

8. előadás:

## A helymeghatározás matematikai modelljei: fázismérésen alapuló relatív helymeghatározás különbségképzéssel. Fázismérések lineáris kombinációi. A ciklustöbbértelműség feloldása.

### 8.1. A fázismérések feldolgozása

A fázismérések feldolgozásakor a fázistávolságok (7.5) és (7.6) közvetítőegyenleteiből indulhatunk ki. A koordinátameghatározások elvégzéséhez általában két lehetőség közül kell választanunk. Az első lehetőség a **nagy pontosságú abszolút helymeghatározás** (precise point positioning – PPP), amikor a szabályos hibákat modellezzük (pálya, műholdóra, ionoszféra, troposzféra), majd ezeket a pontos modelleket felhasználjuk a feldolgozások során (ismertnek tekintjük a közvetítőegyenletekben – esetleg becsüljük a koordinátákkal együtt).

A másik lehetőség a **relatív helymeghatározás**, amikor egy ismert ponton elhelyezett vevőhöz képest határozzuk meg a koordinátakülönbségeket. Ebben az esetben a szabályos hibákat különbségképzéssel kiejtjük. Bár a két eljárás hosszú mérési időtartam (kb. 1 nap) alatt ugyanazt a pontosságot hozza, a hétköznapi gyakorlatban a legtöbbször a relatív helymeghatározást használjuk, mivel egyelőre pontosabb eredményt érhetünk el a szabályos hibák kiejtésével, mint az azokra felállított modellekkel.

Meg kell jegyeznünk, hogy a GNSS kutatások egyik aktuális területe az ún. állapot-tér modellezés, ami pontosan azt a célt tűzte ki maga elé, hogy a különféle szabályos hibák hatásának modellezésével és azok korrekcióként történő figyelembevételével valósítsuk meg a fázismérések feldolgozását, azaz tulajdonképpen nagy pontosságú abszolút helymeghatározást végezzünk.

#### 8.1.1. Relatív helymeghatározás rövid távolságokon

Rövid távolságok esetén a relatív helymeghatározás végrehajtásával számos szabályos hibát kiejthetünk. Az egymástól kis távolságra (kb. 10-15 km-re) elhelyezett vevők észleléseit az ionoszféra hasonló mértékben késlelteti. Ennek megfelelően a két vevő fázistávolságai különbségéből többek között az ionoszféra hatása kiejthető. Hasonlóan járhatunk el a műhold órahibával és a vevő órahibával amennyiben a mért fázistávolságok megfelelő különbségeit képezzük.

A (7.3) egyenletnek megfelelően írjuk fel a fázistávolságok közvetítőegyenleteinek linerizált alakját:

$$\begin{aligned} & \Phi_{k,L_1}^j(t_i) - c\Delta t^j(t_i - \tau_k^j)_0 - c\Delta t_k(t_i)_0 - \rho_k^j(t_i - \tau_k^j, t_i) - F_k^j(t_i) - T_k(t_i) + I_k^j(t_i) = \\ & = -\frac{X^j(t_0) - X_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \delta x - \frac{Y^j(t_0) - Y_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \delta y - \frac{Z^j(t_0) - Z_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \delta z - \\ & - c\delta t_k(t_i) + c\delta t^j(t_i - \tau_k^j) + \lambda_{L_1} N_{k,L_1}^j + v_{\Phi_{k,L_1}^j}(t_i) \end{aligned} \quad (8.1)$$

ahol  $F_k^j$  a  $k$  vevőantenna fáziscentrumának külpontossága a  $j$  műhold irányában az  $L_1$  frekvencián,  $N_{k,L_1}^j = \bar{N}_{k,L_1}^j + \varphi^j - \varphi_k$  a ciklustöbbértelműség. Elméletben a ciklustöbbértelműség egész szám, de a gyakorlatban kismértékben eltér az egésztől ( $\bar{N}_{k,L_1}^j$ ) a vevő ( $\varphi_k$ ) és a műhold ( $\varphi^j$ ) hardverkésései miatt. a többi jelölés megegyezik a korábban alkalmazott jelölésekkel.

A (8.1) egyenletet rövidebb alakban is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} & \Phi_{k,L_1}^j(t_i) - c\Delta t^j(t_i - \tau_k^j)_0 - c\Delta t_k(t_i)_0 - \rho_k^j(t_i - \tau_k^j, t_i) - F_k^j(t_i) - T_k(t_i) + I_k^j(t_i) = \\ & = a_{k,1}\delta x + a_{k,2}\delta y + a_{k,3}\delta z + a_{k,4}\delta t_k + a_{k,5}\delta t^j + a_{k,6}N_{k,L_1}^j + v_{\Phi_{k,L_1}^j}(t_i) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Vegyük észre, hogy a fázistávolságok közvetítőegyenletének a bal oldalán szerepel a műhold órahiba hatása mint javítás. Mint ahogyan azt már említettük, a műholdórák fedélzeti pályaadatokból nyert hibái az 5ns-ot is elérhetik, ami mintegy 1,5 méteres távolsághibának felel meg. Ezek alapján belátható, hogy nem elegendő a fedélzeti pályák használata a geodéziai pontossági igényű koordinátameghatározáshoz.

### 8.1.1.1. Az egyszeres különbség

Mivel a relatív helymeghatározás esetén egy vektor két végpontján azonos időpontokban azonos műholdakra végeznek észleléseket a vevők, így kivonhatjuk egymásból a két vevőben ugyanabban az időpillanatban ugyanarra a műholdra végzett észleléseket. Az így kapott fiktív mérési eredményeket **egyszeres különbségnek** nevezzük.

Legyen az  $A$  ponton a fázistávolság közvetítőegyenlete:

$$\begin{aligned} & \Phi_{A,L_1}^j(t_i) - c\Delta t^j(t_i - \tau_A^j)_0 - c\Delta t_A(t_i)_0 - \rho_A^j(t_i - \tau_A^j, t_i)_0 - F_k^j(t_i) - T_A(t_i) + I_A^j(t_i) = \\ & = -\frac{X^j(t_0) - X_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)}\delta x_A - \frac{Y^j(t_0) - Y_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)}\delta y_A - \frac{Z^j(t_0) - Z_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)}\delta z_A - \\ & - c\delta t_A(t_i) + c\delta t^j(t_i - \tau_A^j) + \lambda_{L_1}N_{A,L_1}^j + v_{\Phi_{A,L_1}^j}(t_i) \end{aligned} \quad (8.3)$$

míg a  $B$  ponton ugyanez:

$$\begin{aligned} & \Phi_{B,L_1}^j(t_i) - c\Delta t^j(t_i - \tau_B^j)_0 - c\Delta t_B(t_i)_0 - \rho_B^j(t_i - \tau_B^j, t_i) - F_k^j(t_i) - T_B(t_i) + I_B^j(t_i) = \\ & = -c\delta t_B(t_i) + c\delta t^j(t_i - \tau_B^j) + \lambda_{L_1}N_{B,L_1}^j + v_{\Phi_{B,L_1}^j}(t_i) \end{aligned} \quad (8.4)$$

vegyük észre, hogy mind a (8.3) mind a (8.4) egyenlet bal és jobb oldalán szerepel a műhold órahiba ( $\Delta t^j$ ) és az órahiba korrekció ( $\delta t^j$ ) értéke, valamint a (8.4) egyenlet jobb oldalán nem szerepelnek a  $B$  bázisállomás koordinátajavításainak paraméterei, mivel a bázisállomás koordinátái ismertek.

Az egyszeres különbség tehát:

$$\begin{aligned} & \Phi_{A,L_1}^j(t_i) - \Phi_{B,L_1}^j(t_i) - c\Delta t_A(t_i)_0 + c\Delta t_B(t_i)_0 - \rho_A^j(t_i - \tau_A^j, t_i) + \rho_B^j(t_i - \tau_B^j, t_i) \\ & - F_A^j(t_i) + F_B^j(t_i) - T_A(t_i) + T_B(t_i) = \\ & = -\frac{X^j(t_0) - X_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)}\delta x - \frac{Y^j(t_0) - Y_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)}\delta y - \frac{Z^j(t_0) - Z_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)}\delta z - \\ & - c\delta t_A(t_i) + c\delta t_B(t_i) + \lambda_{L_1}N_{A,L_1}^j - \lambda_{L_1}N_{B,L_1}^j + v_{\Phi_{AB,L_1}^j}(t_i) \end{aligned} \quad (8.5)$$

vagy rövidebb alakban:

$$b_{AB,L_1}^j = a_{k,1}\delta x_A + a_{k,2}\delta y_A + a_{k,3}\delta z_A + a_{k,4}\delta t_{AB} + a_{k,5}N_{AB,L_1}^j + v_{\Phi_{k,L_1}^j}(t_i) \quad (8.6)$$

ahol  $\delta t_{AB}(t_i) = \delta t_B(t_i) - \delta t_A(t_i)$  a két vevő órahiba különbsége, míg  $N_{AB,L_1}^j = N_{A,L_1}^j - N_{B,L_1}^j = \bar{N}_{A,L_1}^j - \bar{N}_{B,L_1}^j + \varphi_B - \varphi_A$  a relatív ciklustöbbsértelműség. Vegyük észre, hogy a relatív ciklustöbbsértelműség értékekben már csak a vevők hardverkésései szerepelnek, a műholdak harverkésései az órahibákhoz hasonlóan kiestek. A rövid távolságok miatt ezen felül az ionoszféra sebességmódosító hatása is kiküszöbölhető. Még mindig szerepelnek az egyenletekben azonban a vevő órahibák értékei, illetve a vevők hardverkésései is. Ennek kiküszöbölésére a kettős különbségeket használhatjuk.

### 8.1.1.2. A kettős különbség

A kettős különbség előállítására úgy történik, hogy két ugyanabban az időpontban, de különböző műholdra meghatározott egyszeres különbség eltérését határozzuk meg. Ezzel kiejthető a vevő órahibák és a hardverkésések hatása is. A kettős különbségeket  $A$  és  $B$  pontokra, illetve  $j$  és  $l$  műholdakra tehát az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} & \Phi_{A,L_1}^j(t_i) - \Phi_{B,L_1}^j(t_i) - \Phi_{A,L_1}^l(t_i) - \Phi_{B,L_1}^l(t_i) \\ & + \rho_B^j(t_0, t_i) - \rho_A^j(t_0, t_i) - \rho_B^l(t_0, t_i) + \rho_A^l(t_0, t_i) \\ & + F_B^j(t_i) - F_A^j(t_i) - F_B^l(t_i) + F_A^l(t_i) \\ & - T_A^j(t_i) + T_B^j(t_i) + T_A^l(t_i) - T_B^l(t_i) = \\ & = a_{k,1} \delta x_A + a_{k,2} \delta y_A + a_{k,3} \delta z_A + \\ & + \lambda_{L_1} N_{A,L_1}^j - \lambda_{L_1} N_{B,L_1}^j - \lambda_{L_1} N_{A,L_1}^l + \lambda_{L_1} N_{B,L_1}^l + v_{\Phi_{AB,L_1}^{j,l}}(t_i) \end{aligned} \quad (8.7)$$

vagy röviden:

$$\begin{aligned} b_{AB}^{j,l}(t_i) &= a_{k,1} \delta x_A + a_{k,2} \delta y_A + a_{k,3} \delta z_A + \\ & + \lambda_{L_1} N_{A,L_1}^j - \lambda_{L_1} N_{B,L_1}^j - \lambda_{L_1} N_{A,L_1}^l + \lambda_{L_1} N_{B,L_1}^l + v_{\Phi_{AB,L_1}^{j,l}}(t_i) \end{aligned} \quad (8.8)$$

ahol az egyes a együtthatók az alábbiak szerint határozhatóak meg:

$$\begin{aligned} a_{k,1} &= - \left( \frac{X^j(t_0) - X_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)} - \frac{X^l(t_0) - X_A(t_i)}{\rho_A^l(t_0, t_i)} \right) \\ a_{k,2} &= - \left( \frac{Y^j(t_0) - Y_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)} - \frac{Y^l(t_0) - Y_A(t_i)}{\rho_A^l(t_0, t_i)} \right) \\ a_{k,3} &= - \left( \frac{Z^j(t_0) - Z_A(t_i)}{\rho_A^j(t_0, t_i)} - \frac{Z^l(t_0) - Z_A(t_i)}{\rho_A^l(t_0, t_i)} \right) \\ N_{AB}^{jk} &= N_A^j - N_B^j - N_A^l + N_B^l = \bar{N}_A^j - \bar{N}_B^j - \bar{N}_A^l + \bar{N}_B^l \end{aligned} \quad (8.9)$$

vegyük észre, hogy a kettős különbségekre értelmezett ciklustöbbsértelműségek már egész számok, azok nem tartalmazzák a vevők hardverkéséseinek hatását sem.

A fentiek alapján  $n$  műholdra végzett észlelések esetén összesen  $(n-1)$  kettős különbséget tudunk képezni, emiatt  $(n-1)$  ciklustöbbsértelműséget kell ismeretlen paraméterként meghatároznunk. Mivel az  $A$  pont koordinátái is ismeretlenek, ezért  $(n-1)+3$ , azaz  $(n+2)$  ismeretlenünk van, amelyek meghatározására  $(n-1)$  közvetítő egyenletet tudunk felírni (ennyi kettős különbséget tudunk meghatározni). Könnyen belátható, hogy egyetlen epochában végzett fázismérést emiatt nem tudunk feldolgozni, hiszen a probléma határozatlan.

A problémát úgy tudjuk megoldani, hogy több epochában mérünk. Amennyiben biztosított a műholdak folyamatos követése, akkor a ciklustöbbsértelműségek ugyanazok maradnak minden műholdra, ezáltal statikus mérések esetén az ismeretleneink száma nem változik  $(n+2)$ . A két epochában viszont már  $2(n-1)$  kettős különbséget tudunk képezni, ezáltal a feladat már megoldhatóvá válik. Természetesen a gyakorlatban ennél jóval több epochát szoktunk használni a feladat megoldásához.

Joggal merülhet fel a kérdés, hogy biztosak lehetünk-e abban, hogy nem terheli ciklusugrás a méréseinket. Ennek ellenőrzésére az ún. hármas különbségek szolgálnak.

### 8.1.1.3. A hármas különbségek

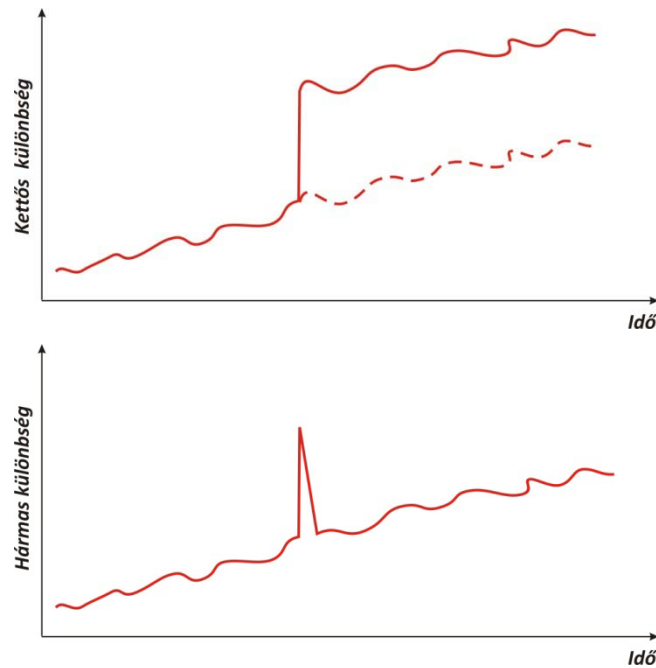
A hármas különbség két eltérő időpontban meghatározott kettős különbség eltéréseként definiálható. Vegyük az  $A$  és  $B$  pontokra és  $j$  és  $l$  műholdakra felírt kettős különbségeket két egymást követő epochában:

$$b_{AB}^{j,l}(t_i) = a_{k,1}(t_i)\delta x_A + a_{k,2}(t_i)\delta y_A + a_{k,3}(t_i)\delta z_A + \lambda_{L_1} N_{A,L_1}^j - \lambda_{L_1} N_{B,L_1}^j - \lambda_{L_1} N_{A,L_1}^l + \lambda_{L_1} N_{B,L_1}^l + v_{\Phi_{AB,L_1}^{j,l}}(t_i) \quad (8.10)$$

$$b_{AB}^{j,l}(t_{i+1}) = a_{k,1}(t_{i+1})\delta x_A + a_{k,2}(t_{i+1})\delta y_A + a_{k,3}(t_{i+1})\delta z_A + \lambda_{L_1} N_{A,L_1}^j - \lambda_{L_1} N_{B,L_1}^j - \lambda_{L_1} N_{A,L_1}^l + \lambda_{L_1} N_{B,L_1}^l + v_{\Phi_{AB,L_1}^{j,l}}(t_{i+1}) \quad (8.11)$$

A hármas különbségek tehát:

$$b_{AB}^{j,l}(t_i, t_{i+1}) = b_{AB}^{j,l}(t_i) - b_{AB}^{j,l}(t_{i+1}) = a_{k,1}\delta x_A + a_{k,2}\delta y_A + a_{k,3}\delta z_A + v_{\Phi_{AB,L_1}^{j,l}}(t_i, t_{i+1}) \quad (8.12)$$



8.1 ábra: Ciklusugrások hatása a kettős és hármas különbségekre

vegyük észre, hogy a hármas különbségekből kiejtettük a ciklustöbbsértelműségek értékét. Így az egymást követő kettős különbségekből hármas különbségeket képezve, ciklusugrás mentes méréseknél a hármas különbségek lassan változó mennyiségek. Amennyiben ciklusugrás következik be, akkor a kettős differenciákban szereplő ciklustöbbsértelműségek már nem azonosak az egyik vagy a másik műholdra, ezáltal a hármas különbség kugró értéket vesz fel.

A ciklusugrás után a hármas különbség ismét visszaáll az eredeti érték közelébe (8.1 ábra). Ezáltal a hármas különbségeket képezve, azok időbeli változását vizsgálva megállapíthatjuk, hogy melyik mérési epochák terheltek ciklusugrásokkal.

### 8.1.2. Relatív helymeghatározás hosszabb távolságokon

Nagyobb távolságokon az ionoszféra hatása már nem ejthető ki különbségképzéssel, emiatt a ciklustöbbségek már nem oldhatók fel egész számként. A problémát kétféleképpen oldhatjuk meg. Egyrészt az ionoszféra okozta sebességmódosító hatást modellezhetjük egy erre alkalmas polinommal. Ekkor az ionoszféra hatása felírható:

$$I(t_i) = I_{00} + I_{10}(\varphi - \varphi_0) + I_{01}(\vartheta - \vartheta_0) + I_{11}(\varphi - \varphi_0)(\vartheta - \vartheta_0) + \dots \quad (8.13)$$

ahol  $\varphi$  az ionoszférikus pont szélessége,  $\vartheta$  pedig a Nap óraszöge, míg az  $I_{ij}$  az ionoszféra hatását leíró polinom együtthatói. A polinomos modellel meghatározott ionoszférikus hatást a műhold irányára is át kell számítanunk, így az ionoszféra hatása a kettős különbségekre az alábbi módon határozható meg:

$$\begin{aligned} I(t_i)_{AB}^{jl} &= I(t_i)_A^j - I(t_i)_B^j - I(t_i)_A^l + I(t_i)_B^l = \\ &= \frac{I^j(t_i)}{\cos(z_A^j)} - \frac{I^j(t_i)}{\cos(z_B^j)} - \frac{I^l(t_i)}{\cos(z_A^l)} + \frac{I^l(t_i)}{\cos(z_B^l)} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Az ionoszféra hatása ki is küszöbölhető a két frekvencián végzett észlelések megfelelő kombinációjával, mivel a hatás mértéke függ a mérőjel frekvenciájától.

#### 8.1.2.1. A helymeghatározás megoldása a wide-lane és az ionoszféra-mentes lineáris kombinációval

Induljunk ki a fázistávolságokra felírt közvetítő egyenletekből:

$$\begin{aligned} \Phi_{k,L_1}^j(t_i) - c\Delta t^j(t_i - \tau_k^j)_0 - c\Delta t_k(t_i)_0 - \rho_k^j(t_i - \tau_k^j, t_i) - F_k^j(t_i) - T_k(t_i) = \\ = -\frac{X^j(t_0) - X_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \delta x - \frac{Y^j(t_0) - Y_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \delta y - \frac{Z^j(t_0) - Z_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \delta z - \\ - c\delta t_k(t_i) + c\delta t^j(t_i - \tau_k^j) + \lambda_{L_1} N_{k,L_1}^j - I_k^j(t_i) + v_{\Phi_{k,L_1}^j}(t_i) \end{aligned} \quad (8.15)$$

amelynek rövidített alakja:

$$b_{k,L_1}^j = a_{k,1} \delta x + a_{k,2} \delta y + a_{k,3} \delta z + a_{k,4} \delta t_k + a_{k,5} \delta t^j + a_{k,6} N_{k,L_1}^j - I_k^j(t_i) + v_{\Phi_{k,L_1}^j}(t_i) \quad (8.16)$$

összük el a két fázistávolság közvetítőegyenletét  $\lambda_1$ -el illetve  $\lambda_2$ -vel:

$$\frac{b_{k,L_1}^j}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} [a_{k,1} \delta x + a_{k,2} \delta y + a_{k,3} \delta z] + N_{k,L_1}^j + \frac{1}{\lambda_1} I_k^j(t_i) \quad (8.17)$$

$$\frac{b_{k,L_2}^j}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2} [a_{k,1} \delta x + a_{k,2} \delta y + a_{k,3} \delta z] + N_{k,L_2}^j + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} I_k^j(t_i) \quad (8.18)$$

Vonjuk ki (8.18)-at (8.17)-ből, majd szorozzuk meg mindkét oldalt  $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ -vel. Az egyenlet bal oldala:

$$\left( \frac{b_{k,L_1}^j}{\lambda_1} - \frac{b_{k,L_2}^j}{\lambda_2} \right) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \left( \frac{\lambda_2 b_{k,L_1}^j - \lambda_1 b_{k,L_2}^j}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2 b_{k,L_1}^j - \lambda_1 b_{k,L_2}^j}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (8.19)$$

míg a jobb oldala:

$$\left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (a_{k,1} \delta x_A + a_{k,2} \delta y_A + a_{k,3} \delta z_A) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (N_{L_1} - N_{L_2}) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda_1} I_{L_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} I_{L_1} \right) \quad (8.20)$$

a (8.20) egyenletet tovább egyszerűsítve az ún. wide-lane lineáris kombinációhoz jutunk:

$$\frac{\lambda_2 b_{k,L_1}^j - \lambda_1 b_{k,L_2}^j}{\lambda_2 - \lambda_1} = a_{k,1} \delta x_A + a_{k,2} \delta y_A + a_{k,3} \delta z_A + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (N_{L_1} - N_{L_2}) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} I_{L_1} \quad (8.21)$$

amely röviden az alábbi alakban is írható:

$$b_{WL} = a_{k,1} \delta x_A + a_{k,2} \delta y_A + a_{k,3} \delta z_A + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (N_{L_1} - N_{L_2}) - I_{WL} . \quad (8.22)$$

A (8.22) egyenletben a ciklustöbbsértelműségek helyére az ún. wide-lane ciklustöbbsértelműséget helyettesíthetjük be, amely továbbra is egész szám (mivel két egész szám különbsége):

$$N_{WL} = (N_{L_1} - N_{L_2}) \quad (8.23)$$

A wide-lane lineáris kombináció hullámhossza:

$$\lambda_{WL} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \approx 86 \text{ cm} . \quad (8.24)$$

Az így kialakított wide-lane (L5) lineáris kombináció (nem keverendő össze az L5 jelölés a GPS rendszer L5 frekvenciájával) egyrésztől zajosabb fiktív mérési eredmény, mint az eredeti L<sub>1</sub> vagy L<sub>2</sub> fázistávolságok. Ráadásul ez sem ionoszféra mentes lineáris kombináció, hiszen a (8.22) egyenletben szerepel az ionoszféra hatása, ami mintegy 1,3-szorosa az L<sub>1</sub> frekvenciára kifejttet hatásnak. Ugyanakkor nagy előnye ennek a lineáris kombinációnak, hogy hullámhossza jóval nagyobb mind az L<sub>1</sub> mind az L<sub>2</sub> frekvenciáknál, emiatt a ciklustöbbsértelműség az L5 lineáris kombináción könnyebb, mint az L<sub>1</sub> és L<sub>2</sub> frekvenciáknál. Ezért az L5 lineáris kombinációt általában a hosszú vektorok ciklustöbbsértelműségeinek kétlépcsős feldolásához szokták használni. Első lépésben megoldjuk a wide-lane lineáris kombinációt, amely ciklustöbbsértelműsége megadja az L<sub>1</sub> és L<sub>2</sub> ciklustöbbsértelműségek különbségét (8.23).

A következőkben alakítsunk ki egy ionoszféra mentes lineáris kombinációt, aminek az lesz az előnye, hogy hosszú bázisvonalakon sem kell az ionoszféra okozta sebességmódosító hatást figyelembe vennünk.

A wide-lane lineáris kombinációt osszuk el  $\lambda_2$ -vel:

$$\frac{1}{\lambda_2} \frac{\lambda_2 b_{k,L_1}^j - \lambda_1 b_{k,L_2}^j}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} (a_{k,1} \delta x_A + a_{k,2} \delta y_A + a_{k,3} \delta z_A) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (N_{L_1} - N_{L_2}) - \frac{1}{\lambda_1} I_{L_1} \quad (8.25)$$

majd (8.25)-höz adjuk hozzá az L<sub>1</sub> fázistávolságok és  $\lambda_1$  hányadosát:

$$\frac{b_{k,L_1}^j}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} [a_{k,1}\delta x + a_{k,2}\delta y + a_{k,3}\delta z] + N_{k,L_1}^j + \frac{1}{\lambda_1} I_{L_1} \quad (8.26)$$

Az így kapott összeget pedig szorozzuk be  $\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ -vel:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2^2 b_{k,L_1}^j - \lambda_1^2 b_{k,L_2}^j}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} &= (a_{k,1}\delta x_A + a_{k,2}\delta y_A + a_{k,3}\delta z_A) + \\ &+ \frac{\lambda_1^2\lambda_2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} (N_{L_1} - N_{L_2}) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} N_{L_1} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Ezáltal egy ionoszféra mentes lineáris kombinációhoz jutunk, amely segítségével egyrészt ki tudjuk küszöbölni az ionoszféra hatását, másrészt meg tudjuk oldani az  $L_1$  ciklustöbbsértelműséget, hiszen az  $N_{WL} = (N_{L_1} - N_{L_2})$  ciklustöbbsértelműséget már ismerjük a wide-lane lineáris kombináció megoldásából.  $L_1$  ciklustöbbsértelműség ismeretében pedig  $L_2$  ciklustöbbsértelműség is számítható. Az így kialakított lineáris kombinációt  $L_3$  lineáris kombinációnak nevezzük, hullámhossza pedig:

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \approx 10,7\text{cm} \quad (8.28)$$

### 8.1.2.2. A megoldás menete

Összegezve az előbbieket, hosszú vektorok esetén a koordinátamegoldás relatív helymeghatározással az alábbi módon történik:

- Először alakítsuk ki a wide-lane lineáris kombinációt ( $L_5$ ), mely hullámhossza kb. 86cm;
- Modellezzük az ionoszféra hatását valamilyen modellel, majd oldjuk meg a wide-lane ciklustöbbsértelműséget;
- Ezt követően alakítsuk ki az ionoszféra mentes ( $L_3$ ) lineáris kombinációt;
- Az  $L_3$  lineáris kombináció megoldásánál az  $N_{WL}$  ciklustöbbsértelműséget már ismerjük, így meghatározhatjuk az  $N_{L_1}$  ciklustöbbsértelműséget (az  $L_3$  lineáris kombináción az ionoszféra hatása nem jelentkezik);
- Végezetül az  $N_{L_2}$  ciklustöbbsértelműséget meghatározhatjuk az  $N_{WL}$  és  $N_{L_1}$  ismeretében.

Megjegyezzük, hogy ez az utolsó lépés nem feltétlenül szükséges a koordináták meghatározásához, hiszen az  $L_3$  lineáris kombinációra felírt közvetítőegyenletek már tartalmazzák a koordinátakülönbségeket. Sok esetben azonban a ciklustöbbsértelműségek feloldása vektorról vektorra történik, ilyenkor meghatározzuk mind az  $L_1$  mind az  $L_2$  ciklustöbbsértelműségek értékeit. Miután lehetőség szerint az összes ciklustöbbsértelműséget feloldottuk, akkor történik meg a teljes hálózat együttes feldolgozása, amikor már az ismert ciklustöbbsértelműségek egész értékét korrekcióként figyelembe vesszük az  $L_3$  lineáris kombináció feldolgozásánál, így a közvetítő egyenletekben csak a koordináták szerepelnek ismeretlen paraméterként.

Nagyobb pontossági igények esetén a koordinátaparaméterek mellett a troposzféra okozta késleltetés állomásfüggő paramétereit is együtt egyenlítjük ki a koordinátákkal. Ezáltal hosszabb mérési periódusok és nagyobb bázisvonalak esetén a troposzféra állapotában beállt változásokat is figyelembe tudjuk venni.

## 8.2. A fázismérések lineáris kombinációi

Az előzőekben már megismerkedtünk az L5 wide-lane lineáris kombinációval, valamint az ionoszféra-mentes lineáris kombinációk egyikével. A következőkben még további lineáris kombinációkat fogunk áttekinteni. A lineáris kombinációk tulajdonképpen a két vivőfrekvencián mért fázistávolságok súlyozott összege, amellyel olyan fiktív mérési eredményeket tudunk létrehozni, amelyek bizonyos frekvenciától függő mérési hibákat csökkentenek vagy kiejtenek. A lineáris kombinációk egyik hátránya azonban, hogy a hibaterjedés miatt a lineáris kombinációkkal akár zajosabb mérésekhez is juthatunk.

A lineáris kombinációk általános alakja:

$$f_{n,m} = nf_1 + mf_2 \quad (8.29)$$

ahol  $n$  és  $m$  első közelítésben egész számok, de akár lehetne valós számok is.

Tetszőleges  $n, m$  lineáris kombináció hullámhossza kiszámítható az alábbi összefüggés segítségével:

$$\lambda_{n,m} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{n\lambda_2 + m\lambda_1}, \quad (8.30)$$

míg az ionoszféra hatása egy hasonló lineáris kombinációra:

$$dion_{n,m} = \frac{nf_1 dion_1 + mf_2 dion_2}{nf_1 + mf_2}. \quad (8.31)$$

Bevezetve az ionoszférikus skálatényezőt, amely a lineáris kombinációra és az L1 frekvenciára kifejtett hatás hányadosa:

$$\begin{aligned} isf &= \frac{dion_{n,m}}{dion_1} = \frac{nf_1 + m \frac{f_2}{dion_1} dion_2}{nf_1 + mf_2} = \frac{1}{f_2} \frac{nf_1 f_2 + m \frac{f_2^2}{dion_1} dion_2}{nf_1 + mf_2} = \\ &= \frac{1}{f_2} \frac{nf_1 f_2 + mf_1^2}{nf_1 + mf_2} = \frac{f_1}{f_2} \left( \frac{nf_2 + mf_1}{nf_1 + mf_2} \right). \end{aligned} \quad (8.32)$$

A (8.32) egyenletből látható, hogy végtelen sok ionoszféra mentes lineáris kombináció alakítható ki. Ehhez nincsen másra szükségünk, mint hogy az zárójelben található tört számlálója zérus értékű legyen.

Levezetés nélkül közöljük a lineáris kombináció zajának meghatározását. Ehhez az ún. zaj skálatényezőt kell felhasználnunk:

$$\sigma_{n,m} = nsf \cdot \sigma_1, \quad ahol \quad nsf = \frac{\lambda_2 \sqrt{(n^2 + m^2)}}{n\lambda_2 + m\lambda_1} \quad (8.33)$$

Nézzük meg a következőkben néhány lineáris kombináció tulajdonságait.

### 8.2.1. A wide-lane lineáris kombináció (L5)

Mint már megismerhettük, a wide-lane lineáris kombináció kialakításához  $n=1$  és  $m=-1$  súlyokat veszünk fel. Így a lineáris kombináció hullámhossza 86 cm. A lineáris kombináció nem ionoszféra mentes, a (8.32) képlettel meghatározható skálatényező:



$$isf = \frac{f_1}{f_2} \left( \frac{f_2 - f_1}{f_1 - f_2} \right) = -1,3 \quad (8.34)$$

míg a zaj:

$$\sigma_{L5} = nsf_{L5} \cdot \sigma_1 = \frac{\lambda_2 \sqrt{2}}{\lambda_2 - \lambda_1} = 19,4mm \quad (8.35)$$

A wide-lane lineáris kombinációt magas zajszint jellemzi, viszont a hosszú hullámhossz miatt a wide-lane ciklustöbbsértelműség feloldása könnyen megoldható az ionoszféra okozta késleltetés meghatározása mellett.

### 8.2.2. A narrow-lane lineáris kombináció (L6)

A narrow-lane lineáris kombináció esetén  $n=m=1$ . Ekkor a hullámhossz 10,7 cm, megint csak nem ionoszféra mentes lineáris kombinációról van szó, amelynek viszont a zajszintje nagyon alacsony:

$$\sigma_{NL} = nsf_{NL} \cdot \sigma_1 = \frac{\lambda_2 \sqrt{2}}{\lambda_2 + \lambda_1} = 2,4mm . \quad (8.36)$$

Emiatt ezzel a lineáris kombinációval kaphatnánk elméletileg a legpontosabb eredményt, ha az ionoszféra okozta késleltetést pontosan meg tudnánk határozni.

### 8.2.3. Az L3 ionoszféra mentes lineáris kombináció

Alakítsuk ki az alábbi súlyozással egy lineáris kombinációt:

$$\Phi_{L3} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \Phi_{L1} - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \Phi_{L2} \quad (8.37)$$

Ebben a lineáris kombinációban az ionoszféra okozta sebességmódosító hatás kiesik. A lineáris kombináció hullámhossza 5,4 cm, míg a zajszintje 9,8mm. A magas zajszint miatt abban az esetben, ha az ionoszféra okozta hatást rövid bázisvonalakon végzett méréseknél relatív helymeghatározással ki tudjuk ejteni, akkor célszerű az L1 frekvencián végzett észleléseket feldolgozni. Ha hosszúak a bázisvonalak, akkor pedig az ionoszféra mentes lineáris kombináció kialakítva meg lehet oldani a hosszú vektorokat is.

Megjegyezzük, hogy a legtöbb feldolgozó szoftver rövid bázisvonalak esetén automatikusan csak az L1 frekvencián végzett észleléseket dolgozza fel, így ezekben az esetekben az L2 frekvencián végzett (amúgy zajosabb) észlelések nem használják fel a szoftverek.

## 8.3. A ciklustöbbsértelműségek feloldásának menete

Mint azt már a korábbiakban is láttuk, a ciklustöbbsértelműségeket a legkisebb négyzetek szerinti kiegyenlítési eljárással a koordináták meghatározásával együttesen (vagy anélkül) meg tudjuk oldani. Az LNM azonban nem képes a ciklustöbbsértelműségek megoldására az egész számok halmazán, emiatt egy további eljárásban meg kell határoznunk a ciklustöbbsértelműségek legvalószínűbb egész számú értékét. Ezt a folyamatot hívjuk ciklustöbbsértelműség feloldásnak.

A feloldás menete az alábbi:

1. Első lépésben mivel a műholdak, a vevők hardverkésései, órahibái miatt a fázismérések esetében a ciklustöbbértelműség nem egész szám, ezért ezeket a hibákat különbségképzéssel kiküszöböljük (kettős különbségek meghatározása).
2. Ezt követően felhasználhatjuk a kettős különbségek közvetítő egyenleteit a ciklustöbbértelműségek (és a koordináták) megoldására;
3. Ha meghatároztuk a ciklustöbbértelműség értékeit (L1, L2), akkor ezeket felhasználva a ciklustöbbértelműségeket az egész számok halmazán kell megkeresnünk. Ezt hívják ciklustöbbértelműség feloldásnak. Erre számos technika áll rendelkezésre, közös bennük, hogy valamiféle keresési/optimalizálási eljárás alapján alapulnak.

Nézzünk egy példát a ciklustöbbértelműségek feloldására. Első lépésben írjuk fel a wide-lane lineáris kombináción értelmezett kettős különbséget:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2 b_{AB,L_1}^{j,l} - \lambda_1 b_{AB,L_2}^{j,l}}{\lambda_2 - \lambda_1} &= a_{k,1} \delta x_A + a_{k,2} \delta y_A + a_{k,3} \delta z_A + \\ &+ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{A,WL}^j - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{B,WL}^j - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{A,WL}^l + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{B,WL}^l \\ &- \frac{\lambda_2}{\lambda_1} I_{A,L1}^j + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} I_{B,L1}^j + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} I_{A,L1}^l - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} I_{B,L1}^l \end{aligned} \quad (8.38)$$

A (8.38) képletben ismeretlenként szerepel a bázisvonal  $A$  pontjának koordinátája (ne felejtjük el, hogy  $B$  pont ismert koordinátájú pont), valamint a wide-lane ciklustöbbértelműségek és az ionoszféra okozta hatások. Az ionoszféra okozta hatásokat ionoszféra modellek segítségével figyelembe tudjuk venni. Abban az esetben, ha kellően jó (néhány cm-es pontosságú) előzetes koordinátáink is vannak, akkor az  $A$  pont koordinátaváltozásainak becslésétől is eltekinthetünk. Ilyen koordináták származhatnak például a hármas különbségek megoldásából, hiszen azok függetlenek a ciklustöbbértelműségek értékétől. Természetesen ehhez előbb le kell ellenőrizni, hogy nem volt-e ciklusugrás a mérési időtartam alatt, és ha volt, akkor azt javítani kell.

Nézzük meg a következőkben, hogy hogyan oldható fel a ciklustöbbértelműség egész számként. A legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítésből megkaptuk a ciklustöbbértelműségek legvalószínűbb értékeit illetve azok középhibáját a valós számok halmazán. A következőkben meg kell határoznunk a legvalószínűbb egész megoldásokat az egész számok halmazán. Erre számos módszer használható, a következőkben a néhány leggyakrabban használt módszert fogjuk áttekinteni.

### 8.3.1. A kerekítés módszere

A kerekítés módszere a legegyszerűbb, de egyben legkevésbé korrekt feloldási eljárás. A lényege, hogy a valós számként megoldott ciklustöbbértelműségeket egyszerűen a legközelebbi egész számra kerekítjük.

A módszer hátránya, hogy a mérésekben szereplő hibák hatása megjelenik a ciklustöbbértelműségek értékeiben, ráadásul a hibák hatása nem feltétlenül kisebb mint egy ciklus. Ráadásul ez a módszer nem veszi figyelembe a kiegyenlítésből származó kovariancia információkat.

### 8.3.2. A keresés módszere

Legyen  $\mathbf{p}$  a kiegyenlítésből származó (valós) ciklustöbbértelműségek értékeinek vektora:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_u) \quad (8.39)$$

Legyen  $\mathbf{Q}$  a kiegyenlítésből származó kofaktor mátrix és  $\sigma_0^2$  az a posteriori varianciafaktor.

Számítsuk ki egy tetszőleges ciklustöbbértelműség és két ciklustöbbértelműség különbségének középhibáját:

$$m_i = \sigma_0 \sqrt{Q_{ii}} \quad (8.40)$$

$$m_{ij} = \sigma_0 \sqrt{Q_{ii} - 2Q_{ij} + Q_{jj}} \quad (8.41)$$

A középhibák ismeretében alkossunk egy adott konfidenciaszinthez tartozó Student-eloszlás alapján egy-egy konfidenciaintervallumot:

$$\begin{aligned} p_i - \xi m_i &\leq p_{Ai} \leq p_i + \xi m_i, \quad i = 1, 2, \dots, u \\ p_{ij} - \xi m_{ij} &\leq p_{Aij} \leq p_{ij} + \xi m_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, u; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Et követően állítsuk elő az egész számokat tartalmazó ciklustöbbértelműség vektorokat, amelyek minden olyan lehetséges kombinációt tartalmaznak, amelyek kielégítik a fenti egyenleteket. A lehetséges ciklustöbbértelműség vektorokat felhasználva újra elvégezzük a kiegyenlítést, most már a vektorokban szereplő ciklustöbbértelműségeket felhasználva. Így minden egyes lehetséges ciklustöbbértelműség vektorhoz előállítható egy-egy a kiegyenlítést jellemző középhiba:

$$\sigma_h, \quad h = 1, \dots, N \quad (8.43)$$

A lehetséges ciklustöbbértelműség vektorok közül az lesz a megoldás, amelyet a legkisebb középhiba jellemzi, kivéve ha:

- A középhiba nagyságrendekkel nagyobb, mint az a priori érték, vagy valamilyen referencia érték;
- van még legalább egy olyan  $\mathbf{p}$  vektor, amelyre a kapott  $\sigma$  értékek közel azonosak.

Megjegyezzük, hogy például a Trimble Geomatics Office szoftverben az első ellenőrzést végezhetjük el a bázisvonalak megoldása során a referencia variancia vizsgálatával (10 alatt kell legyen), míg a második ellenőrzést az ún. ratio értékek alapján végezhetjük el. A ratio teszt nem jelent mást, mint annak a meghatározását, hogy mekkora a hányadosa a második legkisebb középhibának és a legkisebb középhibának. Minél nagyobb ez a ratio érték (minimálisan 3 az elfogadható arány), annál biztosabbak lehetünk afelől, hogy a ciklustöbbértelműségek megfelelően lettek feloldva.

A keresés módszerének egyik hátránya, hogy vagy mindegyik ciklustöbbértelműséget feloldja, vagy egyiket sem.

### 8.3.3. A szigma módszer

A szigma módszer alkalmazásához ismét meghatározzuk az egyes ciklustöbbértelműségek középhibáit a (8.40) képlet alapján. Ezt követően tegyük sorrendbe az összes ciklustöbbértelműséget saját középhibájuk szerint növekvő sorrendben.

Ezt követően egy iterációs lépésben maximálisan  $N_{max}$  ciklustöbbértelműséget oldunk fel oly módon, hogy a ciklustöbbértelműség értékét a legközelebbi egész számra kerekítjük, amennyiben:

- a ciklustöbbértelműség középhibája kisebb, mint egy előre meghatározott határérték;

- a megfelelő konfidenciaszinthez tartozó konfidenciaintervallumba (lásd a keresés módszernél) pontosan egyetlen egész szám található.

Az iterációs lépések addig folytatódnak, míg:

- minden ciklustöbbséget sikerült feloldani; vagy
- az utolsó iterációs lépésben már egyetlen ciklustöbbséget sem sikerült feloldani.

A módszer előnye, hogy nem feltétlenül kell az összes ciklustöbbséget feloldanunk, amennyiben az nem lehetséges a mérési hibák miatt.