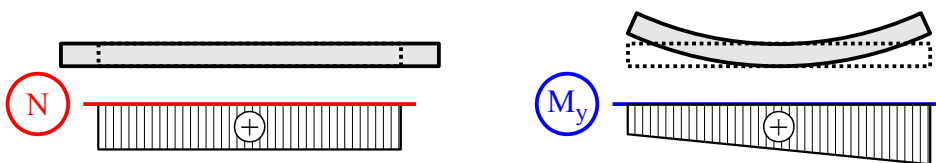
Az y körüli elfordulás számítása egy l hosszúságú BC szakaszon (C elfordulása B -hez képest):

$$\boxed{\kappa_y = \frac{d\varphi_y(x)}{dx}} \longrightarrow \Delta\varphi_y^{CB} = \int_{x_B}^{x_C} \kappa_y \, dx = \int_{x_B}^{x_C} \frac{M_y(x)}{EI_y(x)} \, dx \quad (\text{általánosságban})$$

Ha I_y állandó ("prizmatikus rúd"): $\Delta\varphi_y^{CB} = \frac{1}{EI_y} \int_{x_B}^{x_C} M_y(x) \, dx$

(az igénybevételi ábra x_B és x_C közötti területrésze osztva a merevséggel)

figyeljük meg:



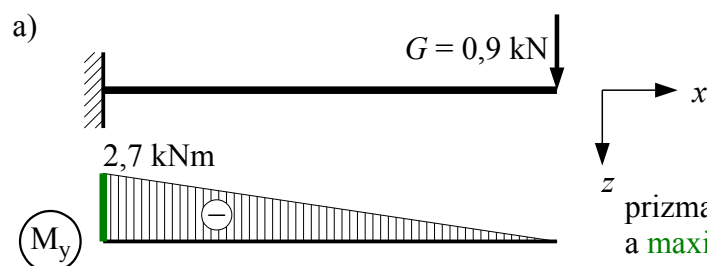
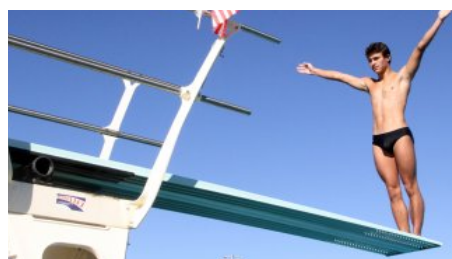
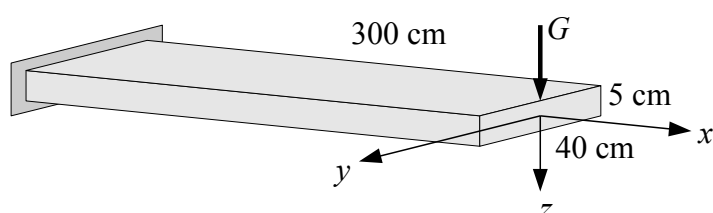
a relatív elmozdulás (nyúlás, elfordulás stb.) az igénybevételi ábra területével egyenesen, a merevséggel fordítottan arányos

13. HAJLÍTÁS V.

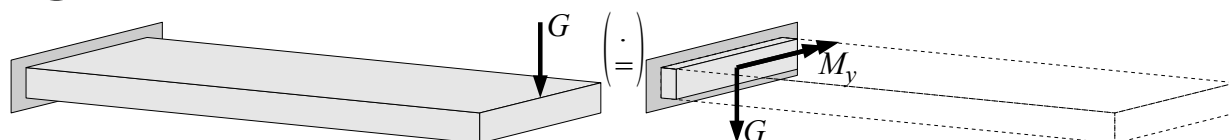
mintafeladat

1. A képen látható műugró súlya $G = 0,9 \text{ kN}$, a trambulín szabad hossza $l = 3 \text{ m}$, szélessége $a = 40 \text{ cm}$ és (állandónak tekintett) vastagsága $b = 5 \text{ cm}$ (önsúlya elhanyagolható).

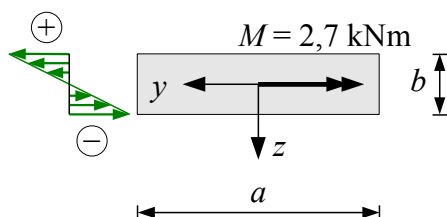
- Készítsük el a konzoltartó nyomatéki ábráját!
- Mekkora maximális húzó- és nyomófeszültség keletkezik a trambulín anyagában?
- Mekkora a K konzolvég B befogáshoz képest mérhető elfordulása, ha az anyag rugalmassági modulusa $E = 15 \text{ GPa}$?
- Hogyan változnának az előbbi értékek, ha a gerendát hossz tengelye körül 90 fokkal elforgatnánk?



prizmatikus rúdban a maximális feszültségek a **maximális nyomaték helyén** keletkeznek



b) a keresztmetszet nézete:

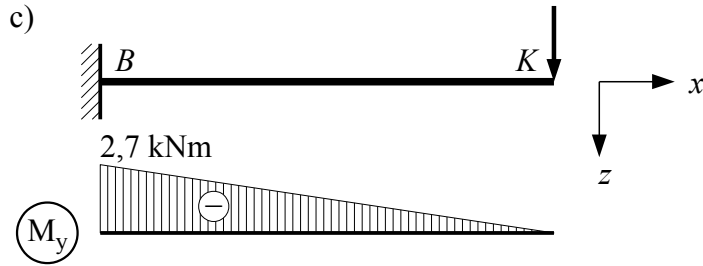


a maximális húzás felül ($z_{\max, f} = b/2$), a maximális nyomás alul ugyanilyen távolságban. Már csak I_y hiányzik:

$$I_y = \int_{(A)} z^2 dA = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dz dy = \int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} dy = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{b^3}{12} dy = \left[\frac{yb^3}{12} \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_y = \frac{ab^3}{12} = \frac{40 \cdot 5^3}{12} = 416,7 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow \quad \sigma_x^{\pm \max} = \frac{M_y b}{I_y} = \frac{270}{416,7} \cdot 2,5 = \underline{\underline{1,620 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

13. HAJLÍTÁS VI.

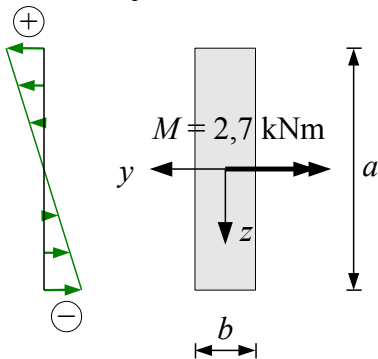


$$\Delta \varphi_y^{KB} = \int_0^l \kappa_y dx = \int_0^l \frac{M_y(x)}{EI_y(x)} dx = \frac{1}{EI_y} \int_0^l M_y(x) dx = \frac{1}{EI_y} A_M, \text{ azaz}$$

↑ prizmatikus rúd ↑ a nyomatéki ábra területe

$$\Delta \varphi_y^{KB} = \frac{1}{1500 \cdot 416,7} \cdot \frac{(-270) \cdot 300}{2} = \underline{\underline{-0,06480 \text{ rad}}} \text{ (órával megegyező).}$$

d) Az inercia újra kiszámítandó:

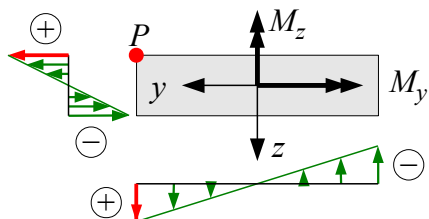
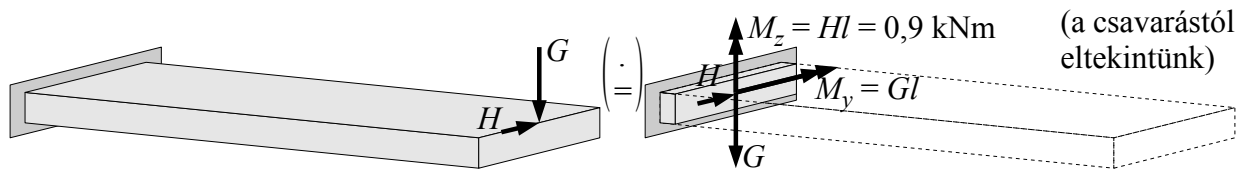


$$I_y = \frac{ba^3}{12} = \frac{5 \cdot 40^3}{12} = 26670 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_x^{\pm max} = \frac{M_y a}{I_y} = \frac{270}{26670} \cdot 20 = \underline{\underline{0,2025 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

$$\Delta \varphi_y^{KB} = \frac{1}{1500 \cdot 26670} \cdot \frac{(-270) \cdot 300}{2} = \underline{\underline{-0,001012 \text{ rad}}} \text{ (órával megegyező).}$$

Mi történik, ha a műugró ferdén rugaszódik el ($H = 0,3 \text{ kN}$)?



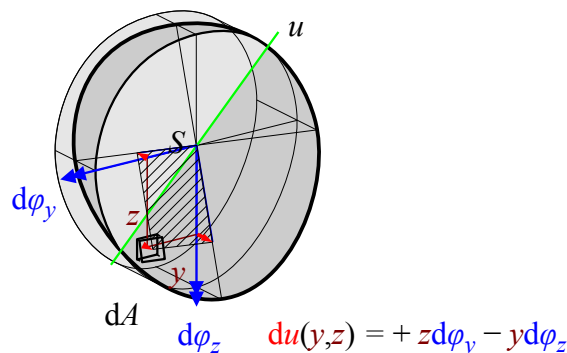
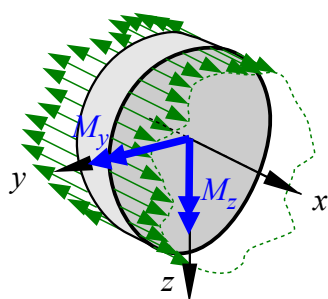
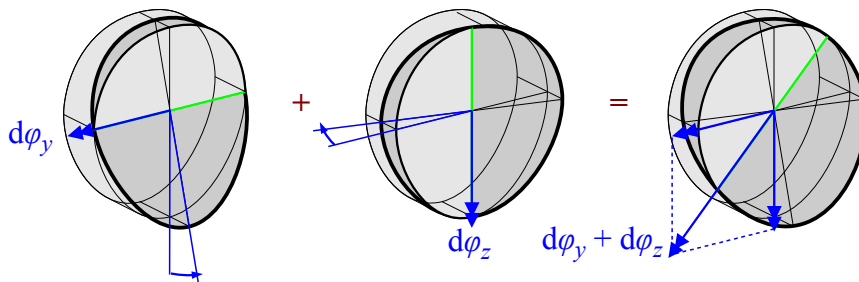
$$\sigma_x^P = \frac{270}{416,7} \cdot 2,5 + \frac{90}{26667} \cdot 20 = \underline{\underline{1,687 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}} = \sigma_x^{+max}$$

A szuperpozíció elve itt is érvényes ($\leftarrow \varphi_y, \varphi_z$ kicsi, illetve az anyag lineárisan rugalmas).
De mi a teendő, ha a szelvény “kevésbé” szimmetrikus?

A tisztán hajlított általános rúdelem egyenletei

- (...)
- a rúdelem pontjai csak **tengelyirányú** eltolódásokat szenvednek
 - ~~- egyelőre csak (z-re) **szimmetrikus** keresztmetszet~~
 - ~~- egyelőre csak z-től **függő** eltolódások~~

emlékeztető:
a kis elfordulások egymásra halmozhatók



STATIKAI egyenlet

GEOMETRIAI egyenlet

$$\sum F_{ix}: N = 0 = \int_{(A)} \sigma_x(x,y,z) dA$$

$$\varepsilon_x(x,y,z) = \frac{du(x,y,z)}{dx} = \frac{d\varphi_y(x)}{dx} z - \frac{d\varphi_z(x)}{dx} y$$

$$\sum M_{iy}: M_y = \int_{(A)} \sigma_x(x,y,z) z dA$$

$$\varepsilon_x(x,y,z) = \kappa_y(x)z - \kappa_z(x)y$$

$$\sum M_{iz}: M_z = - \int_{(A)} \sigma_x(x,y,z) y dA$$

A nyomatéki egyensúlyból:

STAT

$$\sum M_{iy}: M_y = \int_{(A)} \sigma_x(z) z dA = \int_{(A)} E(\kappa_y z - \kappa_z y) z dA = E\kappa_y \int_{(A)} z^2 dA - E\kappa_z \int_{(A)} yz dA$$

I_x (már ismerős)

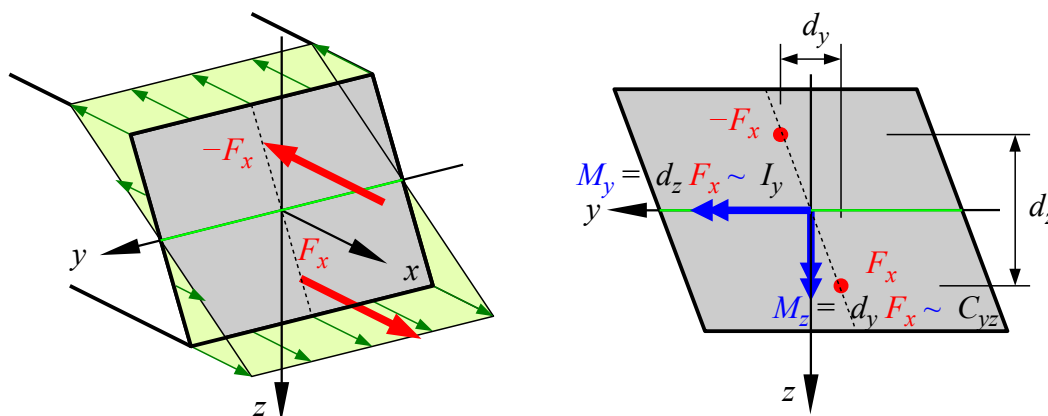
$$C_{yz} (= I_{yz}) := \int_{(A)} yz dA$$

yz tengelyekre vett centrifugális nyomaték
 $C_{yz} = C_{zy}$ lehet pozitív és negatív is, mértékegysége: hossz⁴

13. HAJLÍTÁS VIII.

Mechanikai értelemben C_{yz} a rugalmas rúd y (vagy z) tengely körül elforduló keresztmetszetében z (vagy y) tengely körül keletkező nyomatékkal arányos.

I_y (I_z) az y (z) körül elforduló keresztmetszetben ugyanazon tengely körül keletkező nyomatékával arányos.



...folytatva az előző gondolatmenetet:

$$\begin{aligned} \sum M_{iy}: M_y &= E\kappa_y I_y - E\kappa_z C_{yz} \\ \sum M_{iz}: M_z &= -E\kappa_z C_{yz} + E\kappa_y I_z \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \kappa_y &= \frac{1}{E} \frac{M_y I_z + M_z C_{yz}}{I_y I_z - C_{yz}^2} \\ \kappa_z &= \frac{1}{E} \frac{M_y C_{yz} + M_z I_y}{I_y I_z - C_{yz}^2} \end{aligned} \quad \text{ezek alapján}$$

$$\sigma_x = \frac{(M_y I_z + M_z C_{yz})z - (M_y C_{yz} + M_z I_y)y}{I_y I_z - C_{yz}^2}$$

Vegyük észre: ha $C_{yz} = 0$, a képletek egyszerűsödnek:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y, \quad \kappa_y = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \kappa_z = \frac{M_z}{EI_z}.$$

Éppen úgy, mint a korábban a szimmetrikus keresztmetszeteknél!

Kérdés: van-e tetszőleges keresztmetszetben olyan y, z merőleges tengelypár, amelyre $C_{yz} = 0$?

Válasz: van! Nevük: *tehetetlenségi főirány*. (Láttuk, hogy a szimmetria-tengely – tehát ebből adódóan a rá merőleges irány is – ilyen tulajdonságú, azaz főirány.)

Definíció:

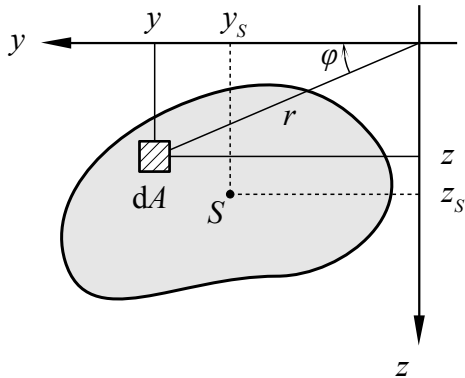
Egyenes hajlításnak nevezzük azt az esetet, amikor a a hajlítónyomaték vektora valamely tehetetlenségi főiránnyal párhuzamos (következmény: a semleges tengely szintén párhuzamos a nyomaték vektorával). Példa: a szimmetriasíkban terhelt trambulín esete.

Definíció:

Ferde hajlításnak nevezzük azt az esetet, amikor a a hajlítónyomaték vektora egyik tehetetlenségi főiránnyal sem párhuzamos (következmény: a semleges tengely szintén nem párhuzamos a nyomaték vektorával, sem bármely főiránnyal). Példa: a ferdén elrugaszkodó műugró esete.

14. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI I.

1. A keresztmetszetek geometriai jellemzőinek definíciói



Terület:

$$A := \int_{(A)} dA \quad \oplus \quad [\text{cm}^2]$$

Statikai nyomaték (elsőrendű nyomaték):

$$S_y := \int_{(A)} z dA \quad ; \quad S_z := \int_{(A)} y dA \quad [\text{cm}^3]$$

Súlypont:

$$y_s := \frac{S_z}{A} \quad ; \quad z_s := \frac{S_y}{A} \quad [\text{cm}]$$

Tehetlenségi nyomaték (inercianyomaték):

$$I_y := \int_{(A)} z^2 dA \quad ; \quad I_z := \int_{(A)} y^2 dA \quad ; \quad I_0 := \int_{(A)} r^2 dA \quad (= I_y + I_z) \quad \oplus \quad [\text{cm}^4]$$

Centrifugális nyomaték:

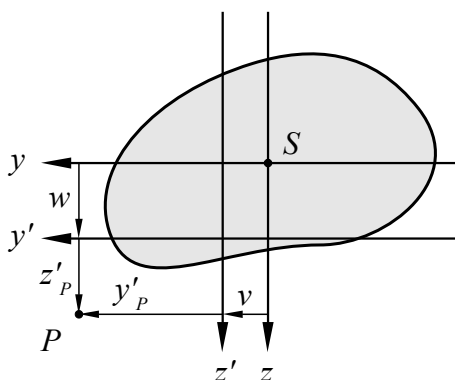
$$C_{yz} := \int_{(A)} yz dA \quad [\text{cm}^4]$$

másodrendű
nyomatékok

Innentől kezdve a mellékjel nélküli koordináta-tengelyt automatikusan súlyponti tengelyt jelöl.

2. A másodrendű nyomatékok koordináta-transzformációja

a) A koordináta-rendszer eltolása



Adott: I_y, I_z, C_{yz} , valamint v, w és A .

Meghatározandó: $I_{y'}, I_{z'}$ és $C_{y'z'}$.

a koordináta-rendszerek közötti transzformáció:

$$y' = y - v$$

$$z' = z - w$$

Definíció alapján: $I_{y'} = \int_{(A)} z'^2 dA = \int_{(A)} (z-w)^2 dA = \underbrace{\int_{(A)} z^2 dA}_{I_y} - 2w \underbrace{\int_{(A)} z dA}_{S_y=0} + w^2 \underbrace{\int_{(A)} dA}_A$
 (I_z , hasonlóan)

$$C_{y'z'} = \int_{(A)} (z-w)(y-v) dA = \underbrace{\int_{(A)} yz dA}_{C_{yz}} - w \underbrace{\int_{(A)} y dA}_{S_z=0} - v \underbrace{\int_{(A)} z dA}_{S_y=0} + vw \underbrace{\int_{(A)} dA}_A$$

(súlyponti tengelyre a statikai nyomaték 0)

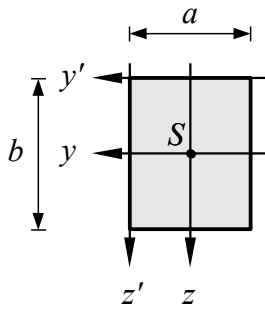
14. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI II.

Steiner-tétel:

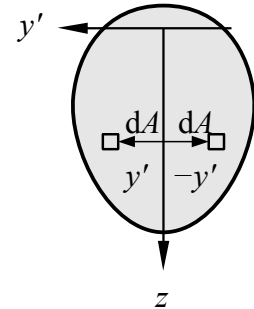
$$\begin{array}{ll}
 I_{y'} = I_y + Aw^2 & I_y = I_{y'} - Aw^2 \\
 I_{z'} = I_z + Av^2 & I_z = I_{z'} - Av^2 \\
 C_{y'z'} = C_{yz} + Avw & C_{yz} = C_{y'z'} - Avw
 \end{array}$$

- A kettő közül az egyik rendszer mindig súlyponti;
- a súlyponti rendszertől távolodva az inerciák növekednek.

1. Határozzuk meg a vázolt téglalapszelvény másodrendű nyomatékait szelvény élére illeszkedő y' , z' tengelyekre!



$I_y = \frac{ab^3}{12}$ és $I_z = \frac{a^3b}{12}$ már ismert,
 $C_{yz} = 0$ a szimmetriából következik:



Alkalmazzuk a Steiner-tételt:

$$I_{y'} = I_y + Aw^2 = \frac{ab^3}{12} + ab \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{ab^3}{3}}}$$

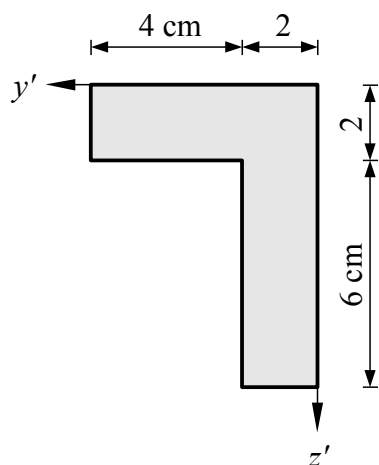
$$C_{y'z'} = C_{yz} + Avw = 0 + ab \cdot \left(\frac{+a}{2}\right) \cdot \left(\frac{-b}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{-a^2b^2}{4}}}$$

C_{yz} negatív, mert vegyes előjelű síknegyedben fekszik. Ha z' a jobb oldali kontúrra kerül, C_{yz} előjelet vált.

