Bevezetés: tárgyunk tárgya

Bármely statikával, vagy dinamikával foglalkozó bevezető tankönyv a témakör világunkban való elhelyezésével kezdődik. Mi sem teszünk másként, ha csak áttekintés szintjén is.

A mechanika általában a fizikán belül a testek mozgásával foglalkozó tudományág. Tovább csoportosíthatjuk a vizsgálatokat az anyag halmazállapota szerint. Jelen tárgy keretén belül a *szilárd halmazállapotú* testekkel foglalkozunk. Azt a testet, melynek az alakváltozásait elhanyagoljuk, *(tökéletesen) merev* testnek nevezzük. E tárgyban elhanyagoljuk a testek alakváltozásait. Ha a test mozgását írjuk csak le, az azt kiváltó okok nélkül, azt *kinematikának* nevezzük, ha a mozgás okát, az azt létrehozó hatásokat is vizsgáljuk, akkor *kinetikai* vizsgálatot végzünk. Ha a test valójában nem mozog, akkor azt mondjuk, hogy egyensúlyban van. Ezzel az állapottal a *statika* foglalkozik. *Dinamikai* vizsgálatnak azt nevezzük e tárgy keretében, amikor valódi mozgások is bekövetkeznek.

A mozgások leírására az általunk vizsgált nagyságrendekben a *Newton-törvények* kielégítően pontosak:

1. Minden test megőrzi egyenes vonalú egyenletes pályáját, vagy nyugalmi helyzetét, amíg egy másik test vagy mező mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszeríti.

2. Egy anyagi pontnak tekinthető testre ható (***F***) erő által okozott (***a***) gyorsulás az erővel azonos irányú, a két mennyiség között az arányossági tényező a test (m) tehetetlen tömege. ($\boldsymbol{F}=m\,\boldsymbol{a}$)

3. Két test kölcsönhatása során az egymásra kifejtett erők azonos nagyságúak, közös hatásvonalúak és ellentétes irányúak. (Hatás-ellenhatás törvénye.)

Az első törvényhez persze szükség van arra is, hogy a koordináta-rendszer inerciarendszer legyen. Egy koordináta-rendszert inerciarendszernek nevezünk, ha nem forog, és az origója egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban van a többi inerciarendszerhez képest.

Ha már koordináta-rendszer: bár a felvételére nincs általános szabály, azt el kell dönteni, hogy ún. jobbkezes, vagy balkezes (jobbsodrású, vagy balsodrású) rendszert használunk. Állapodjunk meg abban, hogy jobbkezes koordináta-rendszert használunk. Emiatt a koordináta-rendszer tengelyeinek kézi bemutatását jobbkézzel végezzük: a hüvelykujjunk az x, a kinyújtott mutatóujjunk az y, a tenyér síkjára merőlegesen behajtott középső ujjunk pedig a z tengely irányába forgatható. Így egy "szokásos" síkbeli xy koordináta-rendszerben, ahol az x jobbra, az y felfelé mutat, a z tengely a síkból kifelé (felénk) mutat. Forgathatóak a tengelyek úgy is, hogy a síkon belül az x jobbra, a z pedig lefelé mutasson, ekkor az y tengely mutat a síkból kifelé. (További kombinációk is lehetségesek, de ez a kettő a leggyakoribb.)

A második Newton-törvényben az m tömeg úgynevezett *skalár*mennyiség, egyetlen számmal megadható az értéke. Az ***F*** és az ***a*** ún. *vektor*mennyiségek, nem csak nagyságuk, de irányuk is van. Az ilyen mennyiségeket rajzban egy nyílban végződő szakasszal ábrázoljuk. A nyílnak kezdő- és végpontja van, az általuk meghatározott egyenes adja meg a vektor *állását*. Ha a vektor állását ismerjük, és az egyenest irányítva adjuk meg, azzal definiálhatjuk a vektor *irányítottságát* is. Az erővektor esetén két további fogalmat kell bevezetnünk. Az erő *támadáspont*ja a test azon pontja, ahol a testre hat az erő, az erő *hatásvonal*a pedig a támadáspontján át húzott, a vektorral párhuzamos egyenes.

A félév során még nagyon sokféle műveletet végzünk vektorokkal, ezért tekintsük át a főbb műveleti szabályokat.

Vektorok

A *vektorok*, amint már említettük, irányított mennyiségek, *nagyságuk és irányuk* van. Megnevezésükre nyomtatásban vastag dőlt betűt szokás használni, például ***v***, kézírással a mennyiség aláhúzásával jelezzük annak vektor voltát, például $\underline{v}$. (Bár szokás felülvonással, vagy a vonás helyett nyíllal jelezni ezt a tulajdonságot.) Ebben a munkafüzetben a folyó szövegek esetén a vastag betűs leírást fogjuk használni, a példáknál azonban aláhúzást használunk, hogy a kitöltés után könnyebben összehasonlítható legyen a mintapélda és a gyakorlópélda megoldása. Rajzban egy nyíllal irányított szakaszként ábrázolhatjuk a vektorokat.

Egy origóból indított vektort megadhatunk nagysága és iránya segítségével. A nagyság a vektor hossza, jele nyomtatásban a változó neve (például a ***v*** vektor nagysága *v*), kézírásban a vektor abszolútértékeként is jelölhetjük (azaz az előző példánál maradva $v=|\underline{v}|$). Az irányt valamilyen rögzített irányokhoz (például a koordinátatengelyekhez) képest adhatjuk meg a bezárt szög segítségével. A vektor másik megadási módja a koordinátatengelyekre vett merőleges vetületek felírása szögletes zárójelben egymás alá egy ún. oszlopvektorban. A kétféle megadás között természetesen egyértelmű megfeleltetésnek kell lennie, hiszen mindkét módszer ugyanazt a vektort adja meg.

Azt a vektort, melynek hossza 1, *egységvektornak* nevezzük. Kiemelt jelentősége van az *x*, *y* és *z* tengely irányú egységvektoroknak, ezeket szokás rendre az ***i***, ***j***, ***k*** szimbólumokkal jelölni.

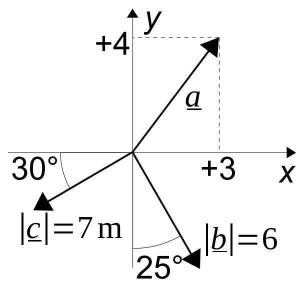
Síkban két adattal, a vektor végpontjának két koordinátájával (lásd az ***a*** vektort), vagy a vektor hosszával és valamelyik tengellyel bezárt szögével (pl. a ***b*** és a ***c*** vektorok). A kétféle megadás között szögfüggvények és a Pitagorasz-tétel segítségével tudunk átváltani. (Emlékeztetőül: szöggel szemközti befogó / átfogó = szinusz, szög melletti befogó / átfogó = koszinusz, szöggel szemközti befogó / szög melletti befogó = tangens)

Ha a vektor valamilyen fizikai mennyiséget fejez ki, akkor minden egyes skalárkomponense és a vektor nagysága is annak a mennyiségnek a mértékegységével rendelkezik.

Mintapélda – 1

Írjuk fel az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokat!
Adjuk meg az $\underline{a}$ vektor nagyságát és irányát is!

Megoldás



$$\underline{a}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}=\begin{bmatrix}+6\cdot\sin 25°\\-6\cdot\cos 25°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+2{,}536\\-5{,}438\end{bmatrix}$$

$$\underline{c}=\begin{bmatrix}-7\,\mathrm{m}\cdot\cos 30°\\-7\,\mathrm{m}\cdot\sin 30°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6{,}062\\-3{,}5\end{bmatrix}\mathrm{m}$$

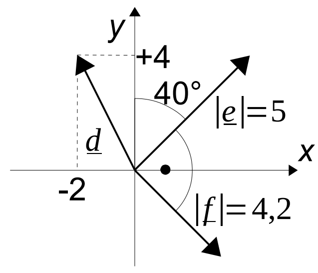
$\underline{a}$ nagysága: $a=|\underline{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\underline{a}$ iránya (a jobbra felfelé mutató vektor vízszintessel bezárt szöge): $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{|4|}{|3|}\rightarrow\alpha=53{,}13°$

A komponensek előjelét szemléletből célszerű meghatározni, majd a kerekítésnél négy értékes jegyre számoljunk. Miért négy? A bevezető fejezetben írtunk erről. Valamennyinek kell lennie, hogy korlátozzuk az úgysem használt számjegyekkel való munkát, és sok év után nincs rá jobb ötletünk (a három kevés, az öt sok). A használt jegyek száma befolyásolja a végeredmény pontosságát, de ehhez a hiba hatásának és terjedésének analízisére lenne szükség. Szokjuk meg, hogy nem lesz pontosabb a leírt eredmény attól, hogy a tizedik számjegyet is leírjuk, ha közben már az előjelet elrontottuk.

Gyakorlópélda – 1

Írjuk fel a $\underline{d}, \underline{e}$ és $\underline{f}$ vektorokat!
Adjuk meg a $\underline{d}$ vektor nagyságát és irányát is!



Megoldás

$\underline{d}$ elemei (sorrend, előjel):

$$\underline{d} = \left[\quad \right]$$

$\underline{e}$ elemei (előbb képlettel, majd kiszámítva és kerekítve):

$$\underline{e} = \left[\quad \right] = \left[\quad \right]$$

$\underline{f}$ elemei (előbb képlettel, majd kiszámítva és kerekítve):

$$\underline{f} = \left[\quad \right] = \left[\quad \right]$$

$\underline{d}$ nagysága:

$$|\underline{d}| =$$

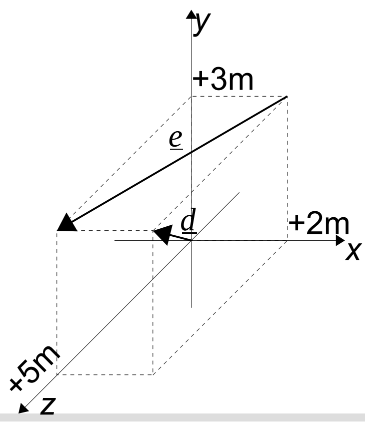
$\underline{d}$ iránya (az x-tengely egyenesével bezárt szög δ):

$$\mathrm{tg}\,\delta =$$

Térben három adattal adható meg a vektor, például a kezdőpontját az origóba helyezve a végpont koordinátáival. Lehetne itt is nagysággal és iránnyal dolgozni, ekkor az irányt az *x, y, z* tengelyekkel bezárt α, β, γ szögekkel adhatnánk meg. (Bár a nagyság és a három szög négy paramétert jelentene, Pitagorasz tétele alapján a $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ feltételnek teljesülnie kell a szögekre.

Mintapélda – 2

Írjuk fel az $\underline{d}$ és $\underline{e}$ vektorokat!
Adjuk meg a $\underline{d}$ vektor koordinátatengelyekkel bezárt hajlásszögeit, és ellenőrizzük az eredményt!



Megoldás

$$\underline{d}=\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}\text{m}$$

$\underline{d}$ nagysága: $d=|\underline{d}|=\sqrt{2^2+3^2+5^2}=\sqrt{38}=6{,}164\,\text{m}$

$$\cos\delta_x=\frac{2}{6{,}164}\rightarrow\delta_x=71{,}07°$$

$$\cos\delta_y=\frac{3}{6{,}164}\rightarrow\delta_y=60{,}88°$$

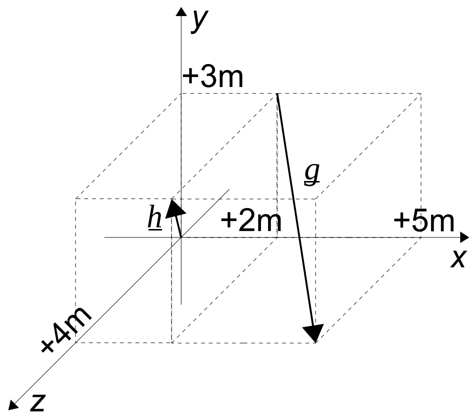
$$\underline{e}=\begin{bmatrix}0-2\\3-3\\5-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\5\end{bmatrix}\text{m}$$

$$\cos\delta_z=\frac{5}{6{,}164}\rightarrow\delta_z=35{,}79°$$

$Ell:\cos^2 71{,}07°+\cos^2 60{,}88°+\cos^2 35{,}79°=1{,}000$ ✓

Gyakorlópélda – 2

Írjuk fel a $\underline{g}$ és $\underline{h}$ vektorokat!
Adjuk meg a $\underline{h}$ vektor koordináta-tengelyekkel bezárt hajlásszögeit, és ellenőrizzük az eredményt!



Megoldás

$\underline{g}$ elemei:

$$\underline{g}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}$$

$\underline{h}$ elemei:

$$\underline{h}=\begin{bmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{bmatrix}$$

$\underline{h}$ nagysága:

$h=|\underline{h}|=$

$\cos\gamma_x=$

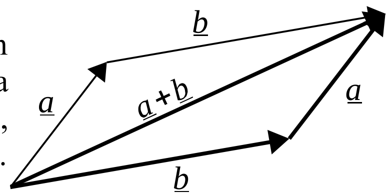
$\cos\gamma_y=$

$\cos\gamma_z=$

Ell.:

Vektorok összege, különbsége, a műveletek sorrendje

Vektorokat összegezhetünk grafikusan, illetve numerikusan. Grafikusan úgy összegzünk két vektort, hogy *nyílfolytonosan összefűzzük* őket (a sorrend közömbös, ezért szokás *parallelogramma-szabály*nak is hívni), azaz az egyik vektor kezdőpontját a másik végpontjához rajzoljuk. Numerikusan irányonként összegezzük a koordinátákat.



Mintapélda - 3

Számítsuk ki az $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$ és $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ vektorokat,

ha $\underline{a}=\begin{bmatrix}0{,}8\\1{,}2\\0{,}5\end{bmatrix},\underline{b}=\begin{bmatrix}-0{,}8\\0{,}4\\-0{,}7\end{bmatrix},\underline{c}=\begin{bmatrix}0{,}9\\-1{,}1\\1{,}1\end{bmatrix}$!

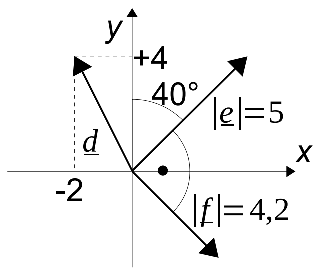
Megoldás

$$\underline{a}+\underline{b}=\begin{bmatrix}0{,}8\\1{,}2\\0{,}5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0{,}8\\0{,}4\\-0{,}7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}8+(-0{,}8)\\1{,}2+0{,}4\\0{,}5+(-0{,}7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}0\\1{,}6\\-0{,}2\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}+\underline{c}=\begin{bmatrix}-0{,}8+0{,}9\\0{,}4+(-1{,}1)\\-0{,}7+1{,}1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}1\\-0{,}7\\0{,}4\end{bmatrix}\quad \underline{a}+\underline{b}+\underline{c}=\begin{bmatrix}0{,}8+(-0{,}8)+0{,}9\\1{,}2+0{,}4-(1{,}1)\\0{,}5+(-0{,}7)+1{,}1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}9\\0{,}5\\0{,}9\end{bmatrix}$$

Gyakorlópélda – 3

Az első gyakorlópélda adatait felhasználva számítsuk ki a $\underline{d}+\underline{e}$, $\underline{e}+\underline{f}$ és $\underline{f}+\underline{d}+\underline{e}$ vektorokat!



Megoldás

$$\underline{d}+\underline{e}=\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

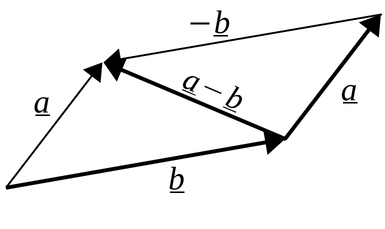
$$\underline{e}+\underline{f}=\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}+\underline{d}+\underline{e}=\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. A vektor önmagával való összeadásán keresztül vezethetjük be a vektor skalárral való szorzását (skalárszorost) is, ahol egy $\alpha\boldsymbol{v}$ vektor az eredeti $\boldsymbol{v}$ vektorral párhuzamos vektor lesz, a skalár $\alpha-$tól függően, a vektor megnyúlik $(|\alpha|>1)$, összenyomódik $(|\alpha|<1)$, illetve tükröződik is $(\alpha<0)$.

A vektor -1-szeresét a vektor ellentettjének nevezzük: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

Két vektor különbségét az ***a-b*** szimbólummal jelöljük, és ***a-b*** = ***a***+(-***b***). A kivonás sorrendje fontos: ***a-b*** = -(***b-a***).



Mintapélda – 4

Számítsuk ki az $\underline{a}-\underline{b}$, $\underline{b}-\underline{a}$ vektorokat,

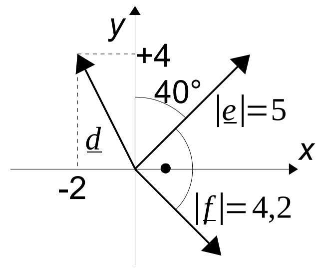
ha $\underline{a}=\begin{bmatrix}12{,}5\\-5{,}4\\8{,}73\end{bmatrix}$, $\underline{b}=\begin{bmatrix}3{,}9\\-11{,}3\\6{,}6\end{bmatrix}$!

Megoldás

$$\underline{a}-\underline{b}=\begin{bmatrix}12{,}5-3{,}9\\-5{,}4-(-11{,}3)\\8{,}73-6{,}6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8{,}6\\5{,}9\\2{,}13\end{bmatrix} \qquad \underline{b}-\underline{a}=\begin{bmatrix}3{,}9-12{,}5\\-11{,}3-(-5{,}4)\\6{,}6-8{,}73\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8{,}6\\-5{,}9\\-2{,}13\end{bmatrix}$$

Gyakorlópélda – 4

Az első gyakorlópélda adatait felhasználva számítsuk ki az $\underline{e}-\underline{d}$, $\underline{d}-\underline{e}$ vektorokat!



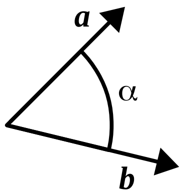
Megoldás

$$\underline{e}-\underline{d}=\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}-\underline{e}=\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Két vektor egymásra vett vetülete, skaláris szorzat

Két vektor skaláris szorzata ($\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, a műveletet a szorzásjel pontjának megvastagításával jelezzük) egy olyan skalár szám, mely arányos a vektorok hosszával és az általuk bezárt szög koszinuszával. Mivel a bezárt szög 0°és 180° közötti értéket vehet csak fel, így annak koszinusza -1 és 1 közötti érték lehet. A két határhelyzetben a két vektor vagy azonos irányba mutat $(\cos\alpha=1)$, vagy ellentétes irányba mutatnak $(\cos\alpha=-1)$.



$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha$$

$$0°\leq\alpha\leq180° \rightarrow -1\leq\cos\alpha\leq1$$

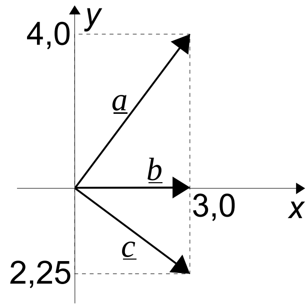
Számítani a vetületek szorzatösszegeként is lehet:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z\ .$$

A két számítási mód ugyanazt az eredményt adja.

Mintapélda – 5

Számítsuk ki az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok skaláris szorzatait páronként!
Számítsuk ki a vektorok által bezárt szögeket!



Megoldás

$\underline{a}\cdot\underline{b}=3\cdot3+4\cdot0=9$

$\underline{a}\cdot\underline{c}=3\cdot3+4\cdot(-2{,}25)=0$

$\underline{b}\cdot\underline{c}=3\cdot3+0\cdot(-2{,}25)=9$

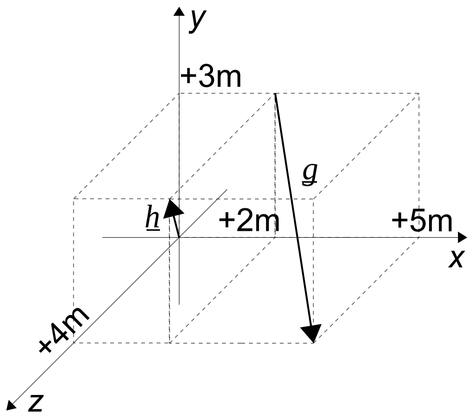
$$\cos\alpha_{ab}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|}=\frac{9}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{3^2+0^2}}\rightarrow\alpha_{ab}=53{,}13°$$

$$\cos\alpha_{ac}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{c}}{|\underline{a}||\underline{c}|}=\frac{0}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{3^2+2{,}25^2}}\rightarrow\alpha_{ab}=90°$$

$$\cos\alpha_{bc}=\frac{\underline{b}\cdot\underline{c}}{|\underline{b}||\underline{c}|}=\frac{9}{\sqrt{3^2+0^2}\sqrt{3^2+2{,}25^2}}\rightarrow\alpha_{ab}=36{,}87°$$

Gyakorlópélda – 5

Számítsuk ki a 2. gyakorlópéldában felírt $\underline{g}$ és $\underline{h}$ vektorok skaláris szorzatát!
Számítsuk ki a vektorok által bezárt szöget!



Megoldás

$$\underline{g}\cdot\underline{h}=$$

$$\cos\alpha_{gh}=\frac{\underline{g}\cdot\underline{h}}{|\underline{g}||\underline{h}|}=$$

Van pár speciális eset, amit érdemes megjegyezni.

- Ha a skaláris szorzat egyik vektora egységvektor, akkor a skaláris szorzat a másik vektor egységvektor irányú vetülete.
- Néhány speciális eset a vektorok egymáshoz képesti helyzetétől függ:
  - ha a két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk nulla,
  - ha a két vektor azonos irányú, akkor a skaláris szorzatuk a vektorok hosszának szorzata,
  - ha a két vektor ellenkező irányú, akkor a skaláris szorzatuk előjele negatív, nagysága a vektorok hosszának szorzata.

Anyagi pont kinematikája

Def.: Az anyagi pont egy kiterjedés és irányítottság nélküli test, melynek helyzetét egy helyvektor egyértelműen meghatározza.

Az anyagi pont kinematikája a pont mozgásjellemzőinek meghatározásával foglalkozik, a hely függvényében a sebesség és a gyorsulás számításával, illetve a gyorsulásból a sebesség és a hely számításával. (Ne keverjük össze a gyorsaságot a gyorsulással.)

Egyenes vonalú mozgás

Az egyenes vonalú mozgás egyenese bármilyen egyenes lehet. (A pont helyzetét az idő függvényében megadhatnánk valami $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{e}_\tau \cdot s(t)$ függvénnyel, ahol $\boldsymbol{r}_0$ egy kezdeti helyvektor, $\boldsymbol{e}_\tau$ pedig az egyenessel párhuzamos egységvektor lenne.) De a koordináta-rendszert mi vehetjük fel, ezért tegyük azt úgy, hogy az x-tengelyen mozogjon a pont (vagy akár az y-tengelyen is lehetne, de mi itt most így fogjuk magyarázni).

Ekkor a pont helyzetét leírja az $x(t)$ *helyfüggvény*.

A helyfüggvény időbeni változásának mértéke (matematikailag a függvény idő szerinti deriváltja) a *sebességfüggvény*: $v(t)$.

A sebességfüggvény időbeni változásának mértéke (matematikailag a függvény idő szerinti deriváltja) a *gyorsulásfüggvény*: $a(t)$.

(A matematikai fogalmakat összevonva a gyorsulás a hely idő szerinti második deriváltja.)

Fentiek előjeles mennyiségek, azaz ha pozitívak, akkor "előre" mutatnak, ha negatívak, akkor "hátra".

Def.: Egyenes vonalú egyenletesen változó a mozgás, ha a gyorsulás az időben állandó.

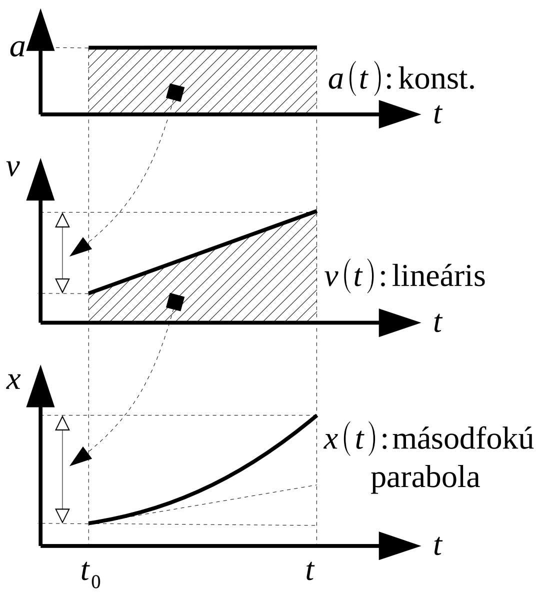
Ilyenkor az alábbi összefüggések érvényesek:

$$x(t)=\frac{a}{2}(t-t_0)^2+v_0\cdot(t-t_0)+x_0$$

$$v(t)=a\cdot(t-t_0)+v_0$$

$$x(t)=x_0+\frac{v_0+v(t)}{2}\cdot(t-t_0)$$

$$v^2(t)=v_0^2+2\cdot a\cdot(x(t)-x_0)$$



A képletek formális ismeretén kívül a felhasználáshoz azt érdemes tudni, hogy melyikben mi *nem* szerepel (az elsőben a t időpontbeli sebesség, a másodikban a hely, a harmadikban a gyorsulás, a negyedikben pedig az idő), ugyanis egy-egy egyenlet felírásához arra a képletre lesz célszerűen szükség, amelyikben csak egy ismeretlen van, a nem szereplő mennyiség pedig sem ismert, sem keresett mennyiségként nem fordul elő a feladatban.

A négy képlet kiolvasható a három grafikonból is, lefelé az integrálás miatt a terület az érték változásával arányos.

Az első képlet a konstans kezdeti értéknek a kezdeti sebesség hatásának és a gyorsulás hatásának összege.

A második képlettel a kezdeti sebesség és a gyorsulás hatását kezeljük.

A harmadik esetben a vizsgált időtartam átlagos sebességével számolunk.

Az utolsó képletben az idő kizárásával lesz összefüggésünk gyorsulás, sebesség és hely között.

Fenti képletek tovább egyszerűsödhetnek, ha a koordináta-rendszert szabadon választhatjuk meg. A célszerű megoldás ilyenkor az, hogy a hely és az idő kezdőpontját úgy választjuk meg, hogy $x_0=0$ és $t_0=0$ legyen. Ekkor a képletek az alábbi összefüggésekké egyszerűsödnek:

$$x=\frac{a}{2}t^2+v_0 t=\frac{v_0+v}{2}t,\quad v=v_0+at,\quad v^2=v_0^2+2ax$$

Fenti képleteket meg kell tanulni. (Mint négy rövid verset.)

Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Az egyenes vonalú mozgás további speciális esete, ha $a=0$. Ezt egyenletes mozgásnak nevezzük, ilyenkor a sebesség állandó: $v=v_0$ és $x(t)=x_0+v_0\cdot t$, mely képleteket az egyenletesen változó mozgás képleteiből is megkaphatunk.

Mintapélda – 6

Adott egy anyagi pont sebessége $v(t)=20-4\cdot t$ (m/s, ha az időt s-ban mérjük).

Határozzuk meg a pont gyorsulását!

Határozzuk meg a pont helyzetét a kiindulási helyzethez képest 8 másodperc elteltével!

A kiindulási helyzethez képest hol éri el a $10\,\mathrm{m/s}$ sebességet?

Megoldás

A $t_0=0$ egyszerűsítést használva a sebesség függvényben a paraméterek megfeleltetésével:

$$v_0+a\cdot t=20+(-4)\cdot t \;\rightarrow\; v_0=+20\,\mathrm{m/s},\, a=-4\,\mathrm{m/s^2}$$

A gyorsulás tehát $\boxed{-4\,\mathrm{m/s^2}}$.

A pont helyzetét a kiindulási helyzethez képest keressük, így az $x_0=0$ helyzetbe tehetjük a koordináta-rendszer origóját. Az első képletet használva:

$$x(t)=\frac{-4}{2}t^2+20\cdot t \;\rightarrow x(8)=\frac{-4}{2}8^2+20\cdot 8\rightarrow \boxed{x(8)=32\,\mathrm{m}}$$

Az utolsó kérdést feltehetjük olyan formában, hogy mikor lesz $10\,\mathrm{m/s}$ a tömegpont sebessége és hol lesz akkor. Ezzel a módszerrel az első részkérdésre a válasz:

$$v(t)=v_0+a\cdot t\rightarrow 10=20-4\cdot t\rightarrow t=2{,}5\,\mathrm{s}\,,$$

aminek ismeretében a hely:

$$x(t)=\frac{-4}{2}t^2+20\cdot t \;\rightarrow x(2{,}5)=\frac{-4}{2}2{,}5^2+20\cdot 2{,}5\rightarrow \boxed{x=37{,}5\,\mathrm{m}}$$

Az utolsó kérdés rövidebb számításához ismerjük a kérdéses szakaszon a kezdeti és a végsebességet, valamint a gyorsulást, így az utolsó képletben egyetlen ismeretlenünk (a keresett hely) szerepel:

$$v^2=v_0^2+2\cdot a\cdot x\rightarrow 10^2=20^2+2\cdot(-4)\cdot x\rightarrow \boxed{x=37{,}5\,\mathrm{m}}$$

Gyakorlópélda – 6

Adott egy anyagi pont sebessége $v(t)=6\cdot t-3$ (m/s, ha az időt s-ban mérjük).

Határozzuk meg a pont gyorsulását!

Határozzuk meg, hogy mikor lesz a pont a *t*=0 kiindulási helyzethez képes $15\,\mathrm{m}$ távolságban!

A kiindulási helyzethez képest hol éri el a $18\,\mathrm{m/s}$ sebességet?

Megoldás

A sebességfüggvény alakjából olvassuk ki a mozgás fő paramétereit:

$v(t)=6\cdot t-3 \rightarrow v_0=$, $a=$ (Előjelek, mértékegységek!)

A második kérdésben az idő, a hely, a kezdeti sebesség és a gyorsulás szerepel ismert, vagy keresett mennyiségként, de a vizsgált pillanatban a sebesség nem. Ennek megfelelően a célszerűen használható képlet: $=$, nullára rendezve egy másodfokú egyenlet: $0=$, aminek megoldása:

$t_{1,2}=$

A két érték közül a feladat szövegéhez fizikailag értelmezhető megoldás: $t=$

A harmadik kérdéshez keressük meg azt a képletet, amelyikben a kezdeti- és végsebesség, a gyorsulás és a hely szerepel (tehát az idő nem), és írjuk fel az ismert számértékekkel:

aminek megoldása: $x=$

Mintapélda – 7

Két jármű azonos kezdősebességgel ($v_0=60\,\mathrm{km/h}$) halad egymás mögött 15 méterrel. Az elől haladó jármű fékez, és $2\,\mathrm{m/s^2}$ egyenletes lassulással megáll. A mögötte haladó jármű 1 másodperccel később kezd fékezni, majd azonos lassulással próbál megállni.

Összeütközik-e a két jármű? Ha igen, mikor, hol és mekkora sebességkülönbséggel?

Megoldás

A két jármű akkor ütközik össze, ha van olyan pillanat, amikor a helyzetük azonossá válik. Ez bekövetkezhet akkor, amikor még mindkettő mozog, vagy akkor, amikor az első már megállt. Tegyük fel, hogy az előbbi eset következik be.

Az első jármű helyzete az idő függvényében, ha az időt a fékezése kezdetétől mérjük és a koordináta-rendszert a fékezés kezdőpontjától indítjuk:

$$x_1(t)=\frac{a}{2}t^2+v_0\cdot t=\frac{-2}{2}t^2+\frac{60}{3{,}6}\cdot t=-t^2+16{,}67\,t$$

A második jármű a $t=0$ pillanatban a -15 helyen van, és állandó sebességgel halad 1 másodpercen keresztül. Fékezése kezdetekor a helyzete: $x_{2,0}=-15+16{,}67\cdot 1=+1{,}67\,\mathrm{m}$.

Ezt is felhasználva, a fékezés megkezdése után a helyzete az idő függvényében:

$$x_2(t)=\frac{a}{2}(t-t_0)^2+v_0\cdot(t-t_0)+x_{2,0}=\frac{-2}{2}(t-1)^2+16{,}67\cdot(t-1)+1{,}67\ ,$$

ami egyszerűsítve: $x_2(t)=-t^2+18{,}67\cdot t-16$. Ezt egyenlővé téve az első jármű helyzetével:

$$-t^2 16{,}67\cdot t=-t^2+18{,}67\cdot t-16 \rightarrow\ t=8\,\mathrm{s}\ \cdot$$

Ellenőrizzük a kiindulási feltevésünket: az első jármű sebessége $v(8)=16{,}67-2\cdot 8=+0{,}67\,\mathrm{m/s}$, míg a hátsóé $v_2(8)=16{,}67-1\cdot(8-1)=+2{,}67\,\mathrm{m/s}$ azaz még egyik sem állt meg teljesen, azaz még mindkét jármű halad. (A felírt egyenleteink alapján matematikailag a megállás után mindkét jármű elindulna visszafelé, ezért egy, az ütközés pillanatában negatív sebesség arra utalna, hogy az adott jármű az ütközés pillanatában már hátrafelé mozogna, ami nem életszerű a feladat kiírása alapján. Ekkor azt kellene kiszámolnunk, hogy a hátsó jármű elérné, elérhetné-e az első megállási helyét.) A válasz tehát: igen, a két jármű összeütközik az első fékezését követően 8 másodperccel. A sebességkülönbségük az ütközés pillanatában $+2{,}67-0{,}67=2\,\mathrm{m/s}$, az ütközés helye:

$x_1(8)=16{,}67\cdot 8-8^2=\boxed{69{,}36\,\mathrm{m}}$ az első jármű fékezésének kezdőpontjától.

Gyakorlópélda – 7

Gyorsulási versenyen két jármű egymás mellől indul álló helyzetből azonos irányba. Az első jármű 0,5 másodperccel hamarabb elindul, a gyorsulása $a_1=3\,\mathrm{m/s^2}$. A második jármű gyorsulása $a_2=3{,}2\,\mathrm{m/s^2}$.

Mekkora előnyre tesz szert a korábban rajtoló jármű (sebességben, távolságban)?

Mikor és hol éri utol a második jármű az elsőt?

Megoldás

Írjuk fel mindkét jármű helyzetét az idő függvényében, a helyet a rajttól mérve, az időt pedig a második jármű indulásától kezdve. Így amikor a két függvény azonossá válik, az idő az utolérés pillanatával lesz egyenlő.

Az első jármű mozgása:

A korábbi indulással szerzett előnyhöz azt kell tudnunk, hogy mekkora lesz az első jármű sebessége, amikor a második elindul, és hol lesz a rajthoz képest?

$v_{1,0}=$, $x_{1,0}=$

A második jármű rajtjától indítva a *t* időt, hol lesz az első jármű az idő függvényében?

$$x_1(t)=\frac{a_1}{2}t^2+v_{1,0}\cdot t+x_{1,0}=$$

A második jármű mozgása

A koordináta-rendszer és az idő megválasztása miatt:

$$x_2(t) =$$

Az utolérés pillanata

Azt a *t* pillanatot keressük, amikor $x_1 = x_2$:

Rendezzük a fenti egyenletet 0-ra: $0 =$, aminek a megoldása:

$$t_{1,2} =$$

A két megoldás közül melyik értelmes fizikailag? $t =$

Hol lesznek ekkor a járművek?

Mintapélda – 8

Egyenletesen változó mozgást végző test helyzete a $t=0\,\mathrm{s}, t=2\,\mathrm{s}, t=4\,\mathrm{s}$ pillanatokban rendre $1\,\mathrm{m}, 4\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m}$.

Írjuk fel a pont helyzetét az idő függvényében!

Megoldás

Az egyenletesen változó mozgás miatt az $x(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$ függvény $a, v_{0,} x_0$ paramétereit kell meghatároznunk.

A $t=0$ pillanatból $x_0 = 1\,\mathrm{m}$.

Az első 2 másodperces időszak alatt a test átlagos sebessége $\frac{4-1}{2-0} = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$ volt, a második 2 másodperces időszak alatt pedig $\frac{10-4}{4-2} = 3\,\mathrm{m/s}$. Ezeket az átlagos sebességeket rendre az időtartamok közepén, azaz $t = \frac{2-0}{2} = 1\,\mathrm{s}$ és $t = \frac{4-2}{2} = 3\,\mathrm{s}$ időpontokban éri el a test, amiket a $v(t) = v_0 + a \cdot t$ képletbe behelyettesítve a $\begin{array}{c} 1{,}5 = v_0 + a \cdot 1 \\ 3{,}0 = v_0 + a \cdot 3 \end{array}$ kétismeretlenes egyenletrendszerhez vezet. A két egyenletet kivonva egymásból számolható a gyorsulás, majd azt felhasználva a kezdeti sebesség: $\begin{array}{c} a = 0{,}75\,\mathrm{m/s^2} \\ v_0 = 0{,}75\,\mathrm{m/s} \end{array}$.

Ezekből a test helyzete: $\boxed{x(t) = 0{,}375 \cdot t^2 + 0{,}75 \cdot t + 1{,}0\,[\mathrm{m}]}$

Gyakorlópélda – 8

Egyenletesen változó mozgást végző test sebessége az $x=1\,\mathrm{m}, x=3\,\mathrm{m}$ pontokban rendre $2\,\mathrm{m/s}, 4\,\mathrm{m/s}$.

Mekkora lesz a test sebessége az $x=5\,\mathrm{m}$ pontban?

Megoldás

A megadott szakaszon ismert a kezdő- és végsebesség, valamint a szakasz hossza. Ezekből külön egyenletekből kiszámítható a gyorsulás, illetve a szakasz megtételéhez szükséges idő.

A gyorsulás számítása

Az időt nem tartalmazó képlettel:

Ezt a gyorsulást felhasználva:

Megoldás 2: Az idő kiszámításával

Az első szakasz időtartamának számításához a megtett út átlagsebességből történő számításának képletét használhatjuk:

Ebből a sebesség változását felírva a gyorsulás:

A harmadik pont elérésének időpontja:

nullára rendezve:

$t_{1,2}=$

A fizikailag értelmezhető időpont: $t=$

Ekkor a sebesség: $v=$ → $v=$

Mintapélda – 9

Egyenes vonalú egyenletes mozgást végző anyagi pontnak tekinthető test tíz másodperc alatt 8 métert tesz meg. Mennyi idő alatt jut el a kiindulási ponttól 43 méter távolságba?

Megoldás

Az első kijelentés alapján az állandó sebesség: $8=v\cdot 10 \rightarrow v=0{,}8\,\mathrm{m/s}$

Ezt felhasználva a megtett út: $x(t)=0{,}8\cdot t \rightarrow 43=0{,}8\cdot t \rightarrow$ $\boxed{t=53{,}75\,\mathrm{m}}$.

Gyakorlópélda – 9

Egyenes vonalú egyenletes mozgást végző anyagi pontnak tekinthető test 8 másodperc alatt tíz métert tesz meg. Mennyi idő alatt jut el a kiindulási ponttól 34 méter távolságba?

Megoldás

Az elmozdulásfüggvény általános alakja a megadott számokkal:

$$x(t)=x_0+v\cdot t \rightarrow$$

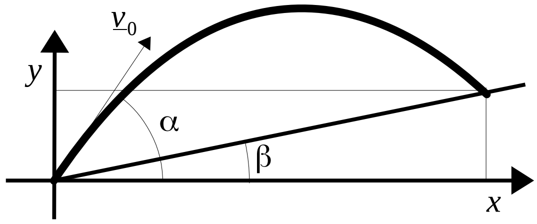
A keresett pillanatban a pont helye:

Általános síkbeli mozgás kinematikája

Nem egyenes vonalú mozgás esetén az egymásra merőleges irányú mozgásösszetevők úgy kezelhetők, mintha irányonként egyenes vonalú mozgások lennének. Ez igaz térbeli esetre is, de mi most csak síkbeli példákkal foglalkozunk. Ha egy elhajított test mozgását vizsgáljuk, és a légellenállás hatását elhanyagoljuk, akkor a test függőlegesen a gravitációs gyorsulás miatt gyorsul lefelé (ennek előjele a függőleges tengely irányától függ), míg vízszintesen állandó a sebessége.

Mintapélda – 1

Számítsuk ki az emelkedő alján álló íjász által kilőtt nyílvessző földetérésének a helyét. A nyílvessző kezdeti sebessége $v_0 = 90\,\text{km/h}$, a vízszintessel $\alpha = 40°$-os szöget zár be. Az emelkedő hajlásszöge $\beta = 10°$, a légellenállást elhanyagoljuk.



Megoldás

A légellenállás elhanyagolása miatt a test gyorsulása megegyezik a $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ gravitációs gyorsulással lefelé. Az ábrán vázolt koordináta-rendszer szerint a gyorsulások:

$$a_x = 0\,\text{m/s}^2,\ a_y = -9{,}81\,\text{m/s}^2.$$

Azaz a vízszintes mozgás egyenletes mozgásnak, a függőleges egyenletesen változó mozgásnak felel meg, azaz $x(t) = x_0 + v_x \cdot t,\ y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y}{2} \cdot t^2$.

A koordináta-rendszer felvétele miatt $x_0 = y_0 = 0$.

A kezdeti sebességvektor vetületeiből:

$$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha = \frac{90}{3{,}6} \cdot \cos 40° = 19{,}15\,\text{m/s},$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha = \frac{90}{3{,}6} \cdot \sin 40° = 16{,}07\,\text{m/s}.$$

Fenti adatokkal a test helyzete az idő függvényében:

$$x(t) = 19{,}15 \cdot t,\quad y(t) = 16{,}07 \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2.$$

A földetérés pillanatában: $y(t) = x(t) \cdot \text{tg}\,\beta$, amibe behelyettesíthetjük a két koordinátát:

$$16{,}07 \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2 = 19{,}15 \cdot t \cdot \text{tg}\,10° \ \rightarrow\ 12{,}69 \cdot t - 4{,}905\,t^2 = 0.$$

Ennek két megoldása $t = 0\,\text{s}$ és $t = 2{,}587\,\text{s}$: a pályagörbe és a ferde egyenes két metszéspontjának elérési idejét jelenti. Az első a kilövés pillanatához, a második a földetéréshez tartozik. A nyílvessző helyzete ekkor:

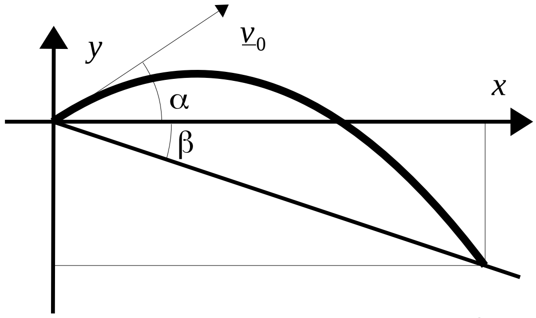
$$x(2{,}587) = 19{,}15 \cdot 2{,}587 \rightarrow \quad \boxed{x = 49{,}54\,\text{m}}$$

$$y(2{,}587) = 16{,}07 \cdot 2{,}587 - 4{,}905 \cdot 2{,}587^2 \rightarrow \quad \boxed{y = 8{,}746\,\text{m}}$$

Megjegyzés:

A kilövéstől eltelt idő kifejezhető a vízszintes helyzet függvényében: $t = x/19{,}15$, amit behelyettesítve a függőleges koordináta függvényébe: $y = \frac{16{,}07}{19{,}15} \cdot x - \frac{4{,}905}{19{,}15^2} x^2$ egy másodfokú polinomot kapunk, azaz a nyílvessző pályája egy másodfokú parabola lesz.

Gyakorló példa – 1



Számítsuk ki a lejtő tetején álló íjász által kilőtt nyílvessző földetérésének a helyét. A nyílvessző kezdeti sebessége $v_0=100$ km/h, a vízszintessel $\alpha=15°$-os szöget zár be. A lejtő hajlásszöge $\beta=10°$, a légellenállást elhanyagoljuk.

Megoldás

A légellenállás elhanyagolása miatt a test gyorsulása függőlegesen lefelé $g=9{,}81\,\text{m/s}^2$. Ezt figyelembe véve a gyorsulásvektor vízszintes és függőleges komponense:

$a_x=$, $a_y=$ (előjelek!)

