7. előadás:

Zárthelyi dolgozat az 1-6. előadások anyagából. A helymeghatározás matematikai modelljei: a kódméréses abszolút és a differenciális helymeghatározás.

A GNSS mérések matematikai feldolgozása során egyrészről a kódmérésekre másrészről a fázismérésekre is támaszkodhatunk. A mérési eredményektől függetlenül a mérési eredmények és a meghatározandó paraméterek (koordináták, vevő órahiba és esetlegesen egyéb ismeretlenek) között az alábbi közvetítőegyenletrendszert tudjuk felállítani:

$$\boldsymbol{L} = f(\boldsymbol{X}) \tag{7.1}$$

ahol L a mérési eredmények vektora, míg X a meghatározandó paraméterek vektora.

A meghatározandó paraméterek általában három fő csoportba oszthatóak:

1. Globális geodinamikai jelenségeket leíró paraméterek:
    - műholdak pályaszámításához szükséges kezdőértékek a pályaszámítás koordinátarendszerében;
    - a perturbációs gyorsulások;
    - az inerciális és a földi koordinátarendszerek közötti kapcsolatot megteremtő földforgás paraméterek;
    - globális megfigyelőállomások koordinátái, és azok változásai.
2. A jelterjedéshez kapcsolódó paraméterek:
    - ionoszféra;
    - troposzféra;
    - többutas terjedés;
3. A műholdak és a vevők hardveréhez kapcsolódó paraméterek:
    - az adó és a vevő fáziscentrum külpontossága, és annak ingadozása;
    - a vevők és a műholdak óráinak állása és járása (órahiba, drift);

Általában az adott felhasználási cél határozza meg, hogy a fenti említett paraméterek közül melyeket tekintjük ismeretlennek és melyek azok, amelyeket a feladat megoldásához kellő pontossággal modellezni tudunk. Helymeghatározás esetén a koordináták és a vevőórahibák mindenképpen meghatározandó paramétereknek számítanak, míg az egyéb szabályos hibákat akár modellekkel is figyelembe tudjuk venni. Ezen modellekkel korrekciós tényezőket határozhatunk meg, amelyekkel a nyers mérési eredményeket megjavítva a szabályos hibák hatása eltávolítható.

Nézzünk néhány példát a különféle alkalmazásokra. Fedélzeti pályaadatok és műhold órahibák meghatározása esetén ismert paraméterként vehetjük fel a földi követőállomások koordinátáit és a vevő órahibákat (mivel a követőállomásokon atomi frekvenciaetalonok szolgáltatják az időjeleket). Az ionoszféra és a troposzféra okozta hibák hatását korrekciókkal vehetjük figyelembe és a P-kódú méréseket Kálmán-szűréssel dolgozzák fel. Ebben az esetben a meghatározandó ismeretlen paraméterek a műhold koordináták illetve a műhold órahibák értéke.

Precíz pályamegoldások, műholdóra adatok és Földforgás paraméterek levezetéséhez ismét ismert állomáskoordinátákat használunk fel, amelyeket más technológiával műholdas lézermérésekkel (SLR) vagy hosszú bázisvonalú interferometriával (VLBI) határoznak meg.

Az említett paramétereket az IGS globális állomáshálózatának felhasználásával regionális analízisközpontok számítják, amelyek eredményeit kombinálva előáll az IGS hivatalos pályamegoldása. A precíz pályamegoldások kiszámításához általában az ionoszféra hatását a mérési eredmények megfelelő kombinációjával kiküszöbölhetjük, míg a troposzféra okozta hatást általában a meghatározandó paraméterekkel együtt becsüljük.

7.1. A geodéziai és geodinamikai célú helymeghatározás matematikai modelljei

A következőkben részletesebben foglalkozunk a geodéziai és geodinamikai célú helymeghatározás matematikai modelljeinek ismertetésével. Ebben az esetben ismert paraméterként kezeljük a műholdak koordinátáit és az órahibákat. Az említett paraméterek származhatnak akár a fedélzeti pályaadatokból, akár az IGS pályamegoldások integrálásából is. Másrészről azt is feltételezzük, hogy a hálózatban olyan állomások is szerepelnek, amelyek koordinátáit ismerjük.

Az ismert paraméterek értékeivel korrigálva a méréseket, a közvetítő egyenleteket linearizálhatjuk (Taylor-sorba fejthetjük):

$$\boldsymbol{L} - f(\boldsymbol{X}_c) = f(\boldsymbol{X}_0 + \delta\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{X})_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} + \sum \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} \right)_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} \cdot \delta\boldsymbol{x} + \ldots, \tag{7.2}$$

ahol $\boldsymbol{X_c}$ a korrekciók vektora, $\boldsymbol{X_0}$ a meghatározandó paraméterek előzetes értékének vektora, míg $\delta\boldsymbol{x}$ a paraméterek megváltozásának vektora.

Az előzetes értékek alapján számított függvényértékeket átvisszük a (7.2) egyenlet bal oldalára, így:

$$\boldsymbol{L} - f(\boldsymbol{X}_c) - f(\boldsymbol{X}_0) = \sum \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}} \right)_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0} \cdot \delta\boldsymbol{x} + \ldots, \tag{7.3}$$

Ha a Taylor-sor magasabb rendű tagjait elhanyagoljuk, akkor a közvetítőegyenletek az alábbi alakban is írhatóak:

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{b}} = \underset{n\times m}{\boldsymbol{A}} \; \underset{m\times 1}{\boldsymbol{x}} + \underset{n\times 1}{\boldsymbol{v}}, \tag{7.4}$$

amely egyenletrendszert a legkisebb négyzetek szerinti kiegyenlítés módszerével oldhatjuk meg.

7.1.1. A GNSS mérések közvetítőegyenletei

A (7.1) egyenlet formájában az alábbiakban öszegyűjtjök az alapvető GNSS mérési eredmények közvetítőegyenleteit.

Az L_1 és L_2 frekvencián mért fázistávolságokat az alábbi közvetítőegyenletekkel írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \Phi^j_{k,L_1}(t_i) = {} & \rho^j_k\left(t_i - \tau^j_k, t_i\right) - c\delta t_k(t_i) + c\delta t^j\left(t_i - \tau^j_k\right) + \lambda_{L_1} N^j_{k,L_1} + \\ & + T^j_k(t_i) - I^j_k(t_i) + v_{\Phi^j_{k,L_1}}(t_i) \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} \Phi^j_{k,L_2}(t_i) = {} & \rho^j_k\left(t_i - \tau^j_k, t_i\right) - c\delta t_k(t_i) + c\delta t^j\left(t_i - \tau^j_k\right) + \lambda_{L_2} N^j_{k,L_2} + \\ & + T^j_k(t_i) - \gamma I^j_k(t_i) + v_{\Phi^j_{k,L_2}}(t_i) \end{aligned} \tag{7.6}$$

ahol $\Phi^{j}_{k,L_1}(t_i)$ a *k* ponton elhelyezett vevő *j* műholdra végzett fázistávolság mérésének eredménye L_1 frekvencián t_i időpontban, $\rho^j_k(t_i-\tau^j_k,t_i)$ a valódi távolság a műhold jel kibocsátásakor érvényes koordinátái és a földi pont jel észlelési közötti koordinátái között. A képletekben τ^j_k a jel terjedési ideje a *j* műholdtól a *k* ponton elhelyezett vevőig. δt_k és δt^j a vevő és a műhold órahibája, N^j_{k,L_1} az L_1 frekvencián értelmezett ciklustöbbértelműség értéke a *k* pont és a *j* műhold között. T^j_k a troposzféra okozta késleltető hatás, míg I^j_k az ionoszféra hatása az L_1 frekvencián. Végezetül $v_{\Phi^j_{k,L_1}}$ a fázistávolságokat terhelő véletlen jellegű hiba értéke. Megjegyezzük, hogy a (7.6) képlet jelölései megegyeznek a (7.5) képlet jelöléseivel. Az ionoszféra diszperzív jellege miatt, az L_2 frekvencián az ionoszféra okozta késleltetést az L_2 frekvencia késleltetésének γ szorosával vehetjük figyelembe, ahol:

$$\gamma=\frac{f_1^2}{f_2^2} \tag{7.7}$$

A kódtávolságokra felírható közvetítőegyenletek az alábbiak szerint alakulnak:

$$P^j_{k,L_1}(t_i)=\rho^j_k(t_i-\tau^j_k,t_i)-c\delta t_k(t_i)+c\delta t^j(t_i-\tau^j_k)+T_k(t_i)+I^j_k(t_i)+v_{P^j_{k,L_1}}(t_i) \tag{7.8}$$

és

$$P^j_{k,L_2}(t_i)=\rho^j_k(t_i-\tau^j_k,t_i)-c\delta t_k(t_i)+c\delta t^j(t_i-\tau^j_k)+T_k(t_i)+\gamma I^j_k(t_i)+v_{P^j_{k,L_2}}(t_i) \tag{7.9}$$

A (7.8) és (7.9) képletekben P^j_{k,L_i} a *k* pont és a *j* műhold között az L_i frekvencián mért pszeudotávolság. A többi jelölés megegyezik a fázistávolságokra felírt egyenletek jelöléseivel.

A (7.6-7.9) egyenletekben a bal oldalon találhatóak a mérési eredmények, a jobb oldalon pedig a különféle paraméterek értékei. Vegyük észre, hogy az ismeretlen vevő koordináták a ρ távolságok tagjában szerepelnek. Írjuk fel a ρ távolságot a műhold és a vevő koordinátáinak függvényeként:

$$\rho^j_k(t_i-\tau^j_k,t_i)=\rho^j_k(t_0,t_i)=\sqrt{\left[X^j(t_0)-X_k(t_i)\right]^2+\left[Y^j(t_0)-Y_k(t_i)\right]^2+\left[Z^j(t_0)-Z_k(t_i)\right]^2} \tag{7.10}$$

ahol X^j, Y^j, Z^j a műhold koordinátái a jel kibocsátásának pillanatában, míg X_k,Y_k,Z_k a vevő koordinátái a jel beérkezésének pillanatában. Az egyenlet linearizálásához számítsuk ki az egyes parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial\rho^j_k(t_0,t_i)}{\partial X_k(t_0,t_i)}=-\frac{X^j(t_0)-X_k(t_i)}{\rho^j_k(t_0,t_i)}, \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial\rho^j_k(t_0,t_i)}{\partial Y_k(t_0,t_i)}=-\frac{Y^j(t_0)-Y_k(t_i)}{\rho^j_k(t_0,t_i)}, \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial\rho^j_k(t_0,t_i)}{\partial Z_k(t_0,t_i)}=-\frac{Z^j(t_0)-Z_k(t_i)}{\rho^j_k(t_0,t_i)}.. \tag{7.13}$$

Vegyük észre, hogy a (7.10) egyenletben a műhold pozícióját a jel kibocsátásának időpontjában kell meghatároznunk. Ehhez ismernünk kell a jel futási idejét, amit azonban csak a jel terjedési sebessége és a megtett távolság ismeretében tudunk meghatározni. Emiatt a terjedési idő iteratív úton határozható meg. A futási idő kezdőértékét az alábbi képlettel határozhatjuk meg:

$$\left(\tau_k^j\right)_0 = \frac{\rho_k^j\left(t_i, t_i\right)}{c}, \tag{7.14}$$

majd az n-edik iterációs lépésben a meghatározott terjedési idő:

$$\left(\tau_k^j\right)_n = \frac{\rho_k^j\left(t_i - \left(\tau_k^j\right)_{n-1}, t_i\right)}{c}. \tag{7.15}$$

Mivel azonban a jel terjedése alatt a Föld elfordult, ezért még egy további elforgatásra is szükségünk van:

$$\begin{bmatrix} X^j(t_0) \\ Y^j(t_0) \\ Z^j(t_0) \end{bmatrix}_{ECEF} = \begin{bmatrix} +\cos\left(\tau_k^j \omega_E\right) & +\sin\left(\tau_k^j \omega_E\right) & 0 \\ -\sin\left(\tau_k^j \omega_E\right) & \cos\left(\tau_k^j \omega_E\right) & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^j\left(t_i - \tau_k^j\right) \\ Y^j\left(t_i - \tau_k^j\right) \\ Z^j\left(t_i - \tau_k^j\right) \end{bmatrix}_{ECI} \tag{7.16}$$

Így kiszámítottuk a műhold koordinátáit a Földdel együtt forgó koordinátarendszerben (Earth Centered Earth Fixed – ECEF).

A koordinátaparamétereket követően röviden vizsgáljuk meg a műholdak óraparamétereit is. Az órahibákkal kapcsolatban általában azok távolságra kifejtett hatását tekintjük ismeretlen paraméternek ($c\delta t$).

A fedélzeti pályaadatokból vagy a precíz pályaadatokból interpolációval meghatározható műhold órahibákat az elliptikus pályából eredő relativisztikus korrekcióval is el kell látni:

$$\Delta t^j\left(t_i - \tau_k^j\right) = \Delta t^j\left(t_i - \tau_k^j\right)_E - 2\frac{\boldsymbol{R}^j\left(t_i - \tau_k^j\right)\dot{\boldsymbol{R}}\left(t_i - \tau_k^j\right)}{c^2} \tag{7.17}$$

ahol