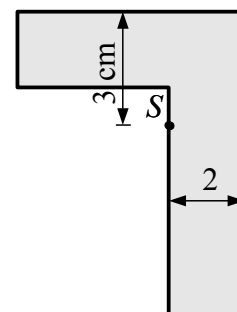
Szuperpozíció elve: adott koordináta-rendszerben összetett síkidomok másodrendű nyomatékai részsíkidomok nyomatékainak összegeiként számíthatók. Hiányzó részsíkidomok nyomatékai negatív előjellel számítanak.

14. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI III.

- ② Határozzuk meg az alábbi összetett szelvény másodrendű nyomatékait a súlyponti y, z tengelyekre!



A súlypont helye:



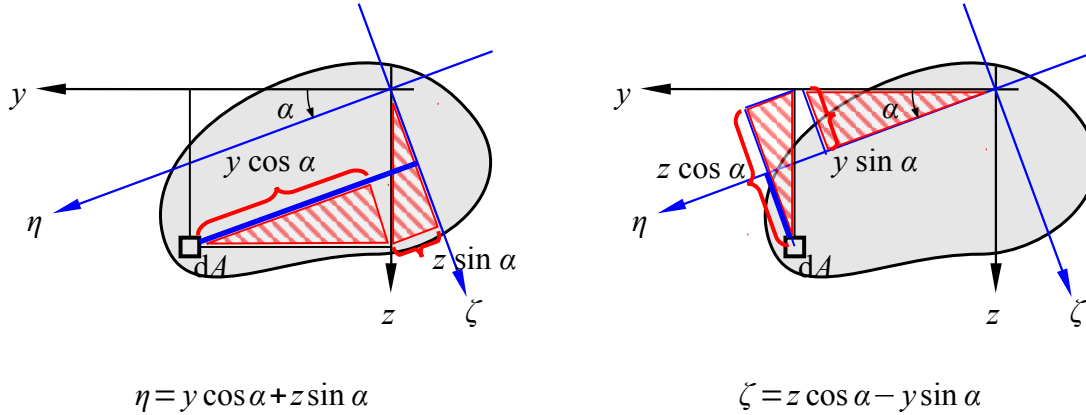
Gyakorlásra: ismételjük meg I_y , I_z és C_{yz} számítását esetenként különféle darabolással és alkalmasan választott kiindulási tengelyekkel!

$$\begin{aligned} I_y &= \underline{136 \text{ cm}^4} \\ I_z &= \underline{64 \text{ cm}^4} \\ C_{yz} &= \underline{-48 \text{ cm}^4} \end{aligned}$$

14. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI IV.

b) A koordináta-rendszer elforgatása

A következő gondolatmenetben y, z, η és ζ átmenetileg tetszőleges (nem súlyponti) helyzetű!



Adott: I_y, I_z, C_{yz} , valamint α .
 Meghatározandó: I_η, I_ζ és $C_{\eta\zeta}$.

Definíció alapján:
$$I_\eta = \int_{(A)} \zeta^2 dA = \int_{(A)} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dA$$

$$= \cos^2 \alpha \int_{(A)} z^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_{(A)} yz dA + \sin^2 \alpha \int_{(A)} y^2 dA$$

$$= \cos^2 \alpha I_z - 2 \cos \alpha \sin \alpha C_{yz} + \sin^2 \alpha I_y$$

Felhasználva, hogy $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ és $\cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$:

	$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - C_{yz} \sin 2\alpha \quad (1)$	$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \right\} I_\eta + I_\zeta = I_0$ (állandó)
hasonló elven:	$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + C_{yz} \sin 2\alpha \quad (2)$	
	$C_{\eta\zeta} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + C_{yz} \cos 2\alpha \quad (3)$	

Ha egy η, ζ koordináta-rendszerben $C_{\eta\zeta} = 0$, akkor a η, ζ tengelyek neve *tehetetlenségi főirány* (főtengely, jelölése "1" vagy "2"). A hajlítás bevezetőjében foglaltak szerint pontosan az ilyen tulajdonságú tengelyek körüli hajlítást hívjuk egyenes hajlításnak.

A tehetetlenségi főirányra vett inercianyomaték neve *tehetetlenségi főnyomaték*, jele I_1 vagy I_2 .

Az α szerinti derivált vizsgálatával belátható, hogy $C_{\eta\zeta} = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha egyidejűleg I_η maximális és I_ζ minimális vagy megfordítva: $I_{\max} = I_1, I_{\min} = I_2$.

Konvenció: a legnagyobb és legkisebb inercianyomatékhoz tartozó főtengely jele rendre 1 és 2.

14. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI V.

Ha $C_{\eta\zeta} = 0$, akkor (3) alapján az x, y tengelyeket a η, ζ főirányokba forgató α_0 -ra teljesül, hogy

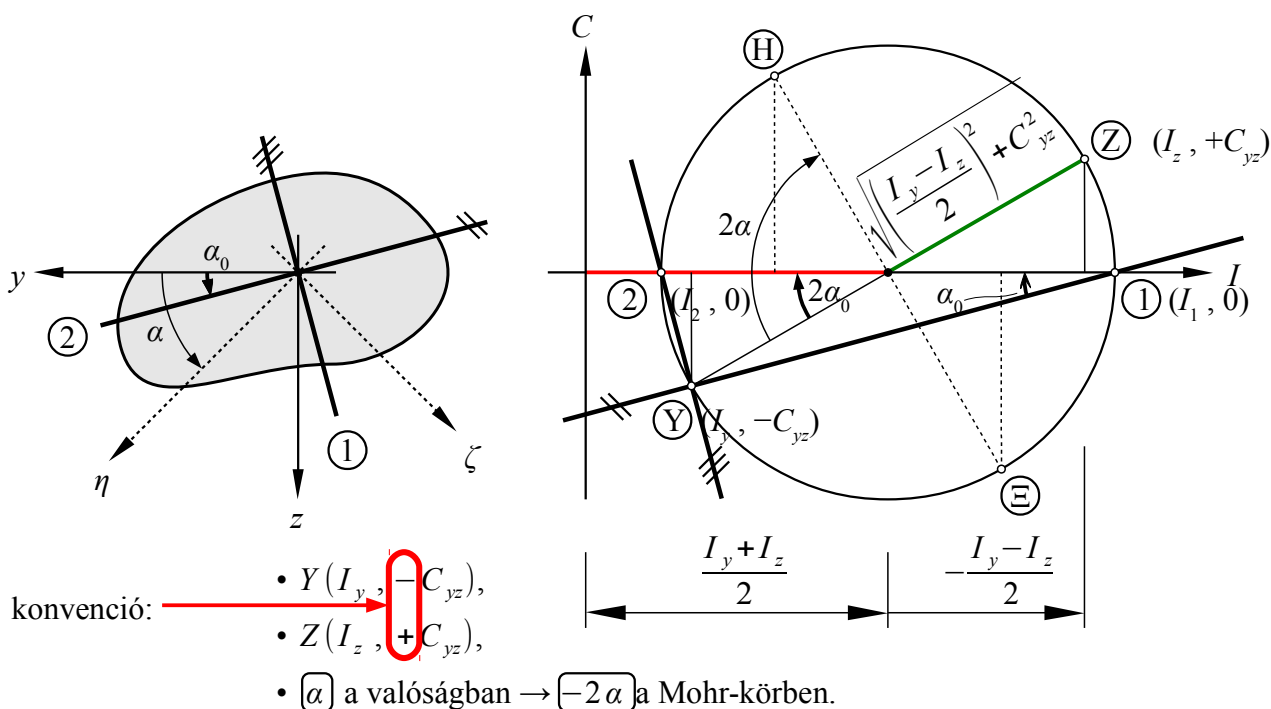
$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2C_{yz}}{I_y - I_z}} \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2C_{yz}}{I_y - I_z} \right) + \frac{k\pi}{2}$$

$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}$ és $\sin 2\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}$ helyettesítése és némi átalakítás után:

$$\boxed{I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + C_{yz}^2}}$$

Figyelem: az α_0 -ra kapott értékeknek két egymásra merőleges tengely felel meg, de a képletből nem derül ki, hogy melyik az 1-es és melyik a 2-es főirány. α_0 (-45° ; $+45^\circ$) tartományba eső értéke azt az előjeles forgatást adja, ami a kiindulási inerciák közül a nagyobbat I_1 -be, a kisebbet pedig I_2 -be transzformálja.

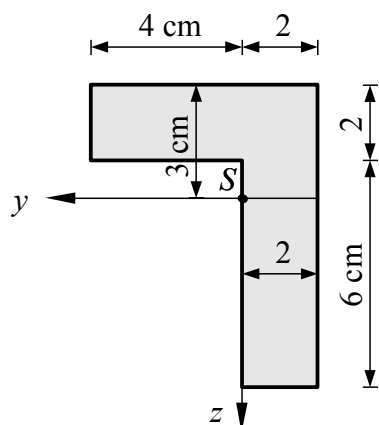
Grafikus segédlet: a tehetetlenségi Mohr-kör



A szimmetria-tengely mindig főirány. Ha valahol $I_y = I_z$ és $C_{yz} = 0$ (azaz a Mohr-kör egyetlen ponttá deformálódik), akkor minden irány főirány (pl. kettőnél több szimmetria-tengely esetén).

14. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI VI.

- ② Határozzuk meg a korábban már tárgyalt összetett szelvény tehetetlenségi főirányait és főnyomatékait!



már ismert:

$$I_y = \underline{136 \text{ cm}^4}$$

$$I_z = \underline{64 \text{ cm}^4}$$

$$C_{yz} = \underline{-48 \text{ cm}^4}$$

a főirányok szöge:

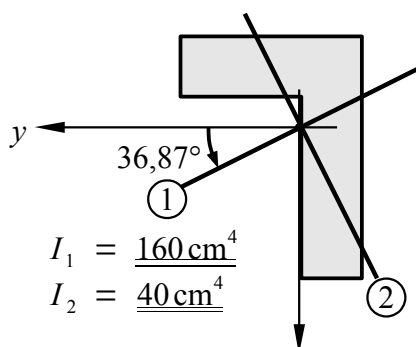
$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \cdot (-48)}{136 - 64} \right) = \arctg 0,75 = \underline{+36,87^\circ}$$

a főnyomatékok értékei:

$$I_{1,2} = \frac{136 + 64}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{136 - 64}{2} \right)^2 + (-48)^2} = 100 \pm 60 \rightarrow I_1 = \underline{160 \text{ cm}^4}$$

$$I_2 = \underline{40 \text{ cm}^4}$$

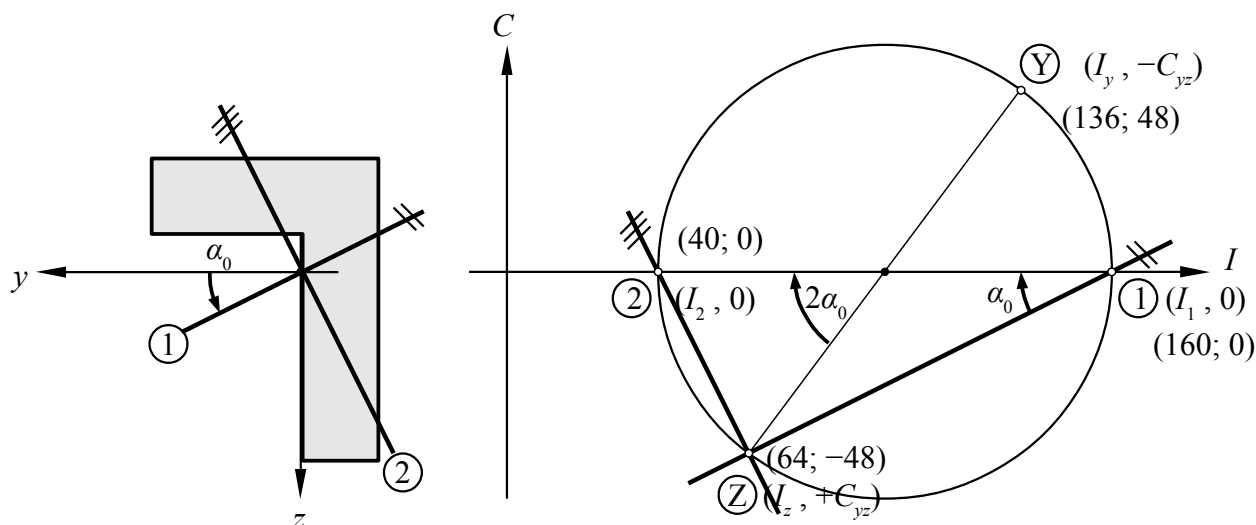
eredményvázlat:



$$I_1 = \underline{160 \text{ cm}^4}$$

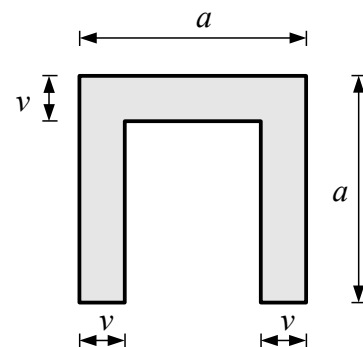
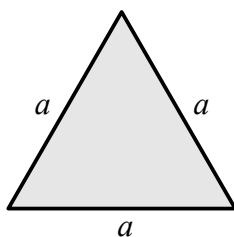
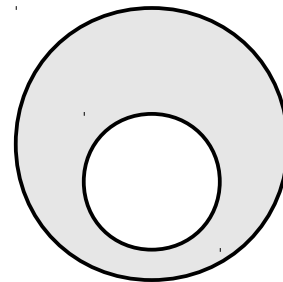
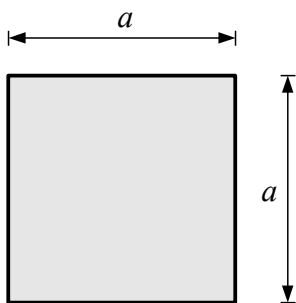
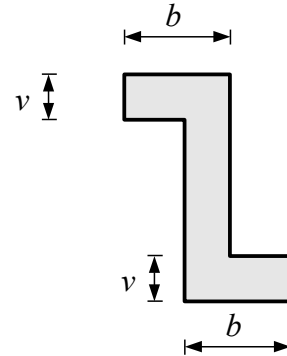
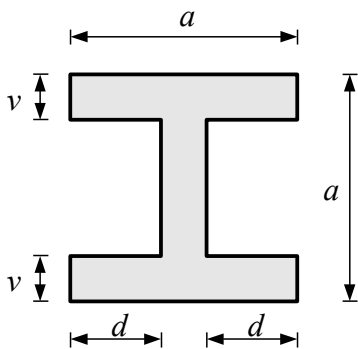
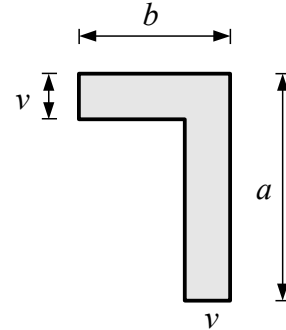
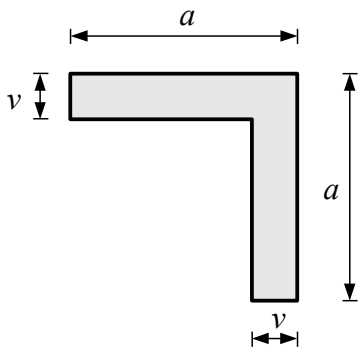
$$I_2 = \underline{40 \text{ cm}^4}$$

A feladathoz tartozó Mohr-kör:



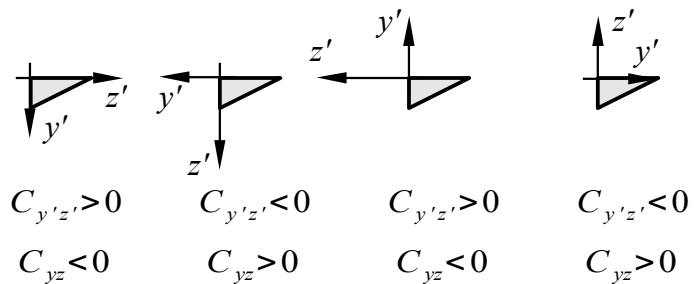
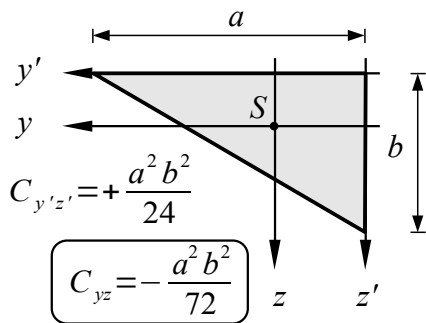
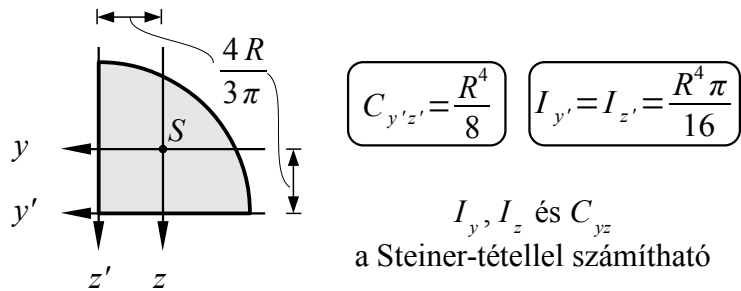
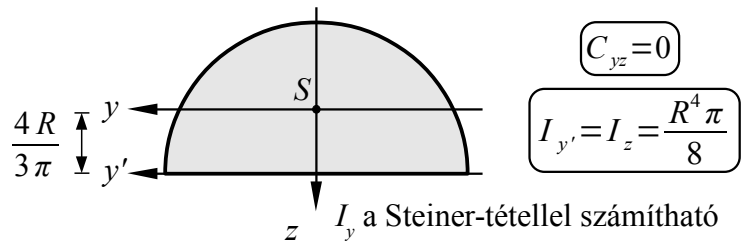
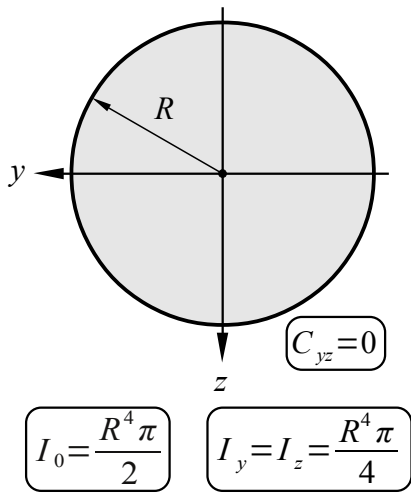
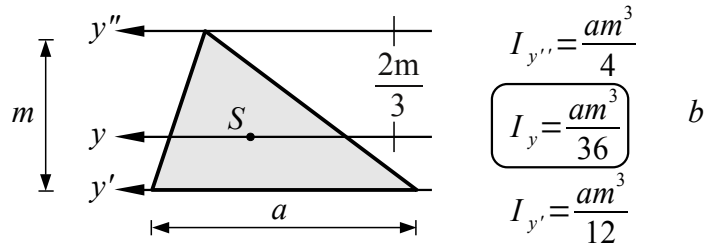
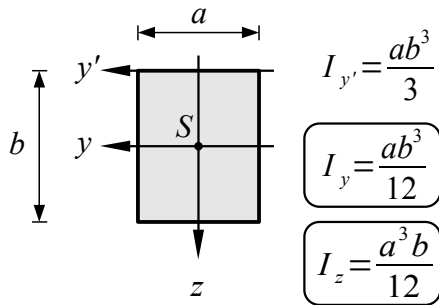
14. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI VII.

3. Határozzuk meg szemléletből (rajzoljuk meg hozzávetőlegesen) az alábbi síkidomok tehetetlenségi főirányait! Ahol lehet, különítsük el az 1. és 2. főirányt!

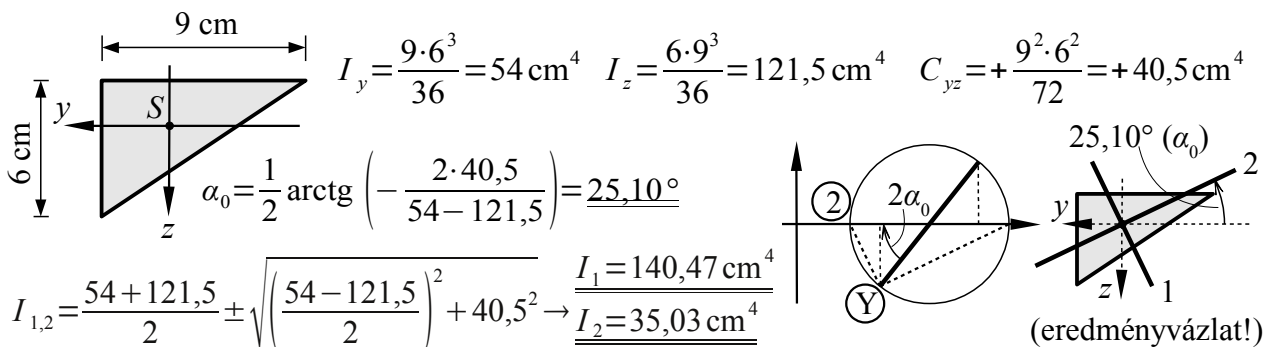


14. AZ INERCIA SZÁMÍTÁS ALAPJAI VIII.

3. Egyszerű síkidomok másodrendű nyomatékai



4. Határozzuk meg az alábbi egyszerű síkidom tehetetlenségi főirányait és főnyomatékait!

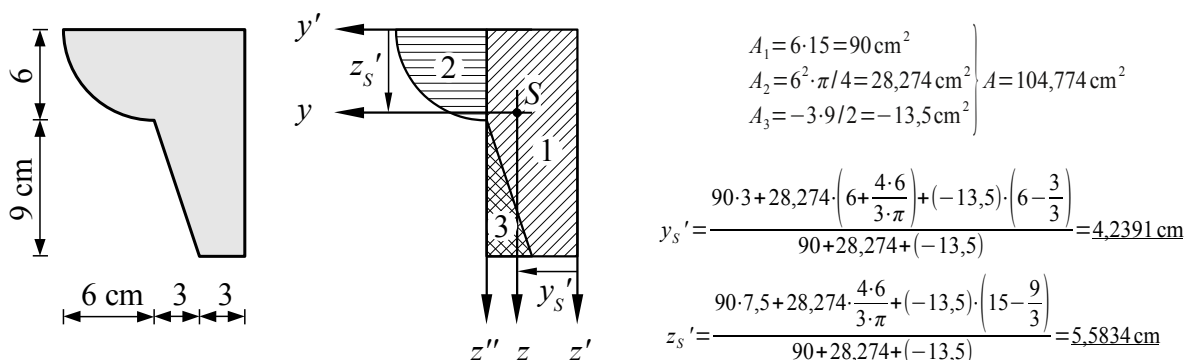


15. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI IX.

4. Összetett síkidomok másodrendű nyomatékai

Egyszerű idomokra bontás után a Steiner-tétel globális vagy lokális alkalmazásával számíthatók.

5. Határozzuk meg az alábbi összetett síkidom tehetetlenségi főirányait és főnyomatékait!



A Steiner-tétel lokális alkalmazásával:

$$I_y = \left[\frac{6 \cdot 15^3}{12} + 90 \cdot (5,5834 - 7,5)^2 \right] + \left[\frac{6^4 \cdot \pi}{16} - 28,274 \cdot \left(\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot \pi} \right)^2 \right] + 28,274 \cdot \left(5,5834 - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot \pi} \right)^2 - \left[\frac{3 \cdot 9^3}{36} + 13,5 \cdot (5,5834 - 12)^2 \right] = 1733,4 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \left[\frac{15 \cdot 6^3}{12} + 90 \cdot (4,2391 - 3)^2 \right] + \left[\frac{6^4 \cdot \pi}{16} - 28,274 \cdot \left(\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot \pi} \right)^2 \right] + 28,274 \cdot \left(4,2391 - \left(6 + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot \pi} \right) \right)^2 - \left[\frac{9 \cdot 3^3}{36} + 13,5 \cdot (4,2391 - 5)^2 \right] = 989,3 \text{ cm}^4$$

$$C_{yz} = \left[0 + 90 \cdot (5,5834 - 7,5) \cdot (4,2391 - 3) \right] + \left[\frac{6^4}{8} - 28,274 \cdot \left(\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot \pi} \right)^2 \right] + 28,274 \cdot \left(5,5834 - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot \pi} \right) \cdot \left(4,2391 - \left(6 + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot \pi} \right) \right) - \left[-\frac{9^2 \cdot 3^2}{72} + 13,5 \cdot (5,5834 - 12) \cdot (4,2391 - 5) \right] = -660,7 \text{ cm}^4$$

Példa a Steiner-tétel globális alkalmazására:

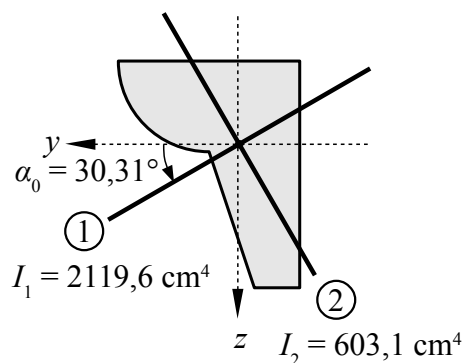
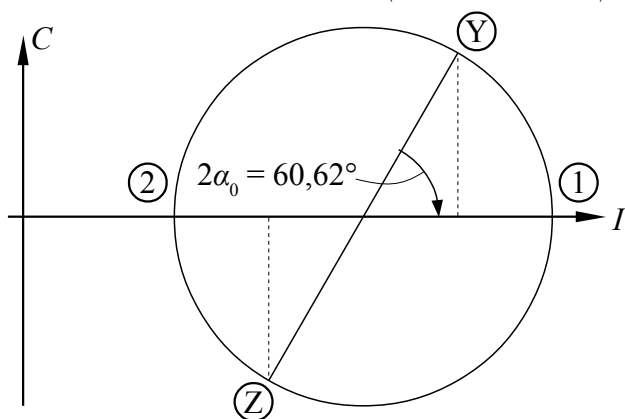
$$I_z = I_{z'} - A(y_s' - 6)^2 = \left(\frac{15 \cdot 6^3}{3} + \frac{6^4 \cdot \pi}{16} - \frac{9 \cdot 3^3}{12} \right) - 104,774 \cdot (4,2391 - 6)^2 = 989,3 \text{ cm}^4$$

Nem mindig van ilyen helyzetű z'' tengely, sőt a C_{yz} így rendszerint egyáltalán nem számítható!

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \cdot (-660,7)}{1733,4 - 989,3} \right) = \underline{\underline{30,31^\circ}}$$

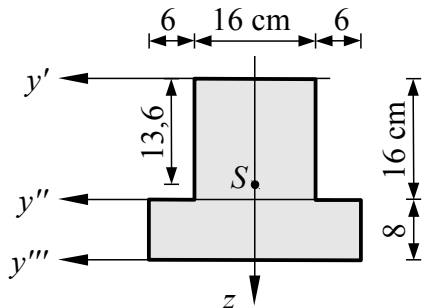
$$I_{1,2} = \frac{1733,4 + 989,3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1733,4 - 989,3}{2} \right)^2 + (-660,7)^2} \rightarrow \underline{\underline{I_1 = 2119,6 \text{ cm}^4}}$$

$$\underline{\underline{I_2 = 603,1 \text{ cm}^4}}$$



15. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI X.

6. Határozzuk meg az alábbi keresztmetszetek tehetetlenségi főirányait és főnyomatékait! Végezzük el a számítást többféle segédtengely alkalmazásával, illetve a Steiner-tétel lokális alkalmazásával is! Melyik tűnik egyszerűbbnek?



$$A = \quad z'_S =$$

y', y'', y''' tengelyekre, majd onnan y -ra (globális):

$$I_{y'} =$$

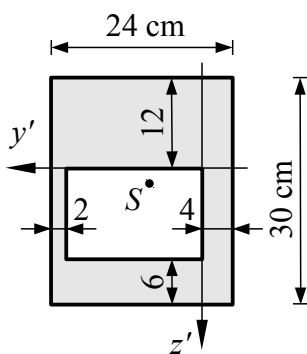
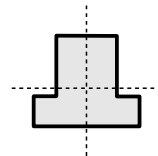
$$I_{y''} =$$

$$I_{y'''} =$$

lokális transzformációval: $I_y =$

$$I_z =$$

$$C_{yz} =$$



$$A = 504 \text{ cm}^2$$

$$y'_S = \frac{1}{2} \frac{30 \cdot (20^2 - 4^2) - 12 \cdot 18^2}{504} = 7,5714 \text{ cm}$$

$$z'_S = \frac{1}{2} \frac{24 \cdot (18^2 - 12^2) - 18 \cdot 12^2}{504} = 1,7143 \text{ cm}$$

$$I_{z'} =$$

$$\rightarrow I_z = \underline{28420 \text{ cm}^4}$$

$$I_{y'} =$$

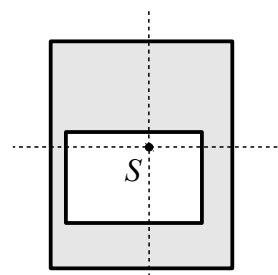
$$\rightarrow I_y = \underline{48630 \text{ cm}^4}$$

$$C_{y'z'} =$$

$$\rightarrow C_{yz} = \underline{-925,7 \text{ cm}^4}$$

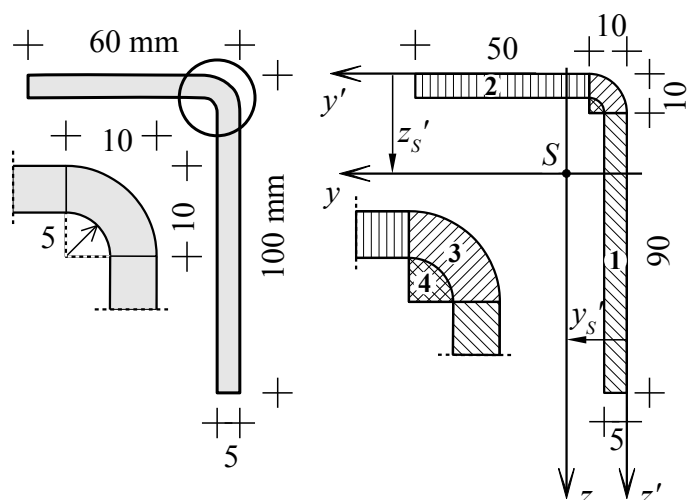
$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2C_{yz}}{I_y - I_z} \right) =$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + (-C_{yz})^2} \rightarrow I_1 =$$



15. AZ INERCIASZÁMÍTÁS ALAPJAI XI.

7. OTTHONI GYAKORLÓ FELADAT: Határozzuk meg az alábbi hidegen hajlított egyenlőtlen szárú L szelvényű idomacél keresztmetszetének tehetetlenségi főirányait és főnyomatékait!



$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 5 \cdot 90 = 450 \text{ mm}^2 \\ A_2 &= 5 \cdot 50 = 250 \text{ mm}^2 \\ A_3 &= 10^2 \cdot \pi / 4 = 78,540 \text{ mm}^2 \\ A_4 &= 5^2 \cdot \pi / 4 = 19,635 \text{ mm}^2 \end{aligned} \right\}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = 758,91 \text{ mm}^2$$

$$y_s' = \frac{450 \cdot 2,5 + 250 \cdot 35 + 78,540 \cdot \left(10 - \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right) + (-19,635) \cdot \left(10 - \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)}{758,91} = 13,404 \text{ mm}$$

$$z_s' = \frac{450 \cdot 55 + 250 \cdot 2,5 + 78,540 \cdot \left(10 - \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right) + (-19,635) \cdot \left(10 - \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)}{758,91} = 33,828 \text{ mm}$$

A Steiner-tétel lokális alkalmazásával:

$$I_y = \left[\frac{5 \cdot 90^3}{12} + 450 \cdot (33,828 - 55)^2 \right] + \left[\frac{50 \cdot 5^3}{12} + 250 \cdot (33,828 - 2,5)^2 \right] + \left[\frac{10^4 \cdot \pi}{16} - 78,540 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right)^2 + 78,540 \cdot \left(33,828 - \left(10 - \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right)\right)^2 \right] - \left[\frac{5^4 \cdot \pi}{16} - 19,635 \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)^2 + 19,635 \cdot \left(33,828 - \left(10 - \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)\right)^2 \right] = 800531 \text{ mm}^4$$

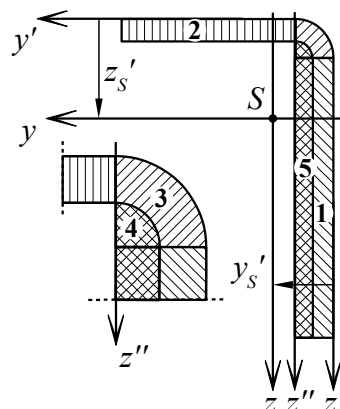
$$I_z = \left[\frac{90 \cdot 5^3}{12} + 450 \cdot (13,404 - 2,5)^2 \right] + \left[\frac{5 \cdot 50^3}{12} + 250 \cdot (13,404 - 35)^2 \right] + \left[\frac{10^4 \cdot \pi}{16} - 78,540 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right)^2 + 78,540 \cdot \left(13,404 - \left(10 - \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right)\right)^2 \right] - \left[\frac{5^4 \cdot \pi}{16} - 19,635 \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)^2 + 19,635 \cdot \left(13,404 - \left(10 - \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)\right)^2 \right] = 227630 \text{ mm}^4$$

$$C_{yz} = \left[0 + 450 \cdot (33,828 - 55)(13,404 - 2,5) \right] + \left[0 + 250 \cdot (33,828 - 2,5)(13,404 - 35) \right] + \left[\frac{10^4}{8} - 78,540 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right)^2 + 78,540 \cdot \left(33,828 - \left(10 - \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right)\right) \left(13,404 - \left(10 - \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot \pi}\right)\right) \right] - \left[\frac{5^4}{8} - 19,635 \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)^2 + 19,635 \cdot \left(33,828 - \left(10 - \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)\right) \left(13,404 - \left(10 - \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \pi}\right)\right) \right] = -259134 \text{ mm}^4$$

Példa a Steiner-tétel globális alkalmazására:

$$I_z = I_{z''} - A(y_s' - 10)^2 = \left(\frac{90 \cdot 10^3}{3} + \frac{5 \cdot 50^3}{3} + \frac{10^4 \cdot \pi}{16} - \frac{5^4 \cdot \pi}{16} - \frac{90 \cdot 5^3}{3} \right) - 758,91 \cdot (13,404 - 10)^2 = 227630 \text{ mm}^4$$

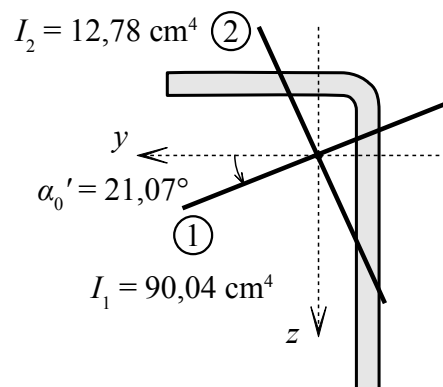
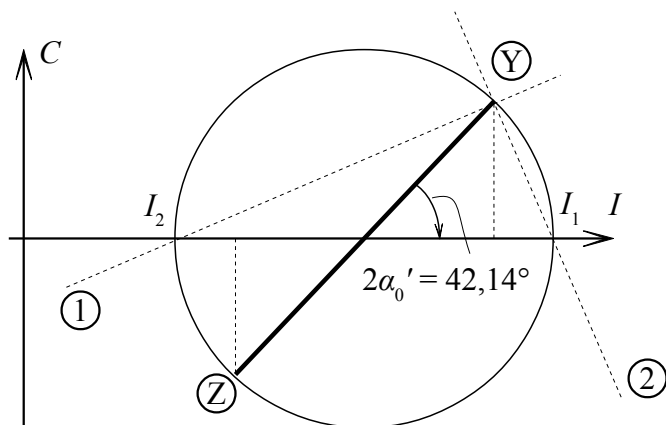
Nem mindig van ilyen helyzetű z'' tengely, sőt a C_{yz} így rendszerint egyáltalán nem számítható!



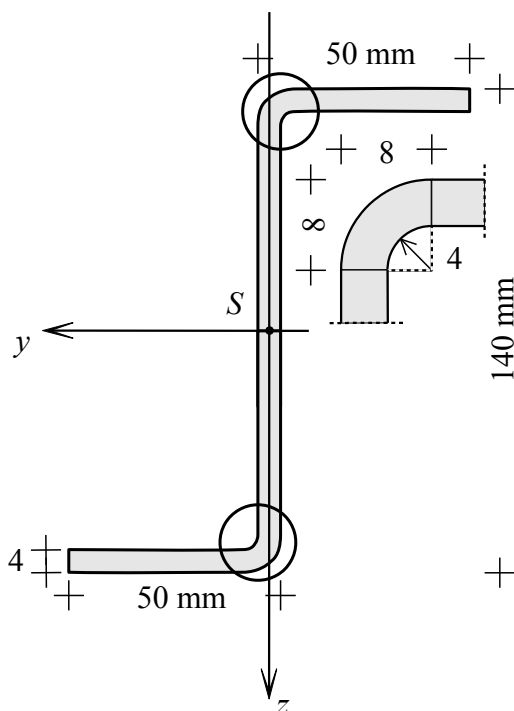
15. AZ INERCIA SZÁMÍTÁS ALAPJAI XII.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2 \cdot (-259134)}{800531 - 227630} \right) = \underline{21,07^\circ}$$

$$I_{1,2} = \frac{800531 + 227630}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{800531 - 227630}{2} \right)^2 + (-259134)^2} \rightarrow \begin{matrix} I_1 = 900350 \text{ mm}^4 \\ I_2 = 127811 \text{ mm}^4 \end{matrix}$$



8. OTTHONI GYAKORLÓ FELADAT: Határozzuk meg az alábbi hidegen hajlított Z szelvényű idomacél keresztmetszetének tehetetlenségi főirányait és főnyomatékait! Számítsuk ki az előbbieket a lekerekítések elhanyagolásával is! Mekkora hibát jelent ez?



$$\begin{aligned} A &= 9,074 \text{ cm}^2 \\ I_y &= 251,8 \text{ cm}^4 \\ I_z &= 29,56 \text{ cm}^4 \\ C_{yz} &= 62,72 \text{ cm}^4 \\ \alpha_0 &= -14,72^\circ \\ I_1 &= 268,3 \text{ cm}^4 \\ I_2 &= 13,08 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

16. EGYENES HAJLÍTÁS I.

Az egyenes hajlítás fogalma

Ha a **hajlítónyomaték vektora párhuzamos valamelyik tehetetlenségi főiránnyal**, akkor egyenes hajlításról beszélünk. Ilyenkor a semleges tengely egybeesik (ha nem tiszta hajlításról van szó, párhuzamos – később) a súlypontba képzelt nyomatékvektorral.

Emlékeztető 1: a szimmetriatengely és a rá merőleges irány mindig tehetetlenségi főirány, DE nem szimmetrikus keresztmetszet esetén is létezik legalább két főirány. Minden keresztmetszetet lehet egyenesen hajlítani.

Emlékeztető 2:

Egyenes hajlításra igénybevett rúdelem egyenletei

(Tegyük fel, hogy y tehetetlenségi főirány és egybeesik az M_y hajlítónyomaték vektorával!)

STATIKAI egyenlet

$$\sum F_{ix}: N = 0 = \int_{(A)} \sigma_x(x,z) dA$$

$$\sum M_{iy}: M_y = \int_{(A)} \sigma_x(x,z) z dA$$

ANYAGmodell

$$\sigma_x(x,z) = E \cdot \varepsilon_x(x,z)$$

GEOMETRIAI egyenlet

$$\varepsilon_x(x,z) = \frac{du(x,z)}{dx}$$

y tengely körüli fajlagos elfordulás:

$$\kappa_y(x) = \frac{d\varphi_y(x)}{dx}$$

$$\varepsilon_x(x,z) = \kappa_y(x)z$$

A nyomatéki egyensúlyból a geometriai és anyagegyenletek felhasználásával, átrendezés után:

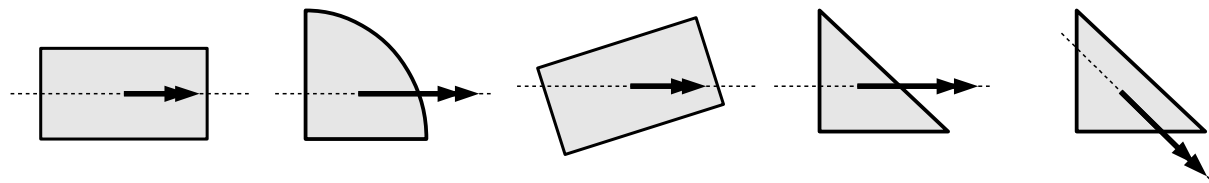
$$M_y = E\kappa_y I_y \quad , \quad \text{innen az alakváltozás} \quad \kappa_y = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$\text{és a feszültség} \quad \sigma_x(z) = E\varepsilon_x(z) = E\kappa_y z = \frac{M_y}{I_y} z \quad .$$

A geometriai egyenletből az y körüli elfordulás egy l hosszúságú BC szakaszon (C elfordulása B -hez képest):

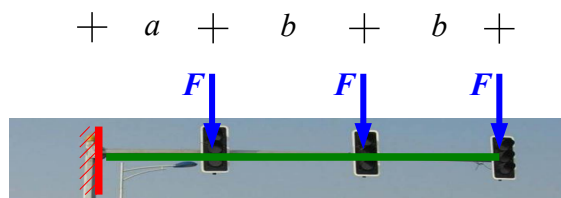
$$\kappa_y = \frac{d\varphi_y(x)}{dx} \quad \longrightarrow \quad \Delta\varphi_y^{CB} = \int_{x_B}^{x_C} \kappa_y dx = \int_{x_B}^{x_C} \frac{M_y(x)}{EI_y(x)} dx$$

- ① Válasszuk ki, hogy az alábbi keresztmetszetek közül melyik van *egyenes hajlításra* igénybe véve!

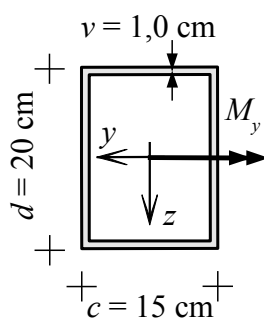
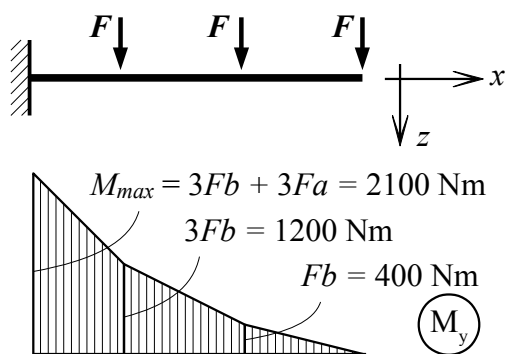


16. EGYENES HAJLÍTÁS II.

2. Számítsuk ki a közlekedési lámpát tartó konzol vízszintes gerendájában keletkező maximális húzó- és nyomófeszültséget! A konzolt csak a lámpák egyenként 200 N nagyságú önsúlya terheli (a gerenda önsúlyát elhanyagoljuk). A gerenda keresztmetszete a hossza mentén állandó, téglalap alakú zártszelvény.



$$\begin{aligned} a &= 1,5 \text{ m} \\ b &= 2 \text{ m} \\ F &= 200 \text{ N} \end{aligned}$$



Keresztmetszeti jellemzők:

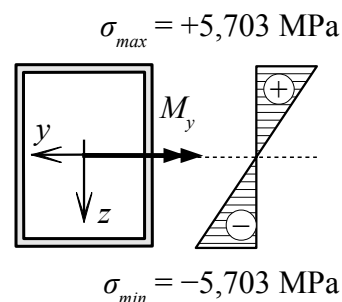
$$\begin{aligned} A &= 20 \cdot 15 - 18 \cdot 13 = 66 \text{ cm}^2 \\ I_y &= \frac{15 \cdot 20^3}{12} - \frac{13 \cdot 18^3}{12} = 3682 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Maximális húzófeszültség (fent):

$$\sigma_t^{max} = \frac{M_y}{I_y} z_{max, fent} = \frac{210}{3682} \cdot 10 = 0,5703 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = \underline{\underline{5,703 \text{ MPa (+)}}}$$

Maximális nyomófeszültség (lent):

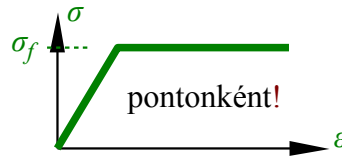
$$\sigma_t^{min} = \frac{M_y}{I_y} z_{max, lent} = \frac{210}{3682} \cdot 10 = 0,5703 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = \underline{\underline{5,703 \text{ MPa (-)}}}$$



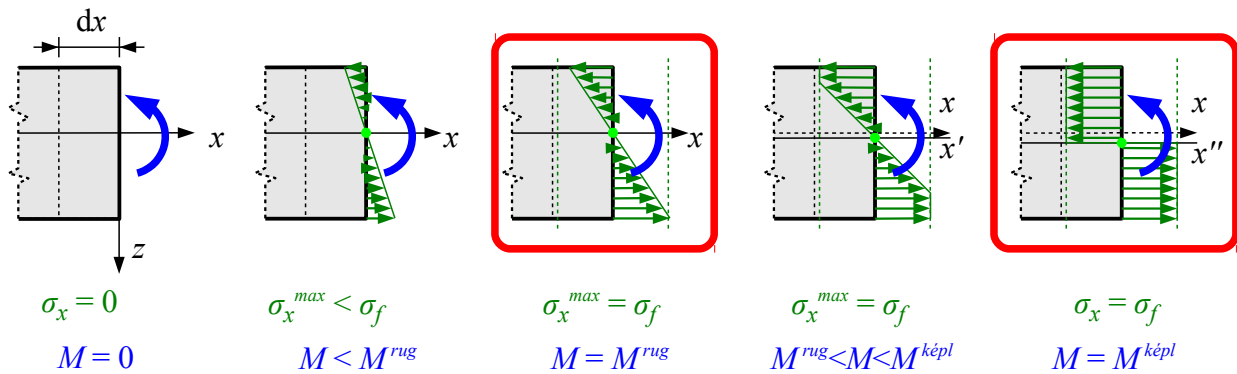
16. EGYENES HAJLÍTÁS III.

A rugalmas és képlékeny teherbírás

A terhelési folyamat során $M = M_y$ növekszik. Minden egyes anyagi pontra továbbra is érvényes a lineárisan rugalmas – tökéletesen képlékeny anyagmodell:



Az egyes elemi részek állapotát leíró pontok az origótól indulva mozognak a görbén jobbra, de a rugalmas-képlékeny átmenet nem mindenütt ugyanahhoz az igénybevételhez tartozik!



A semleges tengely kimozdul S-ből

RUGALMAS teherbírás: az a LEGKISEBB igénybevétel, amely mellett a keresztmetszet VALAMELY pontjára $\sigma_x = \sigma_{xf}$.

$$\sigma_f = \frac{M^{rug}}{I_y} z^{max} \rightarrow \boxed{M^{rug} = \frac{\sigma_f I_y}{z^{max}}}$$

KÉPLÉKENY teherbírás: az az igénybevétel, amely mellett a keresztmetszet BÁRMELY pontjára $\sigma_x = \sigma_{xf}$.

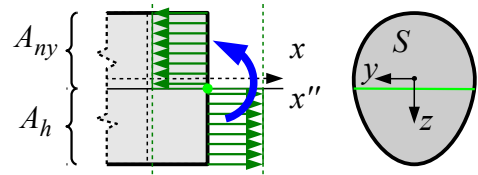
$M^{kepl} = ?$

16. EGYENES HAJLÍTÁS IV.

Minden anyagi pont képlékeny állapotban:

$$\sigma_x = \sigma_f$$

$$M = M^{képl}$$



A vetületi egyensúlyból:

STAT

$$\sum F_{ix}: 0 = \int_{(A)} \sigma_x(z) dA = \int_{(A_h)} \sigma_{xf} dA + \int_{(A_{ny})} -\sigma_{xf} dA = A_h \sigma_{xf} - A_{ny} \sigma_{xf} \rightarrow A_h = A_{ny}$$

ANYAG

$$\sigma_x(z) = \pm \sigma_{xf}$$

a semleges tengely a területfelezőben

A nyomatéki egyensúlyból:

STAT

$$\sum M_{iy}: M^{képl} = \int_{(A)} \sigma_x(z) z dA = \int_{(A_h)} \sigma_{xf} z dA + \int_{(A_{ny})} -\sigma_{xf} z dA = \sigma_{xf} (S_{y,h} - S_{y,ny})$$

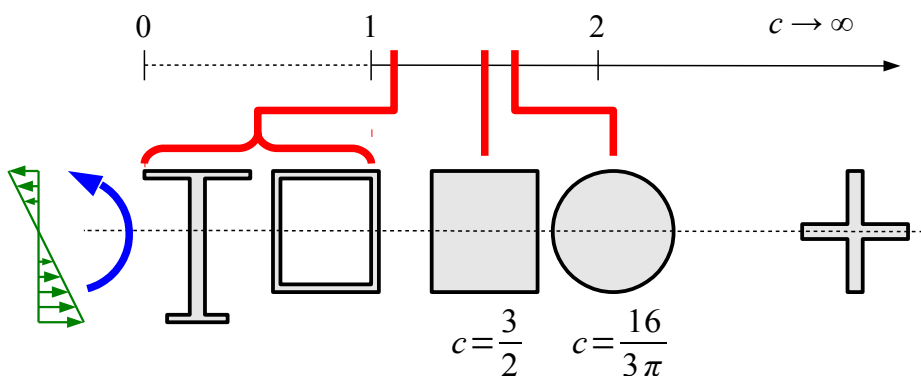
ANYAG

$$\sigma_x(z) = \pm \sigma_{xf}$$

Mivel y súlyponti tengely: $S_{y,h} = -S_{y,ny} = S_{y,0}$
($S_{y,0}$ az alsó vagy felső fél terület statikai nyomatéka a súlyponti tengelyre)

tehát $M^{képl} = 2 \sigma_{xf} S_{y,0}$

A képlékeny többletterbírési tényező: $c = \frac{M^{képl}}{M^{rug}} > 1$

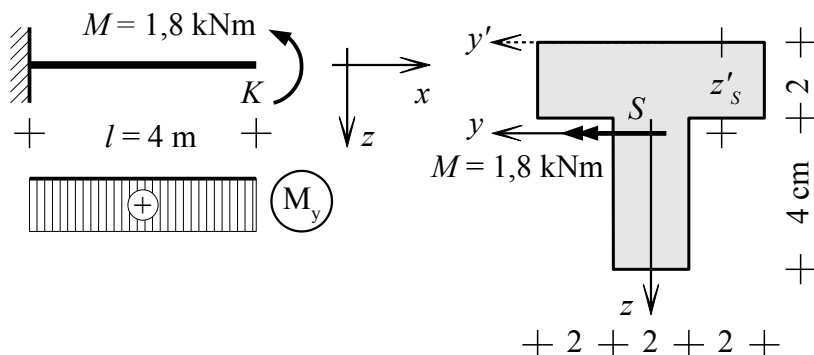


Gerendák esetében praktikus a kis képlékeny többletterbírési tényező.

Központos húzás-nyomás, illetve tiszta nyírás esetén c mindig 1 ($N^{rug} = N^{képl}$, $V^{rug} = V^{képl}$), hiszen a képlékeny viselkedés minden pontban egyszerre jelentkezik.

16. EGYENES HAJLÍTÁS V.

3. Számítsuk ki a tartó mértékadó keresztmetszetében keletkező normálfeszültségeket! Határozzuk meg a rugalmas és képlékeny teherbírás, illetve a képlékeny többletteherbírás értékét! Mekkora a K keresztmetszet elfordulása és a rúd görbületi sugara?



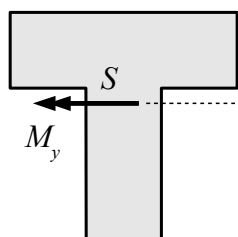
Adott:

$$\sigma_e = \pm 195 \text{ MPa}$$

$$\sigma_f = \pm 240 \text{ MPa}$$

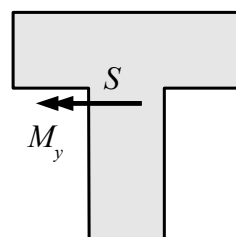
$$E = 65 \text{ GPa}$$

Rugalmas eset:



σ_{rug}

Képlékeny állapot:



$\sigma_{képl}$

4. OTTHONI GYAKORLÓ FELADAT

Határozzuk meg M^r , M^k és c értékét kör- és téglalapszelvény esetén!

$$M^r = \frac{I_y}{z_{max}} \sigma_f = \frac{ab^2}{6} \sigma_f$$

$$M^k = 2 S_0 \sigma_f = \frac{ab^2}{4} \sigma_f$$

$$c = \frac{6}{4} = 1,5$$

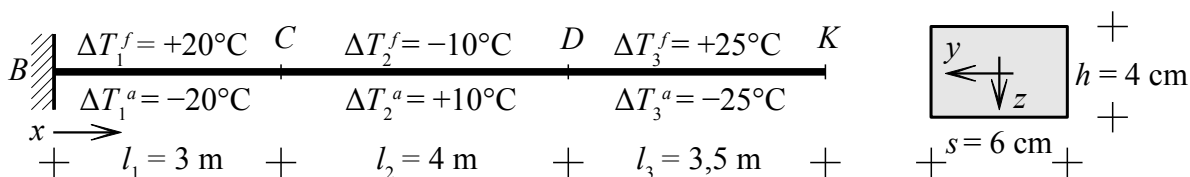
$$M^r = \frac{I_y}{z_{max}} \sigma_f = \frac{R^3 \pi}{4} \sigma_f$$

$$M^k = 2 S_0 \sigma_f = 2 \frac{R^2 \pi}{2} \frac{4R}{3\pi} \sigma_f =$$

$$= \frac{4 R^3}{3} \sigma_f \rightarrow c = \frac{16}{3\pi} = 1,698$$

16. EGYENES HAJLÍTÁS VI.

5. Határozzuk meg a szakaszonként különböző egyenlőtlen hőváltozásnak kitett konzol jelölt pontjainak elfordulását! Rajzoljunk fajlagos és tényleges elfordulási ábrát!

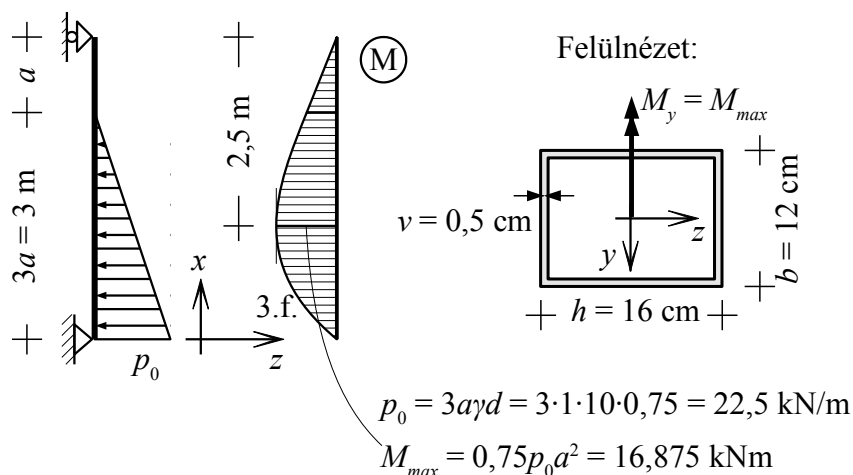


κ_y^T _____
 φ_y^T _____

6. OTTHONI GYAKORLÓ FELADAT

A $4a = 4$ m magas, 3 m-ig vízzel töltött medence falát $d = 0,75$ m-enként zárt, $v = 0,5$ cm falvastagságú súlytalan oszlopok támasztják meg. Ellenőrizzük a mértékadó keresztmetszetben keletkező normál feszültségeket, majd határozzuk meg a szelvény rugalmas és képlékeny nyomatóki teherbírását, valamint képlékeny többletteherbírását! A víz fajsúlya $\gamma = 10$ kN/m³-nek vehető.

Adott:
 $\sigma_e = \pm 140$ MPa
 $\sigma_f = \pm 230$ MPa



Ellenőrzés: $I_y = 1002,25$ cm⁴, innen $\sigma_t^{max} = \frac{1687,5}{1002,25} \cdot 8 = 13,47 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < \sigma_e \rightarrow$ megfelel.

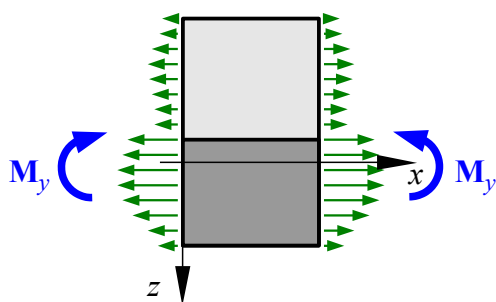
$M^r = \frac{1002,25}{8} \cdot 23 = 2881$ kNcm; $M^k = 2 \cdot (12 \cdot 8^2 / 2 - 11 \cdot 7,5^2 / 2) \cdot 23 = 3433$ kNcm; $c = 1,191$

Megjegyzés: vékonyfalú zárt szelvények esetén c általában közel van 1-hez.

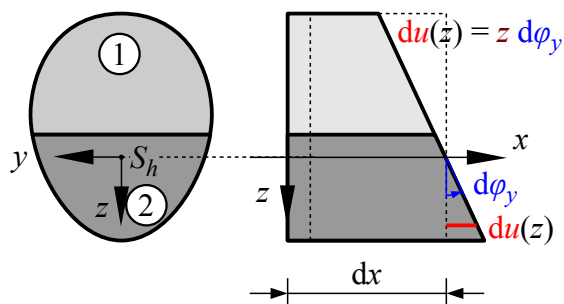
Inhomogén anyagú rúd egyenes hajlítása

A legelső tisztázandó kérdés: hol van a semleges tengely? A súlypontban nyilván nem, hiszen így épp az anyagi inhomogenitás hatásától ($E_1 \neq E_2$) tekintenénk el.

Tegyük föl, hogy egy – egyelőre függőleges értelemben ismeretlen helyzetű – S_h pontra illeszkedik; ennek meghatározása az első feladat.



STATIKAI egyenlet



GEOMETRIAI egyenlet

$$\sum F_{ix}: N = 0 = \int_{(A_1)} \sigma_{x1}(x,z) dA + \int_{(A_2)} \sigma_{x2}(x,z) dA$$

$$\sum M_{iy}: M_y = \int_{(A_1)} \sigma_{x1}(x,z) z dA + \int_{(A_2)} \sigma_{x2}(x,z) z dA$$

“együtt dolgozó keresztmetszet”

$$\kappa_y(x) = \frac{d\phi_y(x)}{dx}$$

$$(\varepsilon_{x1}(x,z) = \varepsilon_{x2}(x,z)) = \varepsilon_x(x,z) = \kappa_y(x)z$$

ANYAGmodell

$$\sigma_{x1}(x,z) = E_1 \cdot \varepsilon_x(x,z) \quad \text{és} \quad \sigma_{x2}(x,z) = E_2 \cdot \varepsilon_x(x,z)$$

A vetületi egyensúlyból:

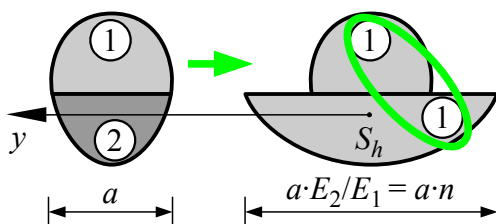
$$\sum F_{ix}: 0 = \int_{(A_1)} \sigma_{x1}(z) dA + \int_{(A_2)} \sigma_{x2}(z) dA = \int_{(A_1)} E_1 \varepsilon_x(z) dA + \int_{(A_2)} E_2 \varepsilon_x(z) dA =$$

$$= E_1 \kappa_y \int_{(A_1)} z dA + E_2 \kappa_y \int_{(A_2)} z dA = \kappa_y (E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}), \text{ tehát } E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2} = 0$$

E_1 -gyel osztva:

$$S_{y1} + \frac{E_2}{E_1} S_{y2} = 0$$

$$S_{y1} + n S_{y2} = 0$$



A semleges tengely az ún. **homogén helyettesítő keresztmetszet** súlypontján (S_h) megy keresztül.

Az egyes keresztmetszeti részek csak a hajlítás tengelyével párhuzamosan nyújthatók/zsugoríthatók.

17. EGYENES HAJLÍTÁS VIII.

Ezután a nyomatéki egyensúlyból:

STAT

$$\sum M_{iy}: M_y = \int_{(A)} \sigma_x(z) z \, dA = E_1 \kappa_y \int_{(A_1)} z^2 \, dA + E_2 \kappa_y \int_{(A_2)} z^2 \, dA = \kappa_y (E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2})$$

Ebből az alakváltozás $\kappa_y = \frac{M_y}{E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2}}$, majd

$$\sigma_{x1}(z) = \frac{M_y E_1}{E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2}} z,$$

$$\sigma_{x2}(z) = \frac{M_y E_2}{E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2}} z.$$

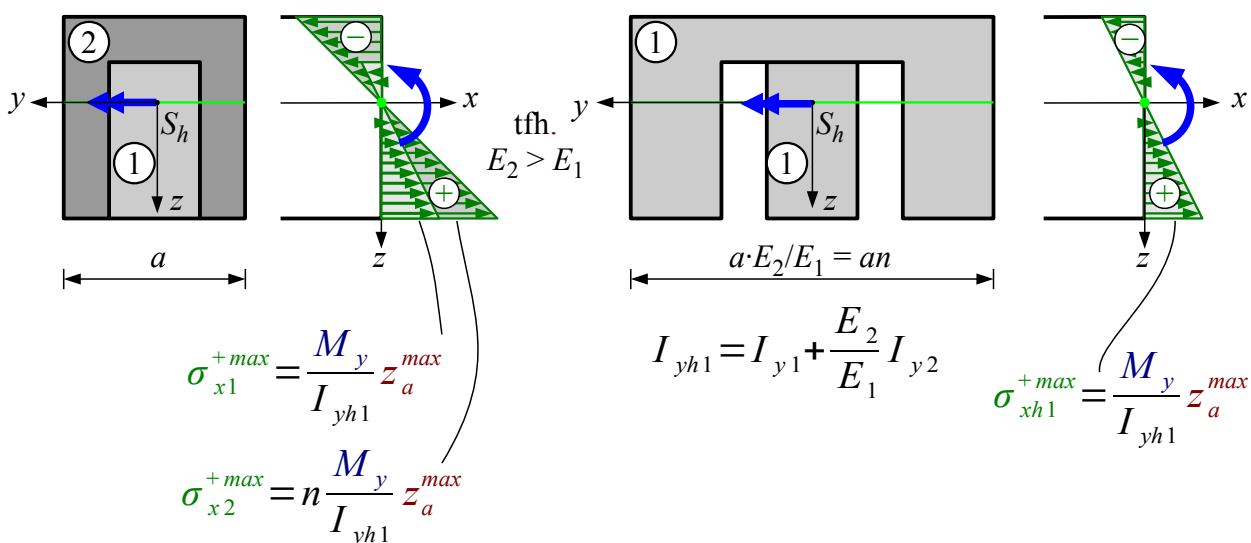
Megjegyzés: a helyettesítő keresztmetszet elve itt is használható, ha még az integrálás elvégzése előtt bevezetjük $n_1 = E_2/E_1$ -et:

$$M_y = E_1 \kappa_y \left(\int_{(A_1)} z^2 \, dA + n_1 \int_{(A_2)} z^2 \, dA \right) = \kappa_y E_1 (I_{y1} + n_1 I_{y2}) = \kappa_y E_1 I_{yh1}$$

$$\rightarrow \kappa_y = \frac{M_y}{E_1 I_{yh1}}, \text{ illetve}$$

$$\sigma_{x1}(z) = \frac{M_y}{I_{yh1}} z,$$

$$\sigma_{x2}(z) = n_1 \frac{M_y}{I_{yh1}} z.$$

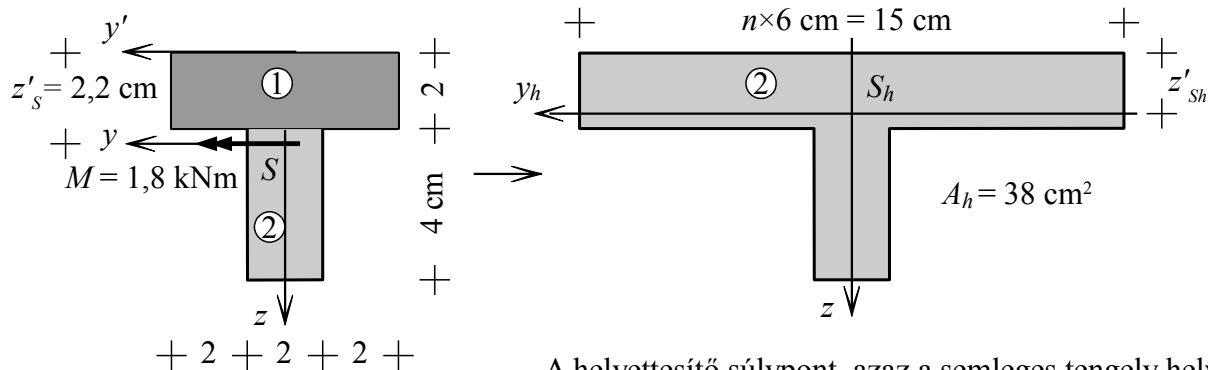


17. EGYENES HAJLÍTÁS IX.

1. Számítsuk ki a múlt órán vizsgált tartó befogási keresztmetszetében keletkező normálfeszültségeket, ha az öv és a gerinc anyaga különböző! $E_1 = 200 \text{ GPa}$, $E_2 = 80 \text{ GPa}$

$$n = \frac{E_1}{E_2} = 2,5$$

Helyettesítő keresztmetszet, helyettesítés a 2. anyaggal:



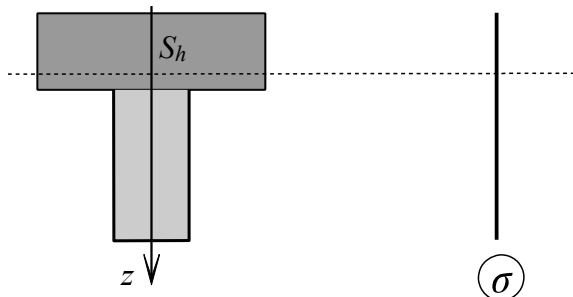
A helyettesítő súlypont, azaz a semleges tengely helye:

$$z'_{Sh} =$$

A helyettesítő inercia:

$$I_{yh2} =$$

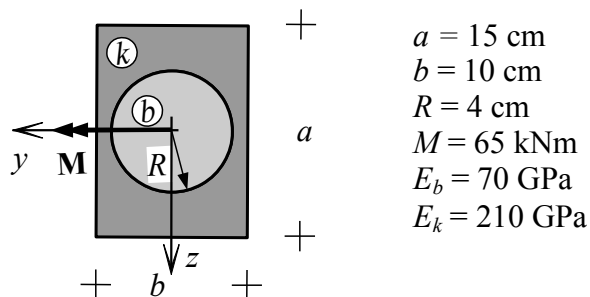
Feszültségek a jellegzetes pontokban:



17. EGYENES HAJLÍTÁS X.

2. Határozzuk meg az inhomogén keresztmetszetű, $l = 2$ m hosszúságú konzol kétféle anyagában keletkező normálfeszültségek szélsőértékeit, valamint a konzolvég elfordulását és a rúd görbületesi sugarát! Rajzoljunk feszültségdiagramot!

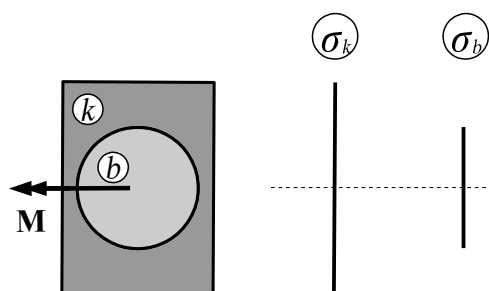
a) kihasználva a kétszeres szimmetriát (azaz hogy a semleges tengely szimmetria-tengely):



$$\begin{aligned} a &= 15 \text{ cm} \\ b &= 10 \text{ cm} \\ R &= 4 \text{ cm} \\ M &= 65 \text{ kNm} \\ E_b &= 70 \text{ GPa} \\ E_k &= 210 \text{ GPa} \end{aligned}$$

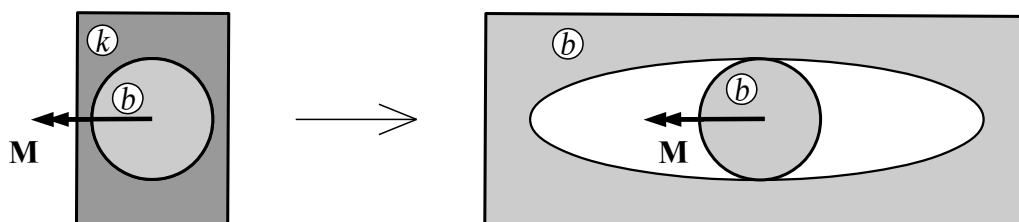
Egyensúlyi feltétel: $M_{y,b} + M_{y,k} = M_y$

Geometriai feltétel: $\kappa_{y,b} = \kappa_{y,k} = \kappa_y$ innen $\kappa_y = \frac{M_y}{\sum E_i I_{y,i}}$ és $\sigma_{xj} = E_j \varepsilon_y = E_j \frac{M_y}{\sum E_i I_{y,i}} z$



b) helyettesítő keresztmetszettel:

Helyettesítés a belső anyaggal: $n = \frac{E_k}{E_b} = \frac{210}{70} = 3$

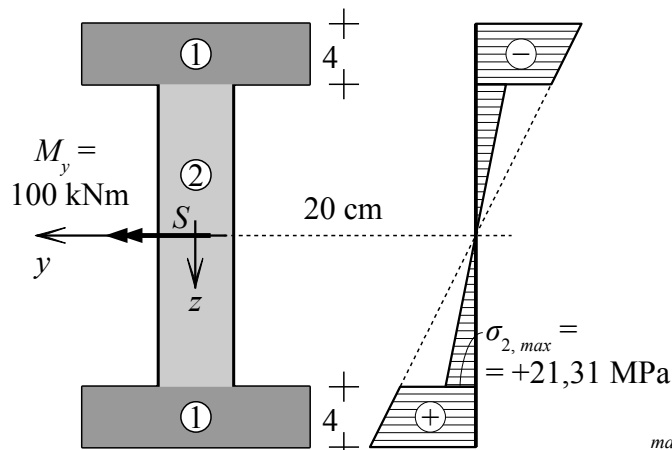


17. EGYENES HAJLÍTÁS XI.

3. OTTHONI GYAKORLÓ FELADAT

Határozzuk meg az inhomogén keresztmetszetű, $l = 3$ m hosszúságú rúd vas ($E_1 = 200$ GPa) és alumínium ($E_2 = 80$ GPa) alkotórészeiben keletkező feszültségek szélsőértékeit, valamint a K konzolvég elfordulását és a rúd görbületi sugarát! Rajzoljunk feszültségdiagramot!

a) kihasználva a kétszeres szimmetriát (azaz hogy a semleges tengely szimmetria-tengely):



$$I_{y,1} = \frac{15 \cdot 28^3}{12} - \frac{15 \cdot 20^3}{12} = 17440 \text{ cm}^4$$

$$I_{y,2} = \frac{5 \cdot 20^3}{12} = 3333,3 \text{ cm}^4$$

Egyensúlyi feltétel: $M_{y,1} + M_{y,2} = M_y$,

Geometriai feltétel: $\kappa_{y,1} = \kappa_{y,2} = \kappa_y$,

$$\kappa_y = \frac{M_y}{\sum E_i I_{yi}} \rightarrow \sigma_{xi} = \frac{M_y E_i}{\sum E_i I_{yi}} z_i$$

$$\sigma_{x,1}^{max} = \frac{10000 \cdot 200}{200 \cdot 17440 + 80 \cdot 3333,3} \cdot 14 = 7,457 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{x,2}^{max} = \frac{10000 \cdot 80}{200 \cdot 17440 + 80 \cdot 3333,3} \cdot 10 = 2,131 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\rho_y = \frac{20000 \cdot 17440 + 8000 \cdot 3333,3}{10000} = 37547 \text{ cm}$$

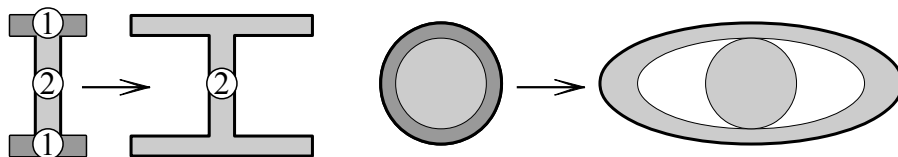
$$\varphi_{y,K} = \kappa_y l = \frac{10000 \cdot 300}{20000 \cdot 17440 + 8000 \cdot 3333,3} = 0,007990 \text{ rad}$$

b) helyettesítő keresztmetszettel (egyszeres szimmetria esetén is működik):

helyettesítés alumíniummal: $n = \frac{E_1}{E_2} = 2,5 \rightarrow I_{yh2} = n I_{y,1} + I_{y,2} = 46933 \text{ cm}^4$ (helyettesítő inercia)

$$\sigma_{x,2}^{max} = \frac{M_y}{I_{yh2}} z_{2,max}$$

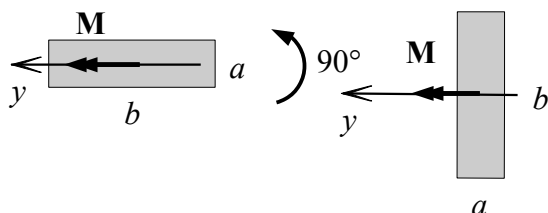
$$\sigma_{x,1}^{max} = n \frac{M_y}{I_{yh2}} z_{1,max}$$



a helyettesített (1-es) anyag tkp. n -szeresére nyújtandó – kizárólag a hajlítás tengelye mentén! (aszimmetrikus esetben illetve körszelvénynél is használható, de a kör ellipszissé torzul!)

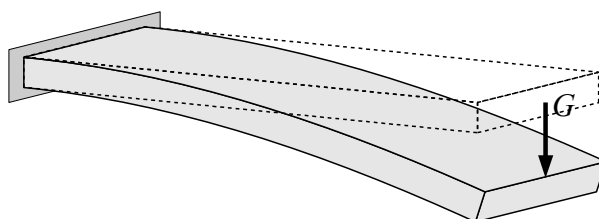
4. ÖNÁLLÓ ÓRAI GYAKORLÁS

Számítsuk ki, hogy hányszorosára nő az $a \times b$ ($a < b$) keresztmetszeti méretű palló rugalmas nyomatéki teherbírása, ha 90° -kal elforgatva építjük be?



A hajlított gerenda elmozdulásai

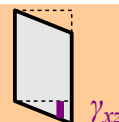
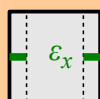
Tapasztalat:



Mi a deformáció oka általában?

- az igénybevételnek kitett rúdelemek véges merevsége
- kinematikai teher

Emlékeztető:



igénybevételből:

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA}$$

$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$\kappa_x = \frac{T}{GI_0}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{V_z}{GA}$$

hőteherből:

$$\varepsilon_x = \alpha \Delta T \quad \kappa_y = \alpha \frac{\Delta T_a - \Delta T_f}{h}$$

--- ---

Az állandó merevségű rúd adott AB szakaszán a relatív elmozdulás a fenti alakváltozások diagramja alatti területet jelenti.

Alapfeltevések vízszintes gerenda lehajlásainak számításához:

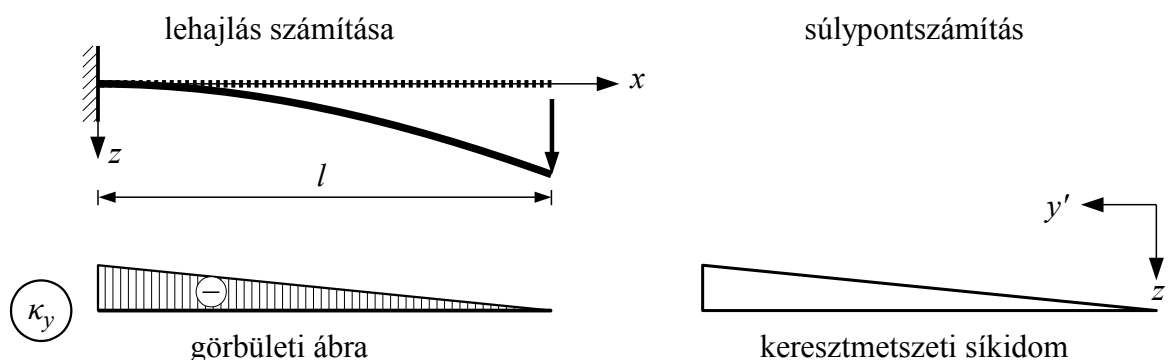
- ha az alakváltozások között κ_y görbület szerepel, mellette minden egyéb elhanyagolható,
- a kis elmozdulások elve érvényes.

A hajlításból vagy egyenlőtlen hőmérséklet-változásból származó elfordulás adott rúdszakaszon a görbületi (κ_y) ábra területével – tehát a nyomatéki (M_y) ábra területével és a hajlítómerevség (EI_y) reciprokával – arányos. Az elfordulás viszont függőleges eltolódást is okoz!

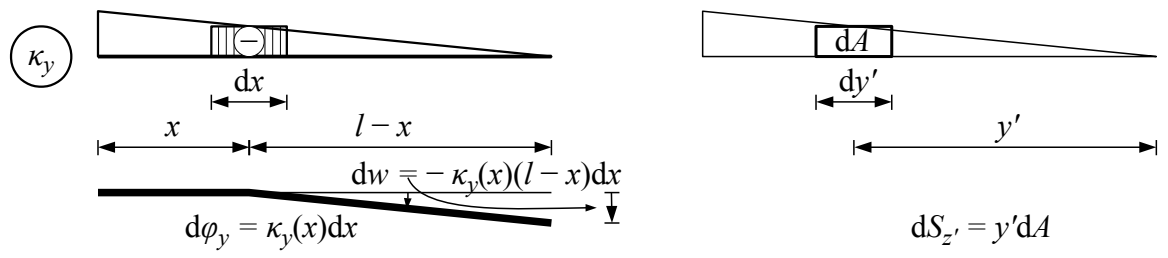
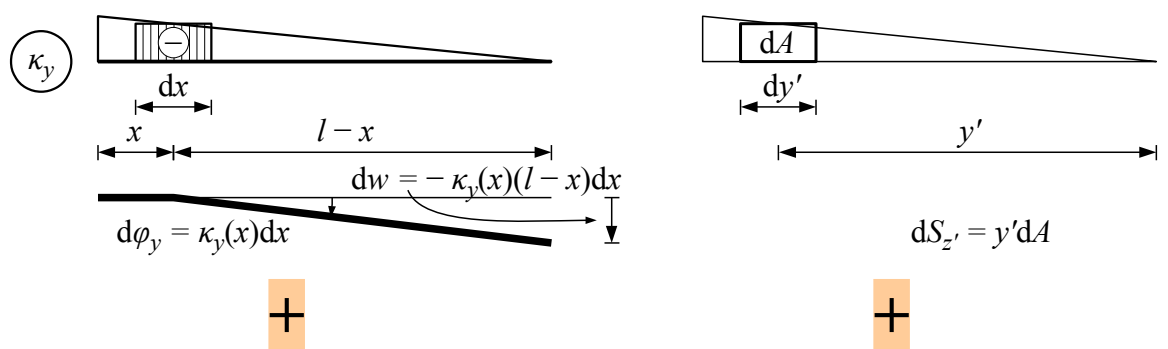
Hogyan alakul a trambulín lehajlása a műugró alatt?

Ha a görbületet nyomaték okozza, akkor a HÚZOTT oldal, ha egyenlőtlen hőmérséklet-változás, akkor a MELEGÍTETT oldal DOMBORÚ

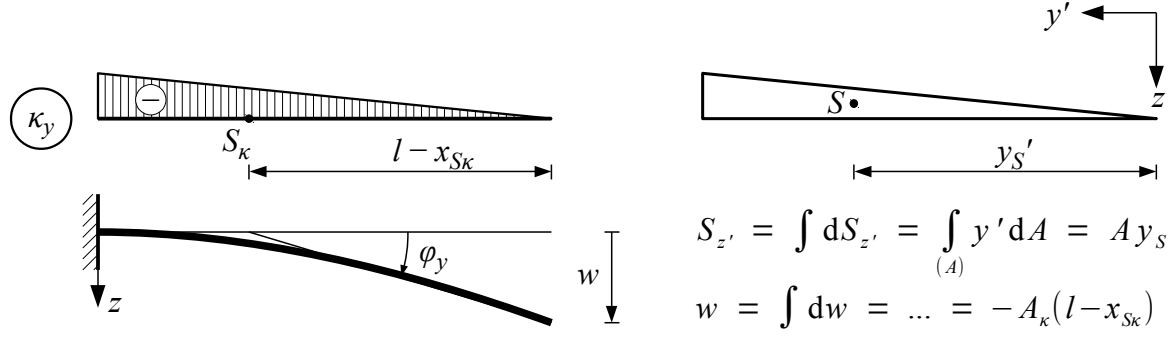
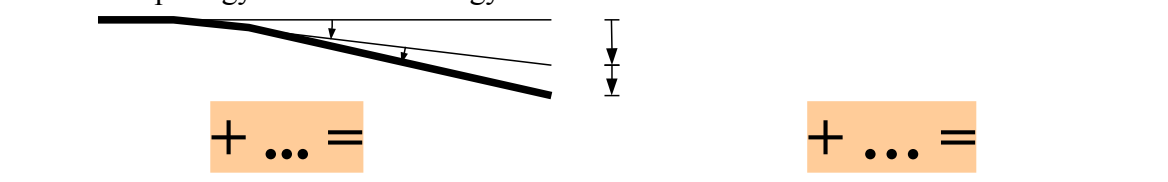
18. ELMOZDULÁSOK SZÁMÍTÁSA II.



számítás egymásra halmozással:



A két lépés ugyanazon a tartón együtt:



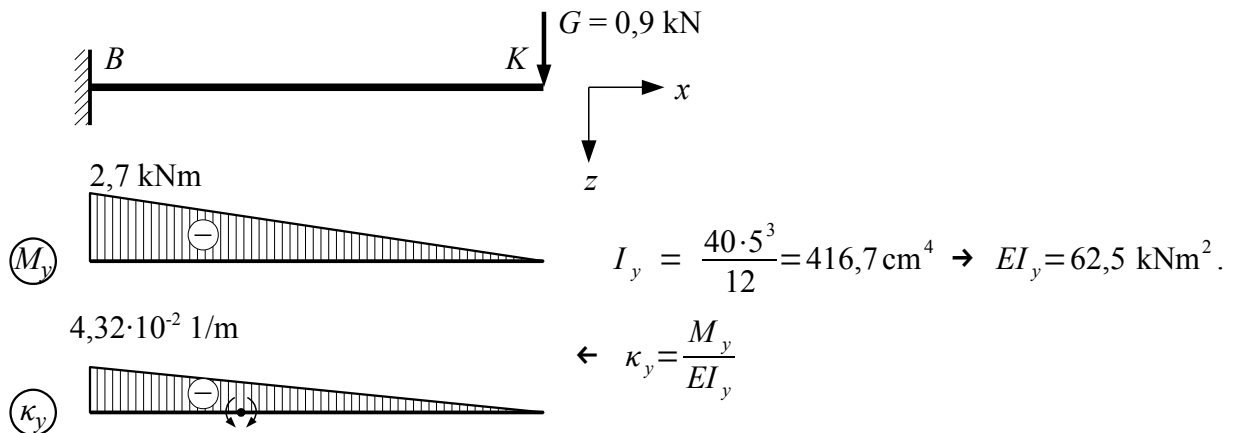
A görbületi ábra által képviselt $\Delta\varphi_y^{BA}$ megoszló elfordulás helyettesíthető az AB szakaszra eső A_{BA} ábraterület nagyságával azonos mértékű, A_{BA} súlypontjába képzelt koncentrált elfordulással. Az eltolódás tehát A_{BA} -nak az eltolt pont függőlegesére vett statikai nyomatékával egyenlő.

18. ELMOZDULÁSOK SZÁMÍTÁSA III.

mintafeladat

1. A korábban már tárgyalt műugrós feladat néhány adata ismétlésképpen:
 $l = 3 \text{ m}$ (hossz), $a = 40 \text{ cm}$ (szélesség), $b = 5 \text{ cm}$ (vastagság)
 $E = 15 \text{ GPa}$ (rugalmassági modulus), illetve adott nyomatéki ábra.

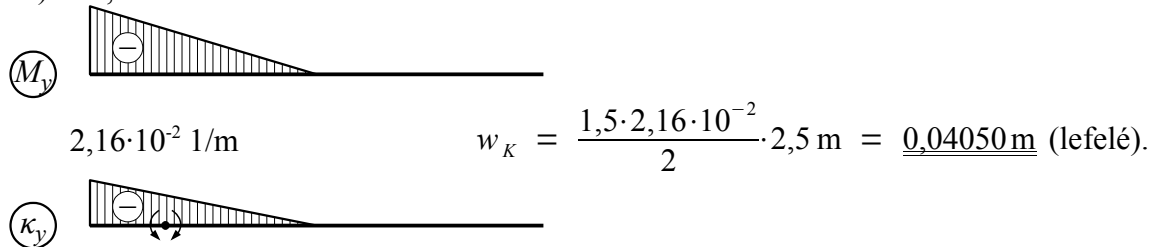
- a) Határozzuk meg a K konzolvég lehajlását!
 b) Hányadrésze a lehajlás az a) esethez képest, ha a műugró a deszka közepén áll?



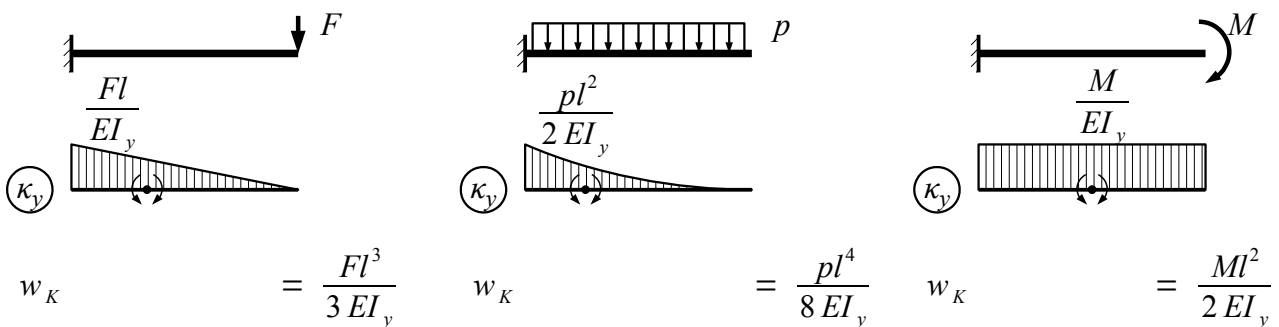
Kiindulás: a konzol bal vége befogott, tehát abszolút elfordulása és eltolódása egyaránt zérus; a K konzolvég lehajlása csak a $\kappa_y (M_y)$ ábrától függ, melyek súlypontja a faltól $x_S = 1 \text{ m}$ -re van:

a) $w_K = -\Delta \varphi_y^{KB} (l - x_S) = \frac{3 \cdot 4,32 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot 2 \text{ m} = \underline{0,1296 \text{ m}}$ (lefelé).

b) $1,35 \text{ kNm}$

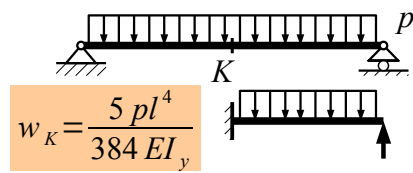
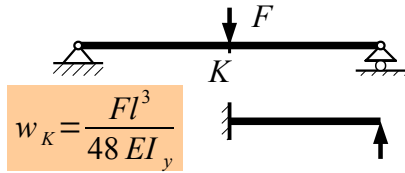


2. Fejezzük ki az l hosszúságú, EI_y hajlítómerevségű konzol végpontjának lehajlását az alább vázolt esetekben!

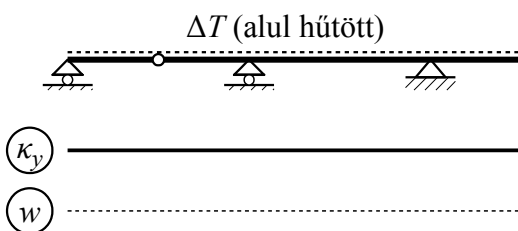
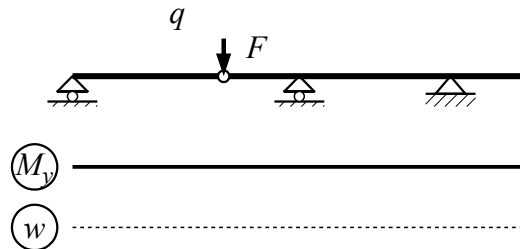
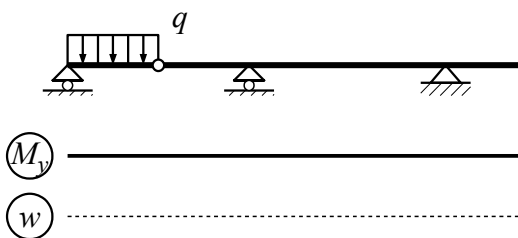
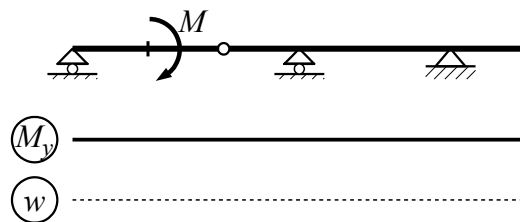
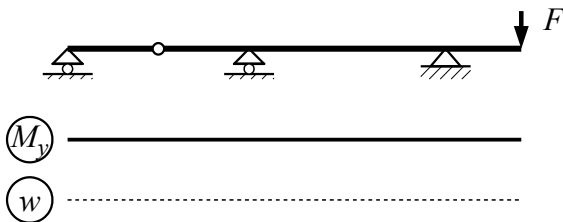


18. ELMOZDULÁSOK SZÁMÍTÁSA IV.

3. A szimmetria felhasználásával igazoljuk az l támaszközű, EI_y hajlítómerevségű kéttaszú tartók középkeresztmetszetére vonatkozó alábbi lehajlási képleteket!

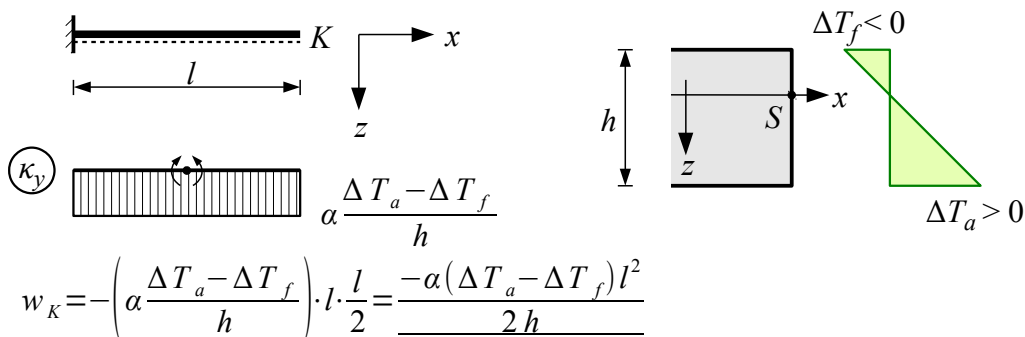


4. Rajzoljuk meg a tartók alakhelyes nyomatéki, illetve deformációs ábráját!

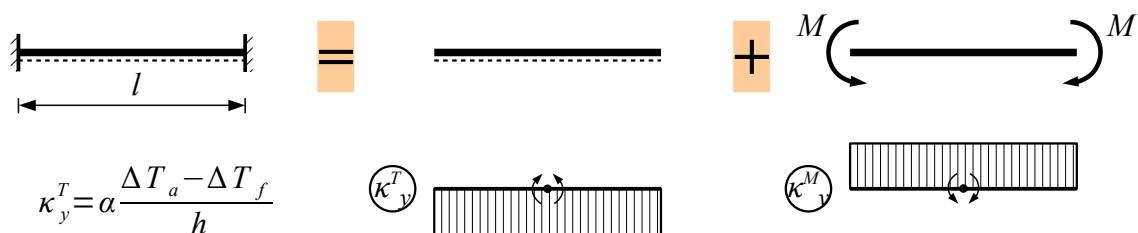


18. ELMOZDULÁSOK SZÁMÍTÁSA V.

5. Határozzuk meg az egyenlőtlen hőmérséklet-változás okozta lehajlást a konzolvégen!
A geometriai és hőmérsékleti adatok az ábra szerintiek, a lineáris hőtágulási együttható α .

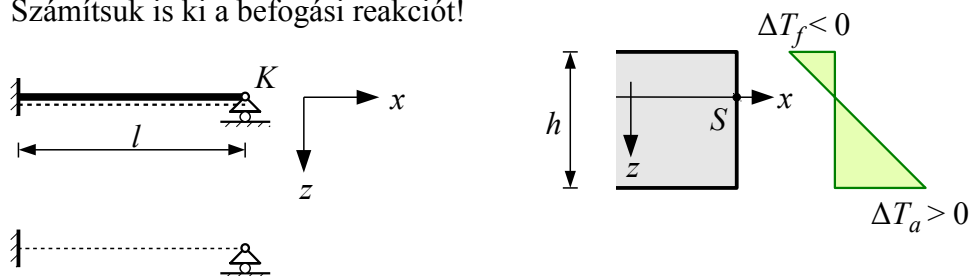


Következmény: befogott-befogott (tehát statikailag határozatlan) gerenda reakciói:



A κ_y^T kinematikai teherrel terhelt, mindkét végén befogott rúd nyomatéki reakciója: $M_y = \kappa_y^T EI_y$

6. TARTALÉK: Rajzoljuk meg az egyik végén befogott, másikon görgős támaszú tartó egyenlőtlen hőmérséklet-változás hatására létrejövő alakhelyes deformációs ábráját! Számítsuk is ki a befogási reakciót!



$$\underline{\underline{M = \frac{3}{2} \kappa_y^T EI_y}}$$

19. FERDE HAJLÍTÁS I.

A feszültségek meghatározása két egyenes hajlítás egymásra halmozásával.

A feszültségi ábrákat az egyenes hajlításokhoz *külön-külön* is felrajzolhatjuk.

$$\kappa_y = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\kappa_z = \frac{M_z}{EI_z}$$

A semleges tengely (u) irányszöge (β) σ_x fenti képletéből:

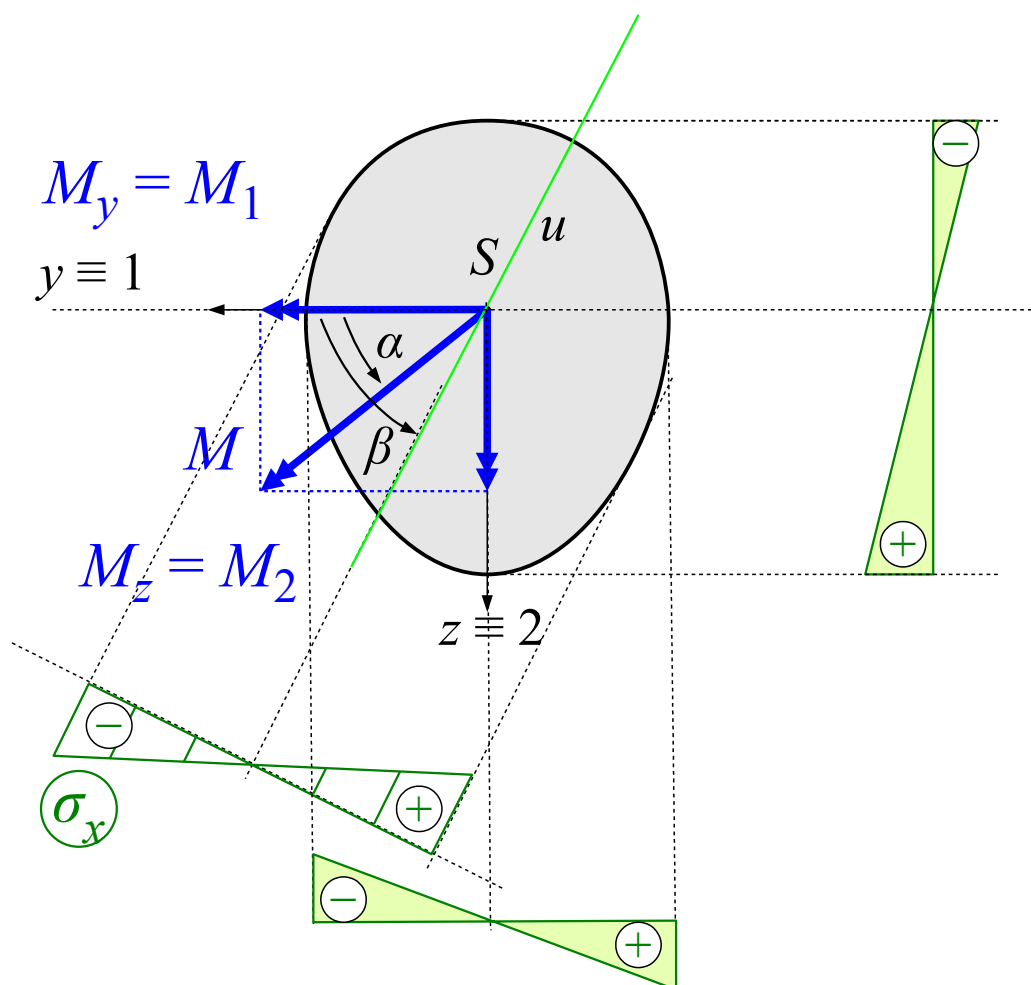
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{y} = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} > \frac{M_z}{M_y} = \operatorname{tg} \alpha$$

$\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \beta > \alpha$, azaz
a semleges tengely M és a 2. főirány között!

$$I_y > I_z$$

előjelek
inkább szemléletből:

$$\sigma_x = \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$



19. FERDE HAJLÍTÁS II.

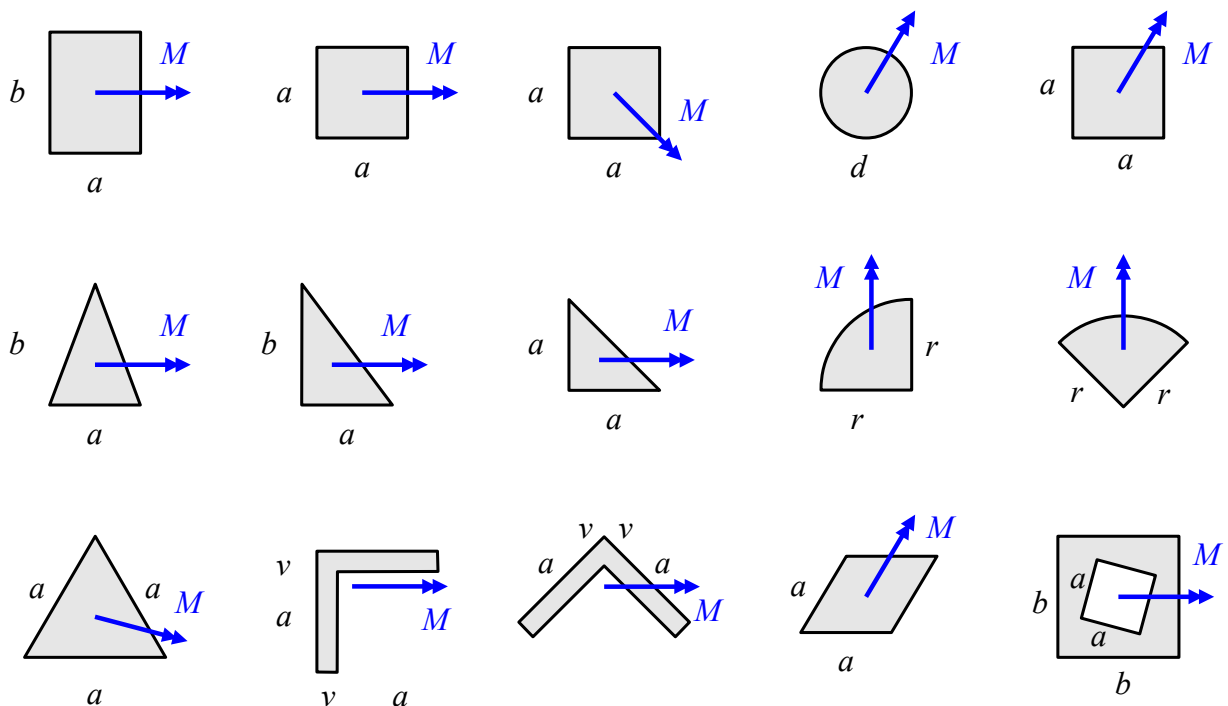
Ismétlés:

Megoldás: egymásra halmozás (szuperpozíció) alapján. (Lásd a 13. óra végét!)

- A keresztmetszet síkjában elhelyezkedő általános irányú nyomatékvektort a keresztmetszeti főirányoknak megfelelően felbontjuk.
- A felbontott nyomatékvektor alapján a feladatot két egyenes hajlítás esetére vezetjük vissza.
- A keresztmetszeten belül egy tetszőleges pont normálfeszültsége a két egyenes hajlításból származó feszültségértékek összegeként határozható meg.
- A feszültségek előjeleit a nyomatékvektor irányja alapján szemléletből határozzuk meg.

$$\sigma_x = \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

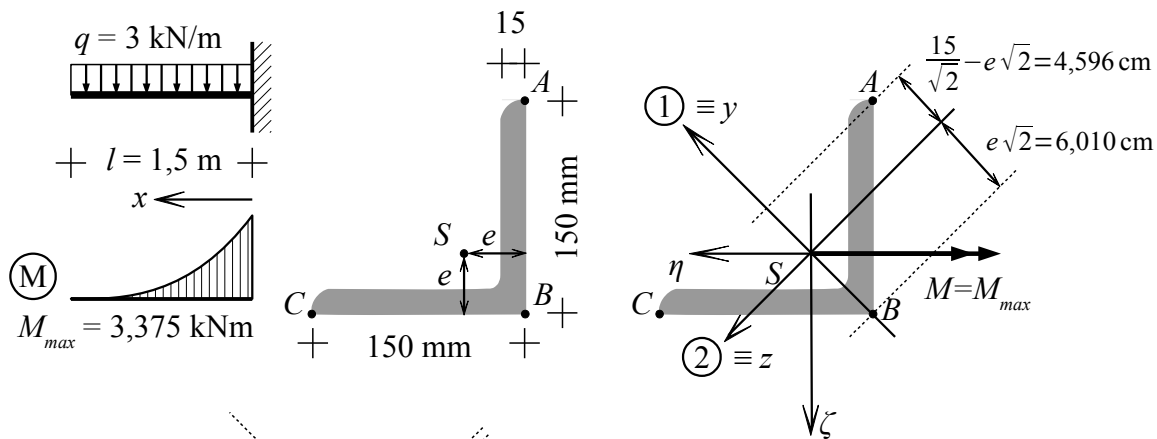
Egyenes vagy ferde hajlítás?



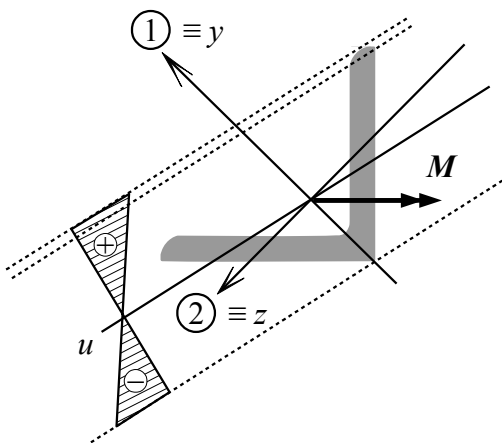
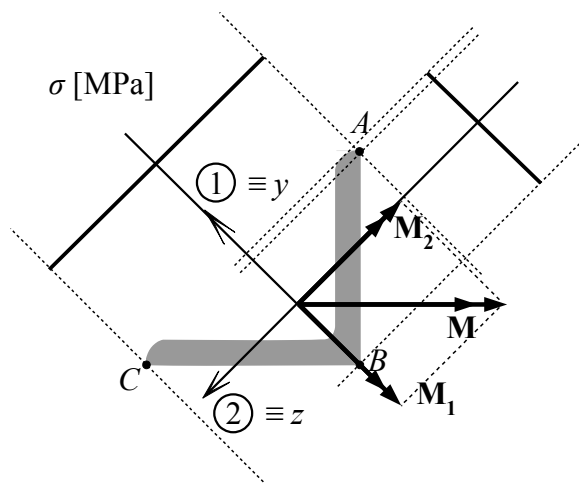
19. FERDE HAJLÍTÁS III.

1. Számítsuk ki a feszültségeket a szimmetrikus „L” szelvény jelölt csúcspontjaiban, ha adott a súlypont helyzete, valamint a keresztmetszet tehetetlenségi főnyomatékai!

$$e = 4,25 \text{ cm}; I_1 = 1430 \text{ cm}^4; I_2 = 370 \text{ cm}^4$$



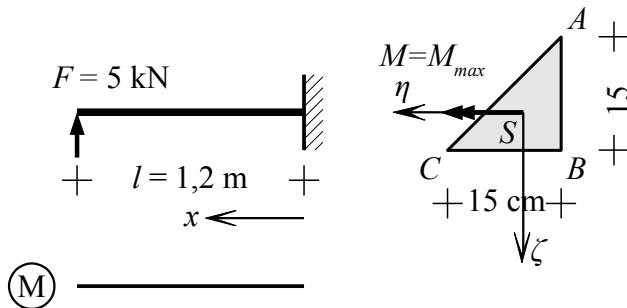
Meghatározandó:
 σ_A , σ_B és σ_C .



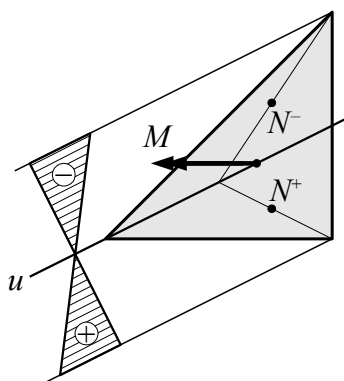
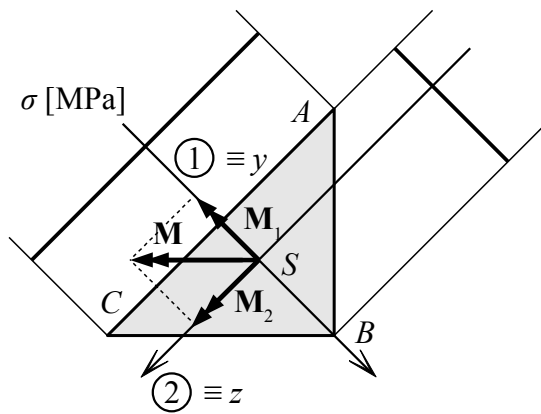
Megjegyzés: Az eredő semleges tengely mindig a 2-es főirány és a nyomatékvektor iránya közötti hegyesszögű tartományba esik!

19. FERDE HAJLÍTÁS IV.

2. Számítsuk ki a feszültségeket a háromszögherezetsmet szűcsűpontjaiban! Határozzuk meg a feszűltség maximális és minimális őrűtűkét!



Meghatározandó:
 $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$, illetve σ_{max} és σ_{min} .

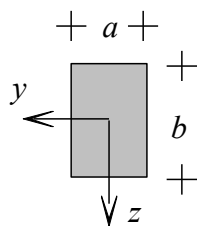
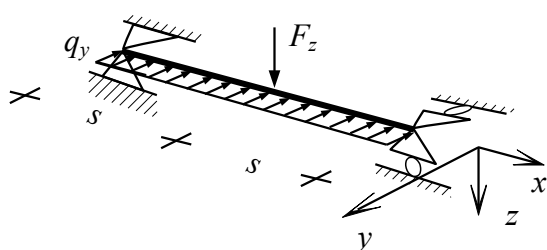


Általában: ha M merőleges egy tetszőleges háromszűg AB oldalára, a semleges tengely mindig a C csűcsűn megy át, mivel az ilyen u -bűl származó feszűltségeloszlás húzó- és nyomófeszűltsűgi eredűje (N^+ és N^-) AB -tűl egyenlű távolságra van, azaz nyomatűkvi eredűjűk arra merűleges.

Megjegyzés: ferde hajlításnál a feszűltsűgi ábrát cűlszerű mindig két ábrára bontani az egyenes hajlításű komponenseknek megfelelűen. Az eredű semleges tengely mindig a 2-es fűirány és a nyomatűkvektor iránya kűzűti hegyesszűgű tartományba esik!

19. FERDE HAJLÍTÁS V.

3. Ellenőrizzük a tartót hajlításra!
Javaslat: Először gondoljuk végig, melyik keresztmetszetben, és azon belül hol keletkeznek a mértékadó normálfeszültségek!



$$q_y = 3 \text{ kN/m}$$

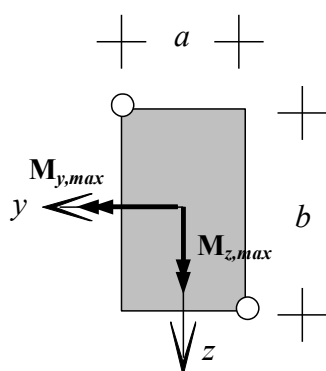
$$s = 3 \text{ m}$$

$$F_z = 10 \text{ kN}$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

$$\sigma_e = \pm 140 \text{ MPa}$$

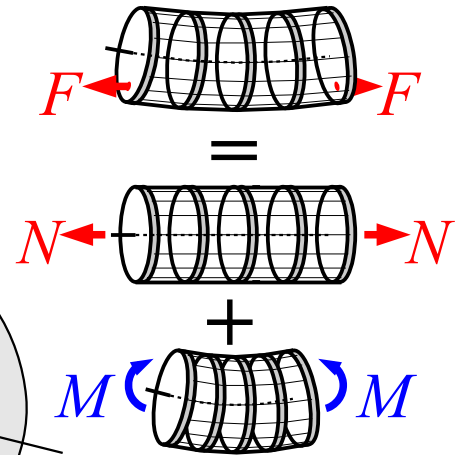
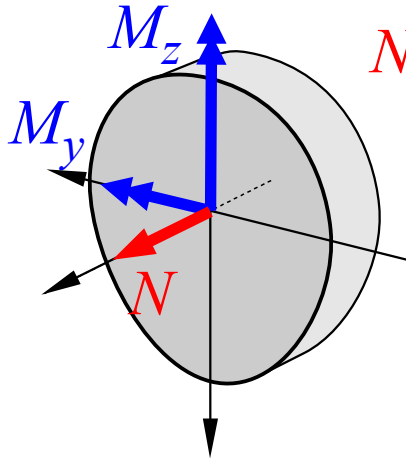
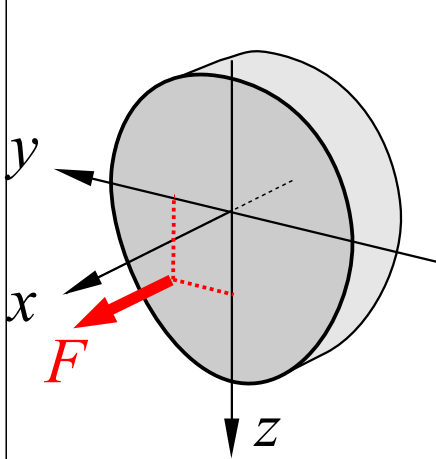
$$b = 15 \text{ cm}$$



20. KÜLPONTOS HÚZÁS-NYOMÁS I.

A külpontos húzás-nyomás fogalma:

a rúdelem határoló keresztmetszeteire azok síkjára merőleges, de a súlyponton át nem menő hatásvonalú erő hat

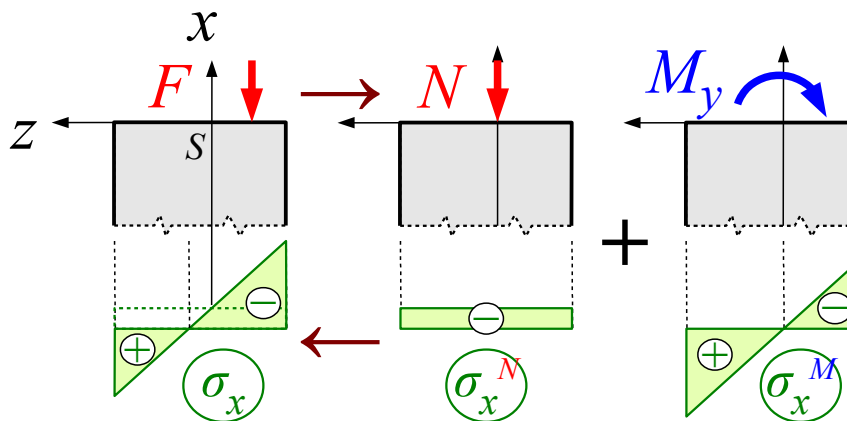


**külpontos húzás / nyomás \Leftrightarrow
hajlítás + központos húzás / nyomás**

$$F \doteq (N, M_y, M_z)$$

\Rightarrow a rúdelem deformációja: minden pont eltolódása tengelyirányú, lásd egyenletes nyúlás (központos húzás-nyomás), ill. Bernoulli – Navier-hipotézis (hajlítás, klasszikus elmélet)

Feszültségeloszlások egymásra halmozása az eddig tanultak alapján (tfh. a hajlítás *y* körül *egyenes*)
ha az anyag **húzásnak és nyomásnak is ellenáll**:



(hasonlóan ferde hajlításra is)

Feszültségek számítása: N/A és a hajlításnál tárgyalt egymásra halmozás segítségével.

20. KÜLPONTOS HÚZÁS-NYOMÁS II.

Vegyük szemügyre a képen látható jobb oldali alul befogott vasbeton oszlopot! A legfelső gerenda az oszlop felső keresztmetszetének súlypontjához képest külpontos pozícióban terhel rá az oszlopra. Ugyanígy az oszlop közbenső szakaszain a szintek födémjeit tartó gerendák is külpontosan (rövid konzol) adnak át normálerőt az oszlopnak. Az említett esetek a külpontos nyomás tipikus esetei.



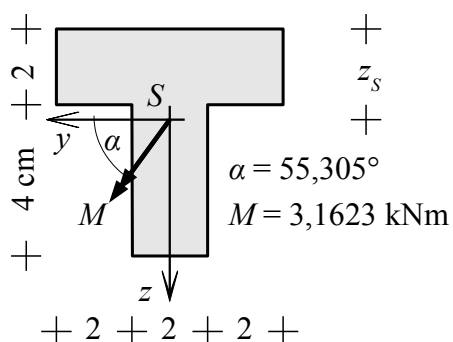
Abban az esetben, ha a keresztmetszet húzásnak és nyomásnak is egyaránt ellenáll, akkor a feladat visszavezethető központos húzás-nyomás és hajlítás egymásra halmozására. Először a külpontos normálerőt a keresztmetszet súlypontjára redukáljuk. A keresztmetszet egy tetszőleges pontjának normálfeszültsége a központos húzás-nyomásnál és a hajlításnál tanult feszültség számítási formulák felhasználásával határozható meg a szuperpozíció segítségével:

$$\sigma_x = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

a semleges tengely M és a 2. főirány között,
de a semleges tengely (u) **nem megy át a súlyponton!**

20. KÜLPONTOS HÚZÁS-NYOMÁS III.

1. Határozzuk meg a keresztmetszetben a normál feszültségeket! (ismétlés, lásd az előző órát)

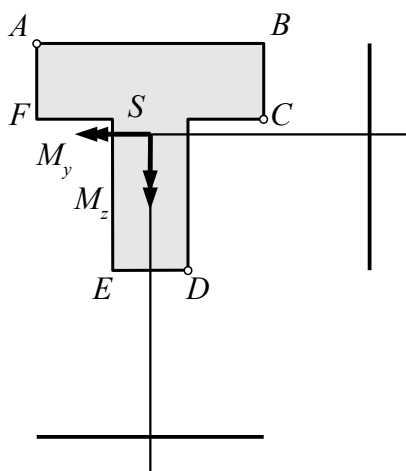


A keresztmetszetet egyenes hajlításra már vizsgáltuk:

$$z_s = 2,2 \text{ cm}$$

$$I_y = 57,867 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 38,667 \text{ cm}^4$$



← Ez az ábrarészlet már korábban szerepelt!

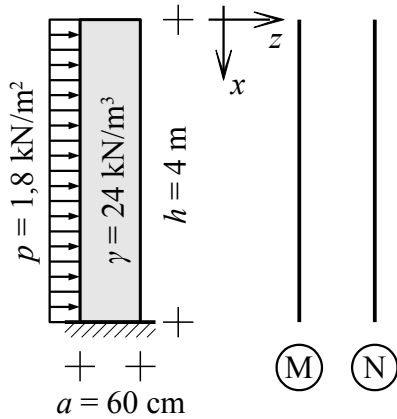
Maximális normál feszültség keresése:

- vagy megvizsgálunk minden konvex sarkot, amely a semleges tengelytől legtávolabb eshet,
- vagy megállapítjuk a semleges tengely meredekségét, majd megkeressük a két legtávolabb fekvő pontot (görbevonalú keresztmetszetnél csak ez az út járható).

σ [MPa]

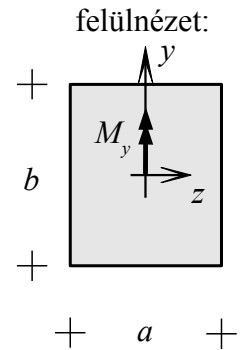
20. KÜLPONTOS HÚZÁS-NYOMÁS, PÉLDÁK V.

3. Határozzuk meg az oszlopban keletkező feszültségek szélsőértékeit, ha a megtámasztásnál húzás és nyomás adódhat át!



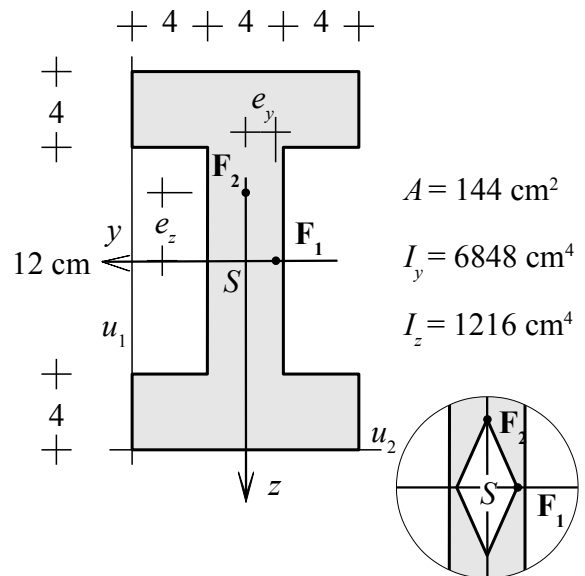
Tekintsük a fal b hosszúságú részét!

Az igénybevételek x függvényében:



húzásnak és nyomásnak is ellenálló megtámasztás esetén:

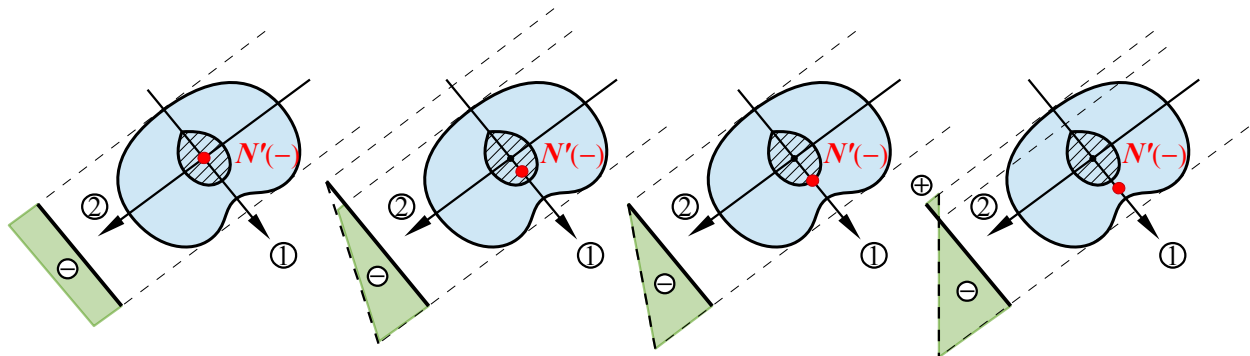
4. Határozzuk meg az \mathbf{F} (húzottnak feltételezett!) erő azon helyzeteit, melyek esetén a semleges tengely rendre az u_1 és u_2 egyenesekkel esik egybe!



21. A BELSŐ MAG FOGALMA I.

Külpontos normálerőből származó feszültségek lineárisan rugalmas anyag esetén

Külpontos nyomóerőből származó normálfeszültségek, ha a nyomóerő az egyik tehetetlenségi főtengely mentén működik (nyomás + egyenes hajlítás):



N' a súlypontban:
Tiszta nyomás
Konstans σ

N' távolodik a súlyponttól:
Egyre egyenlőtlenebb feszültség eloszlás, egyre meredekebb σ ábra.
(A súlypontban a normálfeszültség nem változik.)



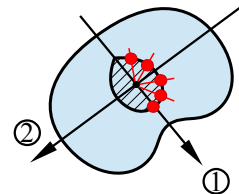
Határállapot:
a keresztmetszet szélén zérus normálfeszültség.

Külpontos nyomás, ha a nyomóerő nem tehetetlenségi főtengely mentén működik (nyomás + ferde hajlítás):

A külpontos nyomóerő "csak nyomás" és "húzás-nyomás" közötti határhelyzetei (a maximális normálfeszültség zérus):

- ha ezen a tartományon belül hat külpontos nyomás a keresztmetszetre, akkor a teljes keresztmetszetben mindenhol csak nyomófeszültségek ébrednek,

- ha N' támadáspontja ezen a tartományon kívül esik, akkor húzófeszültségek is kialakulnak a keresztmetszet egy részében. \longrightarrow Ez a tartomány a keresztmetszet *belső magja*.



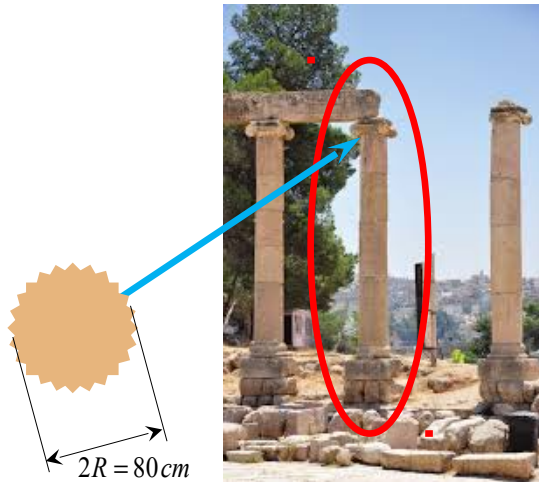
A belső mag

A **belső mag** azon külpontos nyomóerők támadáspontjainak mértani helye, melyekből lineárisan rugalmas anyagi viselkedés esetén sehol nem keletkezik a keresztmetszetben húzó normálfeszültség.

A belső mag igazolhatóan konvex, tömör tartomány.

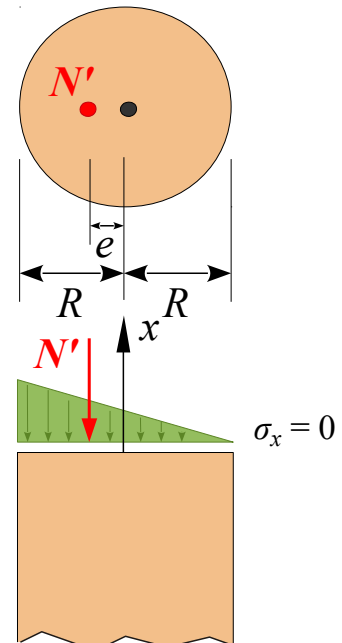
21. A BELSŐ MAG FOGALMA II.

1. Az ábrán látható kőoszlop legfelső keresztmetszete jó közelítéssel kör lapnak tekinthető, amelynek átmérője 80 cm. A keresztmetszetet felülről egy függőlegesen lefelé ható erő terheli. Legfeljebb mekkora lehet a nyomóerő külpontossága, hogy a keresztmetszetnek még minden pontja nyomott legyen?



Jerash, Jordánia

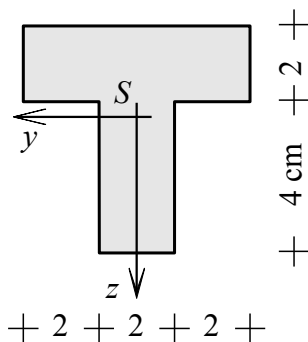
Forrás: L. Papaloizou, P. Komodromos,
Procs. 15WCEE, Lisboa, 2012



A körszimmetria miatt a belső mag *kör* lesz, melynek sugara a keresett külpontosság. N' -nek azt a helyzetét keressük, amikor jobb szélén a nyomófeszültség zérus:

$$-\frac{|N'|}{A} + \frac{|N'| \cdot e}{R^4 \pi / 4} \cdot R = 0, \quad \text{innen} \quad e = \frac{R}{4} = 10 \text{ cm}$$

2. Hol helyezhetjük el a keresztmetszet síkjában az F nagyságú nyomóerőt, ha azt akarjuk, hogy sehol ne ébredjen húzófeszültség a keresztmetszetben?

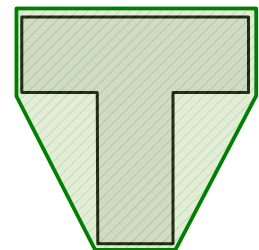


Keressük:

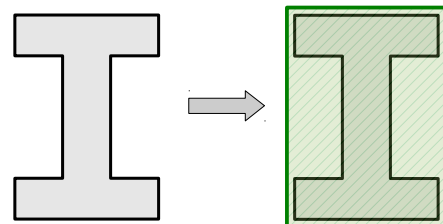
(y_F, z_F) koordinátájú pontokat, amelyre $\sigma_x \leq 0$ minden pontban.

A keresztmetszet *konvex burka*: a legkisebb olyan konvex síkidom, amely a vizsgált keresztmetszet minden pontját tartalmazza.

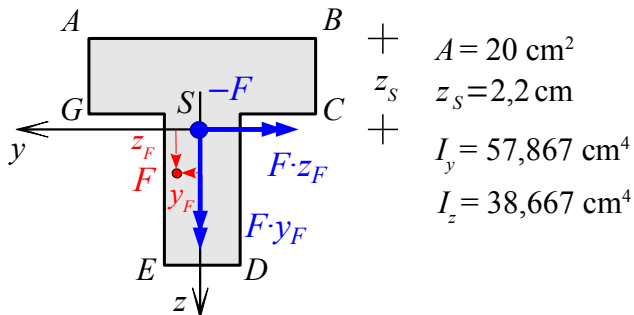
Ha a konvex burk sarkpontjaiban nincs húzás, akkor (és csak akkor) az eredeti keresztmetszet pontjaiban sincs.



Múlt órai példa: Az I-tartó helyett az azt befoglaló téglalapot vizsgáltuk.



21. A BELSŐ MAG FOGALMA III.



Igénybevételek az (y_F, z_F) helyzetű külpontos nyomóerőből:

$$F \doteq (N, M_y, M_z) \quad \begin{aligned} N &= \\ M_y &= \\ M_z &= \end{aligned}$$

Az A pont vizsgálata:

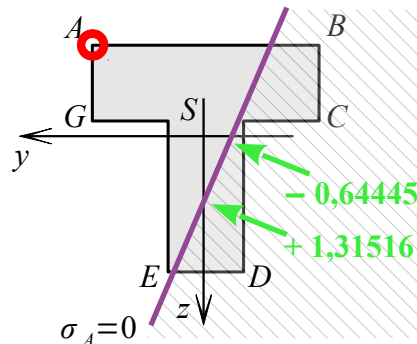
Az A pontban ne keletkezzen húzás:

$$\sigma_A = -\frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_F}{I_y} \cdot 2,2 - \frac{F \cdot y_F}{I_z} \cdot 3 \leq 0$$

Innen: $z_F \leq +1,3152 + 2,0408 \cdot y_F$

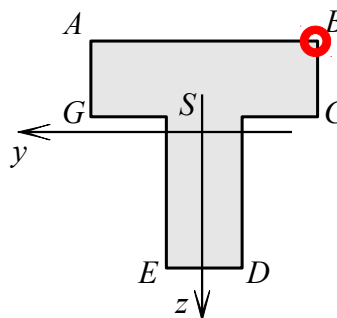
$\sigma_A = 0$ -ra: $z_F = +1,3152 + 2,0408 \cdot y_F \implies$ A lila egyenes egyenlete.

A lila egyenes fölött működő nyomóerők nyomást okoznak az A pontban.

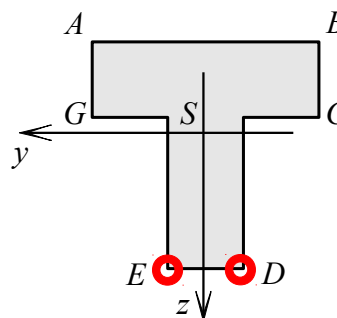


A B pont vizsgálata:

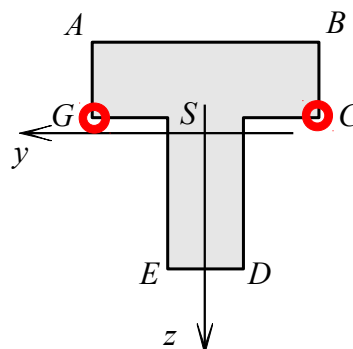
A B pontban ne keletkezzen húzás:



A D és E pont vizsgálata:

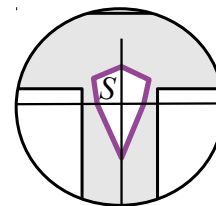


A C és G pont vizsgálata:



21. A BELSŐ MAG FOGALMA IV.

A teljes keresztmetszet egyik pontjában sem keletkezik húzás, ha mind a hat feltétel teljesül, azaz, ha a külpontos nyomóerő a hat egyenes által közbezárt tartományba esik. Ez a keresztmetszet **belső magja**.



Megjegyzések:

- A **súlypont** mind a hat tartománynak (és így a belső magnak is) belső pontja.

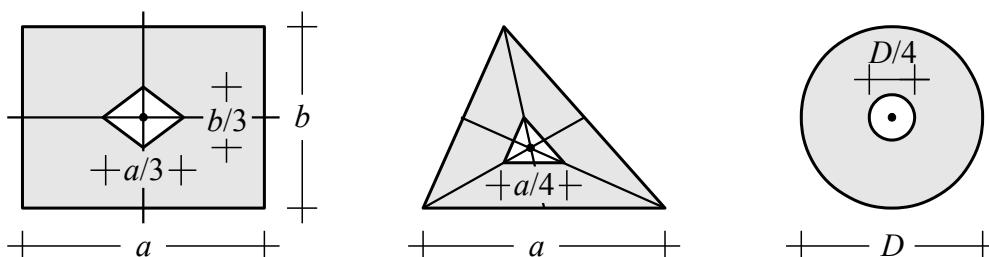
(Ha épp a súlypontban hat a nyomóerő a keresztmetszetre, akkor minden pontban ugyanakkora nyomófeszültség keletkezik. A súlypont körül tehát mindig létezik egy olyan véges méretű tartomány, amelyben a külpontos nyomóerő elhelyezhető úgy, hogy mindenhol nyomást okozzon.)

- A feladatban láttuk, hogy az F erő nagysága kiesett a feltételi egyenlőtlenségekből. Ez általánosan is igaz: a belső mag kizárólag a keresztmetszet geometriájától függ, és **nem befolyásolja az, hogy mekkora külpontos erő** hat a keresztmetszetre.

- Létezik olyan keresztmetszet, amelynek a belső magja olyan pontokat is tartalmaz, amelyek **nem pontjai magának a keresztmetszetnek** (például a körgyűrű, vagy más üreges vagy konkáv síkidomok). Ha olyan helyre szeretnének külpontos nyomóerőt tenni a keresztmetszetre, amely nem pontja a keresztmetszetnek, akkor ez pl. valamilyen teherátadó lappal oldható meg.

Hasonló módon bármilyen más síkidom belső magja is elkészíthető.

A következő hármat jegyezzük meg!



Külpontos normálerőből származó feszültségek csak nyomásnak ellenálló anyag esetén

Csak nyomásnak ellenálló anyagok:

Olyan anyagok, amelyeknek húzószilárdsága zérus vagy elhanyagolhatóan kicsi.

Például:

régi kőszervezetek



Római kori vízvezeték
Forrás: rogerdhansen.wordpress.com



Gótikus boltozat pillére
Forrás: www.123rf.com

21. A BELSŐ MAG FOGALMA V.

száraz homok, vagy kavics



Homokdűne

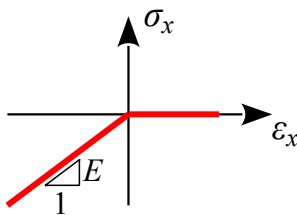
Forrás: wallpaperest.com



Zúzottkő ágyazat

Forrás: 123rf.com

Viselkedésük:



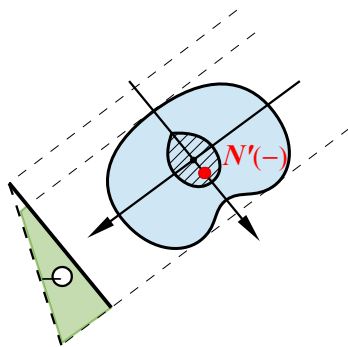
Egytengelyű feszültségállapotban:

- a negatív fajlagos nyúlások nyomófeszültséggel járnak,
- a pozitív fajlagos nyúlásokból nem keletkezik húzófeszültség (az anyag ellenállás nélkül nyújtható).
- Ez nemlineáris anyagi viselkedés, a korábban levezetett összefüggések nem minden esetben érvényesek.

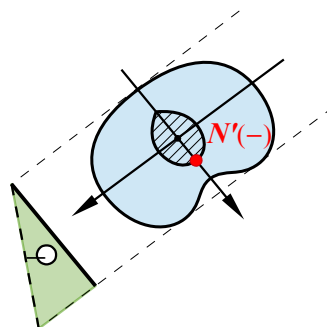
Alapfeltevések:

- szimmetrikus keresztmetszet
- a külpontos nyomóerő támadáspontja legyen rajta szimmetriatengelyen (központos nyomás + egyenes hajlítás)
- sík keresztmetszetek elve
- homogén, lineárisan rugalmas anyag (Hooke-törvény)
- Bármely pontban a nyomófeszültség egyenesen arányos a fajlagos összenyomódással, de a fajlagos megnyúlásból nem keletkezik húzófeszültség.

A nyomófeszültségek eloszlása:

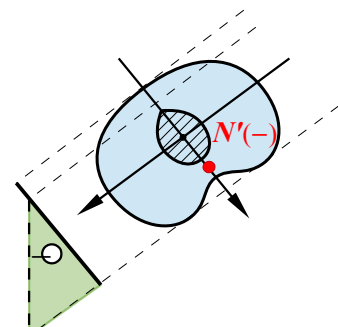


A nyomóerő a belső magon belül hat:



A nyomóerő a belső mag peremén hat:

A semleges tengely épp érinti a keresztmetszetet.



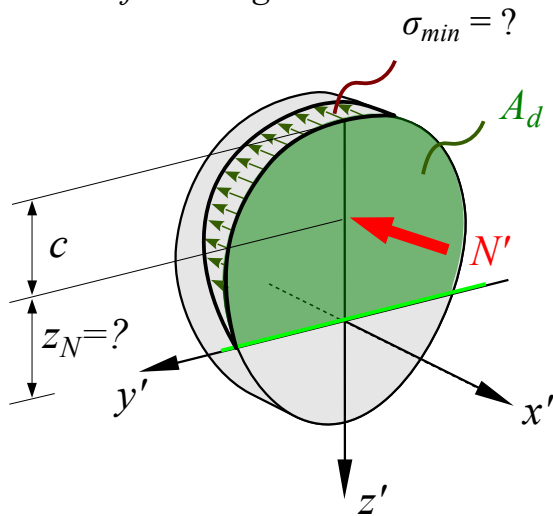
A nyomóerő a belső magon kívül hat:

A keresztmetszetnek csak egy részén keletkezik normál feszültség, ez a tartomány a **dolgozó rész**.

- lineáris anyagi viselkedés
- a korábban levezetett összefüggések érvényesek
- a normál feszültségek meghatározása egymásra halmazással

21. A BELSŐ MAG FOGALMA VI.

Keressük a semleges tengely helyzetét (a dolgozó részt) és a minimális normál feszültséget:



Ismertnek tekintjük:

- a keresztmetszet geometriáját
- a külpontos nyomóerő nagyságát: N'
- a külpontos nyomóerő helyzetét: c

A külpontos nyomóerő és a semleges tengely távolsága: z_N

(a külpontos nyomóerőtől mindig a súlypont irányába)

STATIKAI egyenletek

$$\sum F_{ix}: N' = \int_{(A_d)} \sigma_x(y', z') dA$$

$$\sum M_{iy}: M_{y'} = \int_{(A_d)} \sigma_x(y', z') z' dA$$

$\sum M_{iz}$: a feszültségrendszer szimmetrikus z' -re

GEOMETRIAI egyenlet

$$\varepsilon_x(y', z') = \kappa_y \cdot z'$$

(fajlagos nyúlás a km. egy (y', z') pontjában)

ANYAG egyenletek

A dolgozó részen belül:

$$\text{ha } (y', z') \in A_d: \sigma_x(y', z') = E \cdot \varepsilon_x(y', z').$$

A dolgozó részen kívül:

$$\text{ha } (y', z') \notin A_d: \sigma_x(y', z') = 0.$$

A vetületi egyensúlyból:

$$\sum F_{ix}: N'(y', z') = \int_{(A_d)} \sigma_x(y', z') dA \stackrel{\text{ANYAG}}{=} \int_{(A_d)} E \varepsilon_x(y', z') dA \stackrel{\text{GEOM}}{=} E \kappa_y \cdot \int_{(A_d)} z' dA$$

A nyomatéki egyensúlyból:

$$\sum M_{iy}: M_{y'} = -N' \cdot z_N = \int_{(A_d)} \sigma_x(y', z') \cdot z' dA \stackrel{\text{ANYAG}}{=} E \kappa_y \cdot \int_{(A_d)} (z')^2 dA$$

$$z_N = \frac{-N' \cdot z_N}{-N'} = \frac{E \kappa_y \cdot \int_{(A_d)} (z')^2 dA}{-E \kappa_y \cdot \int_{(A_d)} z' dA} = - \frac{\int_{(A_d)} (z')^2 dA}{\int_{(A_d)} z' dA} \left. \begin{array}{l} \int_{(A_d)} (z')^2 dA \} I_{y'} \\ \int_{(A_d)} z' dA \} S_{y'} \end{array} \right\}$$

Innen z_N kifejezhető.

$$z_N = - \frac{I_{y'}}{S_{y'}}$$

Vegyük észre, hogy $I_{y'}$ és $S_{y'}$ is függ z_N -től!

Általános esetben valamilyen fokozatosan közelítő numerikus technikával határozhatjuk meg z_N értékét. Most két egyszerű példára a megoldást megadjuk. Ezeket jegyezzük meg!

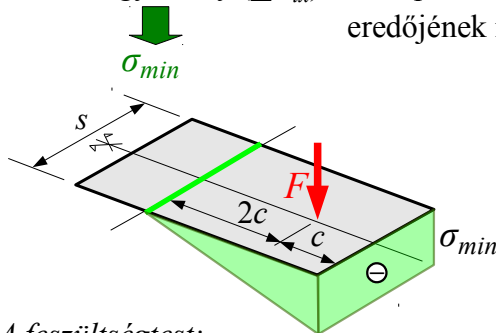
21. A BELSŐ MAG FOGALMA VII.

Téglalap és egyenlőszárú háromszög alakú dolgozó rész esete:

A nyomatéki egyensúly ($\sum M_{iy}$): A normál feszültségek eredője egybe esik a külpontos normálerő hatásvonalával. $\rightarrow F$ hatásvonalát átmege a feszültségtest súlypontján.

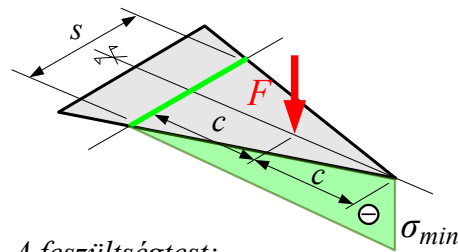
Semleges tengely

A vetületi egyensúly ($\sum F_{ix}$): A külpontos normálerő nagysága megegyezik a normál feszültségek eredőjének nagyságával. $\rightarrow F$ nagysága egyenlő a feszültségtest térfogatával.



A feszültségtest:
Ék alakú (háromszög alapú hasáb).
Súlypontja: az oldal harmadában.
Semleges tengely: F -től még $2c$ távolságra.

Térfogata: $F = \frac{1}{2} \cdot 3c \cdot s \cdot \sigma_{min}$



A feszültségtest:
Háromszög alapú gúla.
Súlypontja: az alap háromszög magasságának felében.
Semleges tengely: F -től még c távolságra.

Térfogata: $F = \frac{1}{3} \cdot \frac{2c \cdot s}{2} \cdot \sigma_{min}$

3. Az ábrán látható beton gáttestre a saját súlya és a bal oldalt lévő víztömeg nyomása hat. A talajjal való érintkezési felület húzásra nem dolgozik.

A beton és a víz sűrűsége:

$$\rho_{beton} = 2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

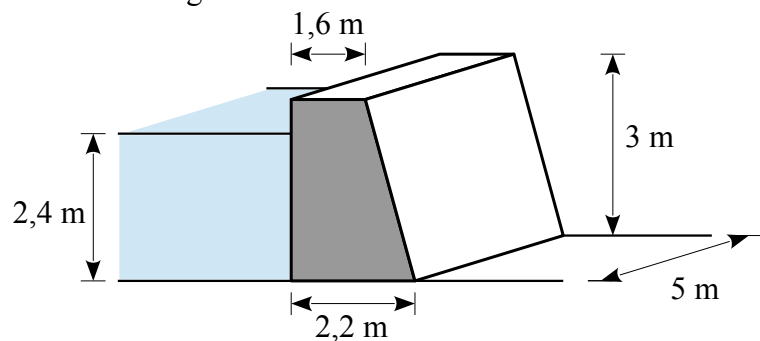
$$\rho_{v\acute{e}z} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

a) Határozzuk meg a gáttestre ható víznyomás eredőjét, és helyettesítsük a gáttest súlyát koncentrált erőkkel!

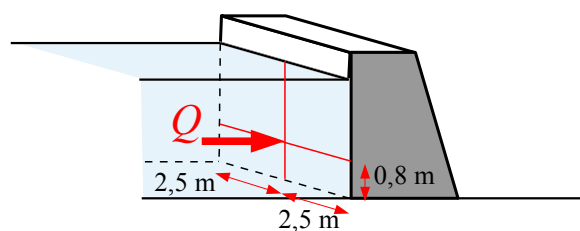
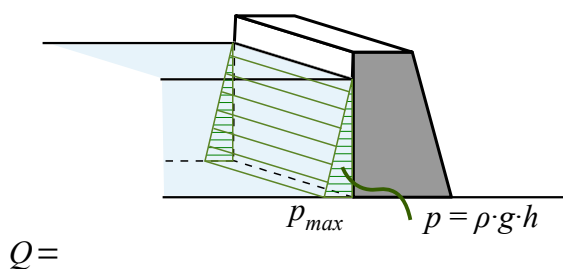
b) Határozzuk meg a gát alja és a talaj közötti érintkezési felület igénybevételeit!

c) Döntsük el, hogy dolgozik-e az egész érintkezési felület!

d) Készítsük el az érintkezési felületre ható normál feszültségek diagramját, a jellemző értékek feltüntetésével!

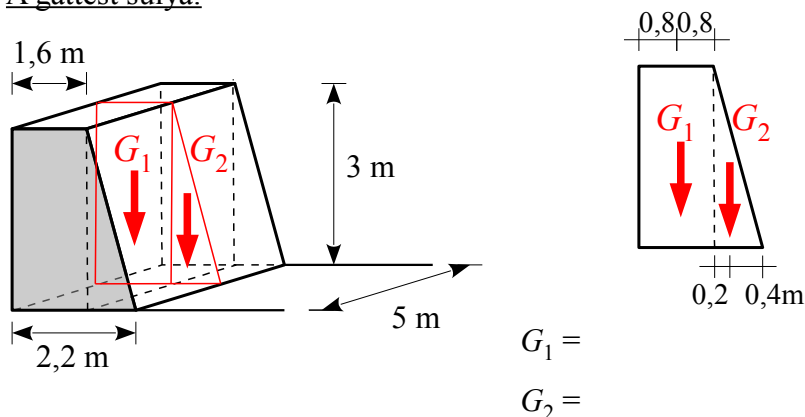


a) A víznyomás eredője:

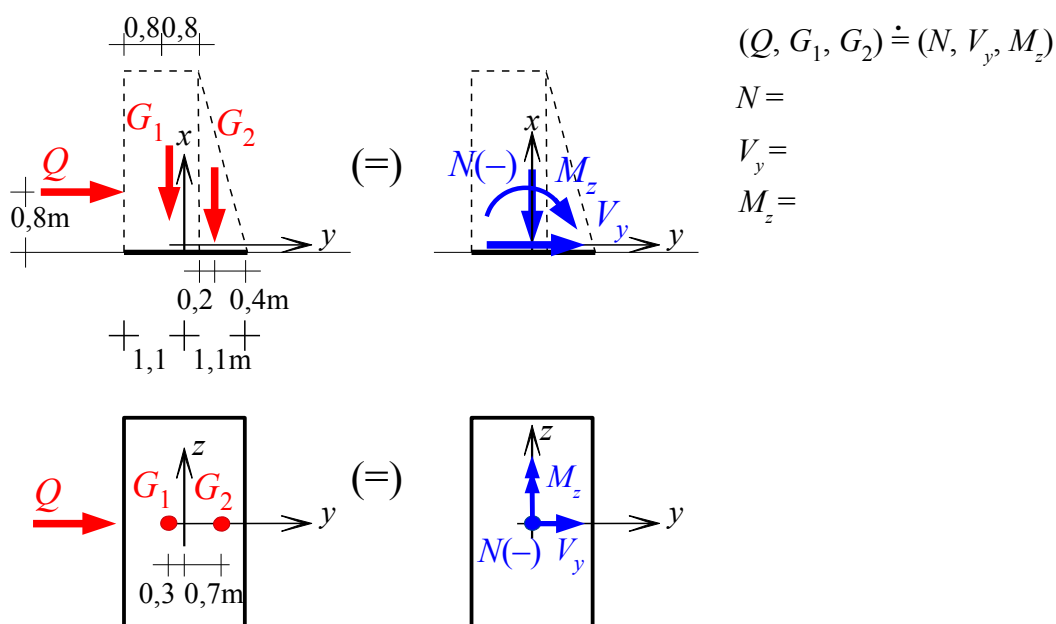


21. A BELSŐ MAG FOGALMA VIII.

A gáttest súlya:



b) Az érintkezési felület igénybevételei:



c) Dolgozik-e az egész érintkezési felület?

1. megoldási mód:

Vizsgáljuk meg a legpozitívabb normálfeszültség előjelét! Bal oldalon a normálfeszültség:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot 1,1 \text{ m} = \frac{-615,09}{2,2 \cdot 5} + \frac{25,60}{2,2^3 \cdot 5/12} \cdot 1,1 = -55,92 + 6,35 < 0,$$

tehát **dolgozik az egész érintkezési felület.**

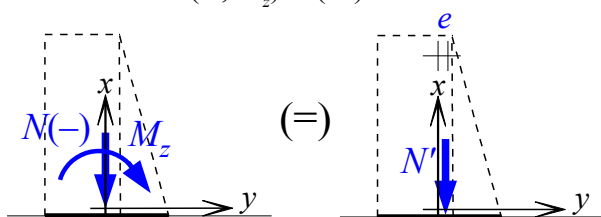
2. megoldási mód:

Tegyük össze az N és M_z igénybevételeket egyetlen N' külpontos erővé: $(N, M_z) \doteq (N')$

Majd vizsgáljuk a külpontos nyomóerő belső maghoz viszonyított helyzetét!

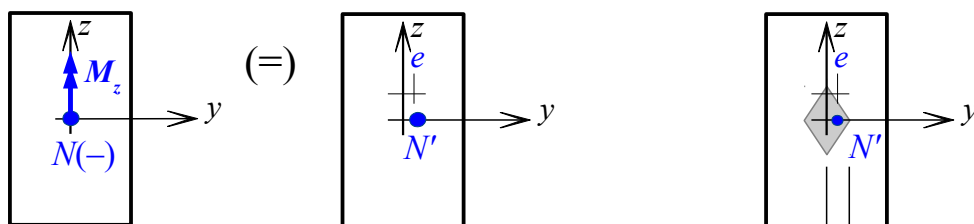
21. A BELSŐ MAG FOGALMA IX.

$$(N, M_z) \doteq (N')$$



$$e = \frac{|M_z|}{|N|} = \frac{2560 \text{ kNcm}}{615,1 \text{ kN}} = 4,16 \text{ cm}$$

Az N' támadáspontjának helye a belső maghoz képest:



$$110\text{cm}/3 = 36,67\text{cm}$$

A külpontos nyomóerő támadáspontja a belső magon belül van, tehát **dolgozik az egész érintkezési felület.**

d) A normál feszültségek meghatározása:

A legpozitívabb normál feszültség a bal oldalon:

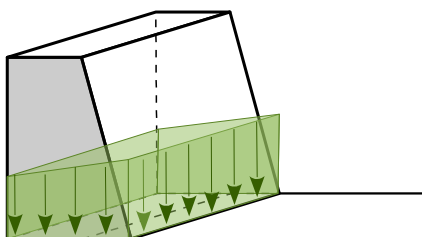
$$\sigma_{max} =$$

A legnegatívabb normál feszültség a jobb oldalon:

$$\sigma_{min} =$$

A feszültségeloszlás:

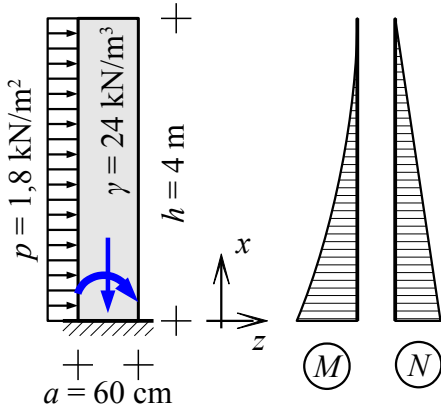
$$\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$



22. CSAK NYOMÁSNAK ELLENÁLLÓ ANYAGOK I.

Külpontos nyomás:

1. Határozzuk meg a falban ébredő normálfeszültségek szélsőértékeit, ha a talaj a falnak csak nyomást adhat át!



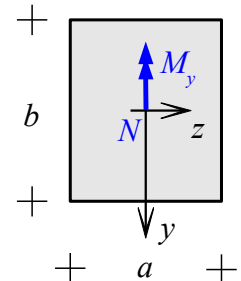
Vizsgáljuk a fal b hosszúságú részét!
(gyakorlatban:
pl. egységnyi hossz, $b = 1\text{ m}$;
itt most: b paraméter)

Az igénybevételek:
 N és M maximuma $x = 0$ -nál:

$$M_y = p \cdot b \cdot h \cdot \frac{h}{2} = \frac{pbh^2}{2}$$

$$N = \gamma \cdot a \cdot b \cdot h \quad (-)$$

Felülnézet:



Korábban láttuk: ha a talaj húzásnak és nyomásnak is ellenáll:

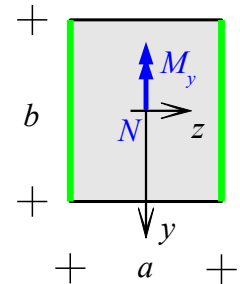
$$A = a \cdot b, \quad I_y = \frac{ba^3}{12}$$

A legnegatívabb normálfeszültség (a jobbszélső pontokban):

$$\sigma_{min} =$$

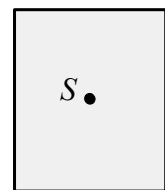
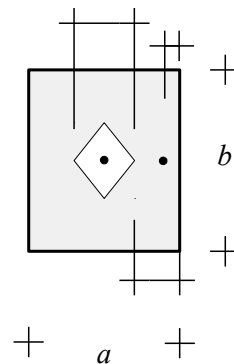
A legpozitívabb normálfeszültség (a balszélső pontokban):

$$\sigma_{max} =$$



σ [MPa] _____

Most: Ha a talaj csak nyomásnak áll ellen:

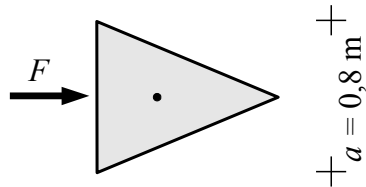


_____ (σ)

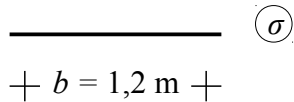
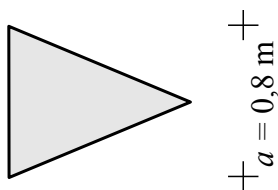
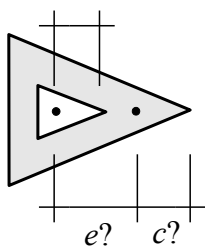
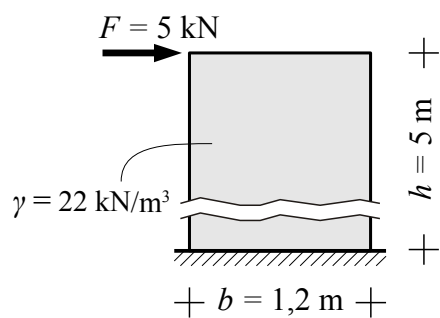
22. CSAK NYOMÁSNAK ELLENÁLLÓ ANYAGOK II.

2. A pillér és a talaj között csak nyomás adódhat át. Határozzuk meg a talajra átadódó normálfeszültségek eloszlását!

Felülnézet:

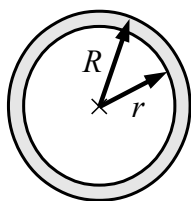


Előlnézet:



22. CSAK NYOMÁSNAK ELLENÁLLÓ ANYAGOK III.

3. Határozzuk meg a csőszelvény belső magját!



$$R = 16 \text{ cm}$$

$$r = 13 \text{ cm}$$