Jellemezzük a test mozgását: vízszintesen: ....

függőlegesen: ....

A mozgásnak megfelelően a koordináták időfüggésének általános képlete:

$x(t)=$

$y(t)=$

ahol az ismeretlen paraméterek x_0, v_{0x}, y_0, v_{0y} .

A kordinátarendszer felvétele miatt $x_0=$, $y_0=$

A kezdeti sebesség: $v_0=$, melynek előjelhelyes komponensei:

$v_{0x}=$

$v_{0y}=$

A koordináták függvényei számszerűen:

$x(t)=$ $y(t)=$

A földetérés pillanatában: $y(t)=$.

Helyettesítsük be a fenti két koordinátafüggvényt:

és oldjuk meg *t*-re. $t_1=$ $t_2=$

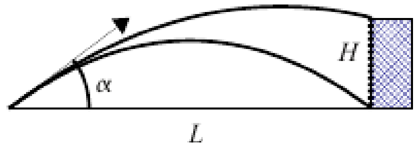
Gondoljuk át a megoldások fizikai jelentését! A nem triviális megoldás fizikailag lehetséges-e? Ha igen, hol van ekkor a nyílvessző:

$x=$

$y=$

Mintapélda - 2

Labdarúgó-mérkőzés szünetében a vállalkozó kedvű nézőknek a pálya közepéről, a ($H=2{,}44\,\mathrm{m}$ magas) kaputól $L=45\,\mathrm{m}$ távolságra levő labdát kell a kapuba rúgni. Az egyik jelentkező technikája olyan, hogy a labda sebességvektora az elrúgás pillanatában a vízszintessel $\alpha=40°$-os szöget zár be. Mekkora sebességgel kell elrúgnia a labdát, hogy az éppen a kapuba érkezzen és addig ne pattanjon a földre?



Megoldás

Helyezünk egy jobbra-felfelé mutató *xy* koordináta-rendszert az elrúgás pontjába. A feladatunk olyan kezdeti sebességek meghatározása, melyekre igaz, hogy amikor az *x* koordináta eléri *L* értékét, az *y* koordináta értéke 0 és *H* között lesz. Ennek meghatározásához a kezdeti sebesség függvényében kifejezzük az időt, majd abból a föld fölötti magasságot, amire két egyenlőtlenséget írunk fel.

A légellenállás elhanyagolása miatt a labdának nincs vízszintes gyorsulása, függőlegesen lefelé gyorsul *g*-vel. A kezdeti sebességet és a koordináta-rendszer elhelyezését figyelembe véve a koordináták az idő függvényében:

$$x(t)=v_0\cdot\cos 40°\cdot t$$

$$y(t)=-\frac{g}{2}\cdot t^2+v_0\cdot\sin 40°\cdot t$$

Az első egyenletből az idő, amikor a labda eléri a gólvonal függőleges síkját:

$$t=\frac{L}{v_0\cdot\cos 40°},$$

a labda magassága ebben a pillanatban:

$$y_g=-\frac{g}{2}\cdot\left(\frac{L}{v_0\cdot\cos 40°}\right)^2+v_0\cdot\sin 40°\cdot\frac{L}{v_0\cdot\cos 40°}$$

A lepattanás elkerüléséhez $y_g>0$ feltételt kell teljesíteni (az átalakításoknál ügyelve az egyenlőtlenségre):

$$-\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2 40°}+L\cdot\mathrm{tg}\,40°>0\rightarrow L\cdot\mathrm{tg}\,40°>\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2 40°}\rightarrow v_0^2>\frac{gL}{2\,\mathrm{tg}\,40°\cos^2 40°}$$

amiből (felhasználva, hogy $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$, illetve $2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin(2\cdot\alpha)$):

$$v_0>\sqrt{\frac{gL}{\sin 80°}}=\sqrt{\frac{9{,}81\cdot 45}{\sin 80°}}=21{,}17\,\mathrm{m/s}$$

Ahhoz, hogy ne menjen fölé, az $y_g<H$ feltételt kell teljesíteni:

$$-\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2 40°}+L\cdot\mathrm{tg}\,40°<H\rightarrow L\cdot\mathrm{tg}\,40°-H<\frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2 40°}\rightarrow v_0^2<\frac{gL}{2\left(\mathrm{tg}\,40°-\frac{H}{L}\right)\cos^2 40°}$$

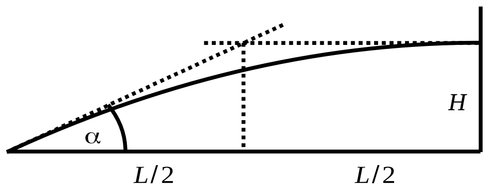
amiből:

$$v_0 < \sqrt{\frac{g\,L}{2\left(\operatorname{tg}40° - \frac{H}{L}\right)\cos^2 40°}} = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot 45}{2\left(\operatorname{tg}40° - \frac{2{,}44}{45}\right)\cos^2 40°}} = 21{,}89\,\mathrm{m/s}$$

Ahhoz tehát, hogy egyenesen a kapuba találjon, a kezdősebességnek az alábbi határok közé kell esni: $\boxed{21{,}17\,\mathrm{m/s} < v_0 < 21{,}89\,\mathrm{m/s}}$.

Gyakorló példa – 2

Mekkora szögben és milyen sebességgel kell a várfaltól $L=200\,\mathrm{m}$ távolságra álló ágyúból kilőni az ágyúgolyót, hogy az a falba $H=14\,\mathrm{m}$ magasan, vízszintesen csapódjon be?



Megoldás

A sebességvektor becsapódáskori iránya alapján melyik komponens akkori értékét ismerjük?

Mekkora az ilyen irányú gyorsulás?

Ezt felhasználva a sebességvektor függőleges vetülete a kilövéskor:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2\,a_y \cdot s_y \rightarrow$$

A lövéstől a becsapódásig eltelt idő alatt a sebesség függőleges komponense nullára csökken:

$$v_y = v_{0y} + a_y \cdot t \rightarrow$$

A vízszintes L távolságot egyenletes mozgással teszi meg az ágyúgolyó. Mekkora vízszintes sebesség szükséges ehhez?

$$L = v_x \cdot t \rightarrow$$

Akiszámított két komponens alapján a kilövés pillanatában a golyó sebessége és iránya:

$$v_0 =$$

$$\operatorname{tg}\alpha =$$

Körmozgás

A körmozgás a síkmozgás egy speciális esete, amikor a pont a sík egy pontjától mindvégig azonos távolságra mozog. A pont helyét megadhatjuk egy kezdeti helyzethez képest mért φ szögelfordulással. Ennek a szögelfordulásnak a mértékegysége radián és a koordináta-rendszerünkkel analóg módon akkor tekintjük pozitívnak, hogyha az óramutató járásával ellenkező irányú elfordulást jelent.

A szögelfordulás időbeni változása a *szögsebesség*, jele ω (omega). Az előjelének azonos az értelme, mint a szögelfordulásnak, azaz az óramutató járásával ellentétes irányú forgás esetén pozitív.

A szögsebesség időbeni változása a *szöggyorsulás*, jele κ (kappa). Az előjelet itt is azonos módon értelmezzük, mint az előző két mennyiségnél.

Ahogyan az egyenes vonalú mozgásnál megjegyeztük, itt is hasonló matematikai kapcsolat van a mozgás fenti három jellemzője között: a szögelfordulás idő szerinti első deriváltja a szögsebesség, a szögsebesség idő szerinti első deriváltja a szöggyorsulás (így a szöggyorsulás a szögelfordulás idő szerinti második deriváltja). A differenciális kapcsolatokban megjelenő elemek alapján az alábbi "szótárt" állíthatjuk össze:

Egyenes vonalú mozgás – körmozgás szótár:

Egyenes vonalú mozgás	Körmozgás	Görbe vonalú mozgás
x	φ	s
v	ω	v
a	κ	a_τ

A definíciókban a szótár "egyenes" és "kör" szavait megfeleltethetjük, így beszélhetünk akár egyenletesen változó körmozgásról is, ahol $\kappa = \text{állandó}$, ekkor a szögelfordulás számítható a múlt órai képlet lefordításával:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\kappa}{2} \cdot t^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \kappa_0 \cdot t$$

Gyakorló feladat: írjuk át a másik két képletet is:

$$x(t) = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t + x_0 \quad \rightarrow$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x \quad \rightarrow$$

A körmozgás jellemzőin túl a mozgás leírható távolságot tartalmazó mennyiségekkel is az alábbiak szerint. A körvonal mentén görbe vonalú ívhossz számolható: $s(t) = R \cdot \phi(t)$. A sebesség mindig érintőirányú lesz, a nagysága $v(t) = R \cdot \omega(t)$.

A gyorsulás bonyolultabb. Egyenes vonalú mozgásnál azt mondtuk, hogy a gyorsulás a sebesség időbeni változása. Ez továbbra is igaz, viszont ki kell egészítenünk azzal, hogy most már nem csak a nagysága változhat a sebességnek, hanem az iránya is. (Emlékezzünk rá, hogy vektormennyiség!)

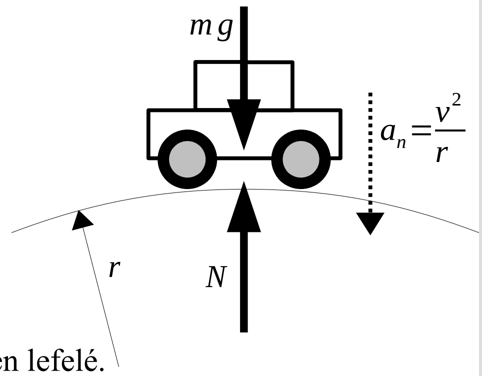
A nagyság változása mindig egy érintőirányú gyorsuláskomponenst eredményez: $a_\tau(t) = R \cdot \kappa(t)$. Ez a komponens az előjelétől függően mutathat a körív mentén előre is, és hátra is.

Az irány változása mindig a kör középpontja felé mutató gyorsuláskomponens lesz, melynek nagysága: $a_n(t) = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$

E két, egymásra merőleges komponens vektoriális összege a pont eredő gyorsulása.

Belátható, hogy az érintőirányú mennyiségek között hasonló differenciális kapcsolat van, mint a szögelforduláshoz kapcsolódó mennyiségek, vagy az egyenes vonalú mozgás jellemzői között. Az s megtett ívhossz idő szerinti első deriváltja a v sebesség, annak idő szerinti deriváltja pedig az a_τ érintőirányú gyorsulás. Korábbi szótárunkat tehát kiegészíthetnénk akár egy további oszloppal is, ahova e három mennyiséget írhatnánk be, ráadásul az ezek között érvényes kapcsolat bármely görbevonalú mozgásra igaz lesz.

Mintapélda – 3



Egy $m = 1{,}2\,\mathrm{t}$ tömegű személygépkocsi egy $r = 800\,\mathrm{m}$ lekerekítési sugarú dombon halad át állandó $v = 70\,\mathrm{km/h}$ sebességgel. Mekkora a gyorsulása a domb tetején?

Megoldás

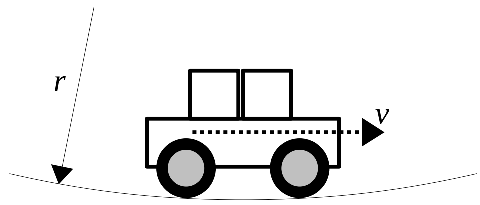
A jármű egy függőleges síkú körív mentén mozog.

A normálirányú gyorsulása: $a_n = \frac{v^2}{r}$, iránya mindig a kör középpontja felé mutat, így a domb tetején függőlegesen lefelé.

A sebesség $v = 70/3{,}6 = 19{,}44\,\mathrm{m/s}$, amiből $a_n = \frac{19{,}44^2}{800} \rightarrow \boxed{a_n = 0{,}4724\,\mathrm{m/s^2}}$

Megjegyzés: A feladatban nem foglalkoztunk azzal, hogy a járműre ható erők képesek-e ezt a mozgást létrehozni, az már a kinetika témakörébe fog tartozni. Előfordulhat, hogy nagy sebesség, vagy kis lekerekítési sugár esetén az útpályáról a járműre adódó erőnek húzóerőnek kellene lenni az adott mozgás eléréséhez. Ilyenkor a valóságban megszűnik a kapcsolat, és a jármű az útpályától független pályát jár be.

Gyakorló példa - 3



Egy $m = 1{,}0\,\mathrm{t}$ tömegű személygépkocsi egy $r = 800\,\mathrm{m}$ lekerekítési sugarú völgyön halad át állandó $v = 72\,\mathrm{km/h}$ sebességgel. Mekkora a gyorsulása a völgy alján?

Megoldás

A jármű egy függőleges síkú körív mentén mozog, sebessége $v =$

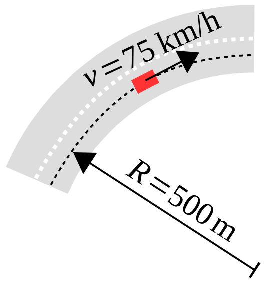
A körív minden pontján a kör középpontja felé mutat a normálirányú gyorsulása. Ez az irány a vizsgált pillanatban:.....................

Mekkora a nagysága ennek a gyorsulásnak? $a_n =$.

Mekkora az érintőirányú gyorsulás? Miért? $a_\tau =$

Mintapélda - 4

Mekkora az $R=500\,\text{m}$ sugarú ívben állandó $v=75\,\text{km/h}$ sebességgel haladó jármű gyorsulása?
Legalább mekkora út kell az egyenletes lassulással való megállításhoz, ha a súrlódási együttható miatt a teljes gyorsulás nem érheti el az $1{,}5\,\text{m/s}^2$-t?



Megoldás

Az állandó sebesség esetén csak normálirányú gyorsulás van, melynek nagysága $a_n=\frac{v^2}{R}$, iránya a kör középpontja felé mutat. A km/h-ban megadott sebesség m/s-ra átszámolva: $v=\frac{75}{3{,}6}=20{,}83\,\text{m/s}$, ezt felhasználva a képletben: $a_n=\frac{20{,}83^2}{500}\rightarrow \boxed{a_n=0{,}8678\,\text{m/s}^2}$

Egyenletes lassulás esetén az érintőirányú a_τ gyorsulás állandó, míg a normálirányú gyorsulás a sebesség csökkenésével négyzetesen csökken (kezdeti értéke az előbb kiszámolttal azonos). A teljes gyorsulást a két komponensből Pitagorasz-tétellel számoljuk: $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$. Ennek minden pillanatban kisebbnek kell lennie a maximális értéknél:

$$\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}<1{,}5\rightarrow a_\tau^2+a_n^2<1{,}5^2\rightarrow a_\tau^2<1{,}5^2-a_n^2$$

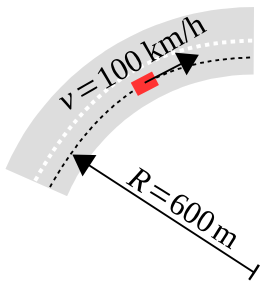
Az utolsó egyenlőtlenségnek a_n legnagyobb (már kiszámolt) értéke esetén is igaznak kell lennie, azaz $|a_\tau|<\sqrt{1{,}5^2-0{,}8678^2}=1{,}223\,\text{m/s}^2$. Mivel a kerekítést lefelé végeztük, ezért a továbbiakban az egyenlőtlenséget kielégítő kerekített értékkel számolunk.

A kiszámított maximális érintőirányú gyorsulással a kezdeti sebességről a megállásig megtett út (miután e megfogalmazásból látszik, hogy e kérdésben nem szerepel az idő):

$$v^2=v_0^2+2\cdot a_\tau\cdot s\rightarrow\quad 0^2=20{,}83^2+2\cdot(-1{,}223)\cdot s\rightarrow \boxed{s=177{,}4\,\text{m}}$$

Gyakorló példa - 4

Mekkora az $R=600\,\text{m}$ sugarú ívben állandó $v=100\,\text{km/h}$ sebességgel haladó jármű gyorsulása?
A sebességet 2 másodperc alatt egyenletes gyorsulással 120 km/h-ra növeljük. Számítsuk ki a gyorsulást a gyorsítási szakasz kezdetén és végén!



Megoldás

Mekkora az állandó sebesség m/s-ban? $v=$

Állandó sebességgel haladva a vízszintes síkú körpályán milyen irányú a gyorsulás? ....

Mekkora ez a gyorsulás? $a_n=$

A gyorsítás végén a sebesség m/s-ban $v=$

A gyorsítás időtartamának ismeretében számítható az érintőirányú gyorsulás:

$v=v_0+a_\tau \cdot t \rightarrow$

A teljes gyorsulás a gyorsítás kezdetén (felhasználva az állandó sebességnél kiszámított normálirányú gyorsulást:

$a_0=$

A teljes gyorsulás a gyorsítás végén:

$a_1=$

Kötött pályán való mozgás

Amennyiben a pont pályáját, lehetséges helyzeteit egy $\boldsymbol{r}(s)$ függvénnyel adjuk meg, ahol az s ívhosszparaméter egy rögzített kezdőpontból az adott pontig mért távolság a pálya íve mentén, akkor a pont pillanatnyi helyzetének leírásához elegendő az ívhosszparaméter időbeli változását megadni $s(t)$ alakban. A pont további mozgásjellemzői ekkor az alábbiak szerint alakulnak.

A sebességvektor minden pontban érintőirányú lesz a pálya görbéjéhez viszonyítva, a sebesség nagysága az ívhosszparaméter idő szerinti deriváltja, azaz $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{dt}}$. (A negatív sebességérték itt azt jelenti, hogy a pályán az s növekedésével ellenkező irányba, "hátrafelé" mozog a test.)

A gyorsulás lokálisan egy, a görbéhez az adott pontban rendelhető simulókörön való mozgásnak felel meg, így a körmozgásnál tanultak alkalmazhatók. A gyorsulásvektor két komponensből áll. Az *érintőirányú* gyorsulás a sebesség nagyságának változásával egyenlő, azaz $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{dt}}$. A sebesség irányának változását a körmozgáshoz hasonlóan a normálirányú gyorsulás fejezi ki, melynek nagysága $a_n=\frac{v^2}{\varrho}$, ahol v a pont sebessége, ϱ pedig a pálya görbületi sugara, azaz a simulókör sugara. E gyorsuláskomponens a pályára az adott pontban merőleges, a simulókör középpontja felé mutat.

Ha a mozgást koordinátákkal és pályaadatokkal is ismerjük, akkor az a_x, a_y, a_z komponensekből, illetve az a_τ, a_n komponensekből természetesen ugyanazt a gyorsulásvektort kell megkapnunk.

Newton mozgástörvényei

A továbbiakban a mozgás okát is vizsgáljuk, azaz kinetikai feladatokat oldunk meg.

Emlékeztetőül Newton három mozgástörvénye (ami valójában axióma, de az általunk használt mérettartományokban törvényként hivatkozhatunk rájuk):

1. Egy anyagi pont megőrzi egyenes vonalú egyenletes mozgását, vagy nyugalmi helyzetét, amíg egy másik test vagy mező mozgásállapotának megváltoztatására nem kényszeríti.

2. Egy anyagi pontra ható erő által okozott gyorsulás az erővel azonos irányú, a két mennyiség között az arányossági tényező a tömegpont tehetetlen tömege. ($\boldsymbol{F}=m\,\boldsymbol{a}$)

3. Két test kölcsönhatása során az egymásra kifejtett erők azonos nagyságúak, közös hatásvonalúak és ellentétes irányúak. (Hatás-ellenhatás törvénye.)

Newton további folyományokat fűzött a törvényeihez. Ezekre az akkoriban még nem rendelkezésre álló műveletek megoldásához volt szükség, itt nem soroljuk fel őket.

Továbbra is csak anyagi pontokról beszélünk, így bármely a pontra ható erő hatásvonala átmegy a ponton. Ezért a mozgás tetszőleges pillanatában felvehetünk egy *xyz* koordináta-rendszert, aminek az origója abban a pillanatban éppen a pont helye. Így több erő hatását az erők vektoriális összegzése alapján vizsgálhatjuk.

Itt és most csak a második mozgástörvényt használjuk. Általában kétféle feladat fordulhat elő (minden irányban). Vagy ismerjük a testre ható erőket külön-külön, és ebből kell a mozgását meghatároznunk, vagy pedig arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen erőket kell ahhoz működtetnünk, hogy egy bizonyos mozgást elérjünk. Előbbi esetben az $\boldsymbol{F}=m\cdot\boldsymbol{a}$ vektoregyenlet bal oldalán levő erőket kell összegeznünk, amiből irányonként ki tudjuk számítani a gyorsulásokat, illetve azokból és a kezdeti sebességkomponensekből és helyvektorból a pont helyzetét. Utóbbi esetben a mozgásjellemzőkből a gyorsulást, majd az $\boldsymbol{F}=m\cdot\boldsymbol{a}$ vektoregyenlet bal oldalán szereplő ismeretlen erőkomponenseket kell meghatároznunk. A *statikai feladatok*ban nincs mozgás, így nincsen gyorsulás sem, ezért a statikai feladatok mindig a második csoportba tartoznak.

Amikor a gyorsulás ismeretében számolunk erőket, az előírt mozgáshoz mindig tartozik valamilyen kinematikai kényszer. Ez a kényszer azt jelenti, hogy a test mozgása valamilyen irányban korlátozott. Ezt a korlátozást egy (később majd úgy mondjuk, hogy a meggátolt elmozdulással munkakompatibilis, azaz azon munkát végezni képes) ismeretlen nagyságú erő hozza létre.

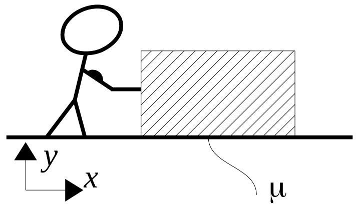
Amennyiben egy testre több erő hat egyszerre, azokat eggyüttesen *erőrendszernek* nevezzük. Azt az egyetlen erőt, amely ugyanazon az anyagi ponton ugyanolyan gyorsulást hoz létre, mint egy erőrendszer, az erőrendszer *eredő*jének nevezzük. Az eredő tulajdonsága, hogy az általa létrehozott gyorsulás megegyezik az erőrendszer erői által külön-külön létrehozott gyorsulások vektoriális összegével.

Csúszó súrlódás

Amennyiben két érintkező síkfelület egymáshoz képest elmozdul, akkor az összenyomott felületen a két érintkező test között átadódó erőt két részre tudjuk bontani. A felület síkjára merőleges erőt szorítóerőnek nevezzük (jele N, ennek az erőnek természetesen nyomóerőnek kell lennie), a síkkal párhuzamos komponenst pedig súrlódási erőnek nevezzük (jele F_S). Ennek a két erőnek a hányadosa a (csúszó) súrlódási tényező, jele μ (mű), számítási módja $\mu=F_S/N$. Bár a súrlódás és a súrlódási tényező kezelésére sokféle modell létezik, mi csak olyan egyszerű modellt használunk, ahol a μ értéke állandó (a szorítóerőtől és a felületek relatív sebességétől független). Ezt a modellt Coulomb-féle száraz súrlódásnak nevezzük.

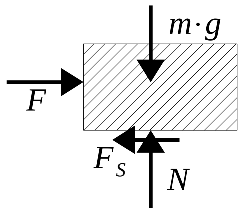
Mintapélda – 5

Vízszintes pályán mekkora úton tudjuk felgyorsítani álló helyzetből $13\,\text{m/s}$ sebességre az $m=50\,\text{kg}$ tömegű testet az $F=200\,\text{N}$ nagyságú vízszintes erővel, ha a csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}1$?



Megoldás

Az ábrán felrajzoltuk a testre ható összes erőt.



A súlyerő: $m\cdot g=50\cdot 9{,}81=490{,}5\,\text{N}$, lefelé mutat. Az F nyomóerő jobbra, az N szorítóerő felfelé. A gyorsítás esetén a gyorsulásnak és az elindulás pillanatát követően a test sebességének jobbra kell mutatnia, ezért a testre ható F_S súrlódási erő balra mutat. Mivel a test vízszintes úton mozog, ezért a sebessége és a gyorsulása is vízszintes lesz függőleges komponensek nélkül. Newton második törvényének megfelelően tehát:

$$\sum F_{i\rightarrow}: F-F_S=m\cdot a_x$$

$$\sum F_{i\uparrow}: N-m\cdot g=m\cdot 0$$

A második egyenletből $N=m\cdot g=490{,}5\,\text{N}$

A súrlódási feltétel alapján $F_S=\mu\cdot N=0{,}1\cdot 490{,}5=49{,}05\,\text{N}$

Ezt felhasználva a vízszintes egyenletben: $200-49{,}05=50\cdot a_x \rightarrow$ $\boxed{a_x=+3{,}019\,\text{m/s}^2\,(\rightarrow)}$

A pozitív előjel azt jelenti, hogy a feltételezett irányba mutat a gyorsulás. (Mivel csúszást feltételeztünk, a negatív előjel egészen mást jelentene. Ötször ekkora súrlódási együttható mellett az álló helyzetből indított testre kiszámolható balra mutató gyorsulás mellett a sebesség is balra mutatna, ami miatt a súrlódási erő iránya megfordulna, ettől azonban a vízszintes egyenletünk és annak megoldása is megváltozna. Ez ellentmondásra vezetne, aminek az az oka, hogy a nagy súrlódás miatt a test valójában nem mozdulna meg, a gyorsulása lenne nulla, a súrlódási erő pedig az egyensúlyhoz éppen szükséges értéket venné fel. Ha viszont már mozogna, akkor elképzelhető jobbra mutató sebesség, de a balra mutató gyorsulás miatt az csökkenne.)

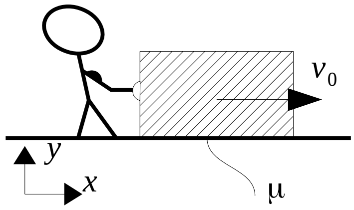
Ezután következik a feladat kinematikai részének megoldása. A gyorsulás állandó, így az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás megfelelő képletét használhatjuk:

$$v^2=v_0^2+2\cdot a_x\cdot x \rightarrow 13^2=0^2+2\cdot 3{,}019\cdot x$$

Ennek megoldásából a gyorsításhoz szükséges út: $\boxed{x=27{,}99\,\text{m}}$.

Gyakorló példa – 5

Vízszintes úton mennyi idő alatt tudjuk lefékezni álló helyzetbe a $13\,\text{m/s}$ kezdeti sebességű $m=50\,\text{kg}$ tömegű testet az $F=200\,\text{N}$ nagyságú vízszintes erővel, ha a csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}1$?



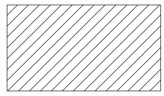
Megoldás

A feladat megoldásához ki kell számolnunk a test gyorsulását, majd abból a megálláshoz szükséges időt.

Rajzoljuk fel a testre ható összes erőt:

(A súrlódási erő irányánál vegyük figyelembe a mozgás pillanatnyi irányát!)

Az erők közül az önsúly a tömegből számítható, ismert:



$$m \cdot g =$$

A test gyorsulásának komponensei:

$a_y =$ a vízszintes komponens feltételezett iránya: ( )

Irjuk fel Newton második tv.-ének skaláregyenleteit (amelyiket lehet, azt mindjárt oldjuk is meg):

$$\sum F_{iy}:$$

$$\sum F_{ix}:$$

A szorítóerő ismeretében számítsuk ki a súrlódási erőt:

$$F_S =$$

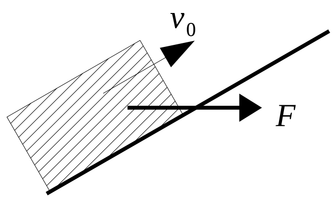
Ezt felhasználva a vízszintes irányhoz tartozó egyenlet:

Az állandó gyorsulás miatt a mozgás jellege:..

A kezdeti és végsebességet, az időt valamint a gyorsulást tartalmazó képlet:

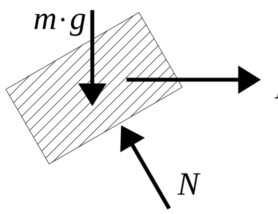
Behelyettesítve:

Mintapélda – 6



Egy $m=15\,\text{kg}$ tömegű testet vízszintes, $F=120\,\text{N}$ nagyságú erővel vontatunk felfelé az $\alpha=30°$ hajlásszögű emelkedőn. A test sebessége az emelkedő alján $v_0=3$ m/s. Mekkora lesz a test sebessége a 10 m hosszú emelkedő tetején? (A súrlódást elhanyagolhatjuk.)

Megoldás



Az ábrán felrajzoltuk a testre ható összes erőt.

A súlyerő: $m \cdot g = 15 \cdot 9{,}81 = 147{,}2\,\text{N}$, lefelé mutat. Az F húzóerő jobbra, az N szorítóerő balra-felfelé. Mivel a test az emelkedővel párhuzamosan mozog, ezért a sebessége és a gyorsulása is párhuzamos lesz az emelkedővel. Newton második törvényét felírhatjuk szokás szerint vízszintes és függőleges irányban:

$$\sum F_{ix}: F - N \cdot \sin\alpha = m \cdot a \cdot \cos\alpha$$

$$\sum F_{iy}: -m \cdot g + N \cdot \cos\alpha = m \cdot a \cdot \sin\alpha$$

vagy az emelkedőre merőleges és azzal párhuzamos irányban:

$$\sum F_{i\searrow}: m \cdot g \cdot \cos\alpha - N + F \cdot \sin\alpha = m \cdot 0$$

$$\sum F_{i\nearrow}: -m \cdot g \cdot \sin\alpha + F \cdot \cos\alpha = m \cdot a$$

A négy egyenlet közül csak kettőre van szükségünk. Látszik, hogy az első két egyenlet mindegyikében szerepel mindkét ismeretlen, míg a második két egyenletből képzett egyenletrendszer szétesik egyismeretlenesekre. Ennek az a valós oka, hogy az egyik a gyorsulásra, a másik a szorítóerőre merőleges irányú egyenlet, így rendre csak a másik ismeretlen marad benne. Természetesen bármelyik két egyenletből ugyanazt a megoldást kell kapjuk, de most a legegyszerűbb az utolsót megoldani: $-147{,}2\cdot\sin 30°+120\cdot\cos 30°=15\cdot a \rightarrow a=2{,}022\,\mathrm{m/s^2}(\nearrow)$.

Ezzel az állandó gyorsulással a keresett sebesség:

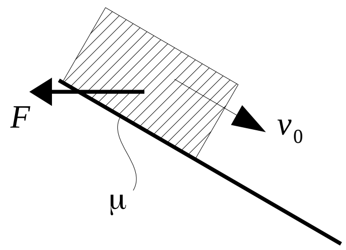
$$v^2=3^2+2\cdot 2{,}022\cdot 10 \rightarrow \boxed{v=7{,}031\,\mathrm{m/s}(\nearrow)}$$

Megjegyzés 1: a gyökvonás miatt a matematikai problémának lehetett volna -7,031 nagyságú megoldása is, ehhez azonban negatív idő tartozott volna, ami kívül van a feladat értelmezési tartományán.

Megjegyzés 2: ha nem hanyagoltuk volna el a súrlódást, akkor az is megjelent volna az egyenletekben, kivéve a lejtőre merőleges irányút, ezért abból a szorítóerőt ugyanígy tudtuk volna számolni, majd a párhuzamos egyenletben már az abból számított súrlódási erőt felhasználhattuk volna. Ilyen esetben azonban a negatív gyök a sebességnél nem csak az idő miatt lenne fizikailag nem elfogadható megoldás, hanem azért is, mert ahhoz a sebességhez más irányú súrlódási erő, így más gyorsulás tartozna.

Gyakorló példa – 6

Egy $m=15\,\mathrm{kg}$ tömegű test az $\alpha=30°$ hajlásszögű lejtőn csúszik lefelé $v_0=7\,\mathrm{m/s}$ kezdeti sebességgel. A testet egy vízszintes, $F=120\,\mathrm{N}$ nagyságú erővel lassítjuk. Mekkora úton áll meg a test? (A csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}15$.)

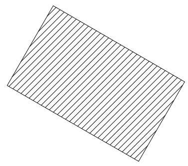


Megoldás

A feladat megoldásához ki kell számolnunk a test gyorsulását, majd abból a megálláshoz szükséges utat.

Rajzoljuk fel a testre ható összes erőt:

(A súrlódási erő irányánál vegyük figyelembe a mozgás pillanatnyi irányát!)



Az erők közül az önsúly ismert, a tömegből számítható:

$$m\cdot g=$$

Irjuk fel Newton második törvényének négy lehetséges skaláregyenletét:

$$\sum F_{iy}:$$

$$\sum F_{ix}:$$

$$\sum F_{i\nearrow}:$$

$$\sum F_{i\searrow}:$$

Az egyismeretlenes egyenletet oldjuk meg:

$$N=$$

A szorítóerő ismeretében számítsuk ki a súrlódási erőt:

$$F_S =$$

Már csak egyetlen ismeretlen maradt, ezt számoljuk ki valamelyik egyenlet megoldásával:

Az állandó gyorsulás miatt a mozgás jellege:....................................

A kezdeti és végsebességet, a megtett utat valamint a gyorsulást tartalmazó képlet:

Behelyettesítve:

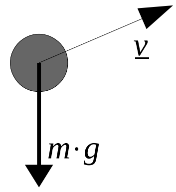
Jegyzetek

Newton mozgástörvényeinek alkalmazása síkbeli feladatokra

Ezen az órán anyagi pontra ható erők eredőjének, az azok által létrehozott gyorsulásoknak, illetve a gyorsulást meggátló erőknek a számítását fogjuk elvégezni. Az előző órai feladatokhoz képest annyi különbség lesz, hogy az egyenes vonalú mozgás helyett általános síkbeli mozgást végezhet az anyagi pont.

Mintapélda – 1

Számítsuk ki az anyagi pontnak tekinthető elhajított testre ható erőket, ha a légellenállást elhanyagoljuk!



Megoldás

Mivel a légellenállást elhanyagoljuk, az anyagi pontra ható egyetlen erő a gravitációs erő lesz, ami lefelé hat, nagysága $m \cdot g$.

Ez az erő mindig függőlegesen lefelé mutat, és nagysága az m tehetetlen tömegtől, valamint a g gravitációs gyorsulástól függ.

Utóbbi helytől és időtől függő mennyiség, ebben a tárgyban használjuk mindig a $g=9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ értéket!

Gyakorló példa – 1

Határozzuk meg az ágyúból kilőtt lövedékre ható erők eredőjét. A lövedék egy 25 cm átmérőjű tömör acél gömb, sűrűsége $\varrho=7850$ kg/m^3, a légellenállást elhanyagoljuk!

Megoldás

A légellenállás elhanyagoljuk. Milyen erőt (erőket) kell figyelembe vennünk?

Az erő(k) nagysága:

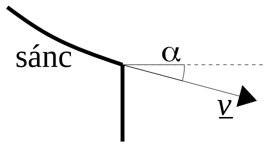
Mekkora a gömb térfogata? $V=\frac{4}{3}\pi R^3=$

A lövedék tömege: $m=\varrho \cdot V=$

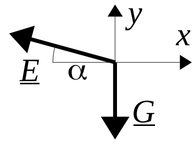
A lövedékre ható gravitációs erő: $m \cdot g=$

Mintapélda – 2

Síugró az elugrást követően a vízszinteshez képes lefelé $\alpha=7°$ szögben $v=90\,\mathrm{km/h}$ sebességgel repül. A légellenállás a sebességgel ellenkező irányban egy $c \cdot A v^2 \cdot \varrho$ nagyságú erő, ahol $c \cdot A=0{,}3\,\mathrm{m^2}$ az alaktól és kiterjedéstől függő tényező, $\varrho=1{,}3\,\mathrm{kg/m^3}$ a levegő sűrűsége. Számítsuk ki az ugróra ható erők eredőjét és pillanatnyi gyorsulását az elugrás pillanatában, ha a tömege $m=75$ kg!



Megoldás

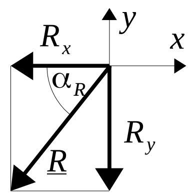


Az ábrán vázolt elugrási helyzetben a jobb oldali ábra szerint két erő hat az ugróra. A gravitációs erő: $G=m\cdot g=75\cdot 9{,}81=735{,}8\,\mathrm{N}(\downarrow)$.

A légellenállásból származó erő:

$$E=0{,}3\cdot\left(\frac{90}{3{,}6}\right)^2\cdot 1{,}3=243{,}8\,\mathrm{N}(\nwarrow)$$

Az ugróra ható erők eredője:



$$\underline{R}=\underline{G}+\underline{E}=\begin{bmatrix}0\\-735{,}8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-243{,}8\cdot\cos 7°\\243{,}8\cdot\sin 7°\end{bmatrix}\rightarrow \boxed{\underline{R}=\begin{bmatrix}-242{,}0\\-706{,}1\end{bmatrix}\mathrm{N}}$$

Az eredő nagysága: $|\underline{R}|=\sqrt{242{,}0^2+706{,}1^2}\rightarrow \boxed{R=746{,}4\,\mathrm{N}(\swarrow)}$,

vízszintessel bezárt hajlásszöge: $\mathrm{tg}\,\alpha_R=\dfrac{706{,}1}{242{,}0}\rightarrow \boxed{\alpha_R=71{,}08°}$

A gyorsulást számolhatjuk a testre ható erők eredőjéből. Eszerint az $\underline{R}=m\cdot\underline{a}$ vektoregyenlet alapján a gyorsulás vektora balra lefelé mutat, a vízszintessel 71,08°-ot zár be, a nagysága pedig:

$$746{,}4=75\cdot a\rightarrow \boxed{a=9{,}952\,\mathrm{m/s^2}}$$

A korábban kiszámított eredő nélkül közvetlenül is számolhatjuk a gyorsulásvektor komponenseit, ehhez a vektoregyenlet két vetületét kell felírnunk, célszerűen egy vízszintes és egy függőleges irányút. Egy-egy egyenleten belül a pozitív irányt szabadon vehetjük fel, szokásos a pozitív koordinátatengely irányát, vagy a gyorsulás irányát pozitívnak választani és a többi elem előjelét ennek megfelelően felírni. (Dinamikai feladatoknál utóbbi elvnek az az előnye, hogy az egyenlőségjel után nem tudunk *elfelejtkezni* az utolsó elem előjeléről.) Esetünkben tegyük fel, hogy a függőleges gyorsulás lefelé, a vízszintes jobbra mutat, és írjuk fel a vetületi egyenleteket ennek megfelelően:

$$\sum F_{i\downarrow}: 735{,}8-243{,}8\cdot\sin 7°=75\cdot a_y \quad\rightarrow\quad \boxed{a_y=9{,}415\,\mathrm{m/s^2}(\downarrow)}$$

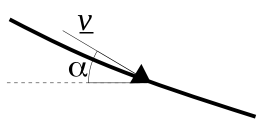
$$\sum F_{i\rightarrow}: 0-243{,}8\cdot\cos 7°=75\cdot a_x \quad\rightarrow\quad \boxed{a_x=-3{,}226\,\mathrm{m/s^2}(\leftarrow)}$$

az egyenletek megoldásával kapott eredmény előjele mindig arra utal, hogy a feltételezettel megegyező, vagy ellenkező irányú-e a mennyiség tényleges iránya. Ennek megfelelően az eredő gyorsulás balra-lefelé mutat, ezt jeleztük az eredmények mögötti zárójelben.

A komponensekből Pitagorasz-tétellel és egy tangens-függvénnyel az előzővel azonos eredményeket kapunk.

Gyakorló példa – 2

Egy síugró sebessége a földetérés előtti pillanatban $\alpha=22°$ szöget zár be a vízszintessel, nagysága $v=84\,\mathrm{km/h}$. A légellenállás a sebességgel ellenkező irányban $c\cdot A\cdot v^2\varrho$, ahol $c\cdot A=0{,}25\,\mathrm{m^2}$ az alaktól és kiterjedéstől függő tényező, $\varrho=1{,}3\,\mathrm{kg/m^3}$ a levegő sűrűsége. Számítsuk ki az ugróra ható erők eredőjét és a pillanatnyi gyorsulását, ha a tömege $m=75\,\mathrm{kg}$!



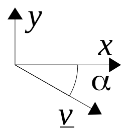
Megoldás

A jobb oldali ábrán látható a vizsgált pillanatban az ugró sebességvektora.

Rajzoljuk be síelőre ható két erőt:

-a függőleges $\underline{G}$ súlyerőt,

-a légellenállás $\underline{E}$ erejét.



A súlyerő nagysága: $G=$

A sebesség m/s-ban: $v=$

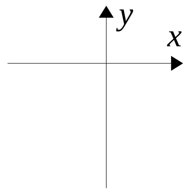
A légellenállás: $E=$

Az ugróra ható erők eredője a két erő összege $\underline{R}=\underline{G}+\underline{E}$. Írjuk fel a vektoregyenlet vízszintes és függőleges vetületi egyenletét, majd oldjuk is meg (R komponenseit a koordinátatengelyek pozitív irányaiba mutatónak tételezzük fel, ezért az előjeleik pozitívak):

$$\sum F_{ix}:$$

$$\sum F_{iy}:$$

Az eredő nagysága: $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=$



vízszintessel bezárt hajlásszöge: $\operatorname{tg}\alpha_R=$

A gyorsulást a $\underline{G}+\underline{E}=m\cdot\underline{a}$ vektoregyenlet két vetületéből írhatjuk fel. Az $\underline{a}$ gyorsulás két komponensének iránya megegyezik az eredő két komponensének irányával, azaz lefelé és balra mutat. Írjuk fel a vetületi egyenleteket ilyen pozitív irányokkal:

$$\sum F_{i\downarrow}:$$

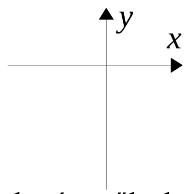
$$\sum F_{i\leftarrow}:$$

A két egyenletet külön-külön megoldva (a zárójelben jelöljük a tényleges irányt):

$a_y=$ $a_x=$

E két komponensből a gyorsulás nagysága:

$$a=$$



iránya: $\operatorname{tg}\alpha_a=$

Ellenőrző kérdés: A teljes gyorsulást létrehozó erő egyenlő-e a testre ható erők korábban kiszámított eredőjével?: $m\cdot a=$.

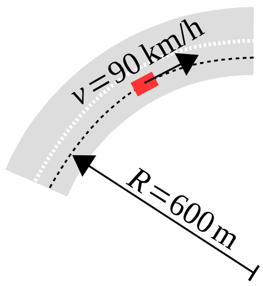
Tapadó súrlódás

Bizonyos esetekben az érintkező testek az érintkezési pontban nem mozdulnak el egymáshoz képest az érintkezési felülettel párhuzamosan (nem csúszik el egymáson a két érintkező felület). Ezt a tapadó súrlódás okozza, melynek modellezésére a legegyszerűbb, Coulomb-féle száraz súrlódást fogjuk használni. Eszerint a két felület mindaddig nem csúszik el egymáson, amíg a súrlódási erő nagyságának és a szorítóerő nagyságának a hányadosa nem éri el a súrlódási együttható értékét, azaz képletszerűen $|F_S|/N<\mu$. (Vagy más szavakkal kifejezve: amíg a súrlódási erő nem éri el a súrlódási együttható és a szorítóerő nagyságának szorzatát, azaz $|F_S|<\mu N$.) A tapadó súrlódási erő iránya mindig olyan, hogy a hiányában kialakuló mozgást gátolja meg, ezért mindaddig, amíg a határértékét nem éri el, egy szabad ismeretlenként tekinthetünk rá. A megcsúszás elkerüléséhez szükséges súrlódási együttható értékét az egyenlőtlenségből tudjuk meghatározni.

Közúti járművek mozgásának vizsgálatakor a mozgás irányába a kerekek gördülésével jut a jármű. Ennek dinamikájával itt külön nem foglalkozunk, ugyanakkor kiemeljük, hogy a kerekekről átadódó súrlódási erőnek tapadási súrlódási erőnek kell maradnia annak érdekében, hogy a mozgást ne a jármű tehetetlen tömege és a sebességgel ellentétes irányú csúszó súrlódás befolyásolja, hanem a jármű vezetője (előbbire általában nincs elég hely az utakon).

Mintapélda – 3

Az anyagi pontnak tekinthető $m=1{,}5\,\mathrm{t}$ tömegű jármű $v=90\,\mathrm{km/h}$ sebességgel halad az $R=600\,\mathrm{m}$ sugarú ívben.
Határozzuk meg a járműre ható erőket!
Elegendő-e a fenti mozgáshoz a $\mu=0{,}2$ nagyságú tapadási súrlódási tényező?



Megoldás

A megoldás három lépésből áll.

Először meg kell határoznunk a test gyorsulásának komponenseit, majd a testre ható erők segítségével Newton második törvényét felírva az ismeretlen erőket tudjuk kiszámolni. Végül a súrlódási feltételt használhatjuk az utolsó kérdés eldöntéséhez.

Gyorsulások

Mivel a test a vízszintes síkú körpályán mozog állandó sebességgel, ezért a függőleges gyorsulása nulla, és az érintőirányú gyorsulása is az. Az egyetlen nemzérus komponens a kör középpontja felé mutató normálirányú gyorsulás:

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(90/3{,}6)^2}{600}=\frac{25^2}{600}=1{,}042\,\mathrm{m/s^2}$$

Erők

A testre összesen három komponenssel megadható erő hat. A gravitációs erő függőlegesen lefelé hat, nagysága: $m\cdot g=1{,}5\cdot 9{,}81\rightarrow$ $\boxed{m\cdot g=14{,}72\,\mathrm{kN}}$.

Az útpályáról a testre átadódó erő függőleges komponensét jelöljük *N*-nel, ez az erő felfelé fog mutatni. Newton második törvényének függőleges irányú vetületi egyenlete: $m\cdot g-N=m\cdot 0$ alakú lesz. (Itt a lefelé mutató erő előjelét pozitívnak, a felfelé mutató erő előjelét negatívnak írtuk, a jobb oldali 0 a korábban már megállapított függőleges gyorsulás.) Ennek megoldásaként:

$N = m \cdot g \rightarrow \boxed{N = 14{,}72\,\mathrm{kN}}$ (A pozitív előjel azt jelenti, hogy az erő valóban felfelé mutat.)

Az útpályáról a testre átadódó erő vízszintes komponense az útpálya és a jármű közötti súrlódásból származik, ezért F_S-sel jelöljük. Mivel ez az egyetlen vízszintes erő, ezért ennek iránya meg kell, hogy egyezzen a gyorsulás irányával, azaz a kör közepe felé (befelé) mutat. Newton második törvényének ilyen irányú vetületét felírva:

$F_S = m \cdot a_n = 1{,}5 \cdot 1{,}042 \rightarrow \boxed{F_S = 1{,}563\,\mathrm{kN}}$

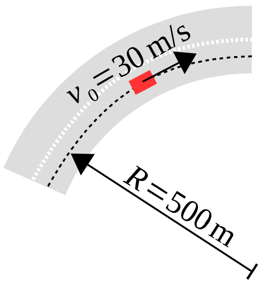
Kiemeljük, hogy az útpályáról átadódó erők a jármű és az útpálya közötti kölcsönhatás miatt alakultak ki. Newton harmadik törvénye alapján az útpályára az N-nel és F_s-sel jelölt erők ellentettjei hatnak, azaz egy lefelé mutató 14,72 kN nagyságú és egy, a körívre merőleges, kifelé mutató, 1,563 kN nagyságú erő.

Fentieket tapadó súrlódás feltételezése mellett számoltuk ki. Az adott szorítóerő mellett a súrlódási erő maximális értéke: $F_S^{max} = \mu \cdot N = 0{,}2 \cdot 14{,}72 = 2{,}944\,\mathrm{kN}$. Mivel a kérdéses mozgás kialakulásához ennél kisebb súrlódási erő szükséges (1,563<2,944), ezért az utolsó kérdésre a válasz: igen, elegendő.

Utóbbi kérdés eldöntéséhez kiszámolhattuk volna az F_S / N hányadost is: $\frac{1{,}563}{14{,}72} = 0{,}1062$. Ez a számérték kisebb kell legyen, mint a tapadási súrlódási együttható. Mivel ez teljesül (0,1062<0,2), ezért a válasz ezzel a megközelítéssel is ugyanaz lesz.

Gyakorló példa – 3

Az anyagi pontnak tekinthető $m = 1{,}8\,\mathrm{t}$ tömegű jármű $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$ sebességgel halad az $R = 500\,\mathrm{m}$ sugarú ívben, vízszintes úton.
A jármű fékez és egyenletes lassulással $t = 8\,\mathrm{s}$ alatt megáll.
Határozzuk meg a járműre a fékezés kezdetekor ható erőket!
Elegendő-e a jármű megállításához a $\mu = 0{,}4$ nagyságú súrlódási együttható?



Megoldás

A megoldás során a gyorsulásokat, majd az erőket kell meghatároznunk, végül a súrlódási feltételt ellenőriznünk.

Gyorsulások

Mekkora a jármű függőleges irányú gyorsulása?

Mekkora az érintőirányú gyorsulás?

Mekkora a normálirányú gyorsulás a fékezés kezdetekor? $a_n =$

Ekkor a jármű teljes vízszintes gyorsulása:

$a =$

Erők

A járműre ható erők közül melyiknek van függőleges komponense? ....

A jármű súlya: $m \cdot g =$

Newton második törvénye alapján a függőleges vetületi egyenlet:

Vízszintes irányban egyetlen erő hat a testre, a súrlódási erő.

Newton második törvényéből a gyorsulással megegyező irányban felírt skaláregyenlet:

$$F_s =$$

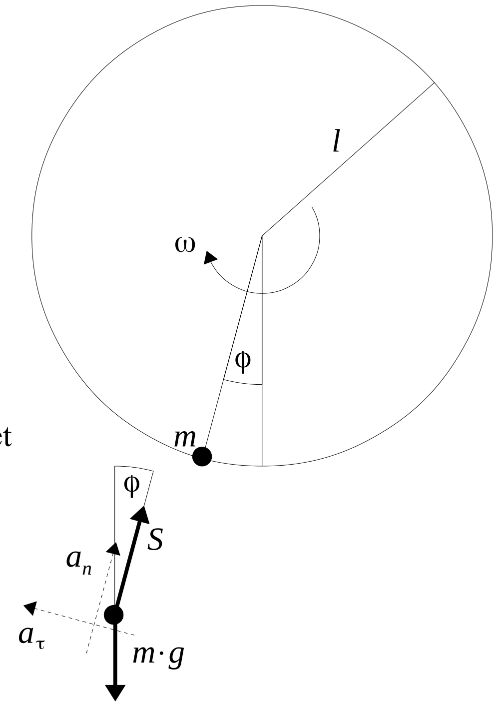
Az adott tapadó súrlódási együttható esetén mekkora a súrlódási erő maximális értéke?

$$F_S^{max} = \mu \cdot N =$$

Ezt összehasonlítva az előírt mozgáshoz szükséges súrlódási erővel elegendő a megadott súrlódási tényező?

Mintapélda – 4

Egy $m = 10\,\text{kg}$ tömegű testet egy $l = 1{,}3\,\text{m}$ hosszú kötéllel függőleges síkban körbeforgatunk. Miután a test elhagyja az alsó holtpontot és a kötél a függőlegessel $\phi = 10°$-os szöget zár be, a test sebessége $v = 15\,\text{m/s}$.
Számítsuk ki ebben a pillanatban a test gyorsulását és a kötélerőt!
Számítsuk ki a körmozgás hiányzó jellemzőit!



Megoldás

A kérdésben szereplő helyzetben az ábrán kirajzolt két erő hat a testre, a gravitációból származó súlyerő és a kötélerő. Előbbi függőlegesen lefelé mutat, nagysága $G = m \cdot g = 98{,}1\,\text{N}$. A kötélerő mindig kötélirányú, ezért az a kör középpontja felé mutat, nagysága ismeretlen, *S*. E két erő együttesen hozza létre a körmozgáshoz szükséges gyorsulásokat, a normál- és az érintőirányú komponenst, melyeket az ábrán szaggatott vonallal rajzoltunk meg.

A normálirányú gyorsulás értéke:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{1{,}3} = 173{,}1\,\text{m/s}^2$$

Az érintőirányú gyorsulás ismeretlen, feltételezett iránya az ábra szerinti.

Newton második törvénye alapján két független vetületi egyenletet kell felírnunk. Ezek lehetnének a szokásos függőleges és vízszintes egyenletek:

$$\sum F_{iy}: S\cdot\cos 10° - 98{,}1 = 10\cdot(173{,}1\cdot\cos 10° + a_\tau\cdot\sin 10°)$$
$$\sum F_{ix}: S\cdot\sin 10° + 0 = 10\cdot(173{,}1\cdot\sin 10° - a_\tau\cdot\cos 10°)$$

de használhatunk ferde koordináta-rendszert is, ahol az egyik egyenlet sugárirányú (jobbra-fel pozitív), a másik pedig érintőirányú (balra fel pozitív):

$$\sum F_{in}: S - 98{,}1\cdot\cos 10° = 10\cdot 173{,}1$$

$$\sum F_{i\tau}: 0 - 98{,}1\cdot\sin 10° = 10\cdot a_\tau$$

A négy felírt egyenletből bármelyik kettő ugyanazt a megoldást szolgáltatja, a legegyszerűbb dolgunk az utolsó kettővel van, hiszen azok egyismeretlenes egyenletek. Ezekből:

$\boxed{S = 1828\,\mathrm{N}}$, $\boxed{a_\tau = -1{,}703\,\mathrm{m/s^2}\,(\searrow)}$

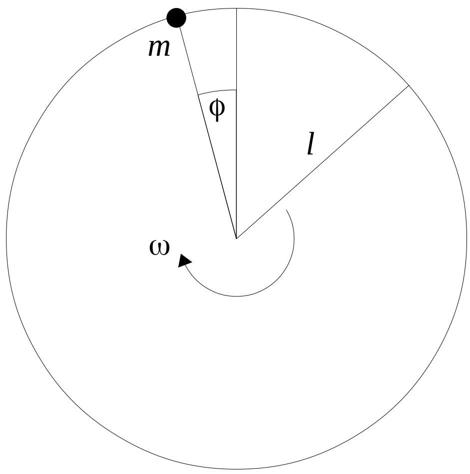
A körmozgás hiányzó jellemzői a szögsebesség és a szöggyorsulás. Előbbit a sebesség és a körpálya sugarának segítségével számolhatjuk, az irányt szemléletből eldöntve:

$$\omega = v/l = 11{,}54\,\mathrm{rad/s}\ (\curvearrowright)$$

A szöggyorsulást az érintőirányú gyorsulásból és a körpálya sugarából számoljuk. A gyorsulás iránya miatt a szöggyorsulásnak "hátrafelé" kell mutatnia, azaz az óramutató járásával ellenkezőleg:

$$\kappa = a_\tau / l = 1{,}31\,\mathrm{rad/s^2}\,(\curvearrowleft)$$

Gyakorló példa – 4



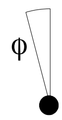
Egy $m = 10\,\mathrm{kg}$ tömegű testet egy $l = 1{,}3\,\mathrm{m}$ hosszú kötéllel függőleges síkban körbeforgatunk. Mielőtt a test eléri a felső holtpontot és a kötél a függőlegessel $\phi = 10°$-os szöget zár be, a test szögsebessége $\omega = 6\,\mathrm{rad/s}$. Számítsuk ki ebben a pillanatban a test szöggyorsulását és a kötélerőt!
Számítsuk ki a pont sebességét ebben a helyzetben!

Megoldás

Első lépésként készítsünk egy vázlatot a körpályán mozgó testről. Rajzoljuk be a testre ható erőket:

- -a $\underline{G}$ súlyerőt,
- -az $\underline{S}$ kötélerőt,

és a gyorsulás két komponensét:



- -a normálirányú komponenst (a_n),
- -az érintőirányú komponens (a_τ).

Fenti négy mennyiségből ismert, vagy közvetlenül kiszámolható:

- -a súly: $G = m\cdot g =$
- -a normálirányú gyorsulás: $a_n = \omega^2\cdot l =$

A két ismeretlen közül a kötélerőt a feladat kérdezi, az érintőirányú gyorsulás közvetlen kapcsolatban van a szöggyorsulással: $a_\tau =$, azaz előbbi ismeretében a másik kérdést is meg tudjuk válaszolni.

A két ismeretlen meghatározásához az $\underline{R}=m\cdot\underline{a}$ vektoregyenlet két vetületi irányú skalárváltozatát kell felírnunk és megoldanunk. Ezeket választhatjuk a vízszintes, a függőleges, a kötélirányú és az érintőirányú egyenletek közül. Itt most felírjuk mind a négyet, de mivel a megoldáshoz célszerűen egyismeretlenes egyenleteket akarunk majd megoldani, ezért mindegyik egyenlet felírása előtt vegyük számba, hogy az ismeretlenek (S és a_τ) közül melyik *nem* kerül bele az adott egyenletbe, és melyik *igen*.

Vízszintes vetületi egyenletből kimarad:...................., bekerül:....................

$$\sum F_{i\rightarrow}:$$

Függőleges vetületi egyenletből kimarad:...................., bekerül:....................

$$\sum F_{i\downarrow}:$$

Kötélirányú vetületi egyenletből kimarad:...................., bekerül:....................

$$\sum F_{i\searrow}:$$

Érintőirányú vetületi egyenletből kimarad:...................., bekerül:....................

$$\sum F_{i\nearrow}:$$

Oldjuk meg a két legegyszerűbb egyenletet:

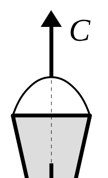
$$S=$$

$$a_\tau= \qquad \rightarrow \quad \kappa=$$

Megjegyzés: A kötélerő negatív előjele nyomott kötelet jelentene. Ilyen a valóságban nem fordulhat elő, ezért vagy nagyobb sebességgel kellene forgatni a testet, vagy a kötél helyett egy rudat használni.

A vizsgált pillanatban a sebesség: $v=\omega\cdot l=$

Egyensúlyozás



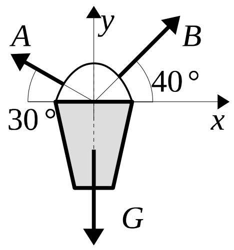
Adott erők által létrehozott gyorsulások számítása mellett a másik lehetséges feladat az, amikor valamilyen általunk kívánt gyorsulást létrehozó erő(k) nagyságát keressük. Ennek speciális esete, amikor az előírt gyorsulás zérus (azaz Newton második törvényének jobb oldalán zérus szerepel). Ha a kezdeti sebesség is nulla, akkor a vizsgált test nyugalomban marad, egyensúlyban lesz. Épp ezért az ilyen típusú feladatokat *egyensúlyozási feladatok*nak nevezzük.

Az egyensúlyozás legegyszerűbb esete az *egyetlen erővel* történő egyensúlyozás. Ilyenkor a testre ható aktív erők részeredőjéhez egyetlen passzív egyensúlyozó erőt kell hozzáadnunk úgy, hogy a részeredőnek és az egyensúlyozó erőnek az eredője zéruserő legyen. Ez azt jelenti, hogy az egyensúlyozó erőnek a részeredő ellentettjével kell megegyeznie.

Például, ha egy $G=0{,}2\,\mathrm{kN}$ súlyú vödröt egyetlen C erővel akarunk egyensúlyban tartani, akkor az aktív erők részeredője a függőleges, lefelé mutató, G nagyságú erő lesz. Az egyensúlyozáshoz egy ezzel azonos hatásvonalú (azaz függőleges), de felfelé mutató G nagyságú erőre lesz szükség, azaz $\boxed{C=0{,}2\,\mathrm{kN}}$ adódik.

Mintapélda – 5

A $G=0{,}2\,\mathrm{kN}$ súlyú vödröt két erővel tartjuk egyensúlyban, a két erő iránya az ábra szerinti. Határozzuk meg az egyensúlyozó erőket!



Megoldás

Egyensúly esetén az egyenletek jobb oldalán a tömeget rendre nullával szorozzuk. Az egyensúlyi egyenleteket felírhatjuk egy vízszintes és egy függőleges vetületi egyenlettel:

$$\sum F_{ix}: -A\cdot\cos 30° + B\cdot\cos 40° + 0 = 0$$

$$\sum F_{iy}: A\cdot\sin 30° + B\cdot\sin 40° - 0{,}2 = 0$$

Az első egyenletből kifejezhető *B* (vagy *A*), majd a második egyenletbe behelyettesíthető:

$$\sum F_{iy}: A\cdot\sin 30° + A\frac{\cos 30°}{\cos 40°}\cdot\sin 40° - 0{,}2 = 0 \rightarrow \boxed{A = 0{,}1630\,\mathrm{kN}(\nwarrow)}$$

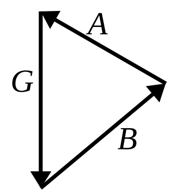
$$\sum F_{iy}: B\frac{\cos 40°}{\cos 30°}\cdot\sin 30° + B\cdot\sin 40° - 0{,}2 = 0 \rightarrow \boxed{B = 0{,}1843\,\mathrm{kN}(\nearrow)}$$

A másik lehetőség az egyenletrendszer felírására és megoldására az, ha olyan egyenleteket keresünk, amikben csak egy-egy ismeretlen szerepel. Ez példánkban azt jelenti, hogy az *A* erő meghatározásához azt az egyenletet írjuk fel és oldjuk meg, amelyben a *B* erő nem szerepel. Közös metszéspontú erők esetén csak vetületi egyenletet írunk fel. A *B* erő a rá merőleges vetületi egyenletben nem szerepel, ami a függőlegessel 40°-os szöget zár be és balra-felfelé, vagy jobbra-lefelé mutat. Válasszuk az utóbbit:

$$\sum F_{i\searrow}: -A\cdot\cos 20° + 0{,}2\cdot\cos 40° = 0 \rightarrow \; A = 0{,}1630\,\mathrm{N}(\nwarrow)$$

A *B* erő számításához az *A*-t nem tartalmazó, azaz arra merőleges irányú vetületi egyenletet kell felírni és megoldani. Ez a függőlegessel 30°-os szöget bezáró irány balra-lefelé, vagy jobbra-felfelé. Válasszuk az utóbbit:

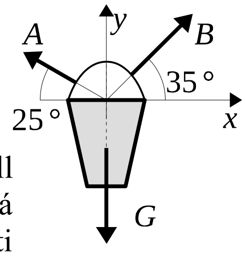
$$\sum F_{i\nearrow}: B\cdot\cos 20° - 0{,}2\cdot\cos 30° = 0 \rightarrow \; B = 0{,}1843\,\mathrm{N}(\nearrow)$$



Az eredmények természetesen azonosak, az egyenletek felírása ugyan némileg bonyolultabb volt, a megoldásuk viszont lényegesen egyszerűbb. Végezetül a jobb oldali ábrán összegeztük a három vektort. Mivel együtt egyensúlyi erőrendszert alkotnak, a nyílfolytonosan egymás után rajzolt vektorokkal vissza kell érnünk a kezdőpontba (ún. zárt, nyílfolytonos vektorháromszöget kapunk).

Gyakorló példa – 5

A $G=0{,}2\,\mathrm{kN}$ súlyú vödröt két erővel tartjuk egyensúlyban, a két erő iránya az ábra szerinti. Határozzuk meg az egyensúlyozó erőket!



Megoldás

Az egyensúlyozás miatt Newton második törvényét $\underline{R}=\underline{0}$ alakban kell felírnunk, azaz a $\underline{G}+\underline{A}+\underline{B}=\underline{0}$ vektoregyenlet két ismeretlenét kell zérussá tenni. Ez megtehető úgy, hogy felírjuk a vízszintes és függőleges vetületi egyenletet (előjelek, vetületek!), majd megoldjuk azokat:

$\sum F_{i,x}$:

$\sum F_{i,y}$:

A megoldáshoz először fejezzük ki az első egyenletből valamelyik ismeretlent a másik segítségével:

majd ezt helyettesítsük be a második egyenletbe:

.

Ennek megoldása: , amit visszahelyettesíthetünk a két ismeretlen kapcsolatát leíró kifejezésbe, így:

A fenti megoldástól függetlenül, egyismeretlenes egyenletek segítségével is megoldhatjuk a feladatot. Az *A* erő számításához arra az egyenletre van szükség, amiben nem szerepel ..... .

Ez az irány a függőlegessel ..... szöget zár be. Írjuk fel ezzel párhuzamosan a vetületi egyenletet, a jobbra-lefelé irányt választva pozitívnak, majd oldjuk meg:

$\sum F_{i\searrow}$:

A *B* számítását ettől függetlenül végezzük. Azt az egyenletet keressük, amelyikben nem szerepel az *A* erő. Ez a függőlegessel ..... szöget zár be. E mentén írjuk fel a vetületi egyenletet, a jobbra-felfelé irányt választva pozitívnak, majd oldjuk meg:

$\sum F_{i\nearrow}$:

Az eredmények alapján vázoljuk az egyensúly vektorháromszögét!

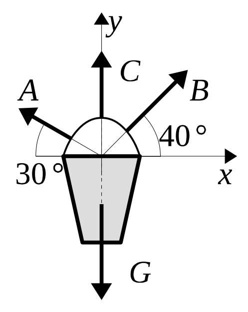
(A kiszámított értékeknél ne feledkezzünk meg a mértékegységről

és az előjel alapján kikövetkeztetett tényleges irányról.)

Amennyiben egy síkbeli feladatban három, adott irányú és közös metszéspontú erővel akarjuk egyensúlyozni a testet, akkor a megoldás már nem lesz egyértelmű. Ezt a jelenséget statikai határozatlanságnak nevezzük, és később részletesebben is tárgyaljuk majd.

Mintapélda – 6

A $G=0{,}2\,\mathrm{kN}$ súlyú vödröt három erővel tartjuk egyensúlyban, a három erő iránya az ábra szerinti. Mutassunk lehetséges megoldásokat a korábbi példák eredményeit felhasználva!
Határozzuk meg az A és C egyensúlyozó erőket a B erő függvényében!



Megoldás

A feladatra két megoldást a korábbiakban megadtunk.

A számozatlan példát kiegészítve a zérus nagyságú A és B erőkkel az egyensúly nem változik, azaz az

$\boxed{A=B=0\,\text{kN és } C=0{,}2\,\text{kN}}$ és az $\boxed{A=0{,}1630\,\text{kN}, B=0{,}1843\,\text{kN}, C=0\,\text{kN}}$

számhármasok külön-külön egy-egy lehetséges megoldást jelentenek. (Ezeket könnyen ellenőrizhetjük, ha a később felírandó egyensúlyi egyenletek bármelyikébe behelyettesítjük őket.)

Általánosságban az egyensúlyi egyenleteket felírhatjuk a vízszintes és függőleges vetületi irányokban:

$$\sum F_{ix}: -A\cdot\cos 30°+B\cdot\cos 40°+C\cdot\cos 90°+0=0$$

$$\sum F_{iy}: A\cdot\sin 30°+B\cdot\sin 40°+C-0{,}2=0$$

"Szerencsénkre" az első egyenletben C együtthatója nulla, így abból ki tudjuk fejezni A-t:

$$A(B)=B\cdot\frac{\cos 40°}{\cos 30°}\rightarrow \boxed{A(B)=0{,}8846\cdot B},$$

majd ezt felhasználhatjuk a második egyenletben:

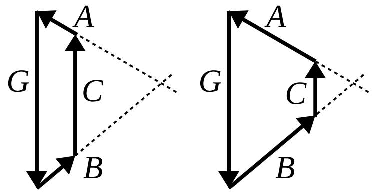
$$0{,}8846\cdot B\cdot\sin 30+B\cdot\sin 40°+C-0{,}2=0\rightarrow \boxed{C(B)=0{,}2-1{,}085\cdot B}$$

Az egyenlet könnyebb megoldhatósága érdekében itt különösen fontos lehet, hogy a C erő számításához az A-t nem tartalmazó egyenletet írjuk fel. A két lehetőség közül legyen ez a függőlegessel 30°-os szöget bezáró, jobbra felfelé mutató irányú vetületi egyenlet:

$$\sum F_{i\nearrow}: B\cdot\cos 20°+C\cdot\cos 30°-0{,}2\cdot\cos 30°=0\rightarrow\ C(B)=0{,}2-1{,}085\cdot B$$

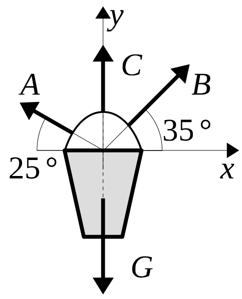
Az eredmény természetesen ugyanaz.

Az $A(B)$ és $C(B)$ függvényekből adódik, hogy ennek az egyensúlyozási feladatnak végtelen sok megoldása van. A jobb oldali ábrán két ilyen megoldáshoz tartozó nyílfolytonos vektorsokszög látható. Mivel az A erő kezdőpontját, illetve a B erő végpontját tartalmazó szaggatott vonalak nem határozzák meg egyértelműen a C erő nagyságát, grafikusan sem kapható egyértelmű megoldás..



Gyakorló példa – 6

A $G=0{,}2\,\text{kN}$ súlyú vödröt három erővel tartjuk egyensúlyban, a három erő iránya az ábra szerinti. Mutassunk lehetséges megoldásokat a korábbi példák eredményeit felhasználva!
Határozzuk meg a B és C egyensúlyozó erőket az A erő függvényében!



Megoldás

Négy erő egyensúlyát kell biztosítanunk, azaz a $\underline{G}+\underline{A}+\underline{B}+\underline{C}=\underline{0}$ vektoregyenletet kell teljesítenünk.

Az előző gyakorlópéldát kiegészítve egy zérus nagyságú C erővel az egyensúly nem változik, ezért egy lehetséges megoldás: $A=\ldots\ldots\,\text{kN}, B=\ldots\ldots\,\text{kN}, C=0\,\text{kN}$

Hasonló elven, ha az egyetlen *C* erővel egyensúlyozzuk a *G* erőt, akkor a másik kettő zérus lesz, azaz: $A= \qquad\qquad ,B= \qquad\qquad ,C=0{,}2\,\mathrm{kN}$

Fentieken kívül még végtelen sok lehetőség van, melyeket függvényszerűen fogunk felírni. A függvény változója legyen az *A* erő, így csak a *B* és *C* erőket tekintjük ismeretlennek. A *B* erő számításához írjuk fel azt az egyenletet, amelyben *C* nem szerepel. Ez a *C* irányára merőleges irányú vetületi egyenlet, azaz:

$$\sum F_{ix}: \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

melynek megoldásaként $B(A)=$

A *C* erő számításához a *B*-t nem tartalmazó (azaz a B irányára merőleges vetületi) egyenletet kell felírnunk. Ez a függőlegessel ..... szöget zár be. Válasszuk a jobbra-lefelé mutató irányt pozitívnak, így:

$$\sum F_{i\searrow}:$$

melynek megoldásaként: $C(A)=$

Az egyismeretlenes egyenletek felírásának előnye itt tisztán megmutatkozik a megoldás során. Nézzük meg, mi történt volna, ha ehelyett vízszintes-függőleges egyenleteket írtunk volna fel!

A vízszintes egyenlet ugyanúgy nézett volna ki, mint korábban, így azt nem ismételjük meg. A függőleges egyenlet (felfelé mutató pozitív iránnyal):

$$\sum F_{iy}:$$

A *C* erő speciális helyzete miatt ugyan nem kell a teljes kétismeretlenes, paraméteres egyenletrendszert megoldani, hiszen a vízszintes egyenletből közvetlenül ki tudjuk fejezni *B*-t, mint fent is tettük. Ezt kell behelyettesítenünk a függőleges egyenletbe:

$$\sum F_{iy}:$$

majd megoldani azt *C*-re, amiből $C(A)=$

Megjegyzések, észrevételek:

Korábbi példáinkban az eredmények előjele mindig egyértelműen megadta, hogy a kiszámított mennyiség a feltételezett irányú volt-e, vagy azzal ellentétes. Ezt akkor jelöltük is az eredmény után zárójelben. Most az eredmény előjele és így a tényleges irány az *A* nagyságától függ, ezért nem adjuk azt meg.

A két triviális megoldással ellenőrizhető a megoldásként kapott függvény. Sőt, mivel az *A, B, C* reakciók az egyensúlyi egyenletekben állandó együtthatókkal fordulnak elő, ezért ha van megoldás, akkor az biztos, hogy *B*-re és *C*-re is felírható $\alpha+\beta\cdot A$ alakban, ahol α és β két skalár. Az *A* erő egyik triviális megoldásbeli értékét beírva, és egyenlővé téve *B* ugyanazon triviális megoldásbeli értékével, majd ugyanezt megismételve a másik triviális megoldással α-ra és β-ra egy kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, melynek megoldása ugyancsak a fenti függvényre vezetne (bár közben pont egy olyan kétismeretlenes egyenletet kellene megoldani, amilyet nem szeretnénk). Ugyanez természetesen elvégezhető *C*-vel is.

A három reakció *G*-vel tart egyensúlyt, azaz összegük annak ellentettje, egy függőleges 0,2 kN nagyságú, felfelé mutató erő. A két triviális megoldás hoz tartozó reakciók bármely lineáris kombinációjának eredője is függőleges irányú lesz, és akkor lesz a nagysága éppen 0,2 kN, ha az együtthatók összege éppen egy. Például az első triviális megoldás 0,3-szorosának és a második triviális megoldás 0,7-szeresének az összege teljesíti ezt a feltételt, az így kapott reakciók tehát az egyensúlyt is biztosítják. Ellenőrizzük!

Bevezetés

Az előzőekben már látott kinetikai feladatoknál sokszor nem kérdés minden közbenső részeredmény, hanem csak valami kezdő és végállapot szerepel a feladat kiírásában. Ilyenkor ún. változástételeket használhatunk. Alapelv, hogy *valami* változásának a tétele azt mondja ki, hogy a *valami* változása (azaz a későbbi és a korábbi értékének különbsége) egyenlő egy *másik* mennyiséggel. (Nyilván senki sem gondolja, hogy a répatorta változásának tétele azt mondja ki, hogy a répatorta változása egyenlő a répatorta későbbi értékéből kivonva annak korábbi értéke.)

Mozgásmennyiség, impulzus

Def.: Anyagi pont *mozgásmennyiségé*e a pont tömegének és a sebességének a szorzataként kapott vektor. (Ezt szokás a pont lendületének is nevezni.)

Def.: Egy anyagi pontra ható erő által adott idő alatt a pontnak átadott *impulzus* (impulzusvektora) az erő (erővektor) idő szerinti integrálja. (A vektor integrálja a skalárkomponensek integrálásával kapott skalárokból képzett vektor. Konstans erő esetén az integrálás az erőnek és az időtartamnak a szorzata.)

Mozgásmennyiség változásának tétele

Tétel: Egy anyagi pont mozgásmennyiségének adott idő alatti megváltozása egyenlő a pontra ható erők által az idő alatt átadott impulzussal.

Mivel az általunk vizsgált esetekben a tömeg nem változik ezért a tétel a következő képlettel is felírható: $m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{R}\,\mathrm{d}t$, vagy állandó erő esetén $m\cdot(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{R}(t_2 - t_1)$.

A tétel használata

Mint a képletből látható, az egyenletben nincs gyorsulás és megtett út, vagy helykoordináta, azaz minden olyan feladatnál használható, ahol sem a megadott, sem az ismeretlen mennyiségek között ezek nem fordulnak elő.

Mintapélda - 1

Egy $20\,\mathrm{kg}$ tömegű anyagi pont $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ sebességgel egyenes pályán halad.
Mekkora állandó nagyságú erővel lehet a sebességét 9 másodperc alatt megduplázni?

Megoldás

A sebesség megduplázása miatt ismerjük a vizsgált időszak végén a sebességet:

$$v = 2\cdot v_0 = 24\,\mathrm{m/s}$$

A feladatban a gyorsulás és a megtett út nem szerepel semmilyen formában, így az egyetlen ismeretlent tartalmazó egyenletet a mozgásmennyiség változásának tételével írhatjuk fel. A tételnek csak a mozgás irányába mutató skaláregyenletét írjuk fel:

$$m(v - v_0) = F\cdot t \rightarrow 20\cdot(24 - 12) = F\cdot 9$$

(Ebben a skaláregyenletben a sebességek és az erő az irányukat az előjellel mutatják, azaz a pozitívként beírt F erőt a mozgás irányába mutatónak tételeztük fel.)

Az egyenlet megoldásaként: $\boxed{F = +26{,}67\,\mathrm{N}}$

Megjegyzés: A feladatot megoldhattuk volna úgy is, hogy a sebesség változásából meghatározzuk a gyorsulást, majd Newton második törvényéből az erőt. Az itt bemutatott módszer azonban vitathatatlanul frappánsabb!

Gyakorló példa – 1

Álló helyzetből indítva 5 percen keresztül gyorsítunk egy 2,8 t tömegű testet egy állandó $F=7{,}5\,\text{kN}$ erővel. Mekkora sebességet ér el a test 5 perc alatt?

Megoldás

Gyűjtsük össze a kérdésben megadott mennyiségeket:

Melyik mozgáshoz kapcsolódó mennyiségek nem fordulnak elő a feladatban?

A mozgásmennyiség változásának tétele:

$m\cdot(v-v_0)=F\cdot t \rightarrow \quad \cdot(v- \quad)= \quad \cdot$

Ennek megoldásaként:

$v=$

Mintapélda – 2

Egy ferdén elhajított anyagi pontnak tekinthető test sebessége az elhajítás után két másodperccel vízszintes lesz. A test tömege 25 kg.
Számítsuk ki a test sebessségét (nagysággal és iránnyal) az elhajítás pillanatában, ha tudjuk, hogy a sebességének vízszintes vetülete $v_x=5\,\text{m/s}$.

Megoldás

Jelölje a kezdeti sebesség függőleges vetületét v_{0y}. Ennek felfelé kell mutatnia, hiszen máshogyan nem érhetnénk el a vízszintes sebességvektort. Írjuk fel a mozgásmennyiség változásának tételének a függőleges vetületi egyenletét (legyen a felfelé mutató irány a pozitív, ezt jelezzük az egyenlet elé írt nyíllal):

$$\uparrow: m\cdot(v-v_0)=(-m\cdot g)\cdot t \rightarrow 25\cdot(0-v_{0y})=-25\cdot 9{,}81\cdot 2$$

Ennek megoldásaként:

$$v_{0y}=19{,}62\,\text{m/s}$$

A vízszintes és függőleges komponens ismeretében a kezdeti sebesség nagysága:

$$v_0=\sqrt{v_x^2+v_{0y}^2}=\sqrt{5^2+19{,}62^2} \quad \rightarrow \quad v_0=20{,}25\,\text{m/s}$$

Az irányt a vízszintessel bezárt hajlásszöggel adjuk meg:

$$\tan\alpha=\frac{|v_{0y}|}{|v_x|}=\frac{19{,}63}{5} \quad \rightarrow \quad \alpha=75{,}70°$$

Gyakorló példa – 2

Egy $m=80\,\text{kg}$ tömegű anyagi pont a vízszintes xy síkban mozog. A mozgás során egyetlen, állandó $\underline{F}$ erő hat a testre. A test sebessége a $t_0=2\,\text{s}$ pillanatban $v_0=\begin{bmatrix}+10\\-8\end{bmatrix}$ m/s, a $t=8\,\text{s}$ pillanatban pedig $v=\begin{bmatrix}-10\\+8\end{bmatrix}$ m/s.
Határozzuk meg az $\underline{F}$ erőt!

Megoldás

A kezdeti és a végsebesség ismeretében írjuk fel a mozgásmennyiség változásának tételét az *x*, illetve az *y* tengely irányába:

$$m\cdot(v_x-v_{0x})=F_x(t-t_0)\rightarrow$$

$$m\cdot(v_y-v_{0y})=F_y(t-t_0)\rightarrow$$

Ezek megoldásaként a keresett erő komponensei:

$F_{0x}=$

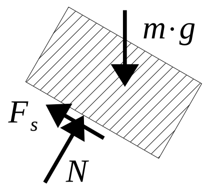
$F_{0y}=$

melyekkel az erő vektoralakban felírható: $\underline{F}=\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

Mintapélda – 3

Egy $m=10\,\text{kg}$ tömegű testet álló helyzetben magára hagyunk az $\alpha=25°$-os hajlásszögű lejtő tetején. A test egyenletes gyorsulással elkezd lefelé csúszni, és 5 másodperc alatt $10\,\text{m/s}$-os sebességet ér el. Számítsuk ki a test és a lejtő közötti csúszó súrlódási együttható értékét!

Megoldás



Az ábrán feltüntettük a testre ható erőket. A test csúszik, ezért az F_s súrlódási erő értéke: $F_s=\mu\cdot N$.

Írjuk fel a mozgásmennyiség változásának tételét a lejtő síkjára merőlegesen: $10\cdot(0-0)=(N-10\cdot 9{,}81\cdot\cos 25°)\cdot 5$

Ennek megoldásával a szorítóerő: $N=88{,}91\,\text{N}$

A súrlódási erő pedig: $F_s=\mu\cdot 88{,}91$

A mozgásmennyiség változásának tételét felírjuk a mozgás irányába is:

$$10\cdot(10-0)=(10\cdot 9{,}81\cdot\sin 25°-\mu\cdot 88{,}91)\cdot 5$$

Ezt megoldva: $\boxed{\mu=0{,}2414}$

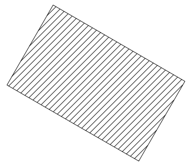
Megjegyzés1: Mivel a lejtő síkjára merőlegesen nincsen elmozdulás, így gyorsulás sem, abban az irányban felírhattuk volna Newton második törvényét is a szorítóerő számításához.

Megjegyzés2: Ha számadatok nélkül paraméteresen dolgoztunk volna, akkor az utolsó egyenlet minden összeadandó elemében pontosan egyszer fordult volna elő a tömeg szorzótényezőként. Miután azzal egyszerűsítve ugyanezt az eredményt kaptuk volna, megállapítható, hogy a megoldás a tömeg nagyságától független.

Gyakorló példa – 3

Egy $m=10\,\text{kg}$ tömegű testet álló helyzetben magára hagyunk az $\alpha=25°$-os hajlásszögű lejtő tetején. A test egyenletes gyorsulással elkezd lefelé csúszni. A test és a lejtő közötti csúszó súrlódási együttható értéke $\mu=0{,}3$.
Mennyi idő alatt éri el a test a $v=14$ m/s-os sebességet?

Megoldás



Rajzoljuk be az ábrába a testre ható erőket!

Írjuk fel a mozgásmennyiség változásának tételét a mozgás irányára merőlegesen:

Ennek megoldásából:

$$N=$$

Így a súrlódási erőt is ismerjük:

$$F_s=$$

Írjuk fel a mozgásmennyiség változásának tételét a mozgás irányába:

Az egyenlet megoldásával megkapjuk az időt:

$$t=$$

Mozgási energia, munka

Def.: Egy anyagi pont *T mozgási energiája* a pont *m* tömegének és *v* sebessége négyzetének szorzata osztva kettővel. Képletszerűen: $T=\dfrac{m v^2}{2}$

Az energia alapmértékegysége Joule, jele J, származtatása: $\mathrm{J}=\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$.

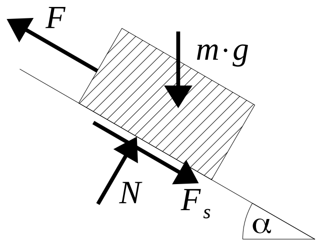
A következő definíciónk az erő munkáját adja meg. Korábbi fizikai tanulmányainkból ismerős lehet erre az energiajellegű mennyiségre az "erő szorozva az irányába eső elmozdulás"-szerű meghatározás. Olyan definíciót fogunk bevezetni, mely állandó nagyságú és irányú erő esetén egyenértékű lesz a fenti meghatározással, de képes lesz kezelni azt az esetet is, amikor az erő nagysága, vagy iránya esetleg változik. Ezt úgy érjük el, hogy először csak egy olyan kicsi, ún. elemi elmozduláson végzett munkát definiálunk, amelyen az erő változásának még nincsen hatása.

Def.: Az anyagi pontra ható $\boldsymbol{F}$ erő által d$\boldsymbol{r}$ elemi elmozduláson végzett d*L elemi munka* egyenlő az erő és az elemi elmozdulás skaláris szorzatával. Képlettel: $\mathrm{d}L=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

Def.: Az anyagi pontra ható $\boldsymbol{F}$ erő által adott $\boldsymbol{r}$ úton végzett *L munka* az erőnek az úton végzett elemi munkáinak összege (matematikailag az út szerinti integrálja). Képlettel: $L=\int \mathrm{d}L=\int_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

Mintapélda – 4

Egy $m=5\,\mathrm{kg}$ tömegű testet állandó $F=50\,\mathrm{N}$ nagyságú, a lejtővel párhuzamos erővel vonszolunk felfelé az $\alpha=20°$ hajlásszögű emelkedőn. A csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}2$. Számítsuk ki a testre ható egyes erők munkáját, amíg az $s=13\,\mathrm{m}$ hosszú emelkedő aljától elér a test annak tetejéig!



Megoldás

Az F erő párhuzamos az elmozdulással és azzal azonos irányba is mutat, így a munkája:

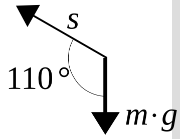
$$L_F=+50\cdot 13=+650\,\mathrm{J}$$

A súlyerő munkáját kétféleképpen számolhatjuk. Az elmozdulás erő irányú vetülete: $s_g=13\cdot\sin 20°=4{,}446\,\mathrm{m}$. Az erő lefelé mutat, az elmozdulás ezzel ellentétes, ezért a munka negatív:

$$L_g=-m\cdot g\cdot s_g=-5\cdot 9{,}81\cdot 4{,}446=-218{,}1\,\mathrm{J}$$

A másik lehetőség, hogy az erőt felbontjuk a lejtő síkjára merőleges és azzal párhuzamos komponensre. A merőleges komponens az elmozdulásra is merőleges, így annak munkája nulla. A párhuzamos komponens nagysága $m\cdot g\cdot\sin\alpha=16{,}78\,\mathrm{N}$, ez az erő az elmozdulással ellentétes irányba mutat, így munkája negatív (és ez egyben a súlyerő teljes munkája is):

$$L_g=-16{,}78\cdot 13=-218{,}1\,\mathrm{J}$$



Ezt a munkát a skalárszorzatos definíció alapján is számolhatnánk:

$$L_g=13\cdot 5\cdot 9{,}81\cdot\cos 110°=-218{,}1\,\mathrm{J}$$

A test és a lejtő közötti erő két komponense közül a szorítóerő merőleges a felületre, így az elmozdulásra is, azaz a munkája nulla:

$$L_N=0$$

A súrlódási erő munkájához tudnunk kell annak nagyságát, amihez a szorítóerőt ki kell számolni. Ezt megtehetjük Newton második törvényének a lejtő síkjára merőlegesen felírt vetületi egyenletével, hiszen ebben az irányban nincs elmozdulás, így gyorsulás sem:

$$m\cdot g\cdot\cos\alpha-N=m\cdot 0\rightarrow N=m\cdot g\cdot\cos\alpha=5\cdot 9{,}81\cdot\cos 20°=46{,}09\,\mathrm{N}$$

Ebből a súrlódási erő nagyasága $F_S=\mu\cdot N=0{,}2\cdot 46{,}09=9{,}218\,\mathrm{N}$, iránya a mozgás irányával ellentétes, ezért a munkájának előjele negatív:

$$L_S=-9{,}218\cdot 13=-119{,}8\,\mathrm{J}$$

Gyakorló példa – 4

Egy $m=15\,\mathrm{kg}$ tömegű testet engedünk lefelé az $\alpha=25°$ hajlásszögű lejtőn. A testet egy állandó $F=50\,\mathrm{N}$ nagyságú, a lejtővel párhuzamos erővel fékezzük, a csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}2$.
Számítsuk ki az egyes erők munkáját, mialatt a test a lejtőn $s=6\,\mathrm{m}$ utat tesz meg!

Megoldás

Az F erő munkája (erő szorozva az irányába eső elmozdulással):

$$L_F=$$

A súlyerő munkája kétféleképpen számolható. Egyik lehetőség az erő komponenseinek munkájából számolni. A lejtőre merőleges komponens az elmozdulásra is merőleges, így a munkája nulla. A lejtővel párhuzamos vetület:

$$m\cdot g\cdot \sin\alpha =$$

Melynek munkája:

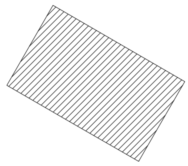
$$L_g =$$

A másik lehetőség az elmozdulás erőirányú vetületének számítása. Ez a függőleges vetület:

$$s_g =$$

melyen a teljes súlyerő végez munkát, melynek értéke:

$$L_g =$$



A lejtőről a testre átadódó erők munkájának számításához először az erőket kell ismernünk. Rajzoljuk be az elkülönített testre ható összes erőt, és írjuk fel a lejtő síkjára merőleges vetületi egyenletet:

$$\sum F_{i\nearrow}:$$

Ennek megoldásával megkapjuk a szorítóerőt és abból számítható a csúszó súrlódási erő:

$$N = \qquad\qquad F_s = \mu\cdot N =$$

A szorítóerő munkája:

$$L_N =$$

A csúszó súrlódási erő munkája:

$$L_s =$$

Már itt felhívjuk a figyelmet, hogy a tapadó súrlódási erő esetén a felületek nem mozdulnak el egymáshoz képest, így az anyagi pontra ható tapadó súrlódási erő tipikusan nem végez munkát.

Mozgási energia változásának tétele

Tétel: Egy anyagi pont mozgási energiájának adott úton történő megváltozása egyenlő a pontra ható erők által az úton végzett munkával.

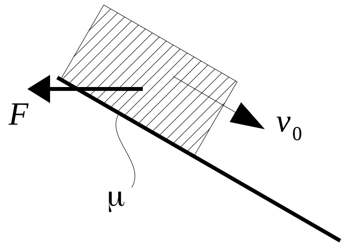
Képletszerűen: $\frac{m}{2}\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_1^2 = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{R}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$, vagy röviden $T_2 - T_1 = L_{1-2}$.

A tétel használata

Mint a képletből látható, az egyenletben nincs gyorsulás és idő, azaz minden olyan feladatnál használható, ahol sem a megadott, sem az ismeretlen mennyiségek között ezek nem fordulnak elő.

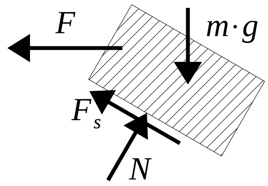
Mintapélda – 5

Egy $m=15\,\text{kg}$ tömegű test az $\alpha=30°$ hajlásszögű lejtőn csúszik lefelé $v_0=7\,\text{m/s}$ kezdeti sebességgel. A testet egy vízszintes, $F=120\,\text{N}$ nagyságú erővel lassítjuk.
Mekkora úton áll meg a test?
(A csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}15$.)



Megoldás

Az erők munkájának számításához szükségünk van arra, hogy legalább a munkát végző erők nagyságát ismerjük. Ezért az ábrában berajzoltuk a testre ható összes erőt, azaz a súlyerőt (lefelé), a lassító F erőt, a felületeket összenyomó N erőt (a lejtő síkjára merőlegesen) és a súrlódási erőt (a csúszással ellentétes irányba).



A súlyerő: $m\cdot g=15\cdot 9{,}81=147{,}2\,\text{N}$

Newton második törvényét a lejtő síkjára merőlegesen felírva:

$$\sum F_{i\nearrow}: N-m\cdot g\cdot\cos\alpha-F\cdot\sin\alpha=0 \rightarrow$$
$$N=147{,}2\cdot\cos 30°+120\cdot\sin 30°=187{,}5\,\text{N}$$

Ezt felhasználva a súrlódási erő:

$$F_s=0{,}15\cdot 187{,}5=28{,}13\,\text{N}$$

A súlyerő és az F erő munkájához szükségünk lesz az s elmozdulás függőleges és vízszintes vetületére: $s_y=s\cdot\sin\alpha,\, s_x=s\cdot\cos\alpha$.

Ezekkel felírható a mozgási energia változásának tétele:

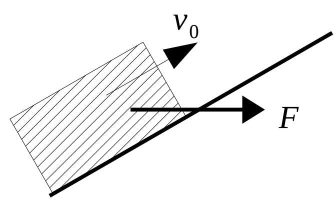
$$\frac{m}{2}\left(v^2-v_0^2\right)=L_F+L_g+L_s+L_N$$

$$\frac{15}{2}\left(0^2-7^2\right)=-120\cdot s\cdot\cos 30°+147{,}2\cdot s\cdot\sin 30°-28{,}13\cdot s+0$$

Ezt megoldva s-re: $\boxed{s=6{,}287\,\text{m}}$

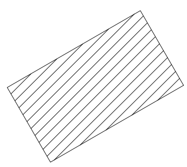
Gyakorló példa – 5

Egy $m=15\,\text{kg}$ tömegű testet vízszintes, $F=120\,\text{N}$ nagyságú erővel vontatunk felfelé az $\alpha=30°$ hajlásszögű emelkedőn. A test sebessége a lejtő alján $v_0=3\,\text{m/s}$. Mekkora lesz a test sebessége a 10 m hosszú emelkedő tetején?
(A súrlódást elhanyagolhatjuk.)



Megoldás

Az erők munkájának számításához szükségünk van arra, hogy legalább a munkát végző erők nagyságát ismerjük. Rajzoljuk be az ábrába a testre ható összes erőt.



Ezek közül a súlyerő:

$$m\cdot g=$$

Newton második törvényét a lejtő síkjára merőlegesen felírva meg tudnánk határozni az N szorítóerőt, de ez az erő nem végez munkát, ezért most nincs rá szükségünk.

A súlyerő és az *F* erő munkájához szükségünk lesz az *s* elmozdulás függőleges és vízszintes vetületére:

$s_x =$ $\qquad$ $s_y =$

Írjuk fel a mozgási energia változásának tételét:

És oldjuk meg:

$v =$

Mintapélda – 6

Egy repülőgép $h=1200\,\text{m}$ magasságban $600\,\text{km/h}$ vízszintes sebességgel repül nyugat felé. A repülőből kiugrik egy $m=70\,\text{kg}$ tömegű ejtőernyős. (A kiugrás pillanatában a sebessége azonos a repülőével.) A földetérés pillanatában az ejtőernyős sebessége $1,2\,\text{m/s}$, a sebességvektora $80°$-os szöget zár be a földdel. Számítsuk ki az ejtőernyősre ható légellenállás által az ugrás közben végzett munkát!

Megoldás

A kezdeti vízszintes sebesség miatt az ejtőernyős pályája valamilyen görbe vonal lesz. Mivel azonban pillanatnyi gyorsulások, eredők nem szerepelnek a feladatban, ezért a kérdést a pálya ismerete nélkül is meg tudjuk válaszolni. A kezdeti és a végsebesség ismeretében a mozgási energiát ki tudjuk számolni a mozgás kezdő- és végpontjában:

A kezdeti sebesség: $v_0=\dfrac{600}{3,6}=166,7\,\text{m/s}$, így $T_0=\dfrac{70\cdot 166,7^2}{2}=972611\,\text{J}$

A földetéréskor: $T=\dfrac{70\cdot 1,2^2}{2}=50,4\,\text{J}$

A gravitációs erő: $m\cdot g=70\cdot 9,81=686,7\,\text{N}$

A munkájához az elmozdulás erőirányú vetületét tudjuk felhasználni (hiszen a pálya ismeretének hiányában az erő elmozdulásirányú vetületét sem tudjuk számolni):

$$L_g=m\cdot g\cdot h=+686,7\cdot 1200=824040\,\text{J}$$

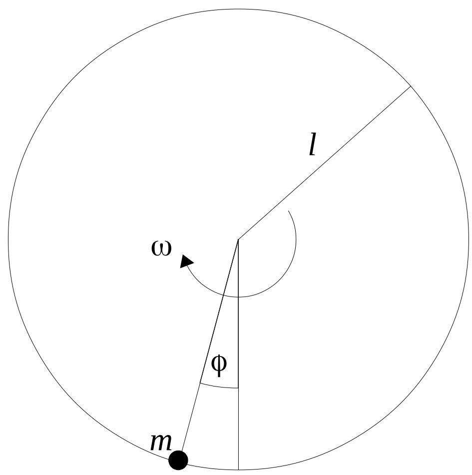
A mozgási energia változásának tétele:

$$T-T_0=L_g+L_e \quad \rightarrow \quad 50,4-972611=824\,040+L_e$$

Ennek megoldásaként: $\boxed{L_e=-1,796\cdot 10^6\,\text{J}}$

Gyakorló példa – 6

Egy $m=10\,\text{kg}$ tömegű testet egy $l=1{,}3\,\text{m}$ hosszú kötéllel függőleges síkban körbeforgatunk. Miután a test elhagyja az alsó holtpontot és a kötél a függőlegessel $\phi=10°$-os szöget zár be, a test sebessége $v=15\,\text{m/s}$.
Számítsuk ki a test sebességét a felső holtponton való áthaladáskor!
(A légellenállást elhanyagoljuk.)



Megoldás

A feladatot (valószínűleg) megoldhatnánk Newton második törvényének a segítségével is, de akkor a mozgás során egy, a pont helyzetétől függő érintőirányú gyorsulásból kellene a sebesség változását kiszámolnunk minden helyzetben. Az ilyen, pontról-pontra változó állapotot tartalmazó feladatok a változástételek egyik kiemelt alkalmazási területe.

A testre a mozgás során végig két erő működik. Az egyik a függőleges súlyerő:

$$m \cdot g =$$

A másik a változó nagyságú kötélerő. Utóbbi mindig sugárirányú, ezért az elemi elmozdulásokon végzett elemi munkája: $\mathrm{d}\,L_S =$, amiből a teljes munkája $L_S =$.

A súlyerő munkáját célszerű az elmozdulás erőirányú vetületével számolni, ami:

$$s_y =$$

A mozgási energia változásának tétele szerint:

aminek megoldásaként: $v =$

Potenciálos erők

Vannak olyan erők, melyek munkájának a számításakor azt tapasztaljuk, hogy a végzett munka csak az út kezdő- és végpontjának helyzetétől függ, az út vezetésétől nem. Ezeket az erőket potenciálos-, vagy konzervatív erőknek nevezzük és rendelhető hozzájuk egy olyan helyfüggő U potenciálfüggvény, melynek két pont közötti változása éppen a két pont között végzett munka ellentettje, azaz $U_2 - U_1 = -L_{1-2} \rightarrow L_{1-2} = U_1 - U_2$.

A potenciál szó a képességre utal, a potenciálfüggvény kifejezésben az erő munkavégző képességét írja le. Amennyiben az erő munkát végzett, úgy a munkavégző képessége annyival csökkent.

Mivel a potenciálfüggvény az időben nem változik, ezért ha a kezdő és végpont egybeesik, akkor a munkának nullának kell lenni az úttól függetlenül, azaz: zárt pályán a konzervatív erő munkája zérus.

Példák

A *gravitációs erő* potenciálos erő, egy általunk tetszőlegesen kiválasztott alapszint feletti magasságot h-val jelölve a potenciálfüggvény $U(h)=m\cdot g\cdot h$ alakban írható. Az alapszintről h magasságba emelés közben a gravitációs erő által végzett munka $L_{0-h}=-m\cdot g\cdot h$ (az erő lefelé, a h elmozdulás felfelé mutat, ezért a negatív előjel), míg a potenciálfüggvény használatával, azaz az $L_{0-h}=U_0-U_h=0-m\cdot g\cdot h$ formulával ugyanazt az eredményt kapjuk.

A lineáris rugóban ébredő *rugóerő* (ezalatt a rugó által a hozzákapcsolt testre kifejtett erőt értjük) potenciálos erő. Ha a rugóerő és a megnyúlás közötti arányossági tényezőt k-val jelöljük, akkor a Δl megnyúlású rugó által kifejtett erő potenciálfüggvénye $U(\Delta l)=\frac{k\Delta l^2}{2}$.

Ellenpélda: A súrlódási erő mindig ellenkező irányba mutat, mint az elmozdulás, ezért ha munkát végez, annak előjele nem lehet pozitív, azaz az önmagába visszatérő pálya esetén nem lehet zérus az összes munkavégzés, ezért a súrlódási erő nem konzervatív.

Mechanikai energia

Def.: Egy anyagi pont mozgási energiájának és a pontra ható összes erő potenciálfüggvényének összegét mechanikai energiának nevezzük. (A szokásos jelöléssel ez a $T+U$ összeg.)

Tétel: Ha egy anyagi pontra ható erők közül egy mozgás során csak potenciálos erők végeznek munkát, akkor a mechanikai energia a mozgás során nem változik.

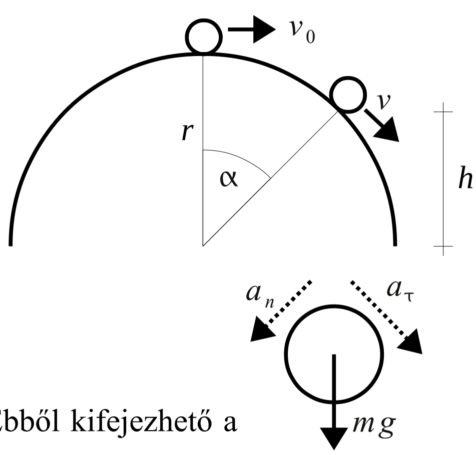
A tétel képlettel $T+U=\text{állandó}$ alakban fogalmazható meg, a gyakorlatban azonban a mozgás kezdő és végpontjában számított értékek egyenlőségét írjuk fel. Ha például az 1-es és 2-es pont közötti mozgásra írjuk fel az egyenletet, akkor a $T_1+U_1=T_2+U_2$ egyenletet írjuk fel és oldjuk meg a benne szereplő ismeretlenre.

(A tétel bizonyítása is ezen alapul, a mozgási energia változásának a tételét bármely két pont között felírva $T_2-T_1=L_{1-2}$, ahova behelyettesíthetjük a potenciálos erők munkáját: $T_2-T_1=U_1-U_2$. Ezt átrendezve kapjuk a $T_1+U_1=T_2+U_2$ egyenletet. Mivel az 1-es és 2-es pont a mozgás bármely szakaszának lehet kezdő-, illetve végpontja, ezért a két energia összegének a mozgás során állandónak kell lennie)

Mintapélda – 7

Egy r sugarú gömb tetejéről v_0 sebességgel elindul lefelé egy m tömegű anyagi pont. Milyen magasan van a kör középpontjához képest, amikor elválik a test a körpályától?

Megoldás



A két helyzetet jobbra látjuk. Az elválás pillanatában a keresett magasság $h=r\cos\alpha$.

Az elválás pillanatában a gömb és a test között nincs erő, így csak a súlyerő hat rá, ez hozza létre a körmozgás miatti gyorsulásokat. A normálirányban felírva Newton második törvényét:

$$m g\cos\alpha=m a_n=m\frac{v^2}{r},$$

amiből egyszerűsítés után az $r\cos\alpha=\frac{v^2}{g}$ egyenlet adódik. Ebből kifejezhető a pont sebessége ebben a pillanatban: $v=\sqrt{h\cdot g}$.

A legfelső ponttól az elválás pillanatáig csak a gravitációs erő végez munkát, ami konzervatív erő, így használható mechanikai energia állandóságának tétele. A mozgási energia a kezdeti és a végállapotban rendre: $T_0=\frac{1}{2}m\cdot v_0^2$ és $T=\frac{1}{2}m\cdot v^2$.

Mérjük a pont magasságát a gömb középpontjához képest, így a potenciális energia a kezdeti és a végállapotban rendre: $U_0=m\cdot g\cdot r$ és $U=m\cdot g\cdot h$. A tétel szerint:

$$T_0+U_0=T+U\rightarrow\frac{1}{2}m\cdot v_0^2+m\cdot g\cdot r=\frac{1}{2}m\cdot v^2+m\cdot g\cdot h$$

A fenti egyenlet a tömeggel való egyszerűsítés, kettővel való szorzás és az elváláskori sebesség behelyettesítése után: $v_0^2+2g\cdot r=g\cdot h+2g\cdot h$ alakú lesz, amit megoldhatunk:

$$\boxed{h=\frac{2}{3}r+\frac{v_0^2}{3g}}$$

Gyakorló példa – 7

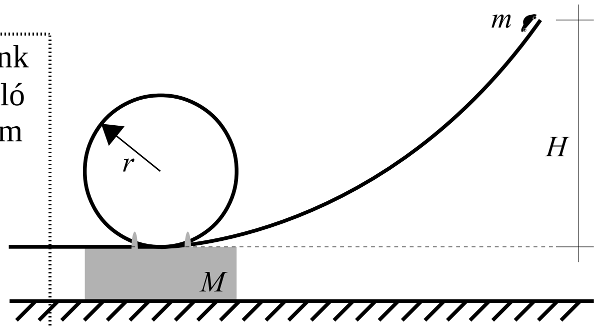
Az ábrán látható pályán H magasságból leengedünk egy matchboxot. A kiskocsi az r sugarú hurkon való áthaladás közben végig érintkezik a pályával és nem emeli el a hurkot tartó alépítményt a földtől.

a) H függvényében mekkora sebességgel éri el a kiskocsi a hurok tetőpontját?

b) Milyen értékek között változhat az indítás H magassága?

A matchbox m tömegű anyagi pontnak tekinthető, a hurkot tartó alépítmény tömege M (nincs külön a padlóhoz rögzítve, attól el tud emelkedni), a pályaelemek tömege és a súrlódás elhanyagolható.

$r=15\,\text{cm}, m=0{,}05\,\text{kg}, M=0{,}5\,\text{kg}$



Megoldás

Mivel álló helyzetből indítjuk, ezért a kezdeti sebesség és így a kezdeti mozgási energia:

$v_0=$ $T_0=$

A hurok tetején a mozgási energia az ismeretlen *v* sebesség függvényében:

$T=$

Az eddigiek alapján a mozgási energia változásának tételét írhatnánk fel. A súrlódás elhanyagolása miatt a súrlódási erő zérus, így a pályáról a kiskocsira átadódó erő végig merőleges lesz a pillanatnyi elemi elmozdulásra, emiatt a szorítóerő nem végez munkát. Így csak a súlyerő végez munkát, ami konzervatív, így használható a mechanikai energia állandóságának tétele. A súlyerő potenciális energiájának alapszintjét válasszuk a pálya legalacsonyabb pontjának.

A kezdeti pillanatban a kiskocsi magassága az alapszint felett: , így a potenciális energiája ekkor: $U_0=$

A hurok tetőpontjában a kiskocsi magassága az alapszint felett: , így a potenciális energiája ekkor: $U=$

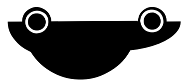
A tétel ezekkel az adatokkal:

$T_0 + U_0 = T + U \rightarrow$

Az egyenletből ki tudjuk fejezni a sebesség négyzetét, illetve a sebességet:

$$v^2 =$$

a) $v =$



A hurok tetőpontján a kiskocsi egy körpályán mozog. Rajzoljuk fel a rá ható erőket! (Mivel érintkezik a pályával, ezért két erő hat rá.)

Mekkora gyorsulást hoz létre ez a két erő?

$$a_n =$$

Írjuk fel Newton második törvényét a gyorsulás irányába, és helyettesítsük be a korábban kifejezett sebességet:

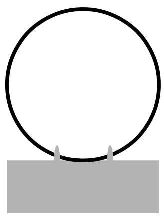
$$m \cdot g + N = m \cdot a_n \quad \rightarrow$$

Az egyenletből fejezzük ki az *N* erőt:

$$N =$$

Erre az erőre két feltételünk van.

Mivel a kiskocsi végig érintkezik a pályával, ezért a köztük lévő erő nem lehet húzóerő (hiszen akkor elválnának egymástól). Ez egyenlőtlenségként megfogalmazva és megoldva *H*-ra:



A másik feltétel az, hogy az alépítmény nem emelkedhet el. Ennek a résznek egyensúlyban kell lennie, miközben három erő hat rá: a saját önsúlya, a kiskocsira ható erő ellentettje és a földről átadódó megtámasztó erő (jelölje *F*). Ezek egyensúlyi egyenlete:

$$\sum F_{iy}:$$

Amibe behelyettesíthetjük a korábban kifejezett *N* erőt és kifejezhetjük az *F* erőt:

Az alépítmény akkor nem emelkedik el, ha az *F* erő nyomóerő. Ezt egyenlőtlenségként megfogalmazva és megoldva *H*-ra:

A két megoldás összegezve:

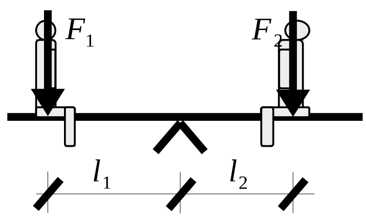
b) $< H <$

Erő nyomatéka

Eddig anyagi pontról beszéltünk, a test kiterjedésével és az erők helyzetével nem foglalkoztunk. A körhinta alapján azonban mindenki tudja, hogy az erő hatására nem csak eltolódhat egy test, hanem el is fordulhat. Ezt a forgató hatást az erő nyomatékának nevezzük és általában *M*-mel jelöljük.

Def.: Egy erő adott tengelyre vonatkozó nyomatékát úgy számoljuk, hogy az erő tengelyre merőleges vetületének nagyságát megszorozzuk az erő karjával, ami a tengely távolsága az erő hatásvonalától. A tengely pozitív irányából szembe nézve az óramutató járásával ellentétes irányba forgató erő nyomatéka pozitív.

Def.: Síkban egy erő adott pontra vonatkozó nyomatéka a ponton átmenő, a síkra merőleges, felénk mutató tengelyre vett nyomatékkal egyenlő. Az óramutató járásával ellentétes irányba forgató erő nyomatéka pozitív.



Talán legegyszerűbb példaként a mérleghintát, mint kétkarú emelőt szokás felhozni. (E feladatot síkbelinek tekintve a mérleghinta tengelyének a síkkal való metszéspontjára határozzuk meg az erők nyomatékait.) Az egyensúly feltétele, hogy a két forgató hatás azonos nagyságú, de ellentétes irányú legyen. A pont (tengely) körül az egyik oldalon ülő súlya az egyik, a másik oldalon ülő súlya a másik irányba forgat. A forgató hatás mindkét esetben a súly és a tengelytől való távolság szorzata, azaz az

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

feltétel esetén marad meg az egyensúly, tehát nagyobb F_2 erő esetén kisebb l_2 kar szükséges.

Mivel a gyakorlatban nem csak két forgató hatás fordulhat elő, ezért az egyensúly feltételét általában nem a kétféle hatás egyenlőségeként fogalmazzuk meg, hanem az előjelhelyes összegüket tesszük egyenlővé nullával. Például ha pozitívnak az óramutató járásával ellenkező irányt választjuk akkor az egyensúly feltétele: $F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 = 0$ alakú lesz. Ezt, ha teljesül, könnyedén át lehet rendezni az egyenlőség alakjára, ha viszont nem, akkor a baloldal előjeléből az is kiderül, hogy a test merre kezd elfordulni (pozitív előjel esetén pozitív irányba, azaz az óramutató járásával ellenkezőleg).

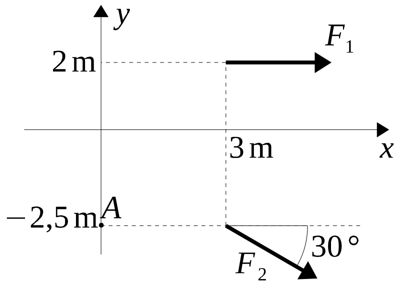
Megemlítjük, hogy az ábrán látható vízszintes testre még egy erő hat, a tengelyen egy függőleges, felfelé mutató erő (jelölje *T*). Ennek az erőnek a hatásvonala átmegy a forgástengelyen, ezért az attól való távolsága nulla, így nem forgat körülötte, ezért nem került bele a felírt egyenletünkbe. Az egyensúly teljesülése esetén azonban nem csak a nyomatéki egyenletnek kell teljesülnie, hanem bármelyik vetületi egyenletnek is, így függőleges irányban $T - F_1 - F_2 = 0 \rightarrow T = F_1 + F_2$. A test pedig nem csak a tengely körül nem fordulhat el, hanem az F_1 támadáspontja körül sem. Erre a pontra F_1 karja zérus, a *T* erő karja l_1 , az F_2 karja $l_1 + l_2$, így a nyomatéki egyensúlyi egyenlet: $F_1 \cdot 0 + (F_1 + F_2) \cdot l_1 - F_2 \cdot (l_1 + l_2) = 0$, amiből ugyanazt a feltételt kapjuk, mint korábban.

Ahhoz, hogy ne kelljen az óramutatóra hivatkozni, a továbbiakban (hacsak nem hangsúlyozzuk ennek ellenkezőjét) a nyomatéki egyenletekben az óramutató járásával ellentétes irányban forgató nyomatékot tekintjük pozitívnak. Néhány szabály:

- Ez a nyomaték az erőé. A hatásvonala mentén felbontva komponensekre, a komponensek nyomatékának összege az erő nyomatékát adja (hiszen a komponensek is az erőt adják).

- A tengelyt metsző hatásvonalú erő nem forgat a tengely körül.
- A tengellyel párhuzamos erőkomponens nem forgat a tengely körül (ez látszik a definícióból, de ha a párhuzamosokra úgy tekintünk, mint amik a végtelenben metszik egymást, akkor ez az előző két pontból következik).
- A koordináta-rendszer jobb-, vagy balkezessége dönti el, hogy melyik irány a pozitív, azaz ha egy könyvben balkezes koordináta-rendszert használnak, akkor ott az óramutató járásával megegyező irány lesz a pozitív.

Mintapélda – 1



Számítsuk ki az ábra szerinti helyzetű F_1 és F_2 erők nyomatékát az origóra és az A pontra!
$F_1 = 12\,\mathrm{kN}, F_2 = 9\,\mathrm{kN}$

Megoldás

Az F_1 erő nyomatéka

Az erő az origó körül az óramutató járásával megegyezően forgat, így az előjele negatív, a karja a hatásvonal és a pont függőleges távolsága (2m):

$$M_1^{(0)} = -12 \cdot 2 = -24\,\mathrm{kNm}.$$

Az erő az A pont körül az óramutatóval megegyező irányba forgat, előjele negatív, karja a függőleges távolság (2+2,5=4,5m):

$$M_1^{(A)} = -12 \cdot 4{,}5 = -54\,\mathrm{kNm}.$$

Az F_2 erő nyomatéka

A ferde erő nyomatékát számolhatjuk vízszintes és függőleges komponensekre bontással, és a komponensek nyomatékainak összegzésével. Ehhez a két komponens:

$$F_{2x} = +9 \cdot \cos 30° = +7{,}794\,\mathrm{kN}(\rightarrow), \quad F_{2y} = -9 \cdot \sin 30° = -4{,}5\,\mathrm{kN}(\downarrow).$$

A felbontást a megadott támadáspontban elvégezve a vízszintes komponens az óramutatóval ellenkezőleg forgat az origó körül, előjele pozitív, karja az x tengelytől való távolság ($2{,}5\,\mathrm{m}$), míg a függőleges komponens óramutatóval megegyezően forgat, előjele negatív, karja az y tengelytől való távolság ($3\,\mathrm{m}$):

$$M_2^{(0)} = +7{,}794 \cdot 2{,}5 - 4{,}5 \cdot 3 = +5{,}985\,\mathrm{kNm}(\curvearrowleft)$$

Látható, hogy miután a komponensek nyomatékának az előjelét szemléletből eldöntöttük, az erők és távolságok nagyságánál már csak azok abszolútértékét használtuk.

Ugyanitt felbontva az erőt, az A pont körül a vízszintes komponens nem forgat (a karja nulla), a függőleges komponens negatív irányba (óramutatóval megegyezően) forgat, a karja a vízszintes távolság ($3\,\mathrm{m}$):

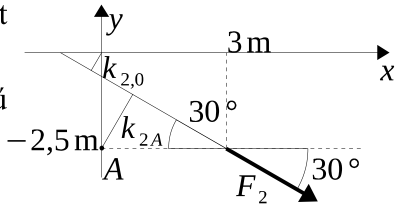
$$M_2^{(A)} = +7{,}794 \cdot 0 - 4{,}5 \cdot 3 = -13{,}5\,\mathrm{kNm}(\curvearrowright)$$

A nyomaték számítását komponensekre bontás nélkül is elvégezhetjük, de ekkor hosszabb geometriai számításokra lehet szükség az alábbiak szerint:

A hatásvonal origótól való távolságához először a hatásvonal és az y-tengely metszéspontját keressük meg. Ez $3 \cdot \mathrm{tg}30° = 1{,}732\,\mathrm{m}$ magasan van az A pont felett, azaz

$2{,}5 - 1{,}732 = 0{,}768\,\mathrm{m}$ -rel az origó alatt. A legkisebb derékszögű háromszög alapján tehát

$k_{20} = 0{,}768 \cdot \cos 30° = 0{,}665\,\mathrm{m}$.



Az origó körül az F_2 a hatásvonala helyzete alapján pozitív irányba (óramutató járásával ellentétesen) forgat, nyomatéka: $M_2^{(0)} = +9 \cdot 0{,}665 = +5{,}985\,\mathrm{kNm}(\curvearrowleft)$, akárcsak a komponensekből számítva.

A hatásvonal A ponttól való távolsága:

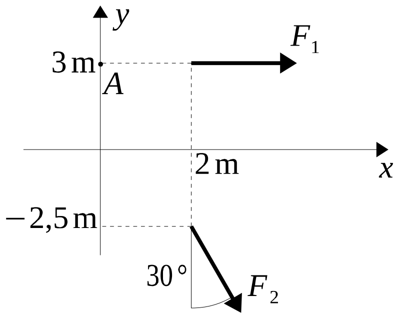
$k_{2A} = 3 \cdot \sin 30° = 1{,}5\,\mathrm{m}$

A meghosszabbított hatásvonal alapján F_2 az A pont körül negatív irányba (az óramutató járásával megegyezően) forgat, ezért: $M_2^{(A)} = -9 \cdot 1{,}5 = -13{,}5\,\mathrm{kNm}(\curvearrowright)$.

Gyakorló példa – 1

Számítsuk ki az ábra szerinti helyzetű F_1 és F_2 erők nyomatékát az origóra és az A pontra!

$F_1 = 9\,\mathrm{kN}, F_2 = 12\,\mathrm{kN}$



Megoldás

Az F_1 erő nyomatéka

Az erő az origó körül az óramutatóhoz képest hogyan forgat?

……………. , ezért az előjele ….

A hatásvonal és az origó távolsága (az erő karja):

Az erő nyomatéka: $M_1^{(0)} =$

Az erő nyomatéka az A pontra:

$M_1^{(A)} =$

Az F_2 erő nyomatéka

Az erő ferde, ezért a forgatás iránya és karja helyett bontsuk komponensekre a támadáspontjában:

$F_{2x} =$

$F_{2y} =$

Az origóra számolt nyomatékhoz:

A vízszintes komponens forgatási értelme: ......, nyomatékának előjele: ....., karja: ....m.

A függőleges komponens forgatási értelme: ......, nyomatékának előjele: ....., karja: ....m.

Az erő nyomatéka: $M_2^{(0)} =$

Az A pontra számolt nyomatékhoz:

A vízszintes komponens forgatási értelme: ......, nyomatékának előjele: ....., karja: ....m.

A függőleges komponens forgatási értelme: ......, nyomatékának előjele: ....., karja: ....m.

Az erő nyomatéka: $M_2^{(A)} =$

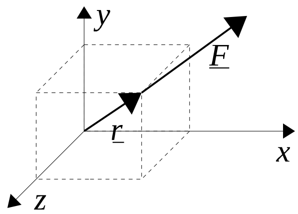
Térbeli feladatnál is visszavezetjük síkbeli feladatokra a nyomaték számítását, így csak a tengelyre merőleges erőkomponensek és távolságvetületek számítanak.

Egy térbeli pontra vett nyomaték egy olyan vektor, melynek bármely tengely irányába eső vetülete a ponton áthaladó adott irányú tengelyre vett nyomatékkal egyenlő. Ha tehát a vizsgált ponton átmenő, koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyekre számított nyomatékokat egy vektorba gyűjtve felsoroljuk, akkor az a vektor a kérdéses pontra számított nyomatékvektor lesz.

Mintapélda – 2

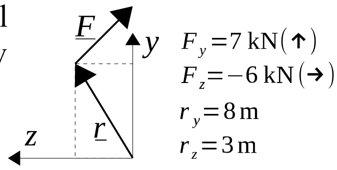
Számítsuk ki az $\underline{r}$ támadáspontú $\underline{F}$ erő nyomatékát az x, y, z tengelyekre és az origóra!

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -6 \end{bmatrix} \text{kN}, \ \underline{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \text{m}$$



Megoldás

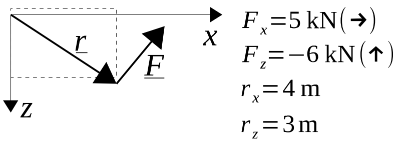
Az x tengelyre vett nyomatékhoz a tengely irányából, azaz jobbról kell néznünk a feladatot az ábra szerint. Mindkét komponens negatív irányba forgat:



$$M_x = -7 \cdot 3 - 6 \cdot 8 = -69\,\text{kNm}\,(\curvearrowright)$$

A nyomaték előjele itt az x tengely irányából nézve értendő.

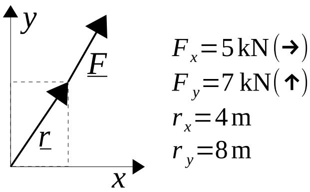
Az y tengelyre vett nyomatékhoz a tengely irányából, azaz felülről kell néznünk a feladatot az ábra szerint. Mindkét komponens pozitív irányba forgat, így:



$$M_y = +5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = +39\,\text{kNm}\,(\curvearrowleft)$$

A nyomaték előjele itt az y tengellyel szembenézve értendő.

A z tengelyre vett nyomatékhoz a tengely irányából, azaz előlről kell néznünk a feladatot az ábra szerint. A vízszintes komponens negatív, a függőleges komponens pozitív irányba forgat, így:



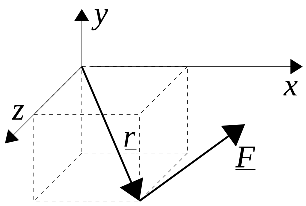
$$M_z = -5 \cdot 8 + 7 \cdot 4 = -12\,\text{kNm}\,(\curvearrowright)$$

A nyomaték előjele itt a z tengely irányából nézve értendő.

A három nyomatékból képezhetjük az F erő nyomatékát az origóra:

$$\underline{M}_F^0 = \begin{bmatrix} -69 \\ +39 \\ -12 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

Gyakorló példa – 2



Számítsuk ki az $\underline{r}$ támadáspontú $\underline{F}$ erő nyomatékát az x, y, z tengelyekre és az origóra!

$$\underline{F}=\begin{bmatrix}8\\4\\-3\end{bmatrix}\mathrm{kN},\ \underline{r}=\begin{bmatrix}5\\-7\\3\end{bmatrix}\mathrm{m}$$

Megoldás

Az x tengelyre vett nyomaték számításához rajzoljuk meg az ábra vetületét az x tengely irányából nézve!

A síkbeli ábra alapján döntsük el e két erőkomponens forgatási irányát és a nyomaték előjelét.

$$M_x=$$

Az y tengelyre vett nyomaték számításához rajzoljuk meg az ábra vetületét az y tengely irányából nézve!

A síkbeli ábra alapján döntsük el e két erőkomponens forgatási irányát és a nyomaték előjelét.

$$M_y=$$

A z tengelyre vett nyomaték számításához rajzoljuk meg az ábra vetületét a z tengely irányából nézve!

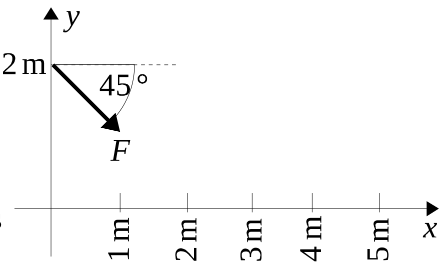
A síkbeli ábra alapján döntsük el e két erőkomponens forgatási irányát és a nyomaték előjelét.

$$M_z=$$

A tengelyekre kiszámolt nyomatékok mindegyike az origón átmenő tengelyre számított nyomaték. Az origóra vett nyomaték tehát:

$$\underline{M}^{(0)}=\begin{bmatrix}M_x\\M_y\\M_z\end{bmatrix}=$$

Mintapélda – 3



Számítsuk ki az $F=14\,\mathrm{kN}$-os erő nyomatékait a x-tengelyen jelölt pontokra!

Megoldás

A 45°-os szög miatt az F erő vízszintes és függőleges komponense csak irányukban térnek el, nagyságuk egyaránt

$F_x = F_y = 14 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9{,}899\,\text{kN}$ jobbra, illetve lefelé.

Az erőt a támadáspontjában felbontva a vízszintes komponens valamennyi pont körül negatív irányba forgat, karja $2\,\text{m}$, a függőleges komponens valamennyi pont körül pozitív irányba forgat, a karja az adott pont x koordinátájával egyenlő. A nyomatékok:

$$M_1 = -9{,}899 \cdot 2 + 9{,}899 \cdot 1 = -9{,}899\,\text{kNm} \,(\curvearrowright)$$

$$M_2 = -9{,}899 \cdot 2 + 9{,}899 \cdot 2 = 0\,\text{kNm}$$

$$M_3 = -9{,}899 \cdot 2 + 9{,}899 \cdot 3 = +9{,}899\,\text{kNm} \,(\curvearrowleft)$$

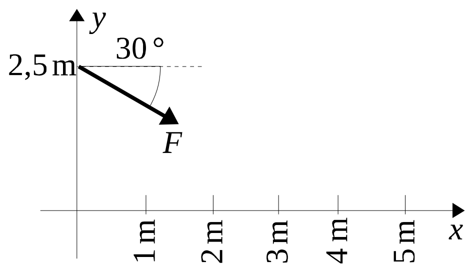
$$M_4 = -9{,}899 \cdot 2 + 9{,}899 \cdot 4 = +19{,}80\,\text{kNm} \,(\curvearrowleft)$$

$$M_5 = -9{,}899 \cdot 2 + 9{,}899 \cdot 5 = +29{,}70\,\text{kNm} \,(\curvearrowleft)$$

Megjegyzés: M_2 zérus értéke azt jelenti, hogy az erő nem forgat a pont körül. Ez azt jelenti, hogy a hatásvonala átmegy a $2\,\text{m}$ -nél levő ponton, ami valóban igaz.

Gyakorló példa – 3

Számítsuk ki az $F = 16\,\text{kN}$-os erő nyomatékait az x tengelyen jelölt pontokra!



Megoldás

A ferde erő nyomatékát a komponensei nyomatékának az összegeként számolhatjuk ki. A komponensekre bontást végezzük az erő támadáspontjában:

$F_x =$

$F_y =$

A vízszintes komponens forgatási értelme a jelölt pontok körül ...., ezért nyomatékának előjele ....., a karja pedig ....

A függőleges komponens forgatási értelme a jelölt pontok körül ...., ezért nyomatékának előjele ....., a karja pedig rendre ....

Ezeket felhasználva az erő nyomatéka az egyes pontokra:

$M_1 =$

$M_2 =$

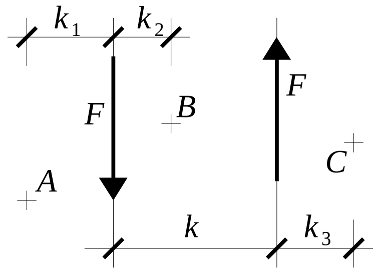
$M_3 =$

$M_4 =$

$M_5 =$

Erőpár

Korábban már láttuk, hogy két azonos nagyságú, ellentétes irányú erő eredője egy zéruserő akkor, ha közös a hatásvonaluk. *Erőpár*nak akkor nevezünk két erőt, ha a két erő hatásvonala párhuzamos, de nem esik egybe, az erők nagysága azonos, irányuk pedig ellentétes. Ha az erőpár eredőjének számításához felírjuk a vetületi egyenleteket, a két erő komponensei mindig azonos vetülettel, de ellenkező előjellel fognak szerepelni, így az összegük mindig nulla lesz. A forgatónyomatékuk azonban nem nulla, hanem minden pontra ugyanakkora. Ezt az erő nyomatékának vektoriális szorzattal való definíciójával is bizonyítani lehet, mi azonban csak a két hatásvonal által meghatározott síkban bizonyítjuk az alábbi ábra segítségével.



Az A, B és C három pontra felírva a két erő nyomatékainak összegét:

$$M_A = -F\cdot k_1 + F\cdot(k+k_1) = F\cdot k$$

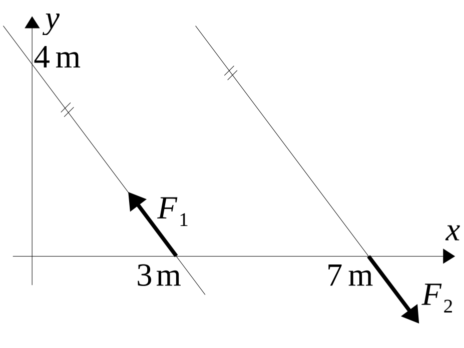
$$M_B = F\cdot k_2 + F\cdot(k-k_2) = F\cdot k$$

$$M_C = F\cdot(k+k_3) - F\cdot k_3 = F\cdot k$$

A két erő tehát minden pont körül ugyanakkora eredő nyomatékkal forgat, az eredőjük ez a forgató hatás. Ezt a forgató hatást, amivel az erőpár helyettesíthető *forgatónyomatéknak* nevezzük. A forgatónyomaték nagysága, amint a három fenti egyenletből is kiderül, két dologtól függ: az erőpár erőinek nagyságától és a két hatásvonal távolságától, amit az erőpár karjának nevezünk. A forgatónyomaték forgatási értelme és így az előjele is a két erő helyzetétől függ, legegyszerűbben úgy dönthetjük el, ha megnézzük, hogy az erőpár egyik tagja milyen irányban forgat a másik erő hatásvonalának egyik (bármelyik) pontja körül.

Mintapélda - 4

Határozzuk meg az ábrán megadott, $F_1 = F_2 = 12\,\mathrm{kN}$ nagyságú erőkből álló erőpár eredőjét:
-a két erő origóra való nyomatékának összegzésével,
-az erőkar kiszámításának segítségével!



Megoldás

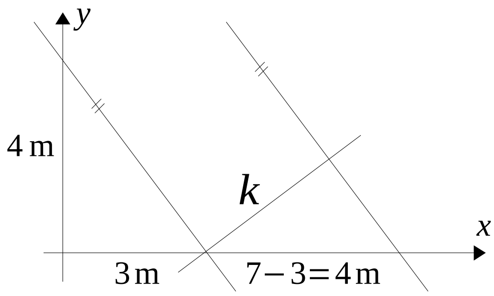
A két erő nyomatéka az origóra többféleképpen számolható. A változatosság kedvéért F_1-et bontsuk fel az y-tengellyel való metszéspontjában, az F_2-t pedig az x-tengellyel való metszéspontjában. Így előbbinek csak a vízszintes, utóbbinak csak a függőleges komponense forgat az origó körül. A forgatónyomaték értéke:

$$M = +12\cdot\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot 4 - 12\cdot\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot 7 = -38{,}4\,\mathrm{kNm}\,(\curvearrowright)$$

A két erő hatásvonalának egymástól való távolságát két hasonló derékszögű háromszöggel tudjuk kiszámolni:

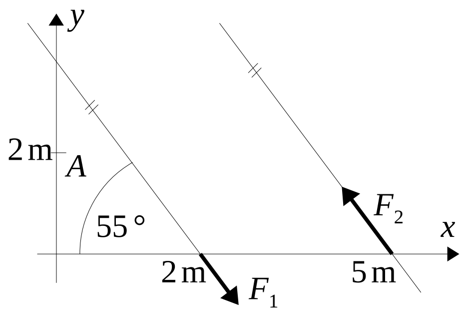
$$\frac{k}{4}=\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\rightarrow k=3{,}2\,\text{m}$$

A forgatónyomaték előjeléhez azt kell megfontolnunk, hogy az F_1 erő az óramutató járásával megegyezően forgat az F_2 erő támadáspontja körül, így az előjele negatív, értéke pedig: $M=-12\cdot 3{,}2=-38{,}4\,\text{kNm}\,(\curvearrowright)$



Gyakorló példa – 4

Határozzuk meg az ábrán megadott, $F_1=F_2=15\,\text{kN}$ nagyságú erőkből álló erőpár eredőjét:
-a két erő A pontra számolt nyomatékának összegzésével,
-az erőkar kiszámításának segítségével!



Megoldás

Bontsuk fel mindkét ferde erőt a támadáspontjukban komponensekre, jelölve a komponensek irányát is:

$F_{1x}=$ $\quad$ $,F_{1y}=$

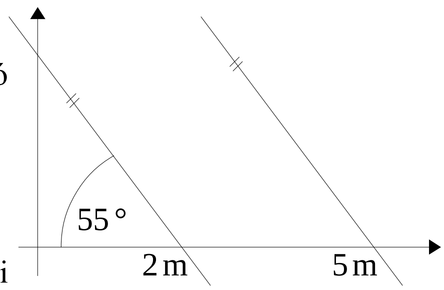
$F_{2x}=$ $\quad$ $,F_{2y}=$

A négy komponens A pontra vett nyomatékainak összegzése (előjel, erő, karja):

$M^{(A)}=$

Az erőpár erőkarja a két hatásvonal távolsága.

Jelöljük be ezt a távolságot az ábrán és keressünk hasonló háromszögeket!



Az erőpár karja ez alapján:

$k=$

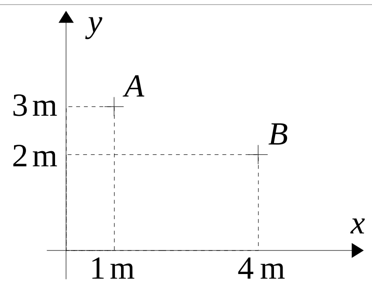
Milyen irányba forgatnak az erők az egymás támadáspontjai körül?

Az erőpár nyomatéka (előjel, erő, karja):

$M=$

Mintapélda – 5

Bontsuk fel az $M=27\,\text{kNm}$ ($\curvearrowleft$) forgatónyomatékot egy olyan erőpárra, melynek erői függőlegesek és az A, és a B pontokon mennek át!



Megoldás

Az A és B pontokon át a keresett erőkkel párhuzamos két függőleges vonal egymástól mért (merőleges) távolsága az erőpár karja, azaz $k=3\,\mathrm{m}$.

Az A és B erők nagyságát az $M=F\cdot k$ képlet átalakításával kapjuk:

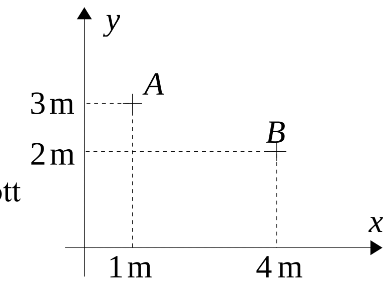
$$A=B=\frac{M}{k}=\frac{27}{3}=9\,\mathrm{kN}$$

Az erők irányához a forgatási irányokat kell megfeleltetnünk. Az A ponton átmenő függőleges felfelé mutató erő negatív, a lefelé mutató erő pozitív irányba forgat a B pont körül. A feladatban megadottal azonos előjelű forgatónyomatékot az utóbbi (azaz a lefelé mutató) eredményezi. Az erőpár másik erejének ezzel ellenkező irányúnak kell lennie, azaz B felfelé mutat, így az eredmény: $\boxed{A=9\,\mathrm{kNm}(\downarrow), B=9\,\mathrm{kNm}(\uparrow)}$

Megjegyzés: függőleges erőkről lévén szó, a függőleges koordináták a számítást nem befolyásolták, hiszen az erő a hatásvonala mentén eltolható.

Gyakorló példa – 5

Bontsuk fel az $M=-27\,\mathrm{kNm}$ (↷) forgatónyomatékot egy olyan erőpárra, melynek erői vízszintesek és az A, és a B pontokon mennek át!



Megoldás

Az erők irányának ismeretében a két támadásponton át húzott ilyen irányú hatásvonal távolsága az erőpár karja. Ez:

$$k=$$

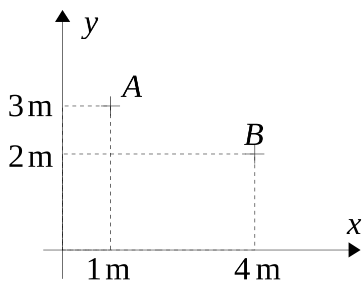
A kar ismeretében az erők nagysága:

$$|A|=|B|=$$

Milyen irányú legyen a vízszintes A erő, hogy a B pont körül az M forgatónyomatékkal azonos irányba forgasson? ....

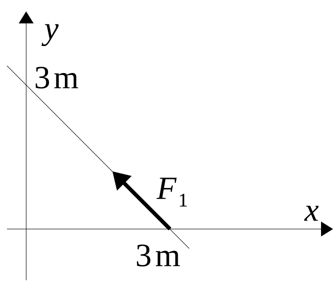
Milyen irányú legyen a vízszintes B erő, hogy a A pont körül az M forgatónyomatékkal azonos irányba forgasson? ....

Vázoljuk az eredményt!



Mintapélda - 6

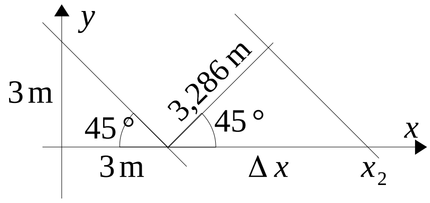
Bontsuk fel az $M=-23\,\mathrm{kNm}$ (↷) forgatónyomatékot egy olyan erőpárra, mely egyik ereje az ábra szerinti $F_1=7\,\mathrm{kN}$ nagyságú erő!



Megoldás

Az erőpár egyik ereje adott, a másiknak azonos nagyságú, de ellentétes irányúnak kell lennie: $F_2=7\,\mathrm{kN}(\searrow)$.

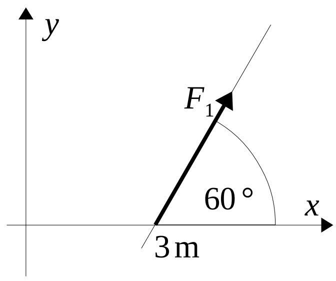
Az erőpár forgatónyomatéka akkor lesz azonos a megadottal, ha a karja: $k=\frac{23}{7}=3{,}286\,\mathrm{m}$



Ezt a távolságot a hatásvonalra merőlegesen kell felmérnünk ahhoz, hogy az F_2 hatásvonalát megkapjuk. Ezt megtehetnénk jobbra-felfelé, vagy balra-lefelé. A jobbra-lefelé mutató F_2 az első esetben negatív, a második esetben pozitív irányba forgat F_1 támadáspontja körül, ezért nekünk jobbra-felfelé kell felmérnünk a távolságot. Ezt tettük az ábrán, ami alapján az F_2 hatásvonalának az x-tengellyel való metszéspontját is számolhatjuk:

$\Delta x = 3{,}286 \cdot \sqrt{2} = 4{,}647\,\text{m}$ amiből: $x_2 = 3 + 4{,}647 = 7{,}647\,\text{m}$

Gyakorló példa – 6



Bontsuk fel az $M = +23\,\text{kNm}$ (↶) forgatónyomatékot egy olyan erőpárra, mely egyik ereje az ábra szerinti $F_1 = 8\,\text{kN}$ nagyságú erő!

Megoldás

Milyen irányú az erőpár F_2 ereje? .....

Mekkora ez az erő? $F_2 =$

Az erőpár karját a forgatónyomatékból és az erő nagyságából számíthatjuk:

$k =$

Milyen irányban kell lennie az F_2 erőnek az F_1 -hez képest?

Mekkora a két erő hatásvonalának vízszintes távolsága?

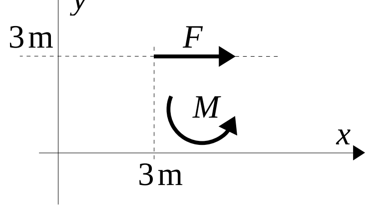
Párhuzamos erőrendszerek eredője síkban

Egy síkbeli erőrendszer *eredő*jének azt az egyetlen erőt vagy nyomatékot nevezzük, amely az erőrendszerrel azonos mechanikai hatást fejt ki. Azt, hogy két erőrendszer azonos mechanikai hatást fejt ki *egyenértékűségnek* nevezzük. Két erőrendszer egyenértékűségét írásban úgy jelöljük, hogy a közéjük írt egyenlőségjel fölé egy pontot teszünk.

Két közös hatásvonalú erő esetén az eredőről tudjuk, hogy az eredő az irányoknak megfelelő előjelekkel összegzett erőnagyságokkal megegyező nagyságú erő, melynek hatásvonala megegyezik a közös hatásvonallal (esetleg, ha a két erő azonos nagyságú, akkor zéruserő az eredő). Az erőpárnál már láttunk példát arra, hogy ha nem közös a hatásvonal, akkor nem elegendő a vetületi egyenlet az eredő megállapításához, hanem az erők forgató hatását is figyelembe kell vennünk.

Először nézzük meg, milyen hatással helyettesíthető egy erő és egy forgatónyomaték.

Mintapélda - 7



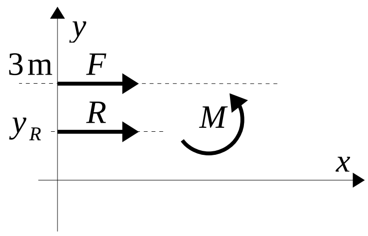
Határozzuk meg az ábra szerinti $F = 13\,\text{kN}$ erő és $M = 14\,\text{kNm}$ nyomaték eredőjét!

Megoldás

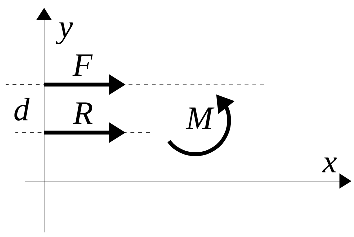
Az egyenértékűség alapján: $(F, M) \doteq R$

Ahhoz, hogy eredő erőt számoljunk, a vetületi egyenletekbe való beírhatósághoz az M

nyomatékot erőpárrá kellene alakítanunk. Mostanra azonban már tudjuk, hogy az erőpár két erője azonos nagyságú és ellentétes irányú lenne, így bármilyen vetületi egyenletben azonos nagysággal, de ellentétes előjellel szerepelnének, így kiejtenék egymást. Az eredő erő számítására szolgáló vetületi egyenletben tehát csak az *F* erő vetülete szerepelne, így az eredő az *F*-fel azonos nagyságú és irányú lesz, azaz vízszintes, és $R=13\,\mathrm{kN}(\rightarrow)$.



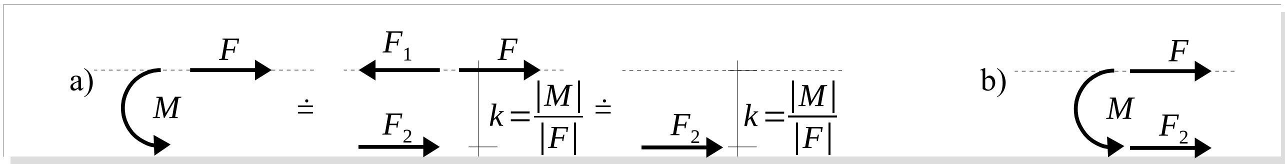
Kérdés viszont, hogy hol van ez az eredő. Ehhez a hatásvonalának kell olyan helyen lennie, hogy bármely pont körül ugyanolyan nyomatékkal forgasson, mint a megadott *F* erő és *M* nyomaték együttesen. A hatásvonal helyzetét egyértelműen megadhatjuk az *y*-tengellyel való metszéspontjának y_R koordinátájával, és felírhatjuk a nyomatékokat az origóra. Ez a nyomatéki egyenlet (az *R* kiszámított értékét zárójelbe téve): $\sum M_i^{(0)}:-13\cdot 3+14=-(13)\cdot y_r$, amiből $y_R=1{,}923\,\mathrm{m}$ (a pozitív előjel ennél a koordinátánál azt jelenti, hogy valóban az *x*-tengely fölött van ez a metszéspont).



Kereshetjük az eredő helyét más paraméterrel is. Jelölje *d* azt a távolságot, amennyivel az eredő hatásvonala lejjebb van, mint az *F* hatásvonala. A nyomatéki egyenértékűséget kifejező nyomatéki egyenletet írjuk fel az *F* erő támadáspontjára: $\sum M_i^{(F)}:+13\cdot 0+14=+13\cdot d$, amiből $d=1{,}077\,\mathrm{m}$ (itt a pozitív előjel jelentése, hogy a feltevésünknek megfelelően lejjebb van az eredő, mint az *F* erő).

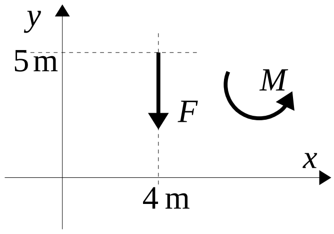
Ez utóbbi módszert általánosítva azt mondhatjuk, hogy a nyomatéki egyenletet az erő támadáspontjára írva fel, annak egyik oldalán csak a forgatónyomaték, másik oldalán pedig az eredő nyomatéka lesz nemzérus. Az eredőnek tehát azon az oldalon kell lennie (a megadott erőhöz képest), hogy azonos irányba forgasson az erő támadáspontja körül, mint a megadott forgatónyomaték. A hatásvonalak távolságát a $d=\frac{|M|}{|R|}=\frac{|M|}{|F|}$ összefüggés adja. Egy erő és egy nyomaték eredője tehát egyetlen erő, melynek nagysága és iránya az erőével azonos, helyét az erő hatásvonalára merőleges eltolásával kapjuk, az eltolás nagyságát és irányát pedig a fentiek szerint kereshetjük meg.

Fenti gondolatmenettel részben átfedő módon is megoldhatjuk a feladatot (az egyes lépéseket lásd a következő ábra a) részén). Az *M* nyomatékot felbonthatjuk egy erőpárra, jelölje ezt a két erőt F_1 és F_2. Az *F* erő és *M* forgatónyomaték eredője ugyanaz, mint az F, F_1 és F_2 erők eredője. Vegyük fel az F_1 erőt úgy, hogy az *F* ellentettje (azaz azonos nagyságú, ellentétes irányú és közös hatásvonalú) legyen. Ekkor az (F, F_1, F_2) erőrendszerből elvéve az (F, F_1) egyensúlyi erőrendszert az eredő változatlan marad. Mivel ez most egyetlen erő, az F_2 lesz, ez egyben az $(F, F_{1,} F_2)$ erőrendszer, és így az *F* erő és *M* forgatónyomaték eredője is lesz. Az erőpár tulajdonságából következik, hogy F_2 nagysága F_1-gyel és így *F*-fel is megegyező lesz, de F_1-gyel ellentétes, azaz *F*-fel azonos irányú. A korábban már látott feladathoz hasonlóan az F_2 erő helyét F_1 hatásvonalához képest merőlegesen eltolva $|M|/|F_2|=|M|/|F|$ távolságban kell keresnünk. Az eltolás irányát könnyen megkaphatjuk, ha a forgatónyomaték félköríves nyilát az *F* erő kezdőpontjától hátrafelé kezdve rajzoljuk meg. Ekkor a forgatónyomaték félköríves nyilának végpontja az eredő oldalán fog elhelyezkedni (lásd a következő ábra b) részét).



Gyakorló példa – 7

Határozzuk meg az ábra szerinti $F=31\,\text{kN}$ erő és $M=14\,\text{kNm}$ nyomaték eredőjét!



Megoldás

Az egyenértékűség:

Az eredő erő nagyságának meghatározására szolgáló vetületi egyenletekben csak az *F* és az *R* erő megfelelő komponensei szerepelnének. (A forgatónyomaték vetületi egyenletbe nem kerül bele.) Ez alapján mekkora és milyen irányú az eredő erő?

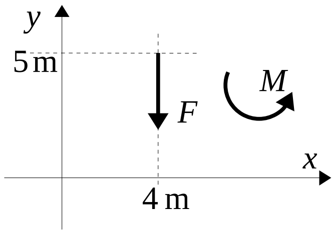
$$R=$$

Jelölje az eredő *x* tengellyel való metszéspontját az x_R koordináta. Az eredő nyomatéka azonos a forgatónyomaték és az *F* erő nyomatékával a sík bármely pontjára. Írjuk ezt fel az origóra:

$$\sum M_i^{(0)}:$$

Másik lehetőségként az eredő helyét az *F* erőhöz képest adjuk meg. Az *F* erő hatásvonalához képest hol legyen az eredő, hogy azonos irányba forgasson az *F* támadáspontja körül, mint az *M* forgatónyomaték? ....

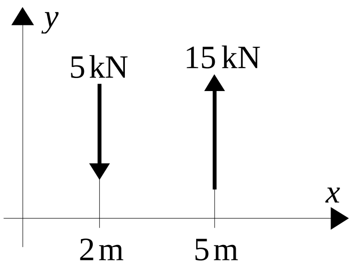
Milyen távol legyen az eredő az *F* erőtől, hogy az *M*-mel azonos mértékben forgasson?



Vázoljuk az eredményt!

Mintapélda - 8

Határozzuk meg az ábrán látható két erőt helyettesítő egyetlen erőt!

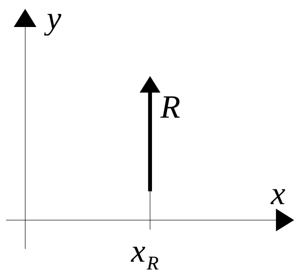


Megoldás

Az egyenértékűség: $(F_1, F_2) \doteq R$

A függőleges vetületi egyenlet (feltételezve, hogy az eredő függőleges komponense felfelé mutat):

$$\sum F_{iy}: -5+15=R_y \rightarrow R_y=+10\,\text{kN}\,(\uparrow)$$

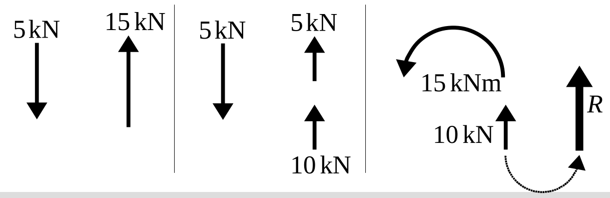


A vízszintes egyenletben egyik erő sem szerepel, így az eredőnek sem lehet ilyen irányú komponense. Az eredő tehát egy $10\,\text{kN}$ -os erő, ami felfelé mutat. Az eredő hatásvonalának *x*-tengellyel való metszéspontját jelöljük x_R -rel. A forgató hatások egyenértékűségét kifejező nyomatéki egyenletet írjuk fel az origóra:

$$\sum M_i^{(0)}: -5\cdot 2+15\cdot 5=10\cdot x_R \rightarrow x_R=6{,}5\,\mathrm{m}$$

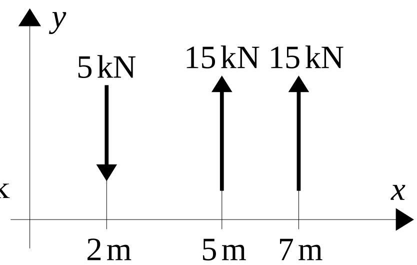
Megoldás egy erőpár segítségével fejben

Bontsuk fel a 15 kN-os erőt egy olyan erőre, ami a másik erővel egy erőpárt alkot és a maradékra. Az így kapott forgatónyomaték $+5\cdot 3=+15\,\mathrm{kNm}\,(\curvearrowleft)$ nagyságú, a maradék erő pedig változatlan hatásvonallal 10 kN-os és felfelé mutat. Ennek a 10 kN-os erőnek és 15 kNm-es forgatónyomatéknak az eredője egy 10 kN-os felfelé mutató erő, ami 15/10=1,5 m-re van a 10 kN-os erőtől. Ennek az 1,5 m-es eltolásnak az irányát úgy tudjuk meghatározni, hogy a felfelé mutató 10 kN-os erő kezdőpontjából, alulról indítunk egy pozitív irányú félköríves nyilat lefelé. Ennek végpontja jobbra helyezkedik el az erőhöz képest, vagyis az eredő is jobbra lesz a 15 kN-os erőhöz képest. Az 1,5 m-es távolságot hozzáadva az erő 5 m-es *x* koordinátájához a korábban kiszámolt 6,5 m-t kapjuk.



Gyakorló példa – 8

Határozzuk meg az ábrán látható három erőt helyettesítő egyetlen erőt!



Megoldás

Feltéve, hogy az eredő egy erő, számítsuk ki annak komponenseit!

Az egyenértékűség:

A megadott erők mindegyike függőleges, így vízszintes vetületük nincs, ezért az eredő vízszintes vetülete is .... .

Az eredő függőleges vetületének azonosnak kell lennie a három erő függőleges vetületeinek összegével. Feltételezve, hogy R_y felfelé mutat, az egyenlet:

$$\sum F_{iy}: F_1+F_2+F_3=R_y \rightarrow$$

(Mivel nem zérus, ezért valóban erő lesz az eredő.)

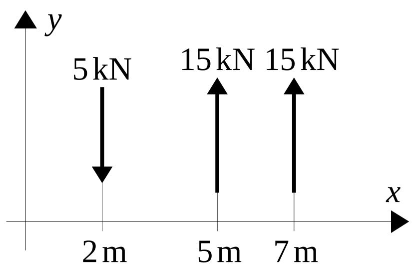
Az eredő erő nyomatéka az origóra megegyezik az erők origóra számított nyomatékainak az összegével. Írjuk fel ezt az egyenletet, feltéve, hogy az eredő az *x* tengelyt x_R koordinátánál metszi:

$$\sum M_i^{(0)}:$$

Ennek megoldása:

$$x_R=$$

Mit jelent x_R előjele? Vázoljuk az eredményt!



Szétszórt síkbeli erőrendszer eredője

Amennyiben az erőrendszer nem csak közös metszéspontú erőkből áll, vagy nem minden erő párhuzamos, akkor szétszórt erőrendszerről beszélünk. Egy ilyen erőrendszer eredője az eddig látott esetek bármelyike lehet, ezért az eredő számítása ilyenkor két lépésből áll. Először megállapítjuk, hogy mi az eredő, majd kiszámoljuk annak számszerű értékeit.

Az eredő jellegének meghatározása: az erőrendszer pontra redukálása

Első lépésben helyettesítsük az erőrendszert egy olyan erővel, ami átmegy egy általunk kiválasztott ponton, és egy olyan forgatónyomatékkal, amelyik ehhez az erőhöz (így végső soron a kiválasztott ponthoz) tartozik. Ezeket *társerő*nek és *társnyomaték*nak nevezzük, és mivel *egyenértékűek* az eredeti erőrendszerrel, így az eredőjük is ugyanaz lesz. Az ismeretlen társnyomaték nem szerepel a vetületi egyenletekben, ezért azokból a társerő komponensei egyismeretlenes egyenletekből számolhatók, a kiválasztott pont körül pedig az azon átmenő társerő nem forgat, így az arra felírt nyomatéki egyenlet lesz egyismeretlenes, amiből a társnyomaték számítható.

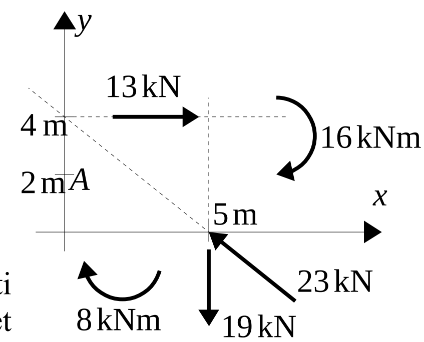
Ha a társerő zéruserő, és a társnyomaték is zérus, akkor az eredő zéruserő.

Ha a társerő zéruserő, és a társnyomaték nem zérus, akkor az eredő egy forgatónyomaték, mégpedig a társnyomatékkal megegyező nagyságú.

Ha a társerő nem zéruserő, akkor az eredő megegyezik a társerő és a társnyomaték eredőjével. Mint azt korábban láttuk, ez mindig egy olyan erő, melynek nagysága és iránya azonos a társerőével, a hatásvonalát pedig egy megfelelő eltolással kapjuk.

Mintapélda - 9

Határozzuk meg az ábrán látható erők és forgatónyomatékok eredőjét az erőrendszer A pontra redukálásának segítségével!



Megoldás

Az egyenértékűség: $(F_1, F_2, F_3, M_1, M_2) \doteq (F_A, M_A)$

Az A ponton áthaladó társerő komponenseit egyszerű vetületi egyenletekből tudjuk számolni (az ismeretlen komponenseket koordinátatengely-irányúnak tételezzük fel):

$$\sum F_{ix}: +13+0-23\cdot\frac{5}{\sqrt{5^2+4^2}} = F_{Ax} \rightarrow \boxed{F_{Ax} = -4{,}960\,\mathrm{kN}\,(\leftarrow)}$$

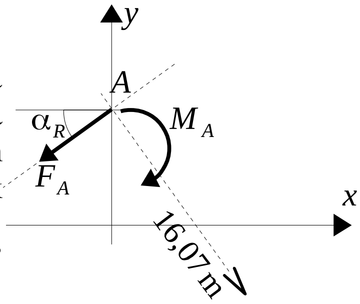
$$\sum F_{iy}: 0-19+23\cdot\frac{4}{\sqrt{5^2+4^2}} = F_{Ay} \rightarrow \boxed{F_{Ay} = -4{,}632\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)}$$

Már most megállapítható, hogy az eredő egy erő lesz, melynek komponensei megegyeznek F_A komponenseivel, nagysága: $R=\sqrt{4{,}960^2+4{,}632^2}=6{,}787\,\mathrm{kN}\,(\swarrow)$, vízszintessel bezárt hajlászöge pedig $\mathrm{tg}\,\alpha_R=\frac{4{,}632}{4{,}960} \rightarrow \alpha_R=43{,}04°$.

A társnyomatékot bármely pontra felírt nyomatéki egyenletből meghatározhatjuk. Célszerű magára az A pontra felírni a nyomatéki egyenletet, így elkerülhető, hogy az F_A számításakor esetleg elkövetett hibát továbbgörgessük. A ferde erőt célszerűen az y-tengellyel való metszéspontban bontjuk fel két komponensre, így csak a vízszintes komponenssel kell számolni, a társnyomatékot pozitív irányba forgatónak tételezzük fel, ezért pozitív lesz az előjele, így:

$$\sum M_i^{(A)}: -13\cdot 2-19\cdot 5+23\cdot\frac{5}{\sqrt{5^2+4^2}}\cdot 2-8-16=M_A \rightarrow$$

$\boxed{M_A=-109{,}1\,\mathrm{kNm}(\curvearrowright)}$



A társerő és társnyomaték eredő erővé való összevonásához a vázlaton ábrázoltuk azokat, a társnyomaték félköríves nyilát a társerő kezdőpontjából hátrafelé indítva. Ez alapján megállapíthatjuk, hogy az A erőt jobbra-lefelé kell eltolnunk $\frac{109{,}1}{6{,}787}=16{,}07\,\mathrm{m}$ -rel. Ennek az eltolásnak a vízszintes és függőleges komponensei:

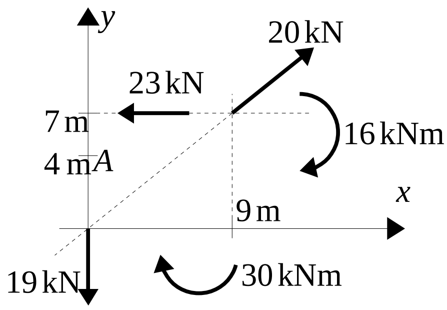
$\Delta x=16{,}07\cdot\sin 43{,}04°=10{,}97\,\mathrm{m}(\rightarrow)$

$\Delta y=16{,}07\cdot\cos 43{,}04°=-11{,}75\,\mathrm{m}(\downarrow)$

Az eredő hatásvonala tehát átmegy a $\begin{bmatrix}+10{,}97\\-9{,}75\end{bmatrix}$ ponton (a fenti különbségeket az A-hoz képest számolva), az erő nagysága $R=6{,}787\,\mathrm{kN}(\swarrow)$, vízszintessel bezárt hajlásszöge $\alpha_R=43{,}04°$.

Gyakorló példa – 9

Határozzuk meg az ábrán látható erők és forgatónyomatékok eredőjét az erőrendszer A pontra redukálásának segítségével!



Megoldás

Az egyenértékűség:

A pontra redukálást a társerő komponenseinek számításával kezdjük. Az erőket írjuk be a vetületi egyenletekbe:

$$\sum F_{ix}:$$

$$\sum F_{iy}:$$

A két egyenletet megoldva:

Ez alapján kijelenthető, hogy mi lesz az eredő? Ha igen, mi? ....

A társnyomaték az összes hatás nyomatéka az A pontra. (Kezdjük itt is az erőkkel, a ferde erő nyomatékát két tag összegeként felírva.)

$$\sum M_i^{(A)}:$$

Ennek megoldásaként:

$$M_A=$$

Vázlatosan rajzoljuk be az ábrába a kiszámított társerőt és társnyomatékot.

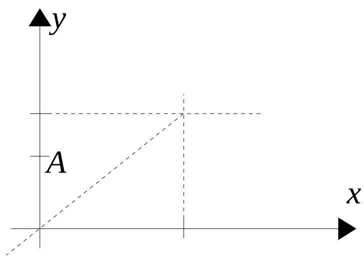
Mi lesz e két hatás eredője? Mik a komponensei?

$R_x =$ $R_y =$

Számítsuk ki az eredő nagyságát és irányát is!

$R =$

$\mathrm{tg}\,\alpha_R =$



Hol lesz az *A* hatásvonalához képest az eredő erő?

Milyen távolságban?

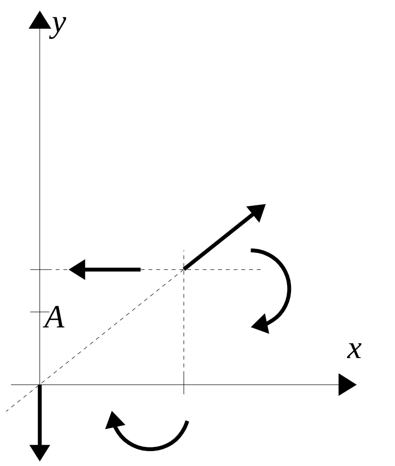
Milyen irányban kell felmérni ezt a távolságot?

Az A pontból kiindulva számítsuk ki az eredő hatásvonala egy pontjának koordinátáit:

$x_R =$

$y_R =$

Készítsünk eredményvázlatot!



Megoszló erők

Az eddigiekben azt láttuk és tanultuk meg, hogy egy anyagi pontra ható koncentrált erőket hogyan tudjuk kezelni. A valóságban előforduló erők azonban szinte sosem koncentráltak, hanem valamilyen *megoszló* erők. A megoszló erőket csoportosíthatjuk attól függően, hogy mi mentén oszlik el az erőhatás. A *térfogat mentén megoszló* erők esetén a testből kivágott rész nagyságától és helyétől függ a részre működő erőhatás nagysága. Ilyen például a gravitációs erő, mely minden V térfogatra egy $\varrho V g$ nagyságú (súly)erőt eredményez (ahol ϱ a sűrűség). A *felület mentén megoszló* erők jellemzően az érintkező testek között átadódó erők. Síkbeli feladatoknál a feladat mélységét a vizsgálat síkjára vetítjük, ilyenkor egy eredetileg felület mentén megoszló erőből *vonal mentén megoszló* erő válik. A megoszló erő teljes nagysága ugyan függ attól, hogy mekkora kiterjedés mentén oszlik meg, így kisebb kiterjedéshez jellemzően kisebb eredő erő tartozik. Ugyanakkor az erő nagyságának és a kiterjedés mértékének hányadosa a kiterjedés csökkenése mellett egy határértékhez tart. Ezt a határértéket a megoszló erő adott pontbeli *intenzitásának* nevezzük. A megoszló erőt kisbetűvel jelöljük, szokásos a *g, p, q, w* betűk használata.

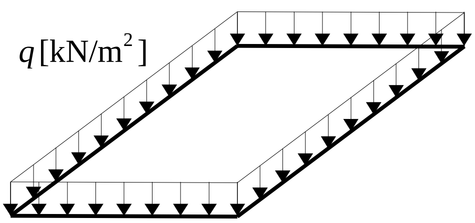
Ennek az órának a célja, hogy megtanuljuk, hogyan lehet megoszló erőket egyetlen koncentrált hatással helyettesíteni, azaz hogyan számítható a megoszló erő eredője.

Térfogat mentén megoszló erők eredője

Ha egy téglatest alakú gerendának a súlyát egyetlen erővel akarjuk jellemezni, akkor az erő nagyságát az *m* tömeg és a *g* gyorsulás szorzataként számolhatjuk, a tömeget pedig a V térfogat és a ϱ sűrűség szorzataként: $G=m\cdot g=V\cdot\varrho\cdot g$. A sűrűség és a gravitációs gyorsulás szorzata a fajsúly ($\gamma=\varrho\cdot g$, lehetséges mértékegysége $\mathrm{N/m^3}$), ez egyben a gravitációs erő intenzitása is. Az eredő helye a téglatest súlypontjában van.

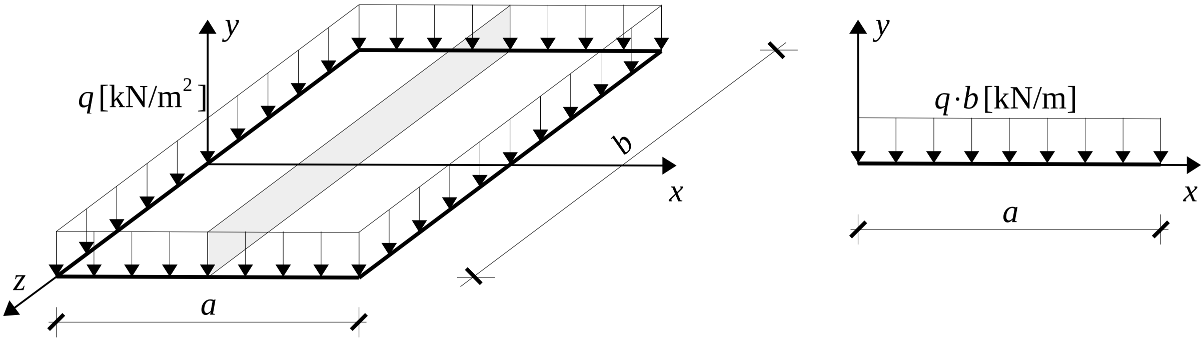
Felület mentén megoszló erők eredője

A felület mentén megoszló erő intenzitása a térfogat mentén megoszló erőéhez hasonlóan származtatható, csak a felületet kell határértékben nullához közelítenünk. A lehetséges mértékegysége ennek megfelelően $\mathrm{N/m^2}$. Az erő intenzitását pontról-pontra felrajzolhatjuk a felületre merőlegesen, az intenzitással arányosan. (A felületre merőlegesen nem valódi távolságokat mérünk, hanem az intenzitásnak megfelelő mennyiségeket.) Az így kapott (fiktív) testet terhelési testnek nevezzük. A megoszló erő eredője a teher által meghatározott "terhelési test" térfogatával arányos, és átmegy annak súlypontján.



Vonal mentén megoszló erők eredője

A gyakorlati számítások során gyakran a térfogat és felület mentén megoszló erőket is vonal mentén megoszló erőkre vezetjük vissza. Ha a korábbi példában szereplő gerenda esetén a térfogatot $V=l\cdot A$ -ként számoljuk (ahol l a gerenda hossza, A pedig a keresztmetszeti területe), akkor a térfogat mentén megoszló erőt a hossztengelyre merőleges keresztmetszetenként koncentrálva egy vonal menti megoszló erőt kapunk. Ennek intenzitása a korábbi jelöléssel $A\cdot\gamma$ lesz, aminek a mértékegysége tehát "N/m" lehet. Síkbeli feladat esetén a vizsgálat síkjára merőleges síkban megoszló erőket a vizsgálat síkjára vetítve egy hasonló koncentrálást hajtunk végre. Ezt demonstrálja a következő ábra.

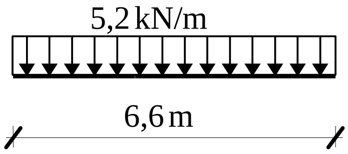


Párhuzamos megoszló erők

Az eredő a teher által meghatározott "síkidom" területével arányos, iránya a megoszló erővel párhuzamos, a helye a síkidom súlypontja. Beszélünk egyenletesen megoszló és lineárisan változó terhekről, ennél bonyolultabb függvénnyel a jelenleg rendelkezésünkre álló matematikai eszköztár bizonytalansága miatt nem foglalkozunk. (De az eddig elmondottak azokra is igazak lesznek.) Feltételezzük, hogy két elemi síkidomról (a téglalap és a háromszög) mindenki tudja a súlypont helyét, így az elemi esetekben az eredő könnyen számítható.

Mintapélda – 1

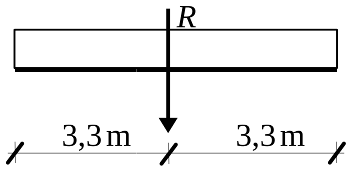
Határozzuk meg az ábrán látható egyenletesen megoszló erő eredőjét!



Megoldás

A függőleges megoszló erő eredője egy függőleges erő, nagysága:

$$R = 5{,}2 \cdot 6{,}6 = 34{,}32\,\text{kN}\,(\downarrow)$$

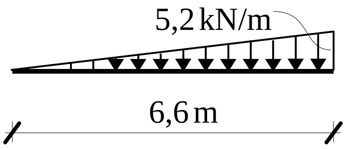


Az eredő helye a szakasz hosszának felében van:

$$6{,}6/2 = 3{,}3\,\text{m}$$

Gyakorló példa – 1

Határozzuk meg az ábrán látható, lineárisan változó megoszló erő eredőjét!



Megoldás

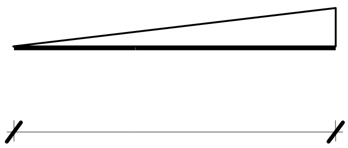
A függőleges megoszló erő eredője egy függőleges erő, nagysága az ábra területe:

$$R =$$

Az eredő helye a szakasz hosszának harmadolópontjában van, a nemzérus intenzitás felőli oldalon:

$$\frac{1}{3} \cdot 6{,}6 = \qquad \text{m}$$

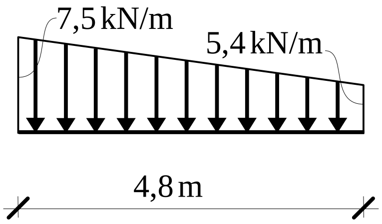
$$\frac{2}{3} \cdot 6{,}6 = \qquad \text{m}$$



Ha az egyszerű síkidomoknál bonyolultabb a terhelési síkidom alakja, akkor *egymásra halmozással* (*szuperpozícióval*) számoljuk az eredőt. Ennek alapja, hogy egy adott intenzitású megoszló erő hatása ugyanaz, mint olyan megoszló erők együttes hatása, ahol a megoszló erők intenzitásainak előjeles összegzése pontról-pontra az eredeti intenzitást adja. Így a teljes eredő a részeredők eredőjeként számítható.

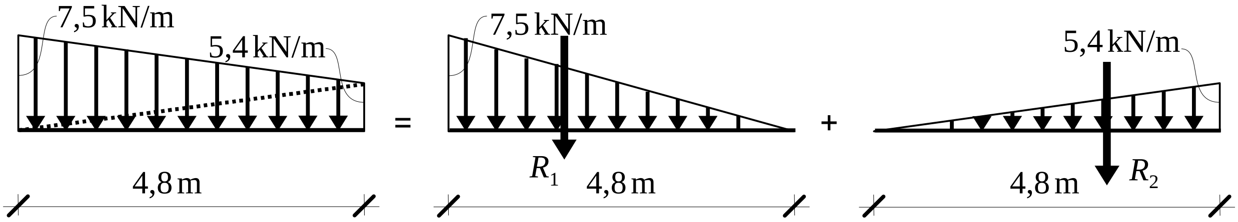
Mintapélda – 2

Határozzuk meg az ábrán látható megoszló erő eredőjét!



Megoldás

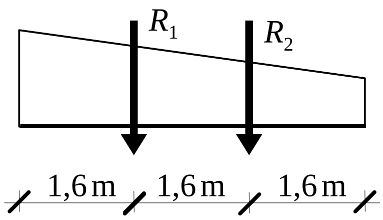
Első lépésben már ismert eredőjű megoszló erőkkel kell helyettesítenünk a lineárisan változó erőt úgy, hogy az összetevők összege minden pontban az eredeti függvényt adja ki. Lineáris függvénynél ezt úgy teljesíthetjük, ha az összetevő függvények is legfeljebb lineárisak és két pontban (célszerűen a szakasz kezdő- és végpontjában) az összegük megegyezik az eredeti függvény értékével. Legyen a két lineáris függvény olyan, hogy a szakasz egyik végpontjában zérus legyen. A szakasz másik végen ezért az eredeti függvény intenzitásának kell lennie.



A két részeredő:

$$R_1 = \frac{1}{2} 7{,}5 \cdot 4{,}8 = 18\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$$

$$R_2 = \frac{1}{2} 5{,}4 \cdot 4{,}8 = 12{,}96\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$$



A két részeredő eredője egy vetületi egyenletből:

$$R = R_1 + R_2 = 18 + 12{,}96 = 30{,}96\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$$

(Ez nem zérus, tehát az eredőnek van erőkomponense. Ellenkező esetben vagy nyomaték, vagy egyensúly lenne az eredő, amit külön és más módon kellene vizsgálnunk.)

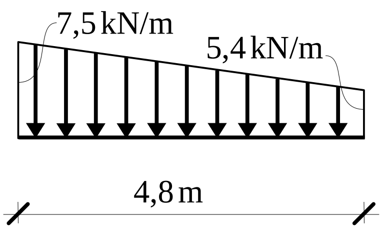
Az eredő helyének számításához tételezzük fel, hogy a szakasz baloldali végétől x_R távolságra van jobbra, majd írjunk fel egy nyomatéki egyenletet a szakasz baloldali végpontjára:

$$\sum M_i^{(b)}: -30{,}96 \cdot x_R = -18 \cdot 1{,}6 - 12{,}96 \cdot 3{,}2$$

Ezt megoldva: $x_R = 2{,}270\,\mathrm{m}$

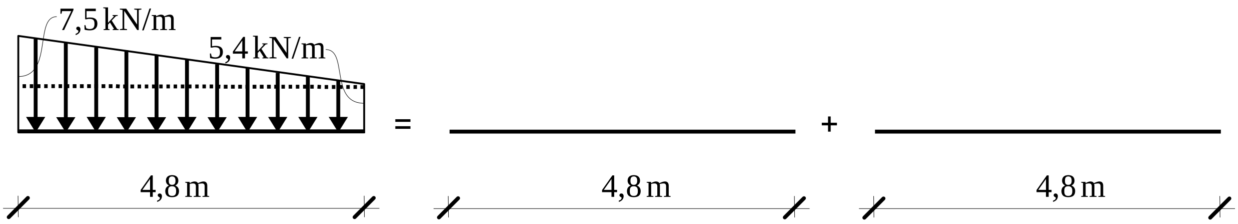
Gyakorló példa – 2

Határozzuk meg az ábrán látható megoszló erő eredőjét!



Megoldás

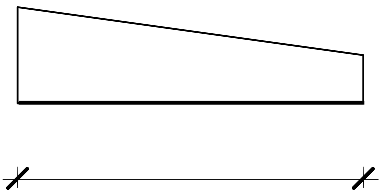
Bontsuk fel a megoszló erőt egy egyenletesen megoszló, és egy nulla és maximális érték között változó erőre:



Számítsuk ki az egyes részek részeredőit és jelöljük azok helyét az ábrán:

$R_1 =$

$R_2 =$



A két részeredő előjeles összegzéséből:

$$R = R_1 + R_2 =$$

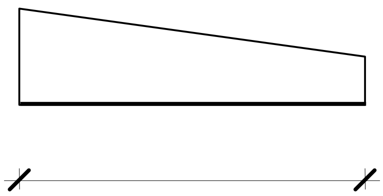
Az eredő nyomatéka a sík bármely pontjára megegyezik a részeredők ugyanazon pontra vett nyomatékainak összegével, így az eredő helyét egy nyomatéki egyenletből tudjuk kiszámolni:

$$\sum M_i^{(\ )}:$$

Amiből az eredő helye:

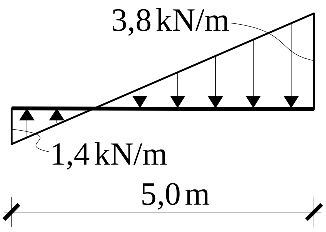
$$x_R =$$

Vázoljuk az eredőt az ábrán.



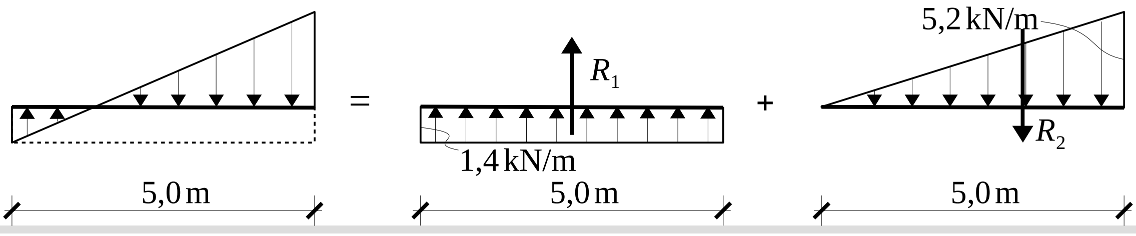
Mintapélda – 3

Határozzuk meg az ábrán látható megoszló erő eredőjét!

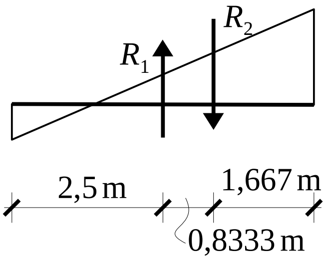


Megoldás egy egyenletes és egy lineárisan változó erővel

Az egyenletesen megoszló teher intenzitása legyen az egyik végpontbeli intenzitás. A másik végpontban a lineárisan változó erő intenzitása akkora kell legyen, hogy az összeg a teljes függvény értékét eredményezze: $-1{,}4 + q_l = 3{,}8 \rightarrow q_l = 5{,}2\,\mathrm{kN/m}$. Így a felbontás utáni két megoszló erő és a részeredőik külön-külön:



Az egyes részeredők:



$$R_1 = -1{,}4 \cdot 5{,}0 = -7{,}0\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\,5{,}2 \cdot 5{,}0 = 13\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$$

Az eredő nagyságát vetületi egyenletből lehet számolni:

$$R = R_1 + R_2 = -7{,}0 + 13{,}0 = +6{,}0\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$$

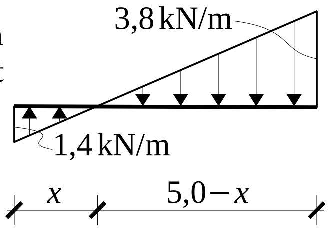
(Ez nem zérus, tehát az eredőnek van erőkomponense. Ellenkező esetben zéruserő vagy nyomaték lenne az eredő, amit külön és más módon kellene vizsgálnunk.)

Az eredő helyének számításához tételezzük fel, hogy a szakasz baloldali végétől x_R távolságra van jobbra, majd írjunk fel egy nyomatéki egyenletet a szakasz baloldali végpontjára:

$$\sum M_i^{(b)}: -6{,}0\,x_R = 7{,}0 \cdot 2{,}5 - 13{,}0 \cdot 3{,}333$$

Ezt megoldva: $x_R = 4{,}305\,\mathrm{m}$

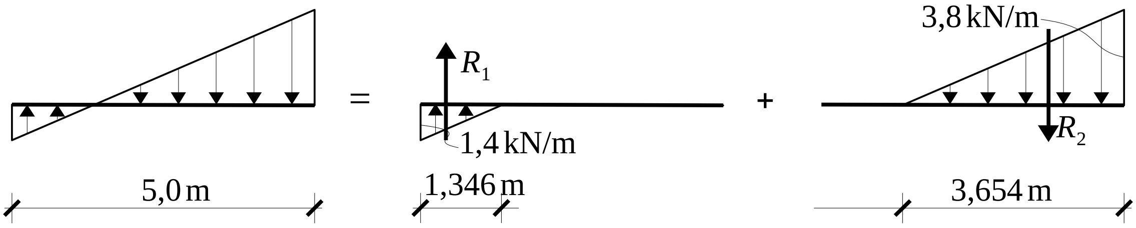
Megoldás két lineárisan változó erővel a zérushely felhasználásával



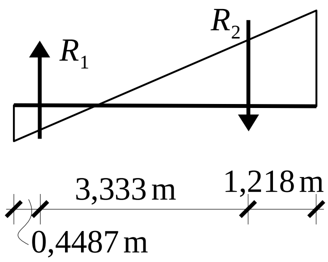
Csalóka módon kínálja magát az, hogy a zérushely kiszámítása után két háromszög segítségével számoljuk az eredőt. Ehhez a zérushelyet két hasonló háromszög alapján felírt aránypárból számolhatjuk:

$$\frac{1{,}4}{x} = \frac{3{,}8}{5{,}0 - x} \quad \rightarrow \quad x = 1{,}346\,\mathrm{m}, \quad 5{,}0 - x = 3{,}654\,\mathrm{m}$$

Így a felbontás utáni két megoszló erő és a részeredőik külön-külön:



Az egyes részeredők:



$$R_1 = -\frac{1}{2}\,1{,}4 \cdot 1{,}346 = -0{,}9422\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\,3{,}8 \cdot 3{,}654 = 6{,}943\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$$

Az eredő nagyságát vetületi egyenletből lehet számolni:

$$R = R_1 + R_2 = -0{,}9422 + 6{,}943 = +6{,}001\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$$

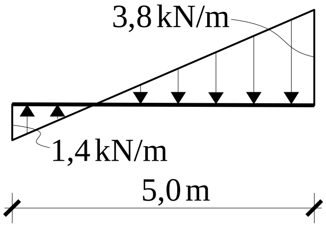
(Ez nem zérus, tehát az eredőnek van erőkomponense. Ellenkező esetben vagy nyomaték, vagy egyensúly lenne az eredő, amit külön és más módon kellene vizsgálnunk.)

Az eredő helyének számításához tételezzük fel, hogy a szakasz baloldali végétől x_R távolságra van jobbra, majd írjunk fel egy nyomatéki egyenletet a szakasz baloldali végpontjára:

$$\sum M_i^{(b)}: -6{,}001\,x_R = 0{,}9422 \cdot 0{,}4487 - 6{,}943 \cdot 3{,}782$$

Ezt megoldva: $x_R = 4{,}305\,\mathrm{m}$

Gyakorló példa – 3

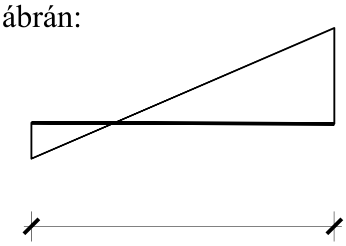


Határozzuk meg az ábrán látható megoszló erő eredőjét!

Megoldás

Bontsuk fel a megoszló erőt két lineárisan változó megoszló erőre úgy, hogy mindkét összetevő a teljes hossz mentén oszoljon meg, és az egyik végen zérus legyen az intenzitása. Rajzoljuk be az alábbi ábrába a felosztást és az egyes részeredők helyét:

Számítsuk ki az egyes részeredőket és jelöljük azok helyét a közös ábrán:



$R_1 =$

$R_2 =$

A két részeredő előjeles összegzéséből:

$$R = R_1 + R_2 =$$

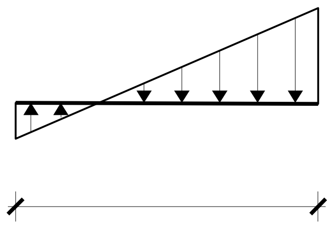
Az eredő nyomatéka a sík bármely pontjára megegyezik a részeredők ugyanazon pontra vett nyomatékainak összegével, így az eredő helyét egy nyomatéki egyenletből tudjuk kiszámolni:

$$\sum M_i^{(\ )}:$$

Amiből az eredő helye:

$$x_R =$$

Vázoljuk az eredőt az ábrán.

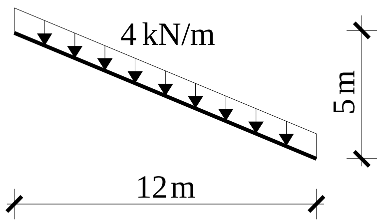


A megoszló erő megoszlásának módja

A vonal mentén megoszló terheket aszerint is megkülönböztetjük, hogy az eloszlást mi szerint értelmezzük. *Hossz mentén megoszló* erők például az önsúly, vagy a szél, ahol az eredő nagysága az intenzitás és a vonal hosszának szorzata. (Az eddigi példáink mind ilyenek voltak.) A másik csoport a *vetület mentén megoszló* erő. Ilyen például a hóteher, amelynél az intenzitást a vonal vízszintesre vett függőleges vetületére értelmezzük, így az eredőt abból számítjuk.

Mintapélda – 4

a) Számítsuk ki az ábrán látható, hossz mentén megoszló erőrendszer eredőjét!



Megoldás

A megoszló szakasz hossza a Pitagorasz-tételből:

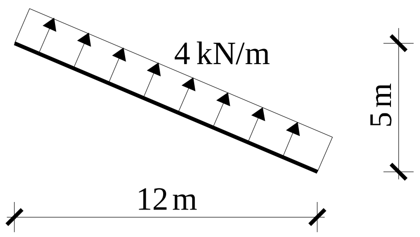
$$l=\sqrt{5^2+12^2}=13{,}00\,\mathrm{m}$$

Az eredő nagysága az intenzitás és a hossz szorzata:

$$R=4\cdot 13{,}00=52\,\mathrm{kN}$$

Az eredő helye a szakasz közepe, iránya függőleges, lefelé mutat.

b) Számítsuk ki az ábrán látható, hossz mentén megoszló erőrendszer eredőjét!



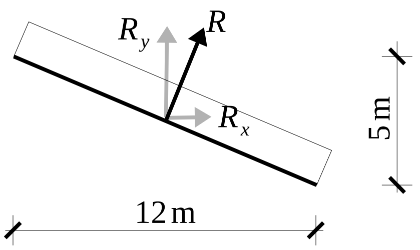
Megoldás

A megoszló szakasz hossza a Pitagorasz tételből:

$$l=\sqrt{5^2+12^2}=13{,}00\,\mathrm{m}$$

Az eredő nagysága az intenzitás és a hossz szorzata:

$$R=4\cdot 13{,}00=52\,\mathrm{kN}$$

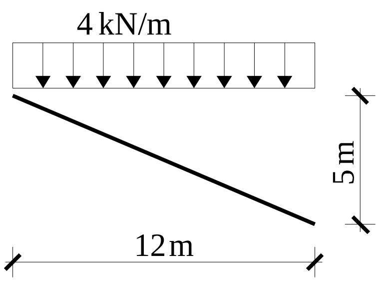


Ez a ferde erő a hossztengelyre merőleges, a függőlegessel ugyanakkora szöget zár be, mint a tengely a vízszintessel. Az egyes komponensek:

$$R_x=52\cdot\frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}}=20\,\mathrm{kN}(\rightarrow)$$

$$R_y=52\cdot\frac{12}{\sqrt{5^2+12^2}}=48\,\mathrm{kN}(\uparrow)$$

c) Számítsuk ki az ábrán látható, vetület mentén megoszló erőrendszer eredőjét!



Megoldás

A megoszlás hossza a vízszintes vetület:

$$l=12\,\mathrm{m}$$

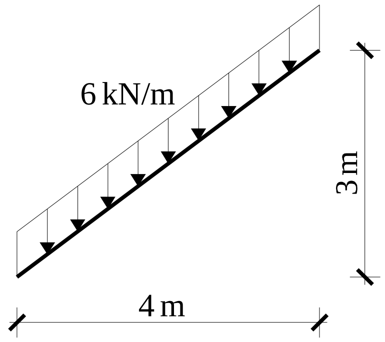
Az eredő nagysága az intenzitás és a hossz szorzata:

$$R=4\cdot 12{,}00=48\,\mathrm{kN}$$

Az eredő helye a szakasz közepe, iránya függőleges, lefelé mutat.

Gyakorló példa – 4

a) Számítsuk ki az ábrán látható, hossz mentén megoszló erőrendszer eredőjét!



Megoldás

A megoszló szakasz hossza a Pitagorasz tételből:

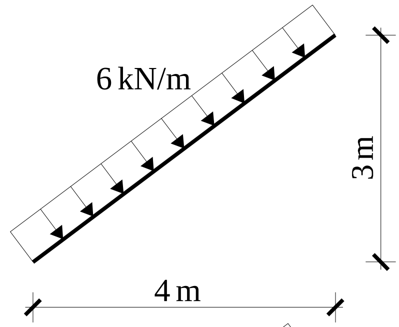
$$l =$$

Az eredő nagysága az intenzitás és a hossz szorzata:

$$R =$$

Az eredő helye, iránya:..

b) Számítsuk ki az ábrán látható, hossz mentén megoszló erőrendszer eredőjét!



Megoldás

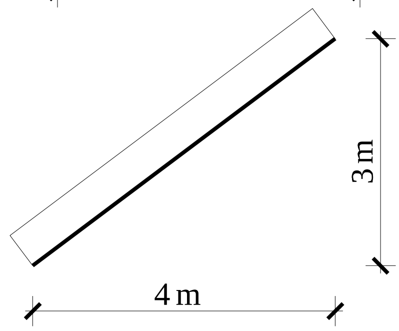
A megoszló szakasz hossza a Pitagorasz tételből:

$$l =$$

Az eredő nagysága az intenzitás és a hossz szorzata:

$$R =$$

Az eredő helye, iránya:..

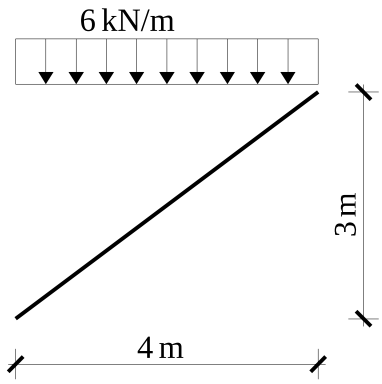


Az eredő vízszintes és függőleges komponensei:

$$R_x =$$

$$R_y =$$

c) Számítsuk ki az ábrán látható, vetület mentén megoszló erőrendszer eredőjét!



Megoldás

A megoszlás hossza a vízszintes vetület:

$$l =$$

Az eredő nagysága az intenzitás és a hossz szorzata:

$$R =$$

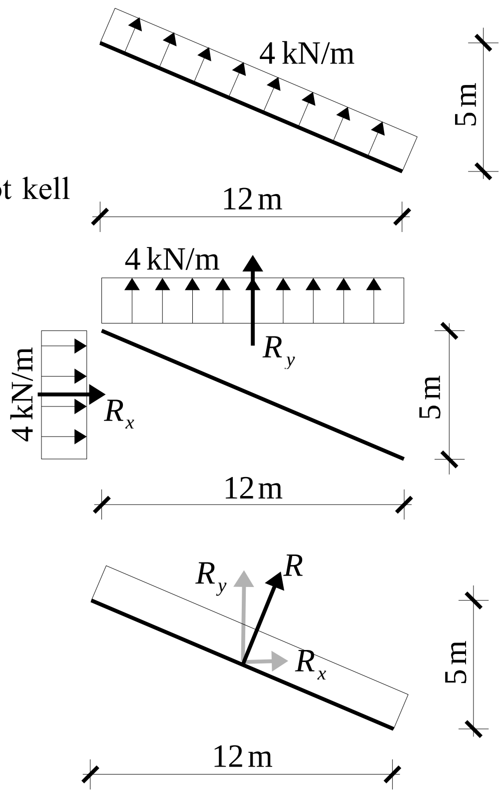
Az eredő helye, iránya:.....................................

Ferde vonal mentén megoszló erő

Az olyen terhek eredőjét, melyek a felületre merőlegesek, más módon is számíthatjuk. Ilyen teher a szélterhen kívül például a víznyomás is. Ezeknél a terheknél a vetületek gondos áttekintése után arra juthatunk, hogy a ferde erő vízszintes és függőleges vetületeit akár elkülönülten is kezelhetjük vetület mentén megoszló erőkként.

Mintapélda – 5

Számítsuk ki az ábrán látható, hossz mentén megoszló erőrendszer eredőjét!



Megoldás

A merőleges erő helyett két vetület mentén megoszló erőt kell felvennünk, amik jobbra, illetve felfelé mutatnak..

A jobbra mutató erő a függőleges 5 méteres hossz mentén oszlik meg, így annak eredője:

$$R_x = 4 \cdot 5 = 20\,\text{kN}(\rightarrow)$$

A felfelé mutató erő a vízszintes 12 méteres hossz mentén oszlik meg, így annak eredője:

$$R_y = 4 \cdot 12 = 48\,\text{kN}(\uparrow)$$

A két részeredő külön-külön a vetület és így a szakasz felezőpontjában működik. Eredőjük egy ferde erő:

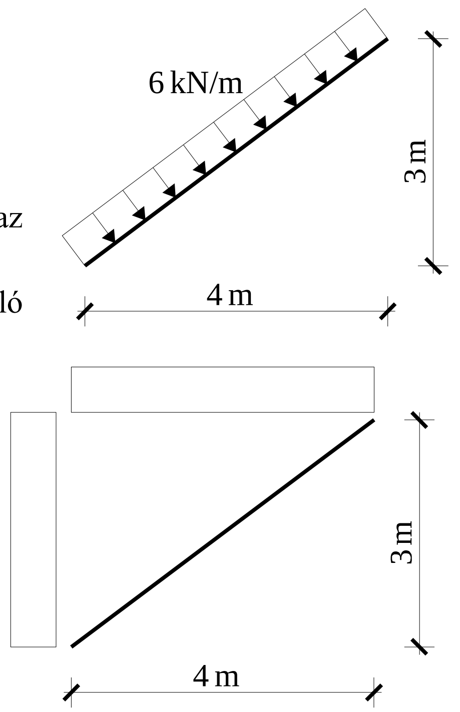
$$R = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52{,}00\,\text{kN}(\nearrow)$$

Vízszintessel bezárt hajlásszöge:

$$\alpha_R = \text{arctg}\frac{48}{20} = 67{,}38°$$

Gyakorló példa – 5

Számítsuk ki az ábrán látható, hossz mentén megoszló erőrendszer eredőjét!



Megoldás

A felületre merőleges megoszló erő helyett rajzoljuk be az azt helyettesítő, vetület mentén megoszló erőket.

Számítsuk ki a vízszintes és a függőleges irányú megoszló erő eredőjét:

$R_x =$

$R_y =$

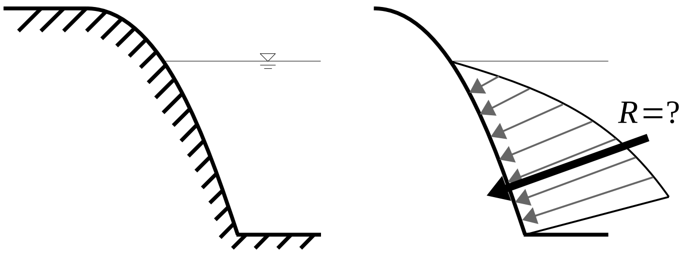
Jelöljük ezeknek az erőknek a helyét az ábrán, majd számoljuk ki a két részeredő eredőjét:

$R =$

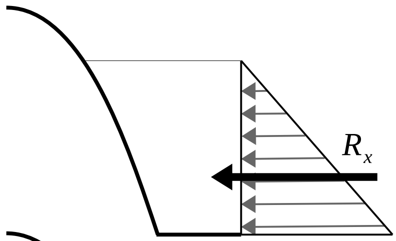
$$\alpha_R=$$

Általában könnyebb vízszintes és függőleges erőkkel számolni, ezért az ilyen irányú részeredők meghatározása után már nem számítjuk ki a teljes eredőt.

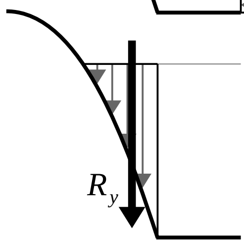
A víznyomás is megoszló teher, jellemzője, hogy mindig merőleges a felületre, az intenzitása pedig a vízmélységtől függ. Ez látszólag bonyolítja a számítást például egy gátra ható erő számításánál, hiszen egy görbe vonal mentén változó intenzitású erő eredőjét kellene számolni. Valójában a két hatás együttállása miatt a számítás meglepően egyszerű.



A vízszintes irányú vetületet egy háromszög alakban megoszló erő eredőjeként számolhatjuk, a helye a magasság alsó harmadolópontjában van.



A függőleges irányú erő intenzitása mindig a vízmélységgel arányos, így megfelelően skálázva a gát vonala és a vízszint közötti síkidom a teherfüggvényként kezelhető. Amennyiben ismerjük ennek a síkidomnak a területét és súlypontját, akkor a víznyomásból származó erő függőleges komponensét is ismerjük.



Összetett síkidomok súlypontja

Egy síkidom *súlypontjának* koordinátáit az *yz* síkban az alábbi összefüggések alapján határozhatjuk meg:

$$y_S=\frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{\int_A \mathrm{d}A}=\frac{S_z}{A}\quad z_S=\frac{\int_A z\,\mathrm{d}A}{\int_A \mathrm{d}A}=\frac{S_y}{A}\ ,$$

ahol A a síkidom területe, S_z és S_y pedig a síkidom z és y tengelyekre vonatkozó *statikai nyomatéka*. A síkidom adott tengelyre vonatkozó statikai nyomatéka a súlypont tengelytől mért távolságának és a síkidom területének a szorzatával egyenlő (előjeles mennyiség), dimenziója ennek megfelelően m^3.

Egy összetett síkidom súlypontját megkaphatjuk úgy, hogy a síkidomot olyan részekre bontjuk, amelyeknek ismerjük a súlyponti koordinátáit. Ebben az esetben a síkidom területét, illetve statikai nyomatékait egyaránt a részsíkidomok jellemzőinek összegéből számoljuk:

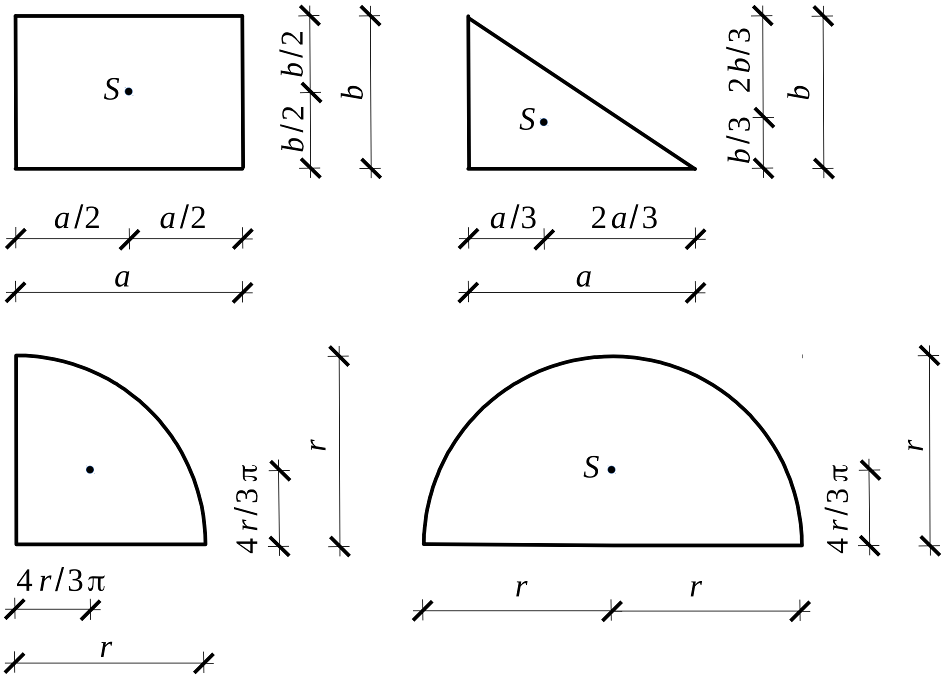
$$A=\sum_i \int_{A_i} \mathrm{d}A=\sum_i A_i\ ,$$

$$S_z = \sum_i S_{zi} = \sum_i y_{Si} A_i \,,$$

$$S_y = \sum_i S_{yi} = \sum_i z_{Si} A_i \,,$$

ahol A_i, S_{zi}, S_{yi} az adott részsíkidom területe, illetve statikai nyomatéka a z, illetve y tengelyekre, y_{Si}, z_{Si} pedig a részsíkidom súlypontjának koordinátái.

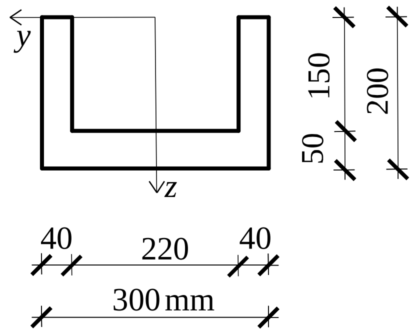
Ezt a módszert akkor tudjuk alkalmazni, ha az elemi síkidomok súlypontját ismerjük. Az ábrán látható elemi síkidomok súlypontjának helyét érdemes megjegyezni:



A fent bemutatott részsíkidomokra bontás segítségével könnyen be lehet látni, hogy a szimmetrikus síkidomok súlypontjának a szimmetriatengelyen kell lennie, hiszen a szimmetriatengely két oldalán elhelyezkedő részek szimmetriatengelyre vonatkozó statikai nyomatéka egymás mínusz egyszerese, így a teljes síkidom szimmetriatengelyre vonatkozó statikai nyomatéka zérus lesz.

Mintapélda – 6

Határozzuk meg az ábrán látható síkidom súlypontjának helyét részekrebontással és készítsünk eredményvázlatot!



Megoldás

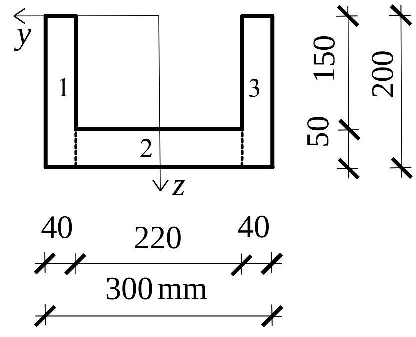
Mivel szimmetrikus a keresztmetszet, ezért a súlypontja rajta lesz a szimmetriatengelyen. A koordinátarendszert úgy vettük fel, hogy a z tengely egybeesik a szimmetriatengellyel, tehát csak a súlyponti z koordinátát kell kiszámolnunk.

Bontsuk fel a síkidomot három téglalapra az ábrán látható módon!

A síkidom területe a három téglalap területének összegével egyezik meg:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 200 \cdot 40 + 220 \cdot 50 + 200 \cdot 40 = 27000\,\text{mm}^2 \,.$$

A síkidom y tengelyre vonatkozó statikai nyomatékát a három téglalap statikai nyomatékainak összege adja, a részsíkidomok statikai nyomatékát pedig területük és súlypontjaik y tengelytől mért távolságainak szorzataként számíthatjuk:



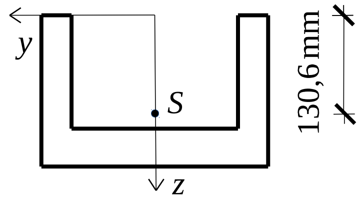
$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} =$$
$$200\cdot 40\cdot 100 + 220\cdot 50\cdot(150 + 25) + 200\cdot 40\cdot 100 = 3525000\,\mathrm{mm}^3$$

A teljes síkidom súlypontjának z koordinátáját (y tengelytől mért távolságát) az y tengelyre vonatkozó statikai nyomaték és a terület hányadosaként számoljuk:

$$z_S = \frac{S_y}{A} = \frac{3525000}{27000} = 130{,}6\,\mathrm{mm}$$

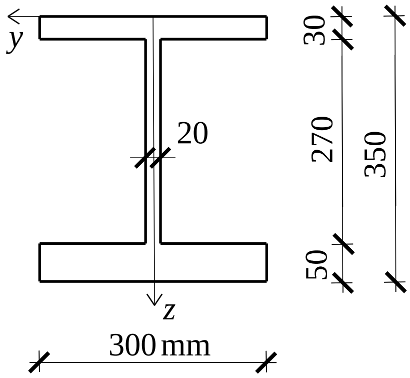
Végül készítsünk eredményvázlatot, rajzoljuk be a síkidom súlypontját és az ábrán tüntessük fel a z_S súlyponti távolság értékét!

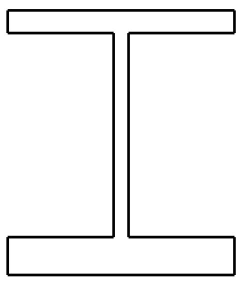
Eredményvázlat:



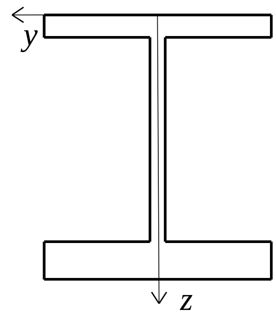
Gyakorló példa -6

Határozzuk meg az ábrán látható I -szelvény súlypontjának helyét részekrebontással és készítsünk eredményvázlatot!





Eredményvázlat:



Egy összetett síkidom súlypontját megkaphatjuk úgy is, hogy olyan egyszerű síkidomokkal, amelyeknek ismerjük a súlypontját kiegészítjük a síkidomot egy nagyobb, de egyszerűbb alakú síkidommá, amelynek szintén ismerjük a súlyponti koordinátáit. Ebben az esetben a síkidom területét a teljes, kiegészítés után kapott síkidom területének (A_{teljes}) és a kiegészítő részek területének ($A_{\text{kiegészítő}}$) különbsége adja:

$$A = A_{\text{teljes}} - A_{\text{kiegészítő}} .$$

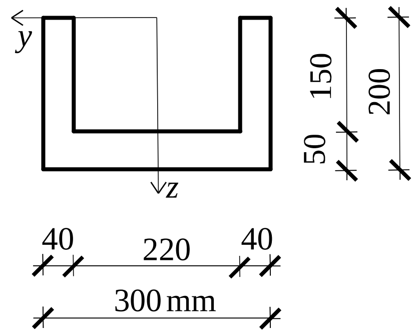
Hasonlóan számolhatjuk a statikai nyomatékokat a kiegészített teljes síkidom statikai nyomatékának és a kiegészítő részek statikai nyomatékainak a különbségéből:

$$S_z = S_{z,\text{teljes}} - S_{z,\text{kiegészítő}} ,$$

$$S_y = S_{y,\text{teljes}} - S_{y,\text{kiegészítő}} .$$

Mintapélda – 7

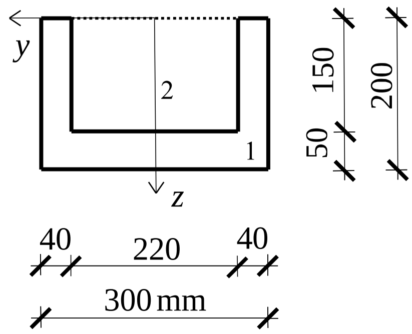
Határozzuk meg az ábrán látható síkidom súlypontjának helyét a síkidom kiegészítésével és készítsünk eredményvázlatot!



Megoldás

Mivel szimmetrikus a keresztmetszet, ezért a súlypontja rajta lesz a szimmetriatengelyen. A koordinátarendszert úgy vettük fel, hogy a z tengely egybeesik a szimmetriatengellyel, tehát csak a súlyponti z koordinátát kell kiszámolnunk.

Egészítsük ki a síkidomot téglalappá az ábrán látható módon! A síkidom területe a nagy téglalap területének és a kis kiegészítő téglalap területének a különbsége:



$$A = A_1 - A_2 = 300 \cdot 200 - 220 \cdot 150 = 27000\,\text{mm}^2 .$$

A síkidom y tengelyre vonatkozó statikai nyomatékát a nagy téglalap és a kis téglalap statikai nyomatékainak a különbsége adja.

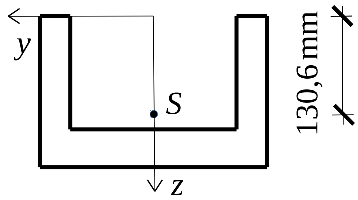
$$S_y = S_{y1} - S_{y2} = 300 \cdot 200 \cdot 100 - 220 \cdot 150 \cdot 75 = 3525000\,\text{mm}^3 .$$

A teljes síkidom súlypontjának z koordinátáját (y tengelytől mért távolságát) az y tengelyre vonatkozó statikai nyomaték és a terület hányadosként számoljuk:

$$z_S = \frac{S_y}{A} = \frac{3525000}{27000} = 130{,}6\,\text{mm}$$

Végül készítsünk eredményvázlatot, rajzoljuk be a síkidom súlypontját és az ábrán tüntessük fel a z_S súlyponti távolság értékét!

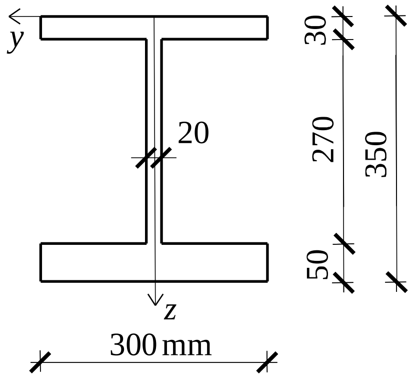
Eredményvázlat:

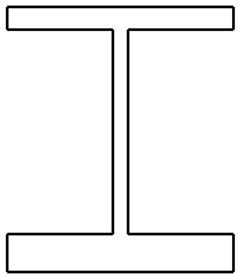


Gyakorló példa -7

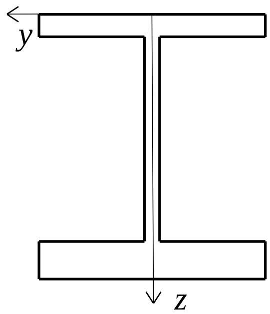
Határozzuk meg az ábrán látható keresztmetszet súlypontjának helyét a síkidom kiegészítésével és készítsünk eredményvázlatot!

Megoldás



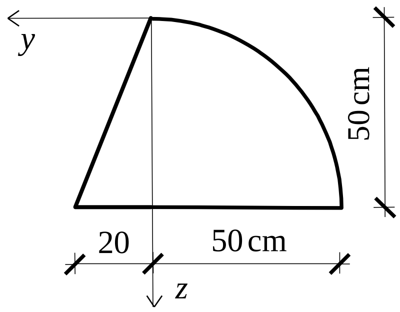


Eredményvázlat:



Mintapélda – 8

Határozzuk meg az ábrán látható síkidom súlypontjának helyét és készítsünk eredményvázlatot!

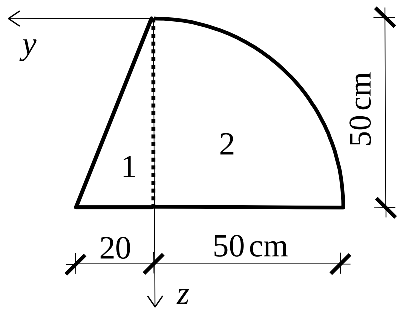


Megoldás

Bontsuk fel a síkidomot egy háromszögre és egy negyedkörre az ábrának megfelelően.

A síkidom területe a két részsíkidom területének összegével egyezik meg:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 50^2 \cdot \pi = 500 + 1963 = 2463\,\text{cm}^2 .$$



A síkidom y tengelyre vonatkozó statikai nyomatékát a háromszög és a negyedkör statikai nyomatékainak az összege adja.

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = 500 \cdot \frac{2}{3} \cdot 50 + 1963 \cdot \left(50 - \frac{4 \cdot 50}{3 \cdot \pi}\right) = 73170\,\text{cm}^3 .$$

A teljes síkidom súlypontjának z koordinátáját (y tengelytől mért távolságát) az y tengelyre vonatkozó statikai nyomaték és a terület hányadosaként számoljuk:

$$z_S = \frac{S_y}{A} = \frac{73170}{2463} = 29{,}71\,\text{cm}$$

A súlypont y koordinátájának meghatározásához számítsuk ki a részsíkidomok statikai nyomatékát a z tengelyre:

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = 500 \cdot \frac{1}{3} \cdot 20 - 1963 \cdot \frac{4 \cdot 50}{3 \cdot \pi} = -38330\,\text{cm}^3 .$$

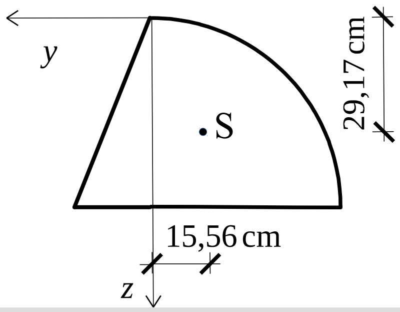
(A negyedkör statikai nyomatéka negatív, mert súlypontjának y koordinátája negatív.)

A teljes síkidom súlypontjának y koordinátáját (z tengelytől mért távolságát) az z tengelyre vonatkozó statikai nyomaték és a terület hányadosaként számoljuk:

$$y_S = \frac{S_z}{A} = \frac{-38330}{2463} = -15{,}56\,\text{cm} .$$

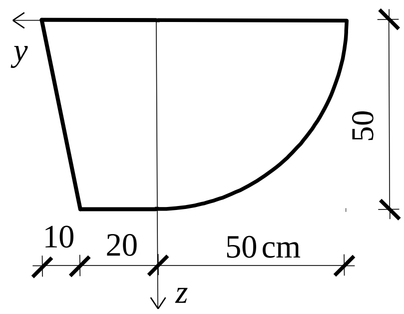
Végül készítsünk eredményvázlatot, rajzoljuk be a síkidom súlypontját és az ábrán tüntessük fel az y_S, z_S súlyponti távolságok értékeit!

Eredményvázlat:



Gyakorló példa – 8

Határozzuk meg az ábrán látható keresztmetszet súlypontjának helyét és készítsünk eredményvázlatot!



Megoldás

Merev testek

A merev testek mozgásának vizsgálatakor abból indulunk ki, hogy az egymáshoz kapcsolódó elemien kicsiny tömegpontok halmaza. E tömegpontok egymással is kölcsönhatásban állnak, így a test merev voltának figyelembevétele mellett mindegyik pont a rá ható erők hatására mozog. Ugyanakkor az egész merev test szempontjából az elemi pontok mozgásegyenleteinek összegzésekor (integrálásakor) a tömegpontok közötti kapcsolati erők kiejtik egymást, így a mozgást csak a külső erők befolyásolják.

Merev testek kinematikája

Ahogyan anyagi pont esetén a pont helyzetének, úgy merev test esetén a test helyzetének egyértelmű leírásával kell kezdenünk a vizsgálatot. A leírást itt csak a síkbeli feladatokra korlátozzuk, amikor minden pont egy rögzített síkkal párhuzamosan mozog. A merev test síkbeli mozgása lehet *eltolódó* (haladó) *mozgás*, lehet *rögzített tengely körüli forgó mozgás* végül *általános síkbeli mozgás*.

Eltolódó mozgás

Eltolódó mozgásról akkor beszélünk, ha a merev test minden pontjának ugyanakkora az elmozdulása a kezdeti helyzetéhez képest. Ennek következménye, hogy a test az eredeti helyzetéhez képest nem fordul el, továbbá a sebességek és a gyorsulások is azonosak minden pontban. Ilyenkor (és csak ilyenkor) beszélhetünk a merev test sebességéről.

Rögzített tengely körüli forgó mozgás

Ha egy rögzített, vagy fix tengely körül forog a test, akkor minden egyes pontja a tengely körül végez körmozgást. A kezdeti helyzethez képest minden pont szögelfordulása azonos, így annak időbeni változásai, azaz a *szögsebesség* és a *szöggyorsulás* is (ezekre tehát hivatkozhatunk a merev test mozgásjellemzőiként). Az egyes pontok sebessége és gyorsulása azonban a tengelytől való távolságtól függ (emlékeztetőül: $v=\omega\cdot r, a_n=\omega^2\cdot r, a_\tau=\kappa\cdot r$), azaz pontról pontra változhat. Emiatt forgó mozgás esetén nincs értelme a test sebességéről beszélni.

Általános síkbeli mozgás

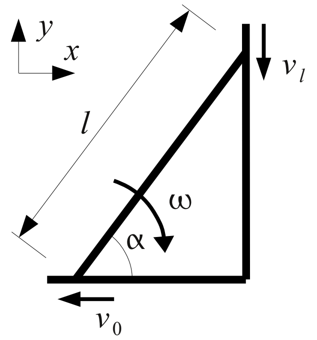
Az általános síkbeli mozgást mindig összerakhatjuk egy általunk tetszőlegesen választott tengely körüli forgó mozgásból és a kiválasztott tengely eltolódásával azonos eltolódó mozgásból. Meg kell azonban mondanunk, hogy a test melyik pontját tekintjük a tengelynek, ami körül számítjuk az elfordulást. Az eltolódó mozgást a tengelyként használt pont eltolódása adja meg. A kétféle mozgás közül csak a forgó mozgás tartalmaz szögsebességet és szöggyorsulást, így azok nagysága a tengely kiválasztásától független lesz. Egyes pontok sebesség- és gyorsulásvektorait a haladó és a forgó mozgásból számított értékek vektoriális összegzésével tudjuk meghatározni.

A tengely pontjának tetszőleges pont választható (akár egy, a testhez képzeletben mereven hozzákapcsolt külső pont is). A gyakorlatban azonban általában két kitüntetett pont valamelyikét használjuk. Az egyik ilyen a *test súlypontja*, a másik pedig a test egy olyan pontja, amelyiknek az adott pillanatban nulla a sebessége. Ez utóbbi pontot a test *pillanatnyi forgásközéppont*jának nevezzük.

Mivel a pillanatnyi forgásközéppontnak a sebessége nulla, ezért a többi pont sebességének számításához az eltolódó mozgásból származó komponens nulla lesz, csak a forgó mozgás hatását kell figyelembe vennünk. (A gyorsulásokra azonban ez nem feltétlenül igaz.) Az egyes pontok sebességének nagysága tehát csak a pillanatnyi forgásközépponttól való távolságtól és a szögsebességtől függ, a sebességek iránya mindig a pontot a pillanatnyi forgásközépponttal összekötő sugárra merőleges. Ennek következménye, hogy ha a merev test két általános pontja sebességének irányát ismerjük, akkor az egyes pontokban a sebességekre merőleges egyenesek megrajzolásával a két egyenes metszéspontja megadja a pillanatnyi forgásközéppont helyét.

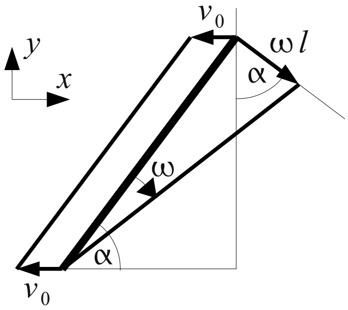
Mintapélda – 1

Egy falnak támasztott, $l=4$ m hosszúságú létra lecsúszik a fal mentén. A csúszás egy pillanatában a létra a vízszintessel $\alpha=50°$ szöget zár be. E pillanatban az alsó végpont sebessége $v_0=2$ m/s, gyorsulása $a_0=0{,}5$ m/s^2 (mindkettő a faltól elfelé mutat). Mekkora a fallal érintkező legfelső pont sebessége és gyorsulása ugyanebben a pillanatban?



Megoldás

A falhoz érő pont sebességét a talppont eltolódó mozgásából és az a körüli elfordulásból írhatjuk fel vízszintes és függőleges komponensekre külön-külön. A két komponenst láthatjuk a jobboldali ábrán is. Mivel végig érintkezik a fallal, ezért a vízszintes komponensek összegének nullának kell lennie:



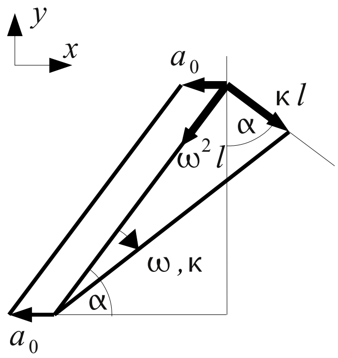
$$v_{lx}=-v_0+\omega\cdot l\cdot\sin\alpha=0$$

Amiből a létra szögsebessége: $\omega=0{,}6527\,\text{rad/s}\,(\curvearrowright)$

A sebesség függőleges komponense egyben a keresett sebesség:

$$v_{ly}=0+\omega\cdot l\cdot\cos\alpha \rightarrow \quad \boxed{v_{ly}=1{,}678\,\text{m/s}\,(\downarrow)}$$

A falhoz érő pont gyorsulását a talppont eltolódó mozgásából és az a körüli elfordulásból írhatjuk fel vízszintes és függőleges komponensekre külön-külön. Ennek három komponensét láthatjuk a jobboldali ábrán is. Mivel végig érintkezik a fallal, ezért a vízszintes komponensek összegének nullának kell lennie:



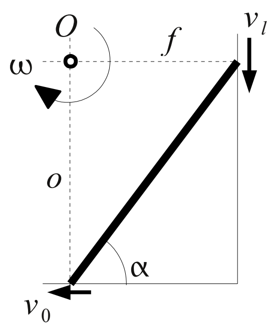
$$a_{lx}=-a_0+\kappa\cdot l\cdot\sin\alpha-\omega^2\cdot l\cdot\cos\alpha=0$$

Amiből a létra szöggyorsulása: $\kappa=0{,}5206\,\text{rad/s}^2\,(\curvearrowright)$

A gyorsulás függőleges komponense egyben a keresett gyorsulás:

$$a_{ly}=0-\kappa\cdot l\cdot\cos\alpha-\omega^2\cdot l\cdot\sin\alpha \rightarrow \quad \boxed{a_{ly}=-2{,}644\,\text{m/s}^2\,(\downarrow)}$$

A sebesség meghatározása a pillanatnyi forgásközéppont segítségével:



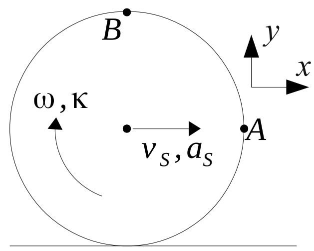
A pillanatnyi forgásközéppont a forgó mozgást végző merev testhez mereven kapcsolódó olyan pont, melynek sebessége zérus. A test bármely pontjában a sebességvektor az ebbe a középpontba mutató irányra merőleges, nagysága a távolság és a szögsebesség szorzata.

Esetünkben a két végpont sebességének az irányát ismerve a pillanatnyi forgásközéppontnak az *o* és az *f* egyenesen is rajta kell lennie, emiatt:

$v_0=\omega l\sin\alpha,\quad v_l=\omega l\cos\alpha$

Ebből: $\frac{v_0}{\sin\alpha}=\frac{v_l}{\cos\alpha}\rightarrow v_l=\frac{v_0}{\operatorname{tg}\alpha}$, ami azonos a korábbi eredménnyel.

Gyakorló példa – 1



Adott az $R=0{,}5\,\mathrm{m}$ sugarú kerék szögsebessége, szöggyorsulása, valamint súlypontjának sebessége és gyorsulása.
Számítsuk ki a földdel érintkező pont és az A pont sebességét, valamint a B pont gyorsulását!
$\omega=3\,\mathrm{rad/s}$, $\kappa=1{,}6\,\mathrm{rad/s^2}$, $v_S=1{,}2\,\mathrm{m/s}$, $a_S=2{,}2\,\mathrm{m/s^2}$

Megoldás

A sebességeket a súlypont sebességéből, mint haladó mozgásból és az a körüli ω szögsebességű forgásból számoljuk. A talppontra:

$$v_x=$$

$$v_y=$$

Az *A* pontra:

$$v_{Ax}=$$

$$v_{Ay}=$$

A gyorsulás komponenseit a súlypont gyorsulásából, mint haladó mozgásból és az a körüli ω szögsebességű és κ szöggyorsulású forgásból számoljuk:

$$a_{Bx}=$$

$$a_{By}=$$

Az eltolódó és a rögzített tengely körüli forgó mozgás természetesen csak speciális esetei az általános síkbeli mozgásnak. Eszerint a rögzített tengely körüli forgó mozgás egy olyan mozgás, ahol a pillanatnyi forgásközéppont mindig a fix tengelyre esik. A haladó mozgás esetén az elfordulás, a szögsebesség és a szöggyorsulás nulla, emiatt ebben a kivételes esetben nincs pillanatnyi forgásközéppont.

Merev testek kinetikája

Síkbeli feladatoknál a merev test helyzetének egyértelmű megadásához három adatra van szükség, ezért a mozgás leírására három független egyenletre van szükségünk. Ehhez az elemi pontok mozgásának összegzésével levezetett tételeket használjuk.

Súlyponttétel

***Tétel**:* A merev test súlypontja úgy mozog, mintha egy olyan tömegpont lenne, amelyre a merev testre ható erők hatnak, tömege pedig a merev test tömegével azonos. (Képlettel: $\boldsymbol{R}=m\cdot\boldsymbol{a}_S$.)

Mint látjuk, meg kell mondanunk, melyik pont gyorsulása lesz arányos a testre ható erők eredőjével. A súlyponttétel az anyagi pontoknál látott módon írható át skaláregyenletekké, a tetszőleges irányú vetületi egyenletek közül azonban itt is csak kettő lesz független.

Perdülettétel

A másik tétel a forgás sebességének változását fejezi ki, a képletet Newton második mozgástörvényének forgómozgásra fordításával mutatjuk be. A korábbi egyenes-körmozgás szótár szerint a gyorsulás helyett a test szöggyorsulását kell használni. A tehetetlen tömeg szerepét egy kiválasztott tengelyre vett *tehetetlenségi nyomaték* (*inercianyomaték*) veszi át. Az erő helyett pedig a kiválasztott tengelyre kell számítanunk a testre ható erők és forgatónyomatékok nyomatékát. A síkbeli feladatunkban tehát $M=I\cdot\kappa$ lesz a tétel általános alakja. A kiválasztott tengely lehet a súlyponti tengely, vagy lehet a pillanatnyi forgásközéppont, így a tételt kétféleképpen fogalmazhatjuk meg:

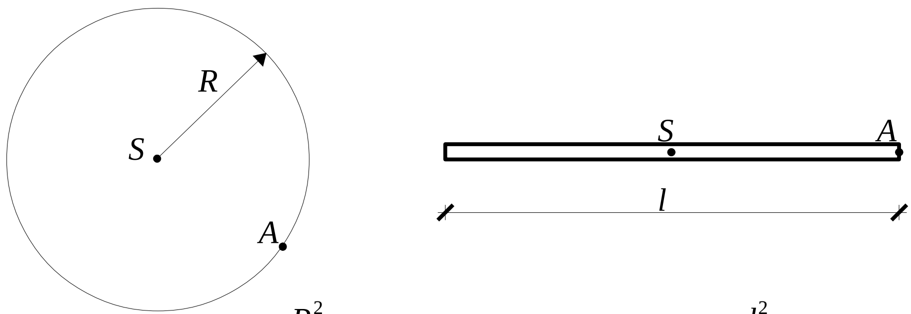
Tétel: Merev test szöggyorsulása arányos a testre ható erőknek és forgatónyomatékoknak a test súlypontjára számolt nyomatékával, az arányossági tényező a test súlypontjára számolt tehetetlenségi nyomatéka. (Képlettel: $M_S=I_S\cdot\kappa$.)

Tétel: Merev test szöggyorsulása arányos a testre ható erőknek és forgatónyomatékoknak a pillanatnyi forgásközéppontra számolt nyomatékával, az arányossági tényező a test pillanatnyi forgásközéppontra számolt tehetetlenségi nyomatéka. (Képlettel: $M_0=I_0\cdot\kappa$.)

Merev test tehetetlenségi nyomatéka

A merev test egy tengelyre számolt tehetetlenségi nyomatéka a testet alkotó elemi tömegpontok tengelytől való r távolsága négyzete és az elemi tömegpontok $\mathrm{d}m$ tömege szorzatainak összege, képlettel: $I=\int_m r^2\,\mathrm{d}m$.

E tárgy keretében csak hengernek tekinthető, illetve hosszú, a tengelyére merőlegesen elhanyagolható kiterjedésű testek mozgásával foglalkozunk, ezek tehetetlenségi nyomatékait mutatja az ábra.



Súlypontra: $I_S=\dfrac{m\cdot R^2}{2}$ Súlypontra: $I_S=\dfrac{m\cdot l^2}{12}$

Kerületi pontra: $I_A=\dfrac{3}{2}m\cdot R^2$ Végpontra: $I_A=\dfrac{m\cdot l^2}{3}$

Henger és rúd tehetetlenségi nyomatékai

Általánosságban is igaz, hogy a legfontosabb inercia a súlyponti. Ez ugyanis a legkisebb, és ebből bármelyik másik P ponton átmenő tengelyre ki lehet számítani az inerciát a Steiner-tétel segítségével: $I_P=I_S+m\cdot r_{PS}^2$, ahol r_{PS} a P és S pontok távolsága.

A henger és a rúd esetében tehát elég lett volna a súlyponti inerciát megadni, hiszen:

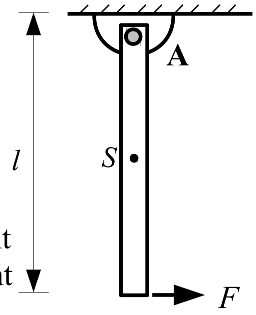
$$I_A=I_S+m\cdot r_{AS}^2=\frac{1}{2}m\cdot R^2+\frac{2}{2}m\cdot R^2=\frac{3}{2}m\cdot R^2$$

$$I_A=I_S+m\cdot r_{AS}^2=\frac{m\cdot l^2}{12}+m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)m\cdot l^2=\frac{m\cdot l^2}{3}$$

A feladatok megoldása során a vetületi egyenletek és a perdülettétel két formája közül válogathatunk.

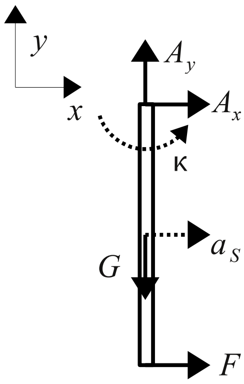
Mintapélda – 2

Határozzuk meg az $l=1{,}2\,\mathrm{m}$ hosszúságú, $G=500\,\mathrm{N}$ súlyú rúd szöggyorsulását és a felfüggesztésről átadódó erőt, ha a test a nyugalmi helyzetből az $F=300\,\mathrm{N}$ erő hatására mozgásnak indul!



Megoldás

Az ábrába berajzoltuk a testre ható erőket és szaggatott vonallal a súlypont gyorsulását, valamint a test szöggyorsulását. Mivel a test a rögzített A pont körül forog, ezért e két mennyiség nem független egymástól: $a_S=\kappa\cdot l/2$.



A test álló helyzetből indul, ezért a kezdeti szögsebesség nulla, emiatt a súlypont normál irányú gyorsulása nulla.

A rúd tömege: $m=\dfrac{500}{9{,}81}=50{,}97\,\mathrm{kg}$

A súlyponttétel vízszintes és függőleges irányban:

$$A_x+300=50{,}97\cdot a_S$$

$$A_y-G=50{,}97\cdot 0$$

A rögzített tengely ismeretében a perdülettételt kétféleképpen is felírhatjuk, a súlypontra és a forgás tengelyére:

$$300\cdot 0{,}6-A_x\cdot 0{,}6=\frac{50{,}97\cdot 1{,}2^2}{12}\cdot\kappa$$

$$300\cdot 1{,}2=\frac{50{,}97\cdot 1{,}2^2}{3}\cdot\kappa$$

A négy egyenletből csak háromra van szükségünk. Az utolsó egyenletből:

$$\boxed{\kappa=14{,}71\,\mathrm{rad/s^2}\,(\curvearrowleft)}$$

Ezt felhasználva az első és a második egyenletben:

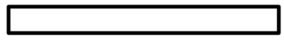
$$\boxed{A_x=150{,}0\,\mathrm{N}\,(\rightarrow),\ A_y=500\,\mathrm{N}\,(\uparrow)}$$

Gyakorló példa – 2

Egy $m=15\,\mathrm{kg}$ tömegű, $l=1{,}5\,\mathrm{m}$ hosszú gerendát két végén fogva tartunk. Mekkora lesz a gerenda szöggyorsulása, ha hirtelen az egyik végén elengedjük? Mekkora erőt kell kifejteni a másik végen az elengedés pillanatában ahhoz, hogy az a végpont ne mozduljon el?

Megoldás

Rajzoljuk be a gerendára az elengedés pillanatában ható erőket. Jelöljük a várható elfordulás és szöggyorsulás irányát és a súlypont gyorsulását is.



Írjuk fel a súlyponttétel két egyenletét:

$\sum F_{ix}:$

$\sum F_{iy}:$

Számítsuk ki a tehetetlenségi nyomatékot a súlyponti és a forgástengelyre:

$I_S =$ $I_0 =$

Írjuk fel a perdülettételt a súlypontra, illetve a forgástengelyre:

$\sum M_i^{(S)}:$

$\sum M_i^{(0)}:$

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$\kappa =$

$A_x =$

$A_y =$

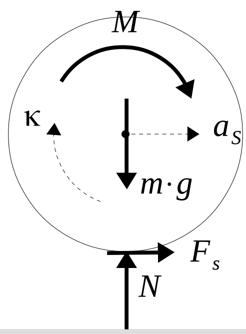
Gördülő kerék

A (vízszintes, vagy ferde) síkon elfordulva előrehaladó kerék gördülését aszerint csoportosíthatjuk, hogy a síkkal érintkező talppontjának van-e sebessége a talajhoz képest. Ha van, akkor *csúszva gördülés*ről beszélünk, ilyenkor a súrlódási erő csúszó súrlódási erő, a súlypont gyorsulása és a szöggyorsulás független mennyiségek. Ha a talajjal érintkező pont sebessége zérus, akkor *tisztán gördülés*ről beszélünk. A tisztán gördülő kerék pillanatnyi forgásközéppontja mindig a talajjal érintkező talppont, a súlypont sebessége és a szögsebesség között lineáris kapcsolat van ($v_S = \omega \cdot R$) és ugyanez elmondható a súlypont gyorsulásáról és a szöggyorsulásról ($a_S = \kappa \cdot R$). Tisztán gördülés esetén a súrlódási erő független a szorítóerőtől (így tetszőleges irányúnak feltételezhetjük, legfeljebb az eredmény előjeléből következtetünk a tényleges irányra), viszont a tapadó súrlódás $|F_S| \leq \mu \cdot N$ feltétele csak akkor teljesülhet, ha a súrlódási együttható elegendően nagy. Ezt az egyenlőtlenséget utólag ellenőrizni kell.

Mintapélda – 3

Az $m = 20\,\mathrm{kg}$ tömegű, $R = 0{,}30\,\mathrm{m}$ sugarú kereket az $M = 50\,\mathrm{Nm}$ nagyságú nyomatékkal hajtjuk meg vízszintes síkon.
Mekkora a súlypont gyorsulása, ha a kerék tisztán gördül?
Mekkora tapadási súrlódás szükséges a tisztán gördüléshez?

Megoldás



A jobb oldali ábrába berajzoltuk az óramutató járásával megegyező irányú meghajtó nyomatékot és a kerékre ható erőket. A forgatónyomaték miatt a súrlódás hiányában talppont hátrafelé mozdulna el, ezért a súrlódási erőt jobbra mutatónak tételeztük fel, bár tapadó súrlódásról lévén szó a feltételezett irány nem befolyásolja a végeredményt. Szaggatott vonalakkal jelöltük a szöggyorsulás és a gyorsulás várt irányát is. A tisztán gördülés miatt ezek nem függetlenek egymástól: $a_S=\kappa\cdot R$

A súlyponttétel függőleges és vízszintes irányban:

$$20\cdot 9{,}81-N=20\cdot 0$$

$$F_s=20\cdot a_S$$

Az elsőből $N=196{,}2\,\mathrm{N}$ adódik, a másodikból viszont nem lehet egyértelmű megoldást számolni.

A perdülettételhez szükségünk lehet az inerciákra. A súlypontra: $I_S=\frac{20\cdot 0{,}3^2}{2}=0{,}9\,\mathrm{kgm}^2$. A tisztán gördülés miatt a talppont a pillanatnyi forgásközéppont, amire az inercia: $I_0=\frac{3}{2}20\cdot 0{,}3^2=2{,}7\,\mathrm{kgm}^2$. Bár nem fogjuk mindegyiket használni, írjuk fel a perdülettételt a súlypontra és a talppontra:

$$\sum M_i^{(S)}:-50+F_s\cdot 0{,}3=0{,}9\cdot(-\kappa)$$

$$\sum M_i^{(0)}:-50=2{,}7\cdot(-\kappa)$$

Utóbbit megoldva: $\kappa=18{,}52\,\mathrm{rad/s^2}(\curvearrowright)$, amiből $\boxed{a_S=5{,}556\,\mathrm{m/s^2}(\rightarrow)}$

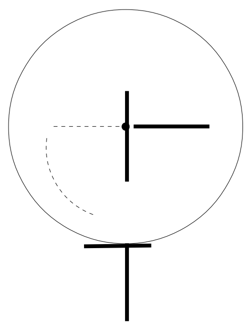
Megjegyzés: Ha ismerjük a pillanatnyi forgásközéppontot, akkor ökölszabályként elmondható, hogy az arra felírt perdülettételből (akár a többi egyenlet felírása nélkül) is kevés ismeretlent tartalmazó egyenletet kapunk.

A maradék két egyenlet bármelyikéből: $F_s=111{,}1\,\mathrm{N}(\rightarrow)$.

A súrlódási feltételből: $111{,}1<\mu\cdot 196{,}2\rightarrow$ $\boxed{\mu>0{,}5663}$

Gyakorló példa – 3

Az $m=20\,\mathrm{kg}$ tömegű, $R=0{,}30\,\mathrm{m}$ sugarú kereket a tengelyén átmenő $F=50\,\mathrm{N}$ nagyságú vízszintes erővel vonszoljuk a vízszintes síkon. Mekkora a súlypont gyorsulása, ha a kerék tisztán gördül? Mekkora tapadási súrlódás szükséges a tisztán gördüléshez?



Megoldás

Rajzoljuk be az ábrába a kerékre ható erőket, és jelöljük a súlypont gyorsulását, valamint a várható szöggyorsulást!

Írjuk fel a súlyponttétel két egyenletét:

$$\sum F_{ix}:$$

$$\sum F_{iy}:$$

Számítsuk ki a tehetetlenségi nyomatékot a súlyponti és a pillanatnyi forgástengelyre:

$I_S=$ $\qquad\qquad$ $I_0=$

Írjuk fel a perdülettételt a súlypontra, illetve a forgástengelyre:

$$\sum M_i^{(S)}:$$

$$\sum M_i^{(0)}:$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$\kappa =$, amiből: $a_S =$

$N =$

$F_s =$

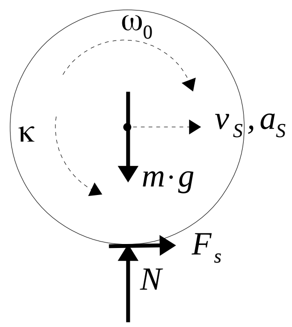
Mekkora súrlódási együttható szükséges a tisztán gördüléshez?

$$\mu > \frac{|F_s|}{N} =$$

Mintapélda – 4

Egy $m=6\,\mathrm{kg}$ tömegű, $R=0{,}2\,\mathrm{m}$ sugarú henger $\omega_0=20\,\mathrm{rad/s}$ szögsebességgel forog, amikor letesszük a vízszintes földre. A földetérés pillanatában a súlypont sebessége zérus. Mennyi idő elteltével kezd el a henger tisztán gördülni, ha a csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}2$?

Megoldás



A földet érés pillanatában a talppont mozog, ezért akkor még csúszva gördülés következik be. A talppont hátrafelé mozog, ezért a súrlódási erő előre mutat, és mivel ez az egyetlen, vízszintes erő, ami a súlypont körül forgat, ezzel a súlypont gyorsulása és a szöggyorsulás iránya is meghatározott. (De e két mennyiség most független egymástól!)

A súlyponttétel alapján függőleges irányban:

$$6\cdot 9{,}81 - N = 6\cdot 0$$

Amiből $N=58{,}86\,\mathrm{N}$

A súrlódási erő pedig: $F_s=0{,}2\cdot 58{,}86=11{,}77\,\mathrm{N}$

A súlyponttétel a vízszintes irányban:

$$11{,}77=6\cdot a_S$$

Ebből a súlypont gyorsulása $a_S=1{,}962\,\mathrm{m/s^2}\,(\rightarrow)$

A talppont most nem pillanatnyi forgásközéppont, így csak a súlypontra írhatunk perdülettételt:

$$11{,}77\cdot 0{,}2=\frac{6\cdot 0{,}2^2}{2}\cdot\kappa$$ amiből a szöggyorsulás $\kappa=19{,}62\,\mathrm{rad/s^2}\,(\curvearrowleft)$.

Fentiek alapján a szögsebesség és a súlypont sebessége mindaddig, amíg a tisztán gördülés meg nem kezdődik: $\omega=20-19{,}62\cdot t$ és $v_S=1{,}962\cdot t$

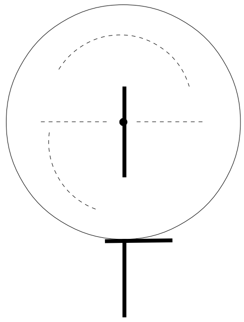
A tisztán gördülés akkor következik be, amikor az alsó pont sebessége $(v_S-\omega\cdot R)$ zérussá válik:

$$1{,}962\cdot t-(20-19{,}62\cdot t)0{,}2=0\rightarrow \boxed{t=0{,}6796\,\mathrm{s}}$$

Gyakorló példa – 4

Egy $m=6\,\text{kg}$ tömegű, $R=0{,}2\,\text{m}$ sugarú henger nem forog, amikor letesszük a vízszintes földre. A földetérés pillanatában a súlypont sebessége $v_{S0}=3\,\text{m/s}$. Mennyi idő elteltével kezd el a henger tisztán gördülni, ha a csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}2$?

Megoldás



Rajzoljuk be a kerékre ható erőket és jelezzük a szöggyorsulást, a súlypont gyorsulását is.

Írjuk fel a súlyponttétel két egyenletét:

$$\sum F_{ix}:$$

$$\sum F_{iy}:$$

A két egyenlet megoldásából:

$N=$ $\qquad F_s=$

$a_S=$

Számítsuk ki a tehetetlenségi nyomatékot a súlyponti tengelyre:

$I_S=$

Írjuk fel a perdülettételt a súlypontra:

$$\sum M_i^{(S)}:$$

Ebből a szöggyorsulás:

$\kappa=$

A tisztán gördülés megkezdéséig a súlypont egyenletesen változó mozgást végez, a test forgómozgása pedig szintén egyenletesen változó, így a sebesség és a szögsebesség függvénye:

$v(t)=$ $\qquad \omega(t)=$

A tisztán gördülés kezdetekor az alsó pont sebessége $(v_S-\omega\cdot R)$ zérus , azaz:

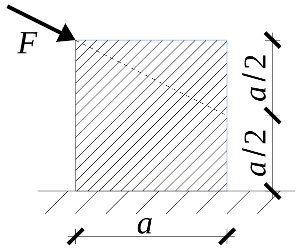
ebből a keresett idő: $t=$

Helyzeti állékonyság, felbillenés

A gördüléshez hasonló jelenség a sík felületen támaszkodó testek billenése. Ha a test kiterjedését is figyelembe vesszük, akkor a szorítóerő nem egy koncentrált erő, hanem egy, a felület (vagy vonal) mentén megoszló erő. Mivel ez az erő csak nyomás lehet, ezért az eredőjének is az érintkezési felületen belül kell működnie, határhelyzetben pedig éppen annak a szélén. A felbillenés vizsgálatakor azt kell ellenőriznünk, hogy az azt okozó nyomatékok nagyobbak-e, mint az azt meggátló nyomatékok. (Ugyanakkor feltételezzük, hogy az elfordulás sarokpontja nem csúszik el, ezt a feltételezést a számítás végén ellenőrizni kell.)

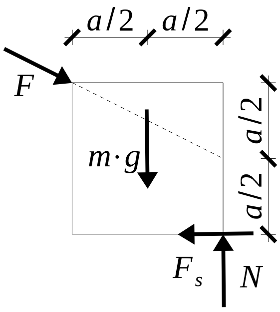
Mintapélda – 5

Mekkora F erővel lehet felbillenteni a vízszintes síkra helyezett $a=3\,\mathrm{m}$ oldalhosszúságú, $m=50\,\mathrm{kg}$ tömegű négyzet alakú testet, ha az erő az ábra szerint megadott irányú?



Megoldás

Az ábrára a felbillenés pillanatát rajzoltuk fel, és a testre ekkor ható erőket. Mivel a felbillentéshez végtelen kicsiny, de a kívánt irányba mutató szöggyorsulás is elegendő, ezért egyenlőtlenség helyett a határhelyzetet, mint egyenlőséget oldjuk meg (ezért nem lesz szükségünk a forgás tengelyére számolható inerciára sem).



A perdülettétel a forgástengelyre:

$$50\cdot 9{,}81\cdot 1{,}5-F\cdot\frac{3}{\sqrt{3^2+1{,}5^2}}\cdot 1{,}5=I_N\cdot 0$$

Ennek megoldásaként: $\boxed{F=548{,}4\,\mathrm{N}}$

Megjegyzés:

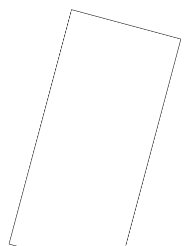
Az erő számításához feltételeztük, hogy nem csúszik el a sarokpont, azaz a súlypont gyorsulása minden irányban zérus. A súlyponttétel két vetületi egyenletének felírásával és megoldásával ki lehetne számolni a súrlódási erő és a szorítóerő értékét, majd a súrlódási feltétellel megadni a súrlódási együttható minimálisan szükséges értékét.

Gyakorló példa – 5

Egy 1 méter magas, 30 centiméter széles betonhasáb tömege $m=180\,\mathrm{kg}$. A hasábot egy $\alpha=20°$ hajlásszögű lejtőre állítjuk a kisebb oldalával. Felbillen-e a magára hagyott hasáb?

Megoldás

A feladat többféleképpen megoldható, nézzünk egy dinamikai megközelítést. Azt fogjuk megvizsgálni, hogy a felbillenés tengelye (azaz az alsó sarokpont) körül milyen irányba kezd el gyorsulni a magára hagyott hasáb. Ha a lejtő teteje felé, akkor a szorítóerő nem a sarokpontban működik, hanem valahol feljebb, és valójában nem fordul el a hasáb. Ha a lejtő alja felé fordul a hasáb a szöggyorsulás alapján, akkor viszont felbillen.



Rajzoljuk be az ábrába a hasábra ható erőket a fenti feltételezéssel.

Írjuk fel a perdülettételt a feltételezett forgástengelyre (az inerciát ugyan nem tudjuk, de biztosan pozitív mennyiség, a súlyerő nyomatékát célszerű lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekből felírni):

$$\sum M_i^{(N)}:$$

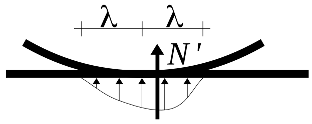
Az egyenlet alapján a szöggyorsulás előjele és így iránya:

0 κ ( )

Ami alapján a hasáb

Gördülési ellenállás

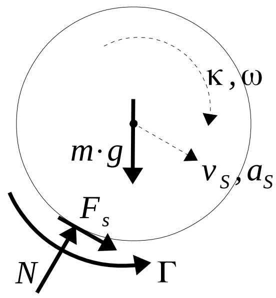
A gördülő kerék a valóságban nem merev test. Ennek következtében az érintkezési pont helyett egy érintkezési vonal alakul ki, ennek megfelelően a szorítóerő sem egyetlen pontban működhet, hanem a vonal mentén bárhova eltolódhat (sőt, ez az erő egy megoszló nyomóerő eredője). Egyensúly esetén csak arra kell figyelnünk, hogy az erő az érintkezési vonalon belül maradjon. Gördülés esetén az eltolt erőt a gyakorlati számítás során a középpontba redukáljuk. Az így kapott szorítóerő mellett egy forgatónyomatékkal számolunk, amit gördülési ellenállási nyomatéknak nevezünk. E nyomaték forgatási iránya a szögsebességgel ellentétes, nagysága pedig a szorítóerőtől és az érintkező testeket jellemző λ gördülési ellenállási tényezőtől függ: $\Gamma=\lambda\cdot N$.



Mintapélda – 6

Az $r=0{,}25\,\text{m}$ sugarú hengert álló helyzetben magára hagyjuk az $\alpha=30°$ hajlásszögű lejtő tetején. A kerék tisztán gördülve elindul lefelé, gördülési ellenállási tényezője $\lambda=0{,}04\,\text{m}$. Mekkora út megtétele után éri el a súlypont a $v_S=10\,\text{m/s}$ sebességet?

Megoldás



Az ábrába berajzoltuk a testre ható erőket feltételezve, hogy lefelé fog tisztán gördülni a henger. Emiatt a szöggyorsulás és a szögsebesség az óramutató járásával azonos irányú lesz, a gördülési ellenállás Γ forgatónyomatéka viszont az óramutató járásával ellentétesen forgat és a nagysága $\Gamma=\lambda\cdot N$.

A tisztán gördülés miatt ismert a pillanatnyi forgásközéppont, ami a kör középpontján átmenő N erő támadáspontja. Ugyancsak emiatt $a_S=\kappa\cdot r$, azaz a két gyorsulásjellegű mennyiség nem független egymástól.

Írjuk fel a súlyponttétel két egyenletét a lejtő síkjával párhuzamosan és arra merőlegesen:

$$\sum F_{i\swarrow}: m\cdot 9{,}81\cdot\cos 30°-N=m\cdot 0$$

$$\sum F_{i\searrow}: m\cdot 9{,}81\cdot\sin 30°+F_s=m\cdot a_S$$

Az első egyenletből $N=8{,}496\cdot m$, így a gördülési ellenállás: $\Gamma=0{,}3398\cdot m$

A perdülettételt most felírhatjuk a súlypontra is és a pillanatnyi forgástengelyre is:

$$\sum M_i^{(S)}: F_s\cdot 0{,}25+0{,}3398\cdot m=\frac{m\cdot 0{,}25^2}{2}\cdot(-\kappa)$$

$$\sum M_i^{(0)}: -m\cdot 9{,}81\cdot\sin 30°\cdot 0{,}25+0{,}3398\cdot m=\frac{3m\cdot 0{,}25^2}{2}\cdot(-\kappa)$$

Az utolsó egyenletből az m-mel való egyszerűsítés után: $\kappa=9{,}455\,\text{rad/s}^2$

(Az eredmény tehát független az m tömegtől, ezért nem volt megadva.)

A tisztán gördülés miatt a súlypont gyorsulása: $a_S=9{,}455\cdot 0{,}25\rightarrow$ $a_S=2{,}364\,\text{m/s}^2$

Ezzel a gyorsulással a kívánt sebesség eléréséhez szükséges út:

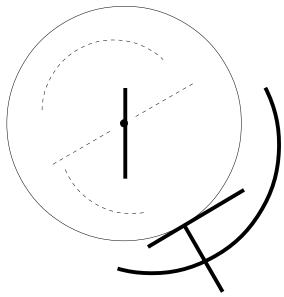
$10^2 = 0^2 + 2 \cdot 2{,}364 \cdot s \rightarrow$ $\boxed{s = 21{,}15\,\text{m}}$

Megjegyzés: A fel nem használt két egyenlet bármelyikéből meg lehetne határozni a tapadási súrlódási erőt (itt most az m függvényében). Az eredményül kapott $F_s = -2{,}541 \cdot m$ érték előjele azt jelenti, hogy a feltételezettel ellentétes irányba mutatna ez az erő. Egyben azt is ki lehet számolni az $|F_s| \leq \mu \cdot N$ súrlódási feltételből, hogy a tisztán gördüléshez legalább $\mu = 0{,}2991$ nagyságú súrlódási együttható szükséges.

Gyakorló példa – 6

Az $r = 0{,}25\,\text{m}$ sugarú $m = 8\,\text{kg}$ tömegű henger tisztán gördülve halad felfelé az $\alpha = 30\,°$ hajlásszögű emelkedőn. A kezdő időpontban a súlypont sebessége $v_{S1} = 14\,\text{m/s}$.
Mekkora út megtétele után áll meg a henger, ha a gördülési ellenállási tényező $\lambda = 0{,}04\,\text{m}$?

Megoldás



Rajzoljuk be az ábrába a hengerre ható erőket, a súlypont mozgásjellemzőit és a gyorsulások várható irányát!

Írjuk fel a súlyponttétel két egyenletét a lejtő síkjával párhuzamosan és arra merőlegesen:

$$\sum F_{i\searrow}:$$

$$\sum F_{i\swarrow}:$$

Az első egyenlet megoldásából:

$N =$ $\Gamma =$

Számítsuk ki a tehetetlenségi nyomatékot a súlyponti és a pillanatnyi forgástengelyre:

$I_S =$ $I_0 =$

Írjuk fel a perdülettételt a súlypontra és a pillanatnyi forgásközéppontra is:

$$\sum M_i^{(S)}:$$

$$\sum M_i^{(0)}:$$

Mint látjuk, utóbbiban csak a szöggyorsulás az ismeretlen, így arra megoldva az egyenletet:

$\kappa =$

A tisztán gördülés miatt a súlypont gyorsulása:

$a_S =$

A súlypont kezdeti és végsebességének, valamint gyorsulásának ismeretében a megállásig megtett út:

Merev testek kinetikája

Hasonlóan az anyagi pont mozgásánál látottakhoz, a merev testek mozgása esetén is van lehetőség olyan tételek levezetésére, melyekkel egy mozgás folyamata helyett csak annak egy kezdő- és végpontja közötti változását írjuk le. Ezen az órán ezeket a tételeket tekintjük át a hozzájuk kapcsolódó fogalmakkal, szokás szerint példákon keresztül bemutatva azok használatát.

Mozgásmennyiség változásának tétele

A súlyponttétel kimondta, hogy a merev test súlypontja úgy mozog, mintha egy anyagi pont lenne. Ugyanúgy, ahogyan anyagi pont esetén, a merev testre is definiálható a mozgásmennyiség és annak változástétele.

Def.: A merev test *mozgásmennyisége* a test m tömegének és a súlypont $\boldsymbol{v}_S$ sebességének szorzata.

Tétel: A merev test mozgásmennyiségének adott idő alatti megváltozása egyenlő a testre ható erők által ugyanazon idő alatt átadott impulzussal. Képlettel $m\cdot(\boldsymbol{v}_{S2}-\boldsymbol{v}_{S1})=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}t$

A tételből látszik, hogy a súlypont mozgását a testre ható forgatónyomatékok nem befolyásolják.

A tételt hasonló körülmények esetén használhatjuk, mint anyagi pont esetén.

Perdületváltozás tétele

Def.: A merev test adott tengelyre vett *perdülete* a tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékának és a szögsebességének a szorzata.

A *perdületváltozás tételét* a súlyponti tengelyre és a forgástengelyre számítható perdületre külön-külön mondjuk ki:

Tétel: A merev test *súlyponti tengelyre* számolt perdületének adott idő alatti megváltozása egyenlő a testre ható erők és forgatónyomatékok súlypontra számított nyomatékának ugyanazon idő alatti integráljával. Képlettel: $I_S(\omega_2-\omega_1)=\int_{t_1}^{t_2}M_S\,\mathrm{d}t$

Tétel: A merev test *rögzített forgásközéppontra* számolt perdületének adott idő alatti megváltozása egyenlő a testre ható erők és forgatónyomatékok rögzített forgásközéppontra számított nyomatékának ugyanazon idő alatti integráljával. Képlettel: $I_O(\omega_2-\omega_1)=\int_{t_1}^{t_2}M_O\,\mathrm{d}t$

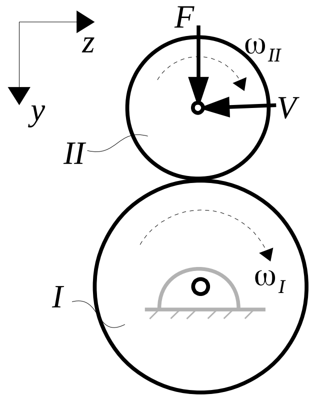
Itt is igaz, hogy ha a nyomatékok az idő során állandóak, akkor az integrálás az időtartammal való szorzássá egyszerűsödik.

A tételt a korábban már használt egyenes vonalú mozgás – körmozgás szótár segítségével átírhatjuk a mozgásmennyiség változásának tételéből is: a tehetetlen tömeg helyére a tehetetlenségi nyomatékot, a sebesség helyére a szögsebességet, az erők eredőjének helyére pedig az erők nyomatékát behelyettesítve.

A szótáras megfogalmazás segít a használat eseteinek megfogalmazásában is. A tételben nem szerepel elfordulási szög, szöggyorsulás, ezért olyan forgó mozgások esetén használhatjuk, amikor ezeken kívül a tételben szereplő változók egy kivételével ismertek.

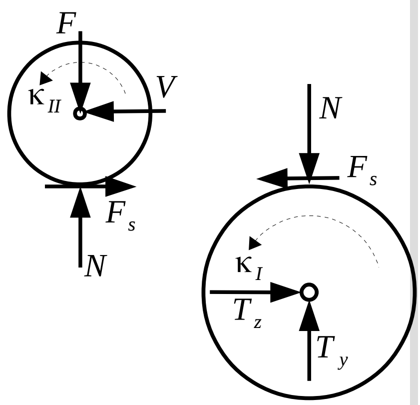
Mintapélda – 1

Egy $M_I = 30\,\text{kg}$ tömegű, $R_I = 0{,}6\,\text{m}$ sugarú henger kezdetben $\omega_I = 100\,\text{rad/s}$ szögsebességgel forog a függőleges rögzített tengelye körül (lásd a felülnézeti ábrát). A hengert egy vele azonos irányba forgó $M_{II} = 60\,\text{kg}$ tömegű, $R_{II} = 0{,}45\,\text{m}$ sugarú, kezdetben $\omega_{II} = 200\,\text{rad/s}$ szögsebességű henger segítségével állítjuk meg úgy, hogy az ábra szerinti, y irányba mutató $F = 300\,\text{N}$ erőt működtetünk a második test tengelyén, továbbá egy z irányú V erővel biztosítjuk, hogy a II jelű test tengelye ne mozduljon el. A két henger között a csúszó súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$. Mennyi idő alatt áll meg az I jelű henger?



Megoldás

A megfelelő tételeket az egyes testekre ható erők ismeretében tudjuk felírni. A jobb oldali ábrán ezért felrajzoltuk az egyes testekre ható erőket. *Az y irányú erők:* a megadott F, a szorítóerő és az alsó testre a tengelyéről átadódó erő y irányú komponense (T_y). *A z irányú erők:* az érintkezési pontban a felső test balra, az alsó jobbra mozog, ezért a súrlódási erő ezekkel az irányokkal rendre ellentétes, az alsó testre a tengelyéről átadódó erő z irányú komponensét (T_z), míg a felső testre a helyben tartásához szükséges V erőt rajzoltuk be.



A felső test nem mozog y irányban, ezért a súlyponttétel abban az irányban:

$$N - 300 = 60 \cdot 0 \rightarrow N = 300\,\text{N}$$, amiből a súrlódási erő: $F_s = 0{,}2 \cdot 300 = 60\,\text{N}$.

Az alsó henger esetében a forgástengely körül csak a súrlódási erő forgat. A test inerciája erre a tengelyre: $I_0 = \dfrac{30 \cdot 0{,}6^2}{2} = 5{,}4\,\text{kgm}^2$. A perdületváltozás tételét ugyanerre a tengelyre írhatjuk fel, a kezdeti pillanat és a megállás között:

$$\curvearrowright : 5{,}4 \cdot (0 - 100) = -60 \cdot 0{,}6 \cdot t$$

Amiből $\boxed{t = 15\,\text{s}}$

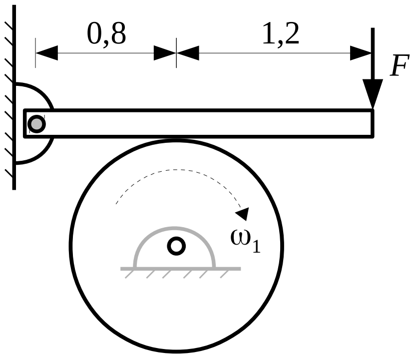
Ekkor a felső test szögsebessége a tengelyére felírt perdülettételből:

$$\curvearrowright : \frac{60 \cdot 0{,}45^2}{2}(\omega - 200) = -60 \cdot 0{,}45 \cdot 15 \rightarrow \ \omega = 133{,}3\,\text{rad/s}(\curvearrowright)$$, tehát még mindig a számításhoz használt irányba mozog, így a súrlódási erő iránya nem változik, a fenti időeredmény a feladat megoldása.

Megjegyzés: a megállás ideje itt most egyetlen pillanathoz tartozik, ezt követően az I jelű test az ellenkező irányba kezdene forogni.

Gyakorló példa – 1

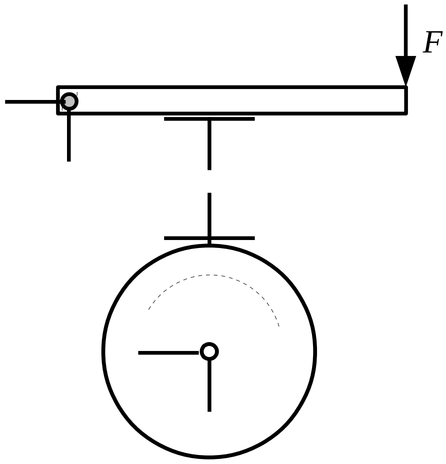
Egy $m=30\,\mathrm{kg}$ tömegű, $R=0{,}6\,\mathrm{m}$ sugarú henger $\omega_1=100\,\mathrm{rad/s}$ szögsebességgel forog. A hengert egy $l=2\,\mathrm{m}$ hosszú rúddal (ami az egyik rögzített vége körül szabadon elfordul) fékezzük a rúd másik végén működtetett $F=300\,\mathrm{N}$ erővel. A rúd súlya elhanyagolható a többi erőhöz képest. A rúd és a henger között a csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}2$. Mennyi idő alatt áll meg a henger?



Megoldás

A henger mozgása változásának számításához szükségünk van az egyes testekre ható erőkre, és a rúd mozdulatlanságára is. (Ez a megállásig minden t időpontban azonos jellegű.)

Rajzoljuk be az ábrába az egyes erők feltételezett irányát!



A rúd nem mozog, ezért a perdülettétel a forgásközéppontra egy olyan egyenlet lesz, aminek zérus van a jobb oldalán. Írjuk fel ezt az egyenletet, feltételezve, hogy a rúd keresztmetszeti kiterjedése olyan kicsi, hogy a súrlódási erő nem forgat a tengely körül:

$$\sum M_i :$$

Az egyenletet megoldva a rúd és a henger közötti szorítóerő:

$$N=$$

Ebből a súrlódási erő: $F_s=$

Mivel a hengerre ható erők közül a súrlódási erő az egyetlen, ami forgat a súlypont körül, ezért a súlypontra felírhatjuk a perdületváltozás tételét. Ehhez az inercia a súlyponti tengelyre:

$$I_S=$$

A tételt a kezdeti pillanat és a megállás között írhatjuk fel:

Ezt megoldva a megállásig eltelt idő:

$$t_2=$$

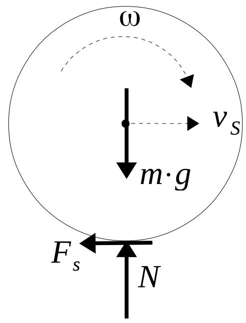
Mintapélda – 2

Egy $m=6\,\mathrm{kg}$ tömegű, $R=0{,}2\,\mathrm{m}$ sugarú henger nem forog, amikor letesszük a vízszintes földre. A földetérés pillanatában a súlypont vízszintes sebessége $v_{S0}=3\,\mathrm{m/s}$.

Mennyi idő elteltével kezd el a henger tisztán gördülni, ha a csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}2$?

Megoldás

A földetérés pillanatában a talppont mozog, ezért akkor még csúszva gördülés következik be. A talppont előre mozog, ezért a súrlódási erő hátra mutat, és mivel ez az egyetlen, vízszintes erő, ami a súlypont körül forgat, ezzel a súlypont gyorsulása és a szöggyorsulás iránya is meghatározott. (De e két mennyiség most független egymástól!)



A súlyponttétel alapján függőleges irányban:

$$6\cdot 9{,}81-N=6\cdot 0$$

Amiből $N=58{,}86\,\mathrm{N}$

A súrlódási erő pedig: $F_s=0{,}2\cdot 58{,}86=11{,}77\,\mathrm{N}$

A mozgásmennyiség változásának tétele alapján vízszintes irányban:

$$6\cdot(v_{S2}-3)=-11{,}77\cdot t \quad \rightarrow \quad v_{S2}=3-1{,}962\cdot t$$

A talppont most nem pillanatnyi forgásközéppont, de a súlypontra felírhatjuk a perdületváltozás tételét:

$$\curvearrowright: \frac{6\cdot 0{,}2^2}{2}\cdot(\omega_2-0)=11{,}77\cdot 0{,}2\cdot t \quad \rightarrow \quad \omega_2=19{,}62\cdot t$$

A tisztán gördülés akkor következik be, amikor a legalsó pont $v_{S2}-\omega_2\cdot R$ sebessége nullává válik, azaz amikor $v_{S2}=\omega_2\cdot R$:

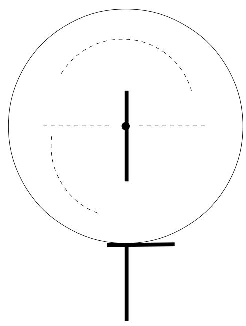
$$3-1{,}962\cdot t=19{,}62\cdot t\cdot 0{,}2 \rightarrow \boxed{t=0{,}5097\,\mathrm{s}}$$

Gyakorló példa – 2

Egy $m=6\,\mathrm{kg}$ tömegű, $R=0{,}2\,\mathrm{m}$ sugarú henger $\omega_0=20\,\mathrm{rad/s}$ szögsebességgel forog, amikor letesszük a vízszintes földre. A földet érés pillanatában a súlypont sebessége zérus. Mennyi idő elteltével kezd el a henger tisztán gördülni, ha a csúszó súrlódási együttható $\mu=0{,}2$?

Megoldás

Rajzoljuk be a csúszva gördülés közben a kerékre ható erőket és jelezzük a szöggyorsulást valamint a súlypont gyorsulását is.



Írjuk fel a súlyponttétel függőleges egyenletét:

$$\sum F_{iy}:$$

Az egyenlet megoldásából:

$$N= \qquad\qquad F_s=$$

Írjuk fel a mozgásmennyiség változásának tételét a mozgás irányában és fejezzük ki belőle a sebességet az idő függvényében:

Csúszva gördülés közben a pillanatnyi forgásközéppont helyzete változhat, ezért a perdületváltozás tételét a súlyponti tengelyre írhatjuk csak fel. Számítsuk ki a tehetetlenségi nyomatékot a súlyponti tengelyre:

$I_S =$

Írjuk fel a perdületváltozás tételét a súlyponti tengelyre és fejezzük ki belőle a szögsebességet:

$\sum M_i^{(S)}:$

A tisztán gördülés kezdetekor $v_{S2} - \omega_2 \cdot R = 0$, azaz:

ebből a keresett idő: $t_2 =$

Mozgási energia változásának tétele

Mozgási energia

A merev test mozgási energiáját a súlypont mozgásával megadott eltolódó mozgás és a súlypont körüli forgó mozgás segítségével számíthatjuk: $T = \frac{1}{2} m \cdot v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \cdot \omega^2$.

Az inerciáknál már említett Steiner-tétel segítségével bizonyítható, hogy amennyiben forgó mozgást (is) végez a test, akkor a mozgási energiája a pillanatnyi forgásközéppontra számolt tehetetlenségi nyomatékból közvetlenül is számolható: $T = \frac{1}{2} I_0 \cdot \omega^2$. (Hiszen a súlypont sebessége $v_S = \omega \cdot r_{S0}$, ahol r_{S0} a súlypont és a pillanatnyi forgásközéppont távolsága, és $m \cdot r_{S0}^2 + I_S = I_0$.)

Mechanikai munka

A merev testre ható erők munkáját a szokásos módon tudjuk számolni. A forgatónyomatékok munkáját úgy számolhatjuk, hogy erőpárra bontjuk és az erőpárok komponenseinek munkáit összegezzük. Az eltolódó mozgásrészen a két erő által végzett munka egymás ellentettje, az elemi elfordulásból származó elemi elmozdulásokon végzett elemi munkák összegéről pedig bizonyítható, hogy az azonos a forgatónyomatéknak és az elemi elfordulásnak a szorzatával. Így az állandó M nyomaték munkája: $L_{1-2} = M \cdot (\phi_2 - \phi_1)$

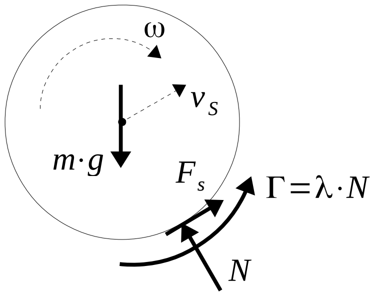
A mozgási energia változásának a tétele

A tétel most is felírható $T_2 - T_1 = L_{1-2}$ alakban, csupán az egyes tagok jelentése tér el az anyagi pontnál tanultaktól. A T_i mozgási energiáknál a forgómozgást is figyelembe kell venni, míg az L_{1-2} munkánál a testre ható külső erők és forgatónyomatékok munkáját kell összegezni a mozgás kezdő- és végpontja között

Mintapélda – 3

Az $r=0{,}25\,\mathrm{m}$ sugarú $m=8\,\mathrm{kg}$ tömegű henger tisztán gördülve halad felfelé az $\alpha=30°$ hajlásszögű emelkedőn. A kezdő időpontban a súlypont sebessége $v_{S1}=14\,\mathrm{m/s}$.
Mekkora út megtétele után áll meg a henger, ha a gördülési ellenállása $\lambda=0{,}04\,\mathrm{m}$?

Megoldás



Az ábrába berajzoltuk a testre ható erőket és a mozgásjellemzőket a mozgás egy tetszőleges pillanatában. A tisztán gördülés miatt $v_S=\omega\cdot r$, és a gördülési ellenállás az óramutató járásával ellentétesen forgat.

A lejtőre merőleges vetületi egyenletből:

$$N-8\cdot 9{,}81\cdot\cos 30°=0 \rightarrow \quad N=67{,}97\,\mathrm{N}$$

Ebből a gördülési ellenállás nyomatéka:

$$\Gamma=67{,}97\cdot 0{,}04=2{,}719\,\mathrm{Nm}$$

A megállás pillanatában a mozgási energia zérus ($T_2=0$). A test mozgási energiáját a kezdeti pillanatban kétféleképpen számolhatjuk (de természetesen ugyanazt az eredményt kapjuk):

$$T_1=\frac{1}{2}8\cdot 14^2+\frac{1}{2}\frac{8\cdot 0{,}25^2}{2}\left(\frac{14}{0{,}25}\right)^2=1176\,\mathrm{J}$$ (haladó mozgás plusz a súlypont körüli forgás)

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{3}{2}8\cdot 0{,}25^2\left(\frac{14}{0{,}25}\right)^2=1176\,\mathrm{J}$$ (pillanatnyi forgásközéppont körüli forgás)

A testre ható erők és a gördülési ellenállási nyomaték által végzett munkáknál a következőket kell megfontolnunk. A lejtő síkjára merőleges erők nem végeznek munkát. A talppont sebessége zérus (pillanatnyi forgásközéppont), ezért a tapadó súrlódási erő által végzett munka zérus. A tisztán gördülés miatt *s* út megtétele alatt a henger *s/R* radián szöggel fordul el, a gördülési ellenállás forgatónyomatéka ezen az elforduláson végez (negatív) munkát. A mozgási energia változásának tétele tehát:

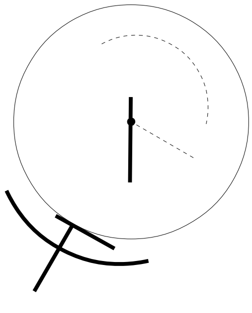
$$0-1176=-8\cdot 9{,}81\cdot\sin 30°\cdot s-2{,}719\cdot\frac{s}{0{,}25}$$

Amiből a megállásig megtett út: $\boxed{s=23{,}47\,\mathrm{m}}$

Gyakorló példa – 3

Az $r=0{,}25\,\mathrm{m}$ sugarú, $m=10\,\mathrm{kg}$ tömegű hengert álló helyzetben magára hagyjuk az $\alpha=30°$ hajlásszögű lejtő tetején. A kerék tisztán gördülve elindul lefelé, a gördülési ellenállási tényezője $\lambda=0{,}04\,\mathrm{m}$.
Mekkora út megtétele után éri el a súlypont a $v_S=10\,\mathrm{m/s}$ sebességet?

Megoldás



Rajzoljuk be az ábrába a hengerre ható erőket, a súlypont mozgásjellemzőit és a gyorsulások várható irányát!

Írjuk fel a súlyponttétel lejtő síkjára merőleges irányra vonatkozó egyenletét:

$\sum F_{i\swarrow}$:

Az egyenlet megoldásából:

$N=$ $\Gamma=$

Számítsuk ki a tehetetlenségi nyomatékot a súlyponti és a pillanatnyi forgástengelyre:

$I_S=$ $I_0=$

Írjuk fel a mozgási energiát a mozgás elején és végén:

$T_1=$

$T_2=$

Mekkora úton (elforduláson) végeznek munkát az egyes erők (nyomatékok):

$m\cdot g\cdot\cos\alpha$: $m\cdot g\cdot\sin\alpha$:

N: Γ:

F_s:

A mozgási energia változásának tétele:

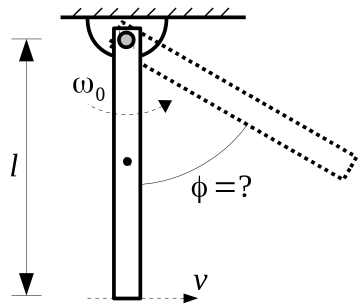
$T_2-T_1=L_{1-2}$:

Ennek megoldásaként a keresett út:

$s=$

Mintapélda – 4

Az $m=5\,\text{kg}$ tömegű, $l=1{,}6\,\text{m}$ hosszú, egyik végén felfüggesztett rúd lengése közben az alsó függőleges helyzeten való áthaladáskor a legalsó pontjának sebessége $v=3\,\text{m/s}$.
Határozzuk meg, mekkora ϕ kitérésnél áll meg a rúd!



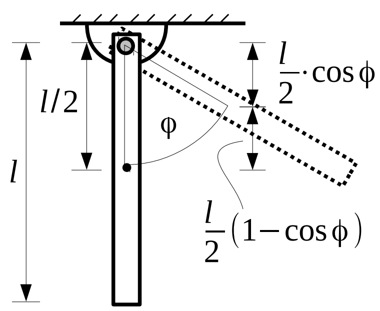
Megoldás

A szögsebesség ismeretében tetszőleges helyzetben meg tudnánk határozni a rúd szöggyorsulását, de az pontról-pontra változna, így a mozgás differenciálegyenletének megoldása jelen tudásunk mellett nem lenne könnyű.

Ezért a mozgási energia változásának tételét használjuk.

A megállás pillanatában a mozgási energia: $T_2=0\,\text{J}$. Az alsó helyzeten való áthaladáskor a tengely körüli forgás alapján tudjuk számolni. A szögsebesség ekkor a végpont sebességéből:

$$\omega_0=v/l=3/1{,}6=1{,}875\,\text{rad/s}$$



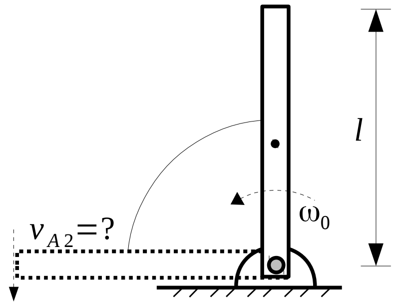
A mozgási energia tehát $T_1=\frac{1}{2}\frac{5\cdot 1{,}6^2}{3}1{,}875^2=7{,}5\,\text{J}$

A tengelyről átadódó erők munkája nulla, hiszen a tengely nem mozdul el. A súlyerő munkája a súlypont függőleges elmozdulásától függ, ami az ábra szerint számítható (az elmozdulás felfelé mutat, tehát a lefelé mutató erő munkája negatív). A tétel:

$$0-7{,}5=-5\cdot 9{,}81\cdot\frac{1{,}6}{2}(1-\cos\phi)$$

Aminek megoldásából a szögelfordulás: $\boxed{\phi=36{,}01°}$

Gyakorló példa – 4



Az $m=8\,\mathrm{kg}$ tömegű, $l=1{,}8\,\mathrm{m}$ hosszú, egyik végén megtámasztott rúd felső függőleges helyzeten való áthaladásakor a szögsebessége $\omega_0=4\,\mathrm{rad/s}$. Határozzuk meg a végpont sebességét, amikor a rúd eléri a vízszintes helyzetet!

Megoldás

Ha tudjuk azt a szögsebességet, amellyel a rúd eléri a vízszintes helyzetet, akkor abból a test bármely pontjának sebességét ki tudjuk számolni.

A test fix tengely körül forog, ezért a mozgási energiáját a pillanatnyi forgásközéppontra vonatkozó képletből tudjuk számítani. Ehhez szükségünk van a rúd inerciájára:

$$I_0=$$

Ezt felhasználva a mozgási energia a kezdeti időpontban:

$$T_1=$$

A mozgási energia az ütközés előtti pillanatban, feltéve, hogy az akkori szögsebesség ω :

$$T_2=$$

A testre ható erők által végzett munka:

$$L_{1-2}=$$

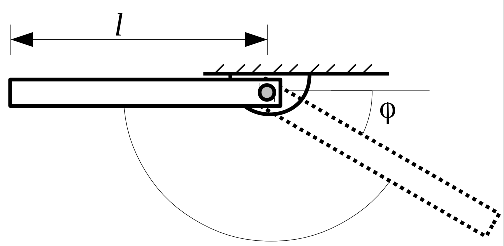
A mozgási energia változásának tétele:

$$T_2-T_1=L_{1-2}\rightarrow$$

Amit megoldhatunk az ismeretlen szögsebességre: $\omega=$

amiből a végpont sebessége: $v_{A2}=$

Mintapélda – 5



Az $m=3\,\mathrm{kg}$ tömegű, $l=0{,}6\,\mathrm{m}$ hosszú, egyik végén felfüggesztett rudat vízszintes helyzetbe kitérítjük és elengedjük.
Határozzuk meg a rúd szögsebességét és a súlypont sebességét, amikor az ábrán vázolt módon a rúd a vízszintessel $\phi=20°$-os szöget zár be!

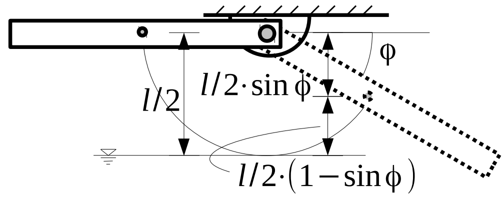
Megoldás

Mivel álló helyzetből indítjuk a rudat, a kezdeti mozgási energiája nulla $(T_1=0\,\mathrm{J})$.

A végállapotban a szögsebesség ω_2, így a mozgási energia:

$$T_2=\frac{1}{2}\frac{3\cdot 0{,}6^2}{3}\omega_2^2=\frac{1}{2}0{,}36\cdot\omega_2^2=0{,}18\,\omega_2^2$$

A rúdra ható erők közül csak a súlyerő támadáspontja mozdul el, így csak az végez munkát. Számítsuk ezt a munkát az erő potenciális energiájából, alapszintnek a legalsó pontot választva. A potenciális energia a kezdeti pillanatban:



$$U_1=3\cdot 9{,}81\cdot 0{,}3=8{,}829\,\mathrm{J}$$

A vizsgált pillanatban:

$$U_2=3\cdot 9{,}81\cdot(0{,}3-0{,}3\cdot\sin 20°)=5{,}809\,\mathrm{J}$$

Az erő munkája: $L_{1-2}=U_1-U_2=8{,}829-5{,}809=3{,}02\,\mathrm{J}$

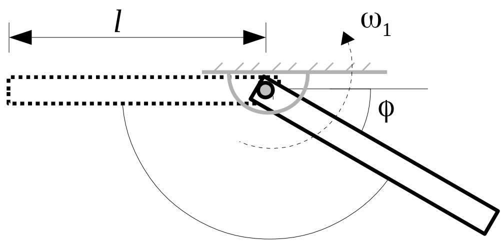
A mozgási energia változásának tétele: $0{,}18\,\omega_2^2-0=3{,}02$

Amiből a keresett szögsebesség: $\boxed{\omega_2=4{,}096\,\mathrm{rad/s}}$

A súlypont sebessége: $v_{S2}=4{,}096\cdot 0{,}3$ → $\boxed{v_{S2}=1{,}229\,\mathrm{m/s}}$

Gyakorló példa – 5

Az $m=5\,\mathrm{kg}$ tömegű, $l=0{,}8\,\mathrm{m}$ hosszú, egyik végén felfüggesztett rudat ω_1 szögsebességgel elengedjük amikor a vízszintessel bezárt hajlásszöge az ábra szerinti helyzetben $\phi=30°$. Mekkora legyen ω_1 értéke, hogy a rúd áthaladva a felső függőleges helyzeten teljesen körbeforduljon?



Megoldás

A feladatnak éppen megfelelő szögsebesség esetén a rúd éppen eléri a függőleges helyzetet. Ekkor a mozgási energiája:

$$T_2=$$

Ennél kisebb nem lehet a mozgási energia, hiszen ahhoz képzetes szögsebesség tartozna.

A kezdeti pillanatban a test mozog, ezért ott a szögsebesség függvényében írhatjuk fel a mozgási energiát. Az inercia a forgástengelyre:

$$I_0=$$

A kezdeti mozgási energia tehát az ω_1 szögsebesség függvényében:

$$T_1=$$

Mekkora a súlypont által megtett út függőleges vetülete?

$$s_y=$$

A mozgási energia változásának tétele:

Ennek megoldásaként:
$\omega_1 =$

Összefoglalás

Végezetül egy táblázatban összefoglaljuk, hogy az anyagi pont, illetve a merev test mozgása esetén milyen fogalmak, definíciók, tételek fordultak elő:

	Anyagi pont	**Merev test**
mozgás-jellemzők:	hely: $x(t), \boldsymbol{r}(t)$ sebesség: $v(t), \boldsymbol{v}(t)$ gyorsulás: $a(t), \boldsymbol{a}(t)$	súlypont helye: $x_S(t), \boldsymbol{r}_S(t)$ test elfordulása: $\phi(t)$ súlypont sebessége: $v_S(t), \boldsymbol{v}_S(t)$ test szögsebessége: $\omega(t)$ súlypont gyorsulása: $a_S(t), \boldsymbol{a}_S(t)$ test szöggyorsulása: $\kappa(t)$
mozgás-egyenlet:	$\sum \boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$	$\sum \boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}_S$ - súlypont $\sum M_S = I_S \cdot \kappa$ - súlyponti tengely $\sum M_0 = I_0 \cdot \kappa$ - pillanatnyi fkp.
fogalmak:	mozgásmennyiség (lendület): $m\boldsymbol{v}$ mozgási energia: $T = \frac{1}{2} m v^2$ munka: $L_{1-2} = R(s_2 - s_1)$ grav. erő pot.: $U_g = m g h$	mozgásmennyiség: $m\boldsymbol{v}_S$ - súlypont perdület: $I_S \omega$, $I_0 \omega$ $T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2$ - haladó plusz forgó $T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$ - pill. fkp. körül $L_{1-2} = R(s_2 - s_1) + M(\phi_2 - \phi_1)$ $U_g = m g h_S$
tételek:	MMVT: $m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{R}(t_2 - t_1)$ MEVT: $T_2 - T_1 = L_{1-2}$	MMVT: $m(\boldsymbol{v}_{S2} - \boldsymbol{v}_{S1}) = \boldsymbol{R}(t_2 - t_1)$ - súlypont PVT: $I_S(\omega_2 - \omega_1) = M_S(t_2 - t_1)$ - sp.-i tengely $I_0(\omega_2 - \omega_1) = M_0(t_2 - t_1)$ - forgáskp. MEVT: $T_2 - T_1 = L_{1-2}$

Vektoriális szorzat

A skaláris szorzatnál korábban láttuk, hogy két vektor szorzatakor az egyik lehetséges eredmény egy skalár. Két vektor *vektoriális szorzata* egy olyan harmadik vektor, mely mindkettő vektorra (azaz a két vektor által meghatározott síkra) merőleges, nagysága a két vektor által kifeszített paralelogramma területével azonos, az irányítottsága pedig a jobbkézszabályt követi. Az irányítottságra vonatkozó szabály miatt a két vektor sorrendje is fontos, hiszen $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. Ennek megfelelően az x, y, z tengely irányú egységvektorokra igaz, hogy: $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$ és $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$. Az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorokat az egységvektorok segítségével is felírhatjuk: $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ és $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. A két összeget beírva a vektoriális szorzatba a szorzás tagonként elvégezhető, majd a fenti egyenlőségeket alkalmazva megkapjuk a vektoriális szorzat kiszámításának módját:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_y b_z-a_z b_y\\a_z b_x-a_x b_z\\a_x b_y-a_y b_x\end{bmatrix}.$$

A képlet megtanulásához (vagy annak elkerüléséhez) segítség lehet a vektoriális szorzat ún. determinánsos kifejtésének képlete:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}(a_y b_z-a_z b_y)+\boldsymbol{j}(a_z b_x-a_x b_z)+\boldsymbol{k}(a_x b_y-a_y b_x)$$

A 3x3-as determináns kifejtésekor például az első sorban levő elemet (vektort) pozitív előjellel szorozzuk a tőle jobbra-lefelé mutató lépésekkel elérhető elemekkel és negatív előjellel szorozzuk a tőle balra-lefelé mutató lépésekkel elérhető elemekkel (a mátrix oldalát elérve a másik oldalon folytatva a lépegetést). Az $\boldsymbol{i}$ vektor esetén ezeket az elemeket folytonos zöld, illetve szaggatott piros vonalakkal jelöltük, ezek adják a vektoriális szorzat első elemét.

Mintapélda – 1

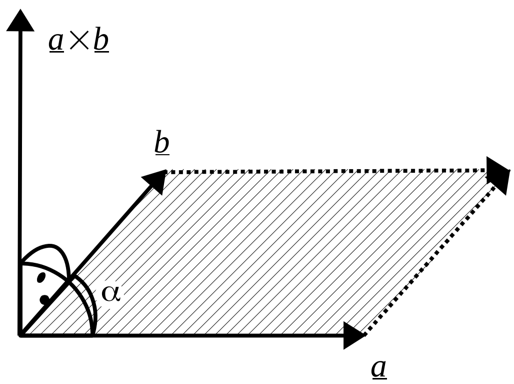
Számítsuk ki az $\underline{a}\times\underline{b}$, $\underline{b}\times\underline{a}$ vektorokat,

ha $\underline{a}=\begin{bmatrix}12{,}5\\-5{,}4\\8{,}73\end{bmatrix}$, $\underline{b}=\begin{bmatrix}3{,}9\\-11{,}3\\6{,}6\end{bmatrix}$!

Megoldás

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{bmatrix}-5{,}4\cdot6{,}6-8{,}73\cdot(-11{,}3)\\8{,}73\cdot3{,}9-12{,}5\cdot6{,}6\\12{,}5\cdot(-11{,}3)-(-5{,}4)\cdot3{,}9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}63{,}01\\-48{,}45\\-120{,}2\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}\times\underline{a}=\begin{bmatrix}6{,}6\cdot(-5{,}4)-(-11{,}3)\cdot8{,}73\\3{,}9\cdot8{,}73-6{,}6\cdot12{,}5\\(-11{,}3)\cdot12{,}5-3{,}9\cdot(-5{,}4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-63{,}01\\48{,}45\\120{,}2\end{bmatrix}$$



Megjegyzés: a két vektor által bezárt szöget a korábban tanultak szerint a skaláris szorzatuk segítségével lehetne kiszámolni. A szög ismeretében a parallelogramma területe számolható, ami a szorzatvektor hosszát adja. Ennek ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

Gyakorlópélda – 1

Számítsuk ki az $\underline{a}\times\underline{b}$, $\underline{b}\times\underline{a}$ vektorokat, ha $\underline{a}=\begin{bmatrix}21{,}07\\-1{,}87\\0{,}0\end{bmatrix}$, $\underline{b}=\begin{bmatrix}42{,}2\\13{,}8\\0{,}0\end{bmatrix}$!

Megoldás

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Mivel a *z* komponense mindkét vektornak zérus, a két vektorból alkotott parallelogramma az *xy*-síkban van. A két vektor által bezárt szög $\alpha=\arccos\left(\left|\underline{a}\cdot\underline{b}\right|/\left(\left|\underline{a}\right|\left|\underline{b}\right|\right)\right)=23{,}18°$, így a parallelogramma területe $\left|\underline{a}\right|\left|\underline{b}\right|\sin\alpha=369{,}7$, ami épp a vektoriális szorzat vektorának hossza.

$$\underline{b}\times\underline{a}=\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a vektorműveleteket mindig két, vagy több vektorra definiáltuk, majd számítási módot adtunk meg, amivel a vektorok adott koordináta-rendszerben értelmezett elemeiből számítható a keresett mennyiség. Azaz másik koordináta-rendszer felvétele esetén a kapott eredmény számszerűen esetleg más lehet, de fizikailag ugyanazt fejezi ki.

Térbeli erők számítási feladatai

Eddigi feladataink többsége síkbeli, vagy síkbelivé egyszerűsített feladat volt. Így a félév végéhez közeledve még megjegyezzük azonban, hogy minden síkbeli feladat megoldható lenne térbeli eszközökkel is, de nem minden térbeli probléma egyszerűsíthető síkbeli feladattá. Az általános tárgyaláshoz hasonló úton jutunk el: áttekintjük az erőkkel végezhető alapvető műveleteket, a szerkezetek megtámasztási módjait, néhány gyakori szerkezettípus számítási módját, végül a rúdszerkezetek térbeli igénybevételeinek számítását.

Erők, forgatónyomatékok térben

Amennyiben egy erőt térben adunk meg, a síkbeli feladatnál használt kettő helyett három komponens előjeles nagyságát kell megadnunk. (Ha nagysággal és iránnyal akarjuk megadni az erőt, akkor az irányt a koordináta-rendszer tengelyeivel bezárt három hajlásszöggel írhatjuk elő, a három szög koszinuszainak négyzetösszege azonban 1-et kell adjon, így ekkor is csak három független skalár adatunk van.)

A nyomaték térbeli megadásához arra emlékeztetünk, hogy a síkbeli feladatoknál használatos nyomaték mindig egy, a síkra merőleges tengely körüli forgató hatást fejezett ki. Térben három független tengely körüli forgató hatást kell megadni, ezért ilyenkor a nyomatékot is vektorként kell kezelnünk (ahogy ezt az 5. óra 2. példáiban tettük). A vektor szemből nézve (azaz ha a nyila felénk mutat) pozitív irányba (azaz az óramutató járásával ellentétesen) forgat.

Erőrendszer eredője térben

Ahogy azt már a síkbeli feladatoknál is láttuk, egy általános erőrendszert helyettesítő egyetlen hatás meghatározása két lépésből áll. Először *pontra redukálás* segítségével helyettesítjük az erőrendszert egy kiválasztott ponton átmenő erővel és egy ehhez az erőhöz tartozó nyomatékkal, majd e két hatás (a társerő és a társnyomaték) ismeretében *döntünk* az eredő típusáról, és számíthatjuk szükség esetén a további adatait.

A *pontra redukálás* során a társerőt egyszerű vetületi egyenletek alapján tudjuk számolni, az eredmény független attól, hogy melyik pontra redukálunk. A társnyomaték komponenseit a kiválasztott ponton átmenő tengelyekre felírt nyomatéki egyenletekből számoljuk. Ezekben az egyenletekben a forgatónyomatékok vektorainak az adott tengely irányába eső vetületeit kell előjelhelyesen szerepeltetnünk, Az erők esetében a tengelyre merőleges síkba eső vetületek nyomatékát számíthatjuk síkbelire redukált feladatként.

Az eredő hatás típusának eldöntéséhez az alábbi szabályokat kell megjegyeznünk. Ha a társerő zérus (azaz minden komponense nulla), akkor két eset lehetséges: zérus társnyomaték esetén a kiindulási erőrendszer *egyensúly*ban van, ha a társnyomaték vektora nem zérus, akkor az a (szabad) vektor az *eredő nyomaték*. Ha a társerő nem zérus (a három komponenséből akár csak egy is különbözik nullától) akkor az eredő jellege attól függ, hogy a társerő és a társnyomaték összevonható-e egyetlen erővé úgy, ahogyan a síkbeli feladatoknál tettük. Amennyiben a két vektor egymásra merőleges, akkor ez az összevonás elvégezhető és az eredő egyetlen *erő*. Ha a társnyomatéknak van a társerővel párhuzamos komponense, akkor ugyan a társerő összevonható a társnyomaték rá merőleges komponensével, a párhuzamos komponens azonban megmarad, azaz az eredő hatás egy erőből és egy azzal párhuzamos nyomatékból áll. Ezt az eredőt *erőcsavar*nak nevezzük.

A döntés fenti lépései közben lényeges, hogy a két vektor merőlegességéről tudjunk mondani valamit. Erre leghatékonyabb eszköznek a skaláris szorzatuk mutatkozik, hiszen annak nemzérus értéke egyszerre jelenti azt, hogy egyik vektor sem nullvektor és nem merőlegesek egymásra. Ezt felhasználva készítettük az alábbi táblázatot, mely a döntésben segíthet.

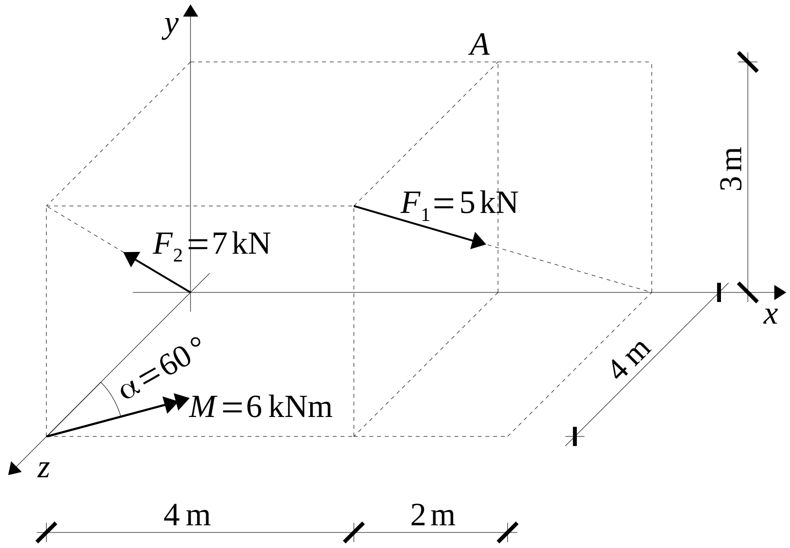
Eredő típusa	A társerő, társnyomaték viszonya	Megjegyzés, magyarázat
egyensúly	$\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{M}=\mathbf{0}$	Mindkettőnek nullvektornak kell lennie
nyomatékvektor	$\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{M}\neq\mathbf{0}$	
erő	$\boldsymbol{F}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{M}=0$	A skaláris szorzat ***M*** nullvektor esetén is zérus
erőcsavar	$\boldsymbol{F}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{M}\neq 0$	A skaláris szorzat zérus lenne, ha akár ***F***, akár ***M*** nullvektor lenne

Ha az eredő erő, vagy erőcsavar, akkor a pontra redukálás után még egy lépés hátravan: az eredő hatásvonalának egy pontját kell meghatározni a redukálás helyéhez képest. Ehhez a társnyomaték vektorát bontsuk fel a társerővel párhuzamos $(\boldsymbol{M}_{\parallel})$ és arra merőleges $(\boldsymbol{M}_{\perp})$ komponensre. Az eltolás mértéke $k=|\boldsymbol{M}_{\perp}|/|\boldsymbol{F}|$, irányának egyszerre kell merőlegesnek lennie a társerőre és a társnyomaték rá merőleges komponensére.

Ennek a merőleges iránynak az egységvektorát a két vektor vektoriális szorzata segítségével lehet előállítani: $\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{M}_{\perp}}{|\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{M}_{\perp}|}$, a két vektor merőlegessége miatt a nevezőben a két vektor hosszának szorzata szerepel, így az eltolás vektora: $\Delta r = \frac{F \times M_\perp}{|F||M_\perp|} \cdot \frac{|M_\perp|}{|F|} = \frac{F \times M_\perp}{|F||F|}$ lesz. Ráadásul $F \times M = F \times (M_\parallel + M_\perp) = F \times M_\parallel + F \times M_\perp = 0 + F \times M_\perp = F \times M_\perp$, egy vektor hossza pedig önmagával vett skaláris szorzatának négyzetgyöke, így az eredő helye a redukáláshoz képest a $\Delta r = \frac{F \times M}{F \cdot F}$ képlettel számolható.

Mintapélda – 2

Redukáljuk az ábrán látható erőket és forgatónyomatékot az *A*-val jelölt pontba és döntsük el, mi az erőrendszer eredője!



Megoldás

A pontra redukálást egyenértékűségi kijelentésként $(F_A, M_A) \doteq (F_1, F_2, M)$ alakban írhatjuk fel. Az erő komponenseinek felírásához vetületi egyenleteket írunk és oldunk meg. A ferde erők vetületeit a hatásvonaluk mentén kiválasztott szakasz hosszának és vetületei hosszának a segítségével számítjuk, ehhez a geometria alapján kiválasztható szakaszok hosszai rendre:

$l_1 = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = 5{,}385\,\text{m}$, $l_2 = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5\,\text{m}$.

A vetületi egyenletek:

$$\sum F_{ix} : F_{Ax} = +5 \cdot \frac{2}{5{,}385} \qquad \rightarrow F_{Ax} = +1{,}857\,\text{kN}$$

$$\sum F_{iy} : F_{Ay} = -5 \cdot \frac{3}{5{,}385} + 7 \cdot \frac{3}{5} \qquad \rightarrow F_{Ay} = +1{,}414\,\text{kN}$$

$$\sum F_{iz} : F_{Az} = -5 \cdot \frac{4}{5{,}385} + 7 \cdot \frac{4}{5} \qquad \rightarrow F_{Az} = +1{,}886\,\text{kN}$$

A társnyomaték komponenseit az *A* ponton átmenő, a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyekre felírt nyomatéki egyenletekből számíthatjuk (az erőket a követhetőség érdekében most az ábrán jelölt támadáspontjukban bontjuk fel):

$$\sum M_{ix}^A : M_{Ax} = +5 \cdot \frac{3}{5{,}385} \cdot 4 - 7 \cdot \frac{4}{5} \cdot 3 + 6 \cdot \sin 60° \qquad \rightarrow M_{Ax} = -0{,}4618\,\text{kNm}$$

$$\sum M_{iy}^A : M_{Ay} = +5 \cdot \frac{2}{5{,}385} \cdot 4 + 7 \cdot \frac{4}{5} \cdot 4 + 0 \qquad \rightarrow M_{Ay} = 29{,}83\,\text{kNm}$$

$$\sum M_{iz}^A : M_{Az} = +0 - 7 \cdot \frac{3}{5} \cdot 4 - 6 \cdot \cos 60° \qquad \rightarrow M_{Az} = -19{,}8\,\text{kNm}$$

A pontra redukálás eredménye tehát: $\boldsymbol{F}_A=\begin{bmatrix}1{,}857\\1{,}414\\1{,}886\end{bmatrix}$ kN , $\boldsymbol{M}_A=\begin{bmatrix}-0{,}4618\\29{,}83\\-19{,}8\end{bmatrix}$ kNm

Mivel a társerő nem zérusvektor, számítsuk ki a két vektor skaláris szorzatát:

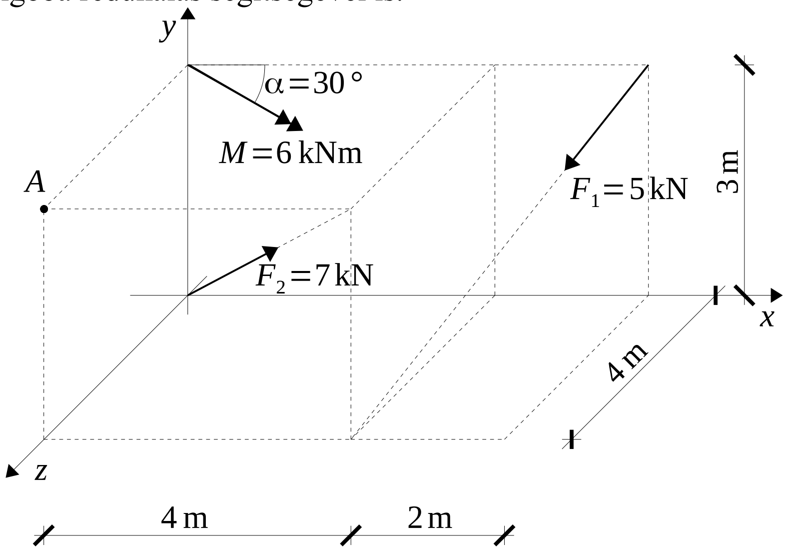
$$\boldsymbol{F}_A\cdot\boldsymbol{M}_A=1{,}857\cdot(-0{,}4618)+1{,}414\cdot29{,}83+1{,}886\cdot(-19{,}8)=3{,}979\,\mathrm{kN}\cdot\mathrm{kNm}$$

Mivel ez nem zérus, ezért az eredő erőcsavar.

Gyakorlópélda – 2

Redukáljuk az ábrán látható erőket és forgatónyomatékot az A-val jelölt pontba és döntsük el, mi az erőrendszer eredője!

Végezzük el ugyanezt az origóba redukálás segítségével is.



Megoldás 1 - Redukálás az A pontba

A ferde erők vetületeinek számításához szükség lesz a hatásvonal egy-egy szakaszának hosszára:

$l_1=$

$l_2=$

Az egyenértékűségi kijelentés: $\doteq$

Ami alapján a vetületi egyenletekből számolhatók a társerő komponensei:

$\sum F_{i..}:$

$\sum F_{i..}:$

$\sum F_{i..}:$

A társnyomaték számításához három nyomatéki egyenletet írunk fel és oldunk meg:

$\sum M_{i..}:$

$\sum M_{i..}:$

$\sum M_{i..}:$

A két kiszámított vektor:

$$\boldsymbol{F}_A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Az eredő jellegének eldöntéséhez a két vektor skaláris szorzata:

$\boldsymbol{F}_A \cdot \boldsymbol{M}_A =$

Tehát az eredő:

Megoldás 2 - Redukálás az origóba

A társerő komponensei most is a vetületi egyenletekből számolhatók :

$\sum F_{i..}:$

$\sum F_{i..}:$

$\sum F_{i..}:$

A társnyomaték számításához is három nyomatéki egyenletet írunk fel és oldunk meg:

$\sum M_{i..}:$

$\sum M_{i..}:$

$\sum M_{i..}:$

A két kiszámított vektor:

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_0 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

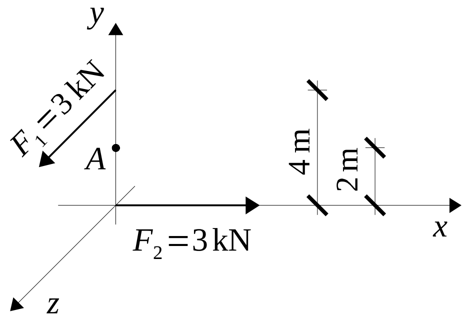
Az eredő jellegének eldöntéséhez a két vektor skaláris szorzata:

$\boldsymbol{F}_0 \cdot \boldsymbol{M}_0 =$

A skaláris szorzatnak azonosnak kell lennie az előző megoldással, így a következtetésnek is azonosnak kell lennie: az erőrendszer eredője:

Mintapélda – 3

Határozzuk meg az ábrán látható két erő eredőjének típusát!



Megoldás - 1

Ha a pontra redukálást az origóra végezzük, akkor $(F_{0,}M_0) \doteq (F_1, F_2)$ alapján a vetületi egyenletekből: $\sum F_{ix}: F_{0x}=+3\,\mathrm{kN}$, $\sum F_{iy}: F_{0y}=0\,\mathrm{kN}$, $\sum F_{iz}: F_{0z}=+3\,\mathrm{kN}$.
A nyomatéki egyenleteket a koordinátatengelyekre írjuk:

$$\sum M_{ix}: M_{0x}=0+3\cdot 4 \quad \rightarrow M_{0x}=+12\,\mathrm{kNm}$$
$$\sum M_{iy}: M_{0y}=0$$
$$\sum M_{iz}: M_{0z}=0$$

Azaz a két vektor: $\boldsymbol{F}_0=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}\mathrm{kN}, \boldsymbol{M}_0=\begin{bmatrix}12\\0\\0\end{bmatrix}\mathrm{kNm}$,

skaláris szorzatuk pedig: $\boldsymbol{F}_0\cdot\boldsymbol{M}_0=3\cdot 12+0\cdot 0+3\cdot 0=36\neq 0$, azaz az eredő erőcsavar.
Megjegyzés: Ha a pontra redukálást a két kitérő helyzetű hatásvonalat összekötő normáltranszverzális egyik végpontjára végezzük el, akkor a társnyomaték vektora párhuzamos lesz a két erő vektoraival párhuzamos vektorok által kifeszíthető síkokkal, de merőleges arra az erőre, amelyiknek a hatásvonala nem tartalmazza a redukálás pontját. A két erővektor összege nem lesz párhuzamos egyik erővel sem, így nem lesz merőleges a nyomatékvektorra, azaz a skaláris szorzat értéke nem lehet zérus. Általános szabályként tehát levonhatjuk azt a következtetést: Ha két erő hatásvonala kitérő helyzetű, akkor a két erő eredője erőcsavar.

Megoldás - 2

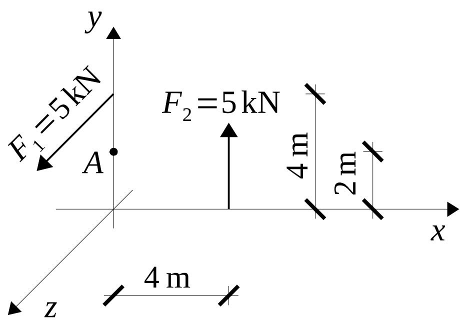
Ha a pontra redukálást az *A*-val jelölt pontra végezzük, akkor az $(F_A, M_A) \doteq (F_1, F_2)$ alapján felírt vetületi egyenletek ugyanolyan alakúak lesznek.
A nyomatéki egyenleteket most az *A* ponton átmenő tengelyekre írjuk:

$$\sum M_{ix}^{A}: M_{Ax}=0+3\cdot 2 \quad \rightarrow M_{Ax}=+6\,\mathrm{kNm}$$
$$\sum M_{iy}^{A}: M_{Ay}=0$$
$$\sum M_{iz}^{A}: M_{Az}=3\cdot 2+0 \quad \rightarrow M_{Az}=+6\,\mathrm{kNm}$$

Azaz a két vektor: $\boldsymbol{F}_A=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}\mathrm{kN}, \boldsymbol{M}_A=\begin{bmatrix}6\\0\\6\end{bmatrix}\mathrm{kNm}$.

Itt most elég jól látszik, hogy a két vektor párhuzamos, azaz az eredő erőcsavar, az erő hatásvonala pedig az A ponton megy át. Amennyiben mégis kiszámolnánk a skaláris szorzatukat: $(\boldsymbol{F}_A\cdot\boldsymbol{M}_A=3\cdot 6+0\cdot 0+3\cdot 6=36\neq 0)$, akkor nem csak azt vehetjük észre, hogy az nem zérus, hanem azt is, hogy az $\boldsymbol{F}_0\cdot\boldsymbol{M}_0$ szorzattal megegyezik. Egy adott erőrendszer pontra redukálása esetén ugyanis a társerő és a társerőpár vektorának skaláris szorzata állandó.

Gyakorlópélda – 3
Határozzuk meg az ábrán látható két erő eredőjének típusát!



Megoldás

Válasszuk ki a pontra redukálás helyét és írjuk fel az ennek megfelelő egyenértékűségi kijelentést:

A vetületi egyenletek segítségével számoljuk ki a társerő komponenseit:

$\sum F_{ix}:$

$\sum F_{iy}:$

$\sum F_{iz}:$

Számítsuk ki a társnyomaték komponenseit:

$\sum M_{ix}:$

$\sum M_{iy}:$

$\sum M_{iz}:$

Írjuk fel a társerő és a társnyomaték vektorát, majd döntsünk az eredőről:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Az eredő: