9. előadás:

A helymeghatározás matematikai megoldhatósága. Térbeli koordináták átszámítása elkülönült vízszintes és magassági rendszerekbe.

Az elmúlt előadásokon áttekintettük a helymeghatározás különféle matematikai modelljeit, ideértve a műholdak pályaszámítását, a méréseket terhelő szabályos hibák kezelését, a helymeghatározási módszereket és a hozzájuk kapcsolódó közvetítőegyenleteket, a különféle lináris kombinációkat, illetve a ciklustöbbértelműség feloldásának kérdéseit.

Mivel a helymeghatározás megoldása során számos fölös méréssel is rendelkezünk, ezért a következőkben áttekintjük a mérések kiegyenlítésének kérdéseit. Az így előállított WGS-84 rendszerbeli koordinátákat a legtöbb geodéziai feladatnál át kell transzformálnunk az országos (EOV) vagy valamilyen helyi koordinátarendszerben, hiszen a mérnöki gyakorlatban a geocentrikus térbeli derékszögű koordinátarendszerek nagy nehézségeket okoznának.

A matematikai megoldás során a legkisebb négyzetek módszerén alapuló kiegyenlítést használjuk. A kiegyenlítés végrehajtásával kapcsolatban két kérdésre kell választ adnunk:

- Hogyan vegyük fel a fiktív mérési eredményeket leíró súlymátrixot?
- Hogyan kezejük a hálózatban végzett méréseket (több műszer együttesen végzett észleléseinek feldolgozását)?

9.1. A fiktív mérési eredmények súlymátrixának felvétele

A súlymátrixok felvétele szempontjából meg kell ismernünk a fiktív mérési eredmények korrelációs jellemzőit. A korrelációt tekintve kétféle korrelációt különböztethetünk meg:

- fizikai (pl. ugyanazon műholdra, de más pontokon végzett észlelések)
- matematika (a fázistávolságok különbségképzése során kialakuló korrelációs kapcsolatok leírása)

A következőkben mi csak az utóbbi, matematikai korrelációkkal foglalkozunk, mivel feltesszük, hogy a kód-, és fázisméréseink már csak véletlenjellegű hibákat tartalmaznak, amelyek várható értéke zérus, varianciája pedig σ^2.

Ekkor a fázistávolságok variancia-kovariancia mátrixa az alábbiak szerint írható fel:

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Phi\Phi}} = \sigma^2 \boldsymbol{I} \tag{9.1}$$

9.1.1. Az egyszeres különbségek korrelációja

Legyen két mérésünk az A és B pontokon a j műholdra a t időpontban. Ekkor az egyszeres különbség:

$$\Phi^j_{AB}(t) = \Phi^j_B(t) - \Phi^j_A(t) \tag{9.2}$$

Ugyanezen pontban és időpontban a k műholdra felírt egyszeres különbség:

$$\Phi^k_{AB}(t) = \Phi^k_B(t) - \Phi^k_A(t) \tag{9.3}$$

A (9.2) és (9.3) egyszeres különbségeket felírhatjuk mátrixos alakban is:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C\Phi} \tag{9.4}$$

ahol:

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\Phi_{AB}^{j}(t)\\ \Phi_{AB}^{k}(t)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\Phi_{A}^{j}(t)\\ \Phi_{B}^{j}(t)\\ \Phi_{A}^{k}(t)\\ \Phi_{B}^{k}(t)\end{bmatrix} \tag{9.5}$$

Ezt követően írjuk fel az egyszeres különbségekre a hibaterjedés törvényét:

$$\boldsymbol{Q}_{SS}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\Phi\Phi}}\boldsymbol{C}^{T} \tag{9.6}$$

ahol $\mathbf{Q}_{SS}$ az egyszeres különbségek variancia-kovariancia mátrixa.

A (9.1) egyenletet behelyettesítve (9.6) egyenletbe:

$$\boldsymbol{Q}_{SS}=\boldsymbol{C}\sigma^{2}\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}^{T}=\sigma^{2}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T} \tag{9.7}$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat, megkaphatjuk az egyszeres különbségek variancia-kovariancia mátrixát:

$$\boldsymbol{Q}_{SS}=\sigma^{2}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{T}=2\sigma^{2}\boldsymbol{I} \tag{9.8}$$

A (9.8) képletből láthatjuk, hogy az egyszeres különbségek statisztikailag függetlenek egymástól.

9.1.2. A kettős különbségek korrelációja

Legyen 3 műholdunk (j,k,l), amelyek közül a j lesz a referencia-műhold.

Végezzünk észleléseket A és B pontokból a t időpontban mindhárom műholdra, majd írjuk fel a kettős differenciákat:

$$\Phi_{AB}^{jk}(t)=\Phi_{AB}^{k}(t)-\Phi_{AB}^{j}(t) \tag{9.9}$$

$$\Phi_{AB}^{jl}(t)=\Phi_{AB}^{l}(t)-\Phi_{AB}^{j}(t) \tag{9.10}$$

Ugyanezek a kettős különbségek mátrixos alakban:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{S}, \tag{9.11}$$

ahol

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\Phi_{AB}^{jk}(t)\\ \Phi_{AB}^{jl}(t)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}\Phi_{AB}^{j}(t)\\ \Phi_{AB}^{k}(t)\\ \Phi_{AB}^{l}(t)\end{bmatrix}. \tag{9.12}$$

A kettős különbségek variancia-kovariancia mátrixa ismét levezethető a hibaterjedés törvényének alkalmazásával:

$$\boldsymbol{Q}_{DD}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}_{SS}\boldsymbol{C}^{T} \tag{9.13}$$

Behelyettesítva az egyszeres különbségek variancia-kovariancia mátrixát, majd elvégezve a mátrixszorzásokat a kettős különbségek variancia-kovariancia mátrixa:

$$\boldsymbol{Q}_{DD}=2\sigma^{2}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \tag{9.14}$$

A (9.14) képletből láthatjuk, hogy a kettős különbségek már korreláltak!

9.1.3. A súlymátrix előállítása kettős különbségekre

A súlymátrix a variancia-kovariancia mátrix inverzeként az alábbi alakban írható fel két kettős különbségre ugyanazon epochára:

$$\boldsymbol{P}_{DD} = \frac{1}{2\sigma^2}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

n_D műholdra pedig ugyanazon epochában:

$$\boldsymbol{P}_{DD}(t) = \frac{1}{2\sigma^2}\frac{1}{n_D+1}\begin{bmatrix} n_D & -1 & -1 & \cdots \\ -1 & n_D & -1 & \cdots \\ -1 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \cdots & & n_D \end{bmatrix} \tag{9.16}$$

A több epochában végzett mérésekre felállított teljes súlymátrix főátlójában pedig a az egyes epochák súlymátrixai találhatóak meg:

$$\boldsymbol{P}_{DD} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t_1}) & & & \\ & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t_n}) \end{bmatrix} \tag{9.17}$$

így a súlymátrix egy blokk-diagonál mátrix lesz, ahol az egyes blokkok mérete eltérő lehet az adott epochában előállított kettős különbségek számától függően.

9.2. A kódméréssel történő abszolút helymeghatározás kiegyenlítése

Írjuk fel a kódmérések közvetítőegyenletét k ponton j műholdra végzett kódmérés esetére:

$$\begin{aligned} & P_{k,L_1}^j - c\Delta t^j\left(t_i - \tau_k^j\right)_0 - \rho_k^j(t_0,t_i) - T_k(t_i) - I_k^j(t_i) = \\ & = \frac{X^j(t_0) - X_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0,t_i)}\cdot\delta x - \frac{Y^j(t_0) - Y_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0,t_i)}\cdot\delta y - \frac{Z^j(t_0) - Z_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0,t_i)}\cdot\delta z - c\delta t_k(t_i) + v_{P_{k,L_1}^j} \end{aligned} \tag{9.18}$$

(9.18) alapján a javítási egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} v_{P_{k,L_1}^j} = & \frac{X^j(t_0) - X_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0,t_i)}\cdot\delta x - \frac{Y^j(t_0) - Y_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0,t_i)}\cdot\delta y - \frac{Z^j(t_0) - Z_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0,t_i)}\cdot\delta z - c\delta t_k(t_i) - \\ & - \left[P_{k,L_1}^j - c\Delta t^j\left(t_i - \tau_k^j\right)_0 - \rho_k^j(t_0,t_i) - T_k(t_i) - I_k^j(t_i)\right] \end{aligned} \tag{9.19}$$

ahol a szögletes zárójelben található tagok a tisztatag vektort alkotják. A javítási egyenlet egyetlen műholdra röviden tehát:

$$v_{P_{k,L_1}^j} = a_{X_k}^j\cdot\delta x - a_{Y_k}^j\cdot\delta y - a_{Z_k}^j\cdot\delta z - c\delta t_k(t_i) - l(t_i) \tag{9.20}$$

Több műhold egyidejű észlelése esetén a javítási egyenleteket mátrixos formában adhatjuk meg:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l} \tag{9.21}$$

ahol az **A** alakmátrix elemei:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -\dfrac{X^{SV1}(t)-X_{r0}}{\rho_{r0}^{SV1}(t)} & -\dfrac{Y^{SV1}(t)-Y_{r0}}{\rho_{r0}^{SV1}(t)} & -\dfrac{Z^{SV1}(t)-Z_{r0}}{\rho_{r0}^{SV1}(t)} & c \\ -\dfrac{X^{SV2}(t)-X_{r0}}{\rho_{r0}^{SV2}(t)} & -\dfrac{Y^{SV2}(t)-Y_{r0}}{\rho_{r0}^{SV2}(t)} & -\dfrac{Z^{SV2}(t)-Z_{r0}}{\rho_{r0}^{SV2}(t)} & c \\ -\dfrac{X^{SV3}(t)-X_{r0}}{\rho_{r0}^{SV3}(t)} & -\dfrac{Y^{SV3}(t)-Y_{r0}}{\rho_{r0}^{SV3}(t)} & -\dfrac{Z^{SV3}(t)-Z_{r0}}{\rho_{r0}^{SV3}(t)} & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{X^{SVn}(t)-X_{r0}}{\rho_{r0}^{SVn}(t)} & -\dfrac{Y^{SVn}(t)-Y_{r0}}{\rho_{r0}^{SVn}(t)} & -\dfrac{Z^{SVn}(t)-Z_{r0}}{\rho_{r0}^{SVn}(t)} & c \end{bmatrix} \tag{9.22}$$

míg a paraméterek:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta t_k(t_i) \end{bmatrix} \tag{9.23}$$

A (9.21) egyenlet már – a súlymátrix felvételét követően – megoldható a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítéssel.

9.3. A fázisméréssel végrehajtott abszolút helymeghatározás kiegyenlítése

Írjuk fel az egyes műholdakra a fázistávolságok közvetítőegyenletét:

$$\begin{aligned}\Phi_{k,L_1}^j(t_i) &= \rho_k^j\left(t_i-\tau_k^j,t_i\right)-c\delta t_k(t_i)+c\delta t^j\left(t_i-\tau_k^j\right)+\lambda_{L_1}N_{k,L_1}^j+ \\ &\quad +T_k(t_i)-I_k^j(t_i)+v_{\Phi_{k,L_1}^j}(t_i)\end{aligned} \tag{9.24}$$

A javítási egyenlet ekkor az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} v_{\Phi_{k,L_1}^j}(t_i) &= -\frac{X^j\left(t_i-\tau_k^j\right)-X_{k0}}{\rho_{k0}^j\left(t_i-\tau_k^j,t_i\right)}\delta x-\frac{Y^j\left(t_i-\tau_k^j\right)-Y_{k0}}{\rho_{k0}^j\left(t_i-\tau_k^j,t_i\right)}\delta y- \\ &\quad -\frac{Z^j\left(t_i-\tau_k^j\right)-Z_{k0}}{\rho_{k0}^j\left(t_i-\tau_k^j,t_i\right)}\delta z-c\delta t_k(t_i)+\lambda_{L_1}N_{k,L_1}^j+ \\ &\quad -\left[\Phi_{k,L_1}^j(t_i)-\rho_{k0}^j\left(t_i-\tau_k^j,t_i\right)-c\delta t^j\left(t_i-\tau_k^j\right)-T_k(t_i)+I_k^j(t_i)\right] \end{aligned} \tag{9.25}$$

ahol a szögletes zárójelben szereplő változók a tisztatag vektor elemeit adják.

Több műhold egyidejű észlelésére a javítási egyenletek mátrixos alakba foglalhatóak:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l} \tag{9.26}$$

ahol **A** az alakmátrix:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{X_k}^{SV1} & a_{Y_k}^{SV1} & a_{Z_k}^{SV1} & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & c \\ a_{X_k}^{SV2} & a_{Y_k}^{SV2} & a_{Z_k}^{SV2} & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & c \\ a_{X_k}^{SV3} & a_{Y_k}^{SV3} & a_{Z_k}^{SV3} & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & c \\ a_{X_k}^{SVn} & a_{Y_k}^{SVn} & a_{Z_k}^{SVn} & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & c \end{bmatrix} \tag{9.27}$$

míg x a meghatározandó paraméterek változásának vektora:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_N \\ \delta_t \end{bmatrix} \tag{9.28}$$

Vegyük észre, hogy abszolút helymeghatározás esetén – akár kódméréssel, akár fázisméréssel van dolgunk – a súlymátrix diagonálmátrix lesz. A súlyok felvételénél alkalmazhatunk egység súlyokat is, de akár valamilyen magasságfüggő súlyozással is elvégezhetjük a kiegyenlítést.

9.4. Kettős különbségekkel végrehajtott relatív helymeghatározás kiegyenlítése

Írjuk fel a kettős különbségek közvetítőegyenletének rövidített alakját:

$$b_{AB}^{j,l}(t_i) = a_{X_A}\delta x_A + a_{Y_A}\delta y_A + a_{Z_A}\delta z_A + \lambda_{L_1} N_{AB}^{jl} + v_{\Phi_{AB,L_1}^{j,l}}(t_i)\,. \tag{9.29}$$

A javítási egyenlet ezek alapján egy epochában egyetlen műholdpárra és két vevőre:

$$v_{\Phi_{AB,L_1}^{j,l}}(t_i) = a_{X_A}\delta x_A + a_{Y_A}\delta y_A + a_{Z_A}\delta z_A + \lambda_{L_1} N_{AB}^{jl} - b_{AB}^{j,l}(t_i) \tag{9.30}$$

Példaként vegyünk 4 közös műholdat (amelyből egyet kiválasztunk referencia-műholdként (azaz a kettős különbségeket ehhez képest határozzuk meg). Ekkor a javítási egyenletek mátrixos alakban:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l} \tag{9.31}$$

ahol az alakmátrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
a_{X_B}^{jk}(t_1) & a_{Y_B}^{jk}(t_1) & a_{Z_B}^{jk}(t_1) & \lambda & 0 & 0 \\
a_{X_B}^{jl}(t_1) & a_{Y_B}^{jl}(t_1) & a_{Z_B}^{jl}(t_1) & 0 & \lambda & 0 \\
a_{X_B}^{jm}(t_1) & a_{Y_B}^{jm}(t_1) & a_{Z_B}^{jm}(t_1) & 0 & 0 & \lambda \\
a_{X_B}^{jk}(t_2) & a_{Y_B}^{jk}(t_2) & a_{Z_B}^{jk}(t_2) & \lambda & 0 & 0 \\
a_{X_B}^{jl}(t_2) & a_{Y_B}^{jl}(t_2) & a_{Z_B}^{jl}(t_2) & 0 & \lambda & 0 \\
a_{X_B}^{jm}(t_2) & a_{Y_B}^{jm}(t_2) & a_{Z_B}^{jm}(t_2) & 0 & 0 & \lambda \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{X_B}^{jk}(t_n) & a_{Y_B}^{jk}(t_n) & a_{Z_B}^{jk}(t_n) & \lambda & 0 & 0 \\
a_{X_B}^{jl}(t_n) & a_{Y_B}^{jl}(t_n) & a_{Z_B}^{jl}(t_n) & 0 & \lambda & 0 \\
a_{X_B}^{jm}(t_n) & a_{Y_B}^{jm}(t_n) & a_{Z_B}^{jm}(t_n) & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix} \tag{9.32}$$

a paraméterek megváltozásának vektora pedig:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ N_{AB}^{jk} \\ N_{AB}^{jl} \\ N_{AB}^{jm} \end{bmatrix} \tag{9.33}$$

Ismét megfigyelhetjük, hogy egyetlen epochában a probléma nem megoldható, hiszen 3 koordináta paraméter mellett három ciklustöbbértelműség paramétert is meg kell oldanunk. Több epochában végzett mérés együttes kiegyenlítésével azonban a feladat a legkisebb négyzetek módszerével megoldható.

9.5. Hálózatban végzett észlelések feldolgozása

A korábbi előadásokon már megmutattuk, hogy kettős különbségeken végzett relatív helymeghatározás esetén hogyan írhatóak fel a javítási egyenletek. A kettős különbségek fiktív mérési eredményeinek kiegyenlítése során alapvetően kétféle stratégia terjedt el a gyakorlatban:

- a bázisvonalankénti feldolgozás, illetve
- a valódi hálózatként történő egységes kiegyenlítés.

A kiegyenlítéskor figyelembe kell vennünk azt a tényt, hogy a kettős különbségek már nem függetlenek egymástól, ezért a súlymátrix már nem lehet egyszerű diagonálmátrix. A megfelelő súlymátrix felvétele után az ismeretlen paraméterek megváltozása meghatározható a legkisebb négyzetek szerinti kiegyenlítéssel.

9.5.1. Bázisvonalanként történő feldolgozás

A bázisvonalanként történő feldolgozás esetén minden bázisvonalat (vektort) egyenként, egymástól függetlenül feldolgozunk, így meghatározzuk a vektort alkotó pontok közötti koordinátakülönbségeket.

N pontból álló hálózat esetén ez összesen $N(N\text{-}1)/2$ vektor feldolgozását jelenti, amelyekből csak $(N\text{-}1)$ vektor független egymástól.

A bázisvonalanként történő feldolgozás előnyei:

- A fölös vektorok felhasználhatóak a poligonzárások ellenőrzéséhez;
- Más-más mérési periódusban meghatározott ugyanazon két pont közötti vektor külön megoldásként fog szerepelni az eredményekben (ellenőrzési lehetőség pl. pontraállási hibára v. antennamagasságmérésre);
- A különböző mérési periódusokban meghatározott vektorok együtt kiegyenlíthetőek;

A bázisvonalanként történő feldolgozás hátrányai:

- az egyidőben mért vektorok közötti korrelációt elhanyagolja ez a megoldás (minden bázisvonalat egymást követően, külön-külön dolgoz fel).
- valamivel pontatlanabb eredményre vezet, mint az együttes feldolgozás.

Megjegyezzük, hogy a mérnöki célú feldolgozószoftverek túlnyomó többsége a bázisvonalankénti feldolgozást hajtja végre. Az egyes vektorok feldolgozása után lehetőség van még a vektorok hálózatként történő kiegyenlítésére is.

9.5.2. Többpontos együttes kiegyenlítés

Ebben az esetben az egész mért hálózatot egyszerre egyenlítjük ki, így figyelembe vehető az egyes vektorok közötti korreláció is. Ennek bemutatására vegyünk egy *ABC* háromszögben (ahol A pont a referenciapont) *j,k,l,m* műholdakra egyetlen epochában végzett észleléseket, majd alakítsuk ki ezekből a kettős különbségeket.

Általános esetben összesen $(n_r\text{-}1)(n^s\text{-}1)$ különböző kettős differencia írható fel az észlelésekből. Esetünkben $n_r=3$, $n_S=4$, így 6 különböző kettős differencia állítható fel.

A 6 különböző kettős különbség:

$$\begin{aligned}
\Phi_{AB}^{jk}(t) &= \Phi_B^k(t) - \Phi_B^j(t) - \Phi_A^k(t) + \Phi_A^j(t),\\
\Phi_{AB}^{jl}(t) &= \Phi_B^l(t) - \Phi_B^j(t) - \Phi_A^l(t) + \Phi_A^j(t),\\
\Phi_{AB}^{jm}(t) &= \Phi_B^m(t) - \Phi_B^j(t) - \Phi_A^m(t) + \Phi_A^j(t),\\
\Phi_{AC}^{jk}(t) &= \Phi_C^k(t) - \Phi_C^j(t) - \Phi_A^k(t) + \Phi_A^j(t),\\
\Phi_{AC}^{jl}(t) &= \Phi_C^l(t) - \Phi_C^j(t) - \Phi_A^l(t) + \Phi_A^j(t),\\
\Phi_{AC}^{jm}(t) &= \Phi_C^m(t) - \Phi_C^j(t) - \Phi_A^m(t) + \Phi_A^j(t).
\end{aligned} \tag{9.34}$$

Mátrixos alakban pedig:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C\Phi}, \tag{9.35}$$

ahol

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \Phi_{AB}^{jk}(t) \\ \Phi_{AB}^{jl}(t) \\ \Phi_{AB}^{jm}(t) \\ \Phi_{AC}^{jk}(t) \\ \Phi_{AC}^{jk}(t) \\ \Phi_{AC}^{jk}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_A^j(t) \\ \Phi_A^k(t) \\ \Phi_A^l(t) \\ \Phi_A^m(t) \\ \Phi_B^j(t) \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{9.36}$$

A kettős különbségek variancia-kovariancia mátrixa az alábbi alakban írható fel:

$$\boldsymbol{Q}_{DD} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{9.37}$$

ami alapján a súlymátrix levezethető:

$$\boldsymbol{P}_{DD} = \left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\right)^{-1} \tag{9.38}$$

Ezt követően a kiegyenlítés a legkisebb négyzetek módszerével már elvégezhető.

9.5.3. A bázisvonalankénti, illetve a többpontos kiegyenlítés összehasonlítása

Általában a bázisvonalankénti kiegyenlítés egyszerűbben megvalósítható (kisebb memóriaigény, egy-egy lépésben kevesebb változó), valamint könnyebb a mérési hibák azonosítása és kiküszöbölése (pl. antennamag. mérés, pontraállás).

A többpontos kiegyenlítés figyelembe veszi a vektorok közötti korrelációt is, és jobban használható a ciklusugrások javítására.

Általában a nagypontosságú feldolgozásoknál a többpontos módszer használandó (pl. Bernese), míg a mérnöki gyakorlatban elterjedt feldolgozószoftvereknél a bázisvonalankénti feldolgozás terjedt el.

9.6. Térbeli koordináták átszámítása elkülönült vízszintes és magassági rendszerekbe

Méréseink kiegyenlítését követően megkaphatjuk a paramétereink kiegyenlített értékét és azok variancia-kovariancia mátrixát is. Az ismeretlen koordináták értékét azonban geocentrikus térbeli derékszögű koordinátarendszerben (WGS-84, vagy egyéb realizációk) kapjuk meg, amely értékeket át kell transzformálnunk az országos vagy a helyi koordinátarendszerünkben. A transzformáció során figyelembe kell vennünk azt a tényt, hogy a geodéziai gyakorlatban a vízszintes és a magassági koordinátarendszereink elkülönültek egymástól.

Másrészről azt is tudjuk, hogy a hazai HD-72 dátum paraméterei eltérnek a WGS-84 ellipszoid méretétől és elhelyezésétől is. Emiatt az átszámítás csak úgy lehetséges, hogy azonos pontokat ismerünk a két rendszer között. Ezt a célt szolgálja az Országos GPS Hálózat.

A transzformációs eljárások között megkülönböztetünk egy-, két-, illetve háromdimenziós transzformációkat.

A következőkben az alábbi eljárásokat ismertetjük röviden:

Háromdimenziós transzformációk:

- Térbeli hasonlósági transzformáció;
- Térbeli polinomos transzformáció.

Kétdimenziós transzformációk (pl. a helyi rendszerben csak síkkoordináták adottak):

- síkbeli hasonlósági transzformáció;
- ellipszoidi vetületek alkalmazása;
- azimutokból és távolságokból álló hálózat számítása
- kétlépcsős modell alkalmazása

Egydimenziós transzformáció (magasságmeghatározás):

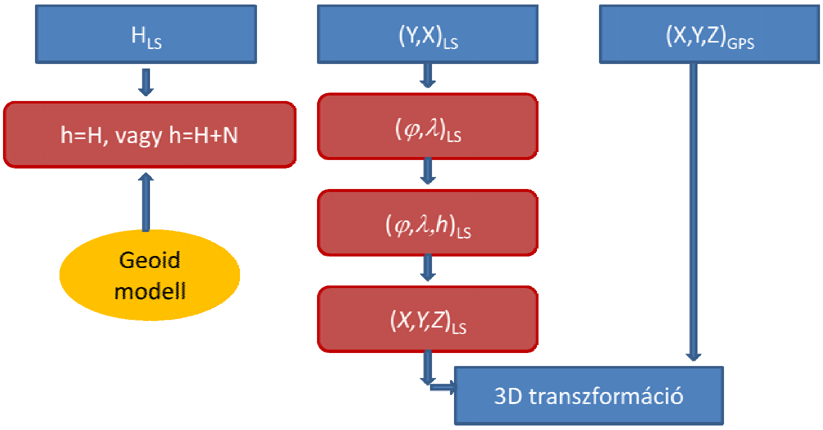
- magasságok transzformálása geoidmodell segítségével

9.6.1. Háromdimenziós transzformációk

9.6.1.1. A térbeli hasonlósági transzformáció

A térbeli hasonlósági transzformáció esetén a két dátumhoz tartozó ellipszoid geometriai középpontjában definiált térbeli derékszögű koordinátarendszerek közötti kapcsolatot állítjuk elő. A WGS-84, ETRS, ITRS rendszerekben ez egyértelmű, hiszen eleve ilyen koordinátákat kapunk a feldolgozás során. A következőkben áttekintjük, hogy hogyan nyerhetünk térbeli derékszögű koordinátákat az országos rendszerben adott vízszintes és magassági koordinátákból.

A Balti alapszint feletti magasságokból a geoidunduláció elhanyagolásával vagy figyelembevételével ellipszoid feletti magasságokat kaphatunk (9.1 ábra bal oldala). Az EOV koordinátákból a vetületi egyenletek segítségével első lépésben ellipszoidi koordinátákat számítunk $(\varphi,\lambda)_{LS}$. Ezt követően a korábban meghatározott ellipszoid feletti magasság figyelembevételével előáll a pont ellipszoidi koordinátahármasa $(\varphi,\lambda,h)_{LS}$. Az ellipszoidi koordinátahármasból pedig kiszámíthatjuk az ellipszoid geometriai középpontjában elhelyezett annak tengelyeihez tájolt térbeli derékszögű koordinátarendszerbeli $(X,Y,Z)_{LS}$ térbeli derékszögű koordinátákat a HD-72 dátumban.



9.1 ábra: A 3D térbeli hasonlósági transzformáció folyamatábrája

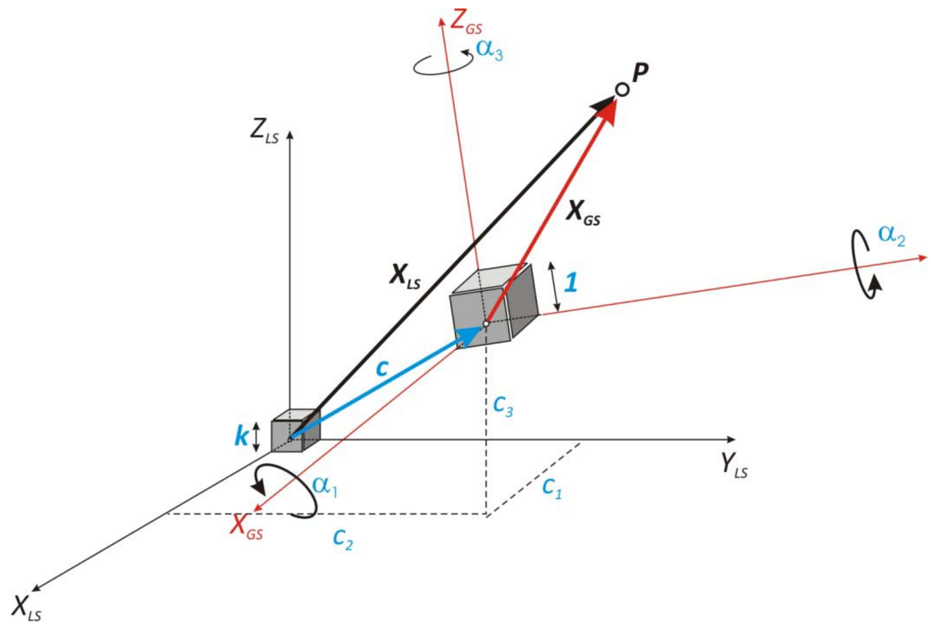
Ezt követően két térbeli derékszögű koordinátarendszer hasonlósági transzformációját kell elvégeznünk a 9.2 ábrának megfelelően. A térbeli hasonlósági transzformációt az alábbi mátrix egyenlet megoldásával oldhatjuk meg:

$$\boldsymbol{x}_{LS} = \boldsymbol{c} + k\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}_{GS} \tag{9.39}$$

ahol az **R** forgatási mátrix:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\alpha_1}\boldsymbol{R}_{\alpha_2}\boldsymbol{R}_{\alpha_3} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.40}$$

A (9.39) és (9.40) egyenletekből látható, hogy azok összesen 7 forgatási paramétert tartalmaznak (3 eltolás, 3 elforgatás és 1 méretaránytényező). Emiatt minimum 3 közös pont szükségeltetik a transzformációs paraméterek meghatározásához. Mivel a közvetítő egyenletek a forgatási mátrix tagjai miatt nem lineárisak, ezért a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítéshez a közvetítő egyenleteket linearizálni kell. A gyakorlatban joggal feltehetjük, hogy az elforgatási szögek kicsinyek, hiszen a két rendszer tengelyei közel párhuzamosak egymáshoz.



9.2 ábra: A 3D térbeli hasonlósági transzformáció elve

Így a javítási egyenletrendszert az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{l} \tag{9.41}$$

ahol:

$$\boldsymbol{x}_P = \lfloor c_x \quad c_y \quad c_z \quad k \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \rfloor \tag{9.42}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & {}_{GS}X_i & 0 & -{}_{GS}Z_i & {}_{GS}Y \\ 0 & 1 & 0 & {}_{GS}Y_i & {}_{GS}Z_i & 0 & -{}_{GS}X_i \\ 0 & 0 & 1 & {}_{GS}Z_i & -{}_{GS}Y & {}_{GS}X_i & 0 \end{bmatrix} \tag{9.43}$$

és

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} {}_{LS}X_i \\ {}_{LS}Y_i \\ {}_{LS}Z_i \end{bmatrix}. \tag{9.44}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti javítási egyenletrendszer az együtthatókat és paramétereket csak 1 közös pontra tartalmazza, több közös pont esetén minden térbeli koordinátával rendelkező pontra további 3-3 javítási egyenletet állíthatunk fel.

A kiegyenlítésből meghatározhatók a transzformációs paraméterek, majd a már ismert transzformációs paraméterekkel meghatározhatjuk a közös pontok transzformált koordinátáit is. A transzformációs eljárás minőségének megítélése érdekében meghatározzuk a közös pontok transzformált koordinátáinak maradék ellentmondásait:

$$\begin{aligned} v_x &= X_{LS} - X_{LS}^* \\ v_y &= Y_{LS} - Y_{LS}^* \\ v_z &= Z_{LS} - Z_{LS}^* \end{aligned} \tag{9.45}$$

ami alapján a transzformált és az eredeti ponthely távolsága is számítható:

$$\Delta L = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \ . \qquad (9.46)$$

A transzformáció középhibája a maradék ellentmondásokból számítható:

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}{3n-7}} \qquad (9.47)$$

Ha a maradék ellentmondásokat a topocentrikus koordinátarendszerbe transzformáljuk, akkor pedig a vízszintes és a magassági középhibákhoz juthatunk:

$$m_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(v_e^2 + v_n^2\right)}{3n-7}} \text{ (vízszintes értelemben)} \qquad (9.48)$$

$$m_V = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(v_u^2\right)}{3n-7}} \text{ (magassági értelemben)} \qquad (9.49)$$

A térbeli hasonlósági transzformáció jellemzői:

- A hasonlósági jelleg miatt nem enged torzulásokat. Emiatt nagyon hasznos a közös pontok durva ellentmondásainak feltérképezéséhez.
- Szükség van a vetületi egyenletek ismeretére. Ez okozhat problémát az EOV esetében.
- Mivel a térbeli koordináták a vetületi torzulásokat nem tartalmazzák, a modell nagyobb munkaterületen is alkalmazható.
- Oda-vissza átszámítási lehetőség (paraméterek azonosak, csak ellentétes előjelűek – ha kicsinyek az elforgatások)
- minden közös pontra mindhárom koordinátát ismernünk kell (vagy feltételezéssel élhetünk pl. a magasságra vonatkozóan)

9.6.1.2. Térbeli polinomos transzformáció

A térbeli polinomos transzformáció esetén a GPS térbeli koordináták, illetve a helyi síkbeli koordináták között hatványsorokat írunk fel. Ennek érdekében közös pontok segítségével meghatározzuk a hatványsorok együtthatóit LNM szerinti kiegyenlítéssel. Így helyi (országos) rendszerbeli X koordinátákra például az alábbi polinomot írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} X_{helyi} = {} & a_0 + a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + \\ & a_4 X^2 + a_5 Y^2 + a_6 Z^2 + a_7 XY + a_8 XZ + a_9 YZ + \\ & a_{10} X^3 + a_{11} Y^3 + a_{12} Z^3 + a_{13} X^2 Y + a_{14} X^2 Z + a_{15} XY^2 + \\ & + a_{16} Y^2 Z + a_{17} XZ^2 + + a_{18} Z^2 Y + a_{19} Z^2 X \end{aligned} \qquad (9.50)$$

A (9.50) egyenletben az első sor tartalmazza az elsőfokú (4 paraméter), az első két sor a másodfokú (10 paraméter) és a teljes képlet a harmadfokú (20 paraméter) polinomos transzformációhoz szükséges paramétereket. Hasonló polinomok (természetesen más együtthatókkal) írhatók fel a további koordinátakomponensekre is. Így a szükséges közös pontok száma megegyezik az egyetlen koordinátakomponens transzformációjához szükséges paraméterek számával.

Ha a minimálisan szükségesnél több közös pont áll rendelkezésünkre, akkor meghatározhatók a polinomegyütthatók kiegyenlített értékei a legkisebb négyzetek módszerével.

A javítási egyenletek:

$$
\begin{aligned}
v_{X_{helyi}} &= a_0 + a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + \ldots - X_{helyi}, \\
v_{Y_{helyi}} &= b_0 + b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + \ldots - Y_{helyi}, \\
v_{Z_{helyi}} &= c_0 + c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + \ldots - Z_{helyi}.
\end{aligned}
\tag{9.51}
$$

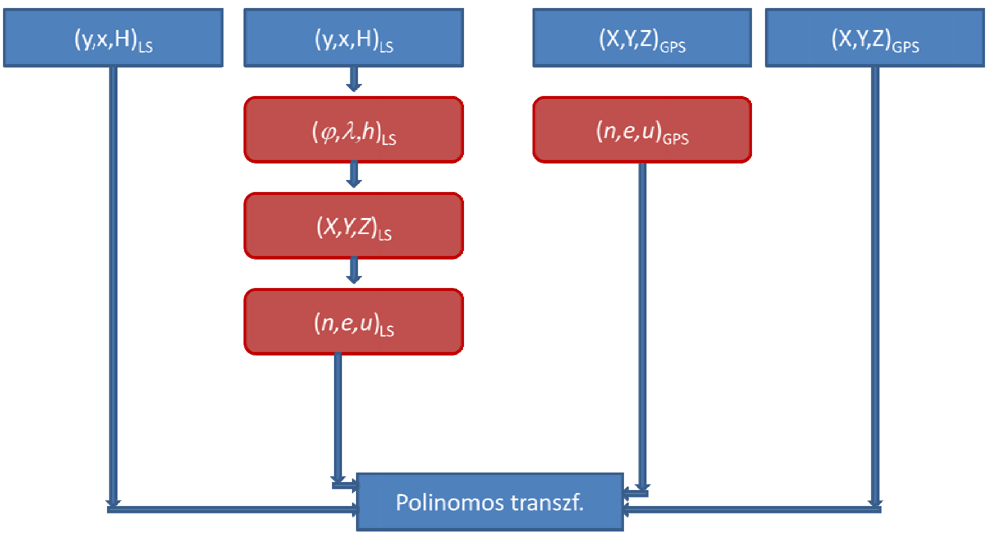
Mivel az egyes koordinátakomponensre felírt polinomok függetlenek egymástól, ezért a normálegyenletrendszert mindhárom koordinátakomponensre külön írjuk fel:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^T &= \begin{bmatrix} 1 & X & Y & Z & X^2 & Y^2 & Z^2 & XY & XZ & YZ & \ldots \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{N} &= \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T .
\end{aligned}
\tag{9.52}
$$

A térbeli polinomos transzformáció jellemzői:

- a helyi rendszerről nem kell ismerettel rendelkezzünk (alapfelület, vetület);
- a vízszintes és a magassági transzformáció elkülönül, így előfordulhat az is, hogy a magassági koordinátákat nem transzformáljuk;
- ha valamelyik koordinátakomponens durva hibával terhelt, akkor az kideríthető;
- a helyi torzulásokat jobban figyelembe veszi -> viszont a durva hibákat elkeni;
- hátránya, hogy jelentős számú közös pontot igényel;
- nagyobb munkaterületen a hasonlósági modellhez képest kisebb maradék ellentmondásokat kapunk, nem kell részekre osztani a területet (mint a hasonlósági modellnél)
- az együtthatók nagy abszolút értékű számok (geocentrikus vs. helyikoordináták), ami numerikus problémákat okozhat -> célszerű áttérni topocentrikus koordinátarendszerbe (ha ismert a helyi rendszer alapfelülete és vetületi egyenletei).

A térbeli polinomos transzformáció folyamatábrája a 9.2 ábrán látható.



9.2 ábra: A térbeli polinomos transzformáció folyamatábrája

9.6.2. Kétdimenziós transzformációk

Kétdimenziós transzformációkat akkor használhatunk, ha

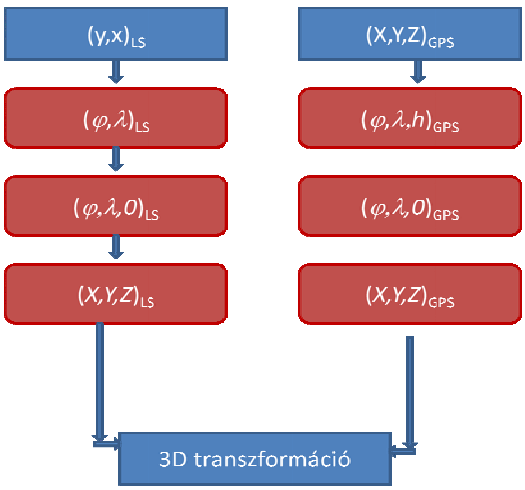
- A helyi rendszerben csak síkkoordináták adottak, magasságok nincsenek;
- a helyi rendszerben nem ismert a kapcsolat a síkkoordináták és a földrajzi koordináták között, így nem tudunk koordinátákat számítani az alapfelületen (pl. mérnökgeodéziai hálózatok!);
- a felhasználónak csak síkkoordinátára van szüksége;
- el kívánjuk különíteni a síkbeli és a magassági transzformációt.

9.6.2.1. Térbeli hasonlósági transzformáció csak vízszintes koordinátákra

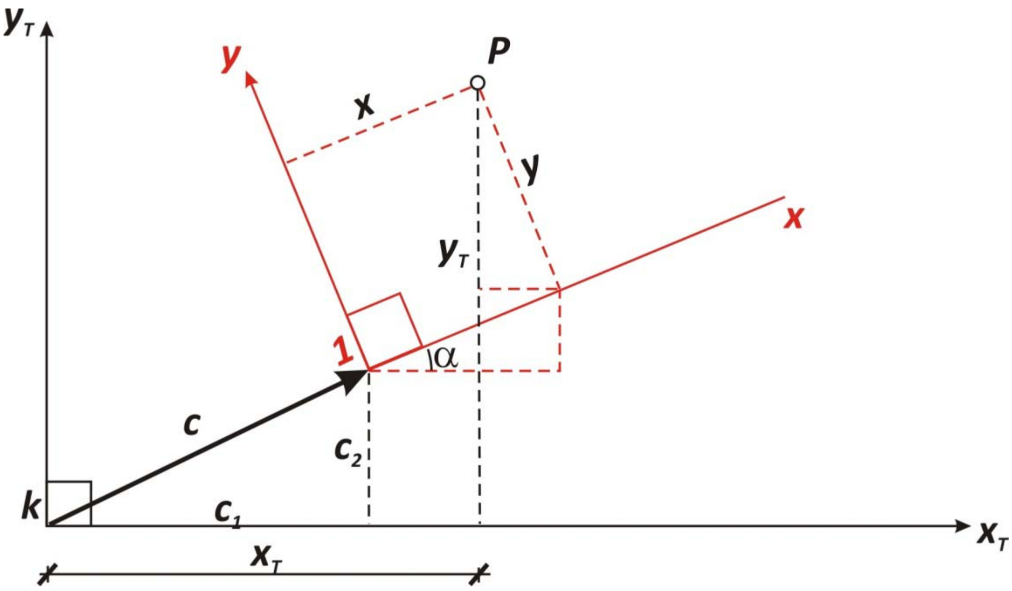
Ez a 3D térbeli hasonlósági transzformáció speciális esete, amikor a helyi rendszerben minden pont ellipszoid feletti magasságát 0-nak tételezzük fel. A transzformáció számítási menete megegyezik a térbeli esettel, folyamatábrája a 9.3 ábrán látható.

9.6.2.2. A kétdimenziós hasonlósági transzformáció

A síkbeli hasonlósági modell alkalmazásához a műholdas helymeghatározásból származó háromdimenziós koordinátákból egy célszerűen megválasztott vetületet felhasználva vetületi koordinátákat számíthatunk, majd az így kapott vetületi koordinátákat transzformáljuk síkbeli hasonlósági transzformációval az országos rendszerbeli vetületi koordinátákká a 9.4 ábra alapján.



9.3 ábra: A térbeli hasonlósági transzformáció alkalmazása csak vízszintes koordinátákra



9.4 ábra: A síkbeli hasonlósági modell

A transzformációs egyenlet:

$$\boldsymbol{x}_T = \boldsymbol{c} + k\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}. \tag{9.53}$$

ahol k a méretarányténzező, **c** az eltolási vektor:

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \tag{9.54}$$

míg az **R** forgatási mátrix:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{9.55}$$

Ez összesen 4 paramétert jelent, tehát minimálisan kettő közös pont szükséges a transzformációs paraméterek meghatározásához.

A kétdimenziós hasonlósági transzformáció alkalmazási lehetőségei:

- ha a helyi rendszer alapfelülete nem ismer, vagy pl. mérnökgeodéziai hálózatoknál (pl. építési hálózatban, hogy elkerüljük az alapfelületre és vetületre redukálás okozta méretarány problémákat);
- A GPS rendszerbeli koordinátákat valamilyen ellipszoidi vetületre számítjuk át, majd alkalmazzuk a kétdimenziós hasonlósági transzformációt a GPS vetületi, illetve a helyi koordinátarendszerek között.

9.6.3. Egydimenziós transzformációk

A magasságok transzformálásához a normálmagasságok és az ellipszoid feletti magasságok jól ismert összefüggését használhatjuk fel:

$$H^{GPS} = h^{GPS} - N \tag{9.56}$$

A (9.56) képlet alkalmazásához a geoidunduláció értékét nagy pontossággal kellene ismernünk. Mivel – bár egyre pontosabb geoidmodellek állnak rendelkezésre – a geoidunduláció értéke csak néhány cm pontosan ismert, ezért a fenti egyenlettel csak néhány cm pontos magasságokat tudunk meghatározni abszolút értelemben. Relatív értelemben azonban a technika mérnöki célra is használható.

Abban az esetben, ha nem áll rendelkezésünkre a geoidunduláció értéke, akkor közös pontok alapján a geoidfelület kis területen síkkal is helyettesíthető. Ebben az esetben a sík paramétereit közös pontok alapján határozhatjuk meg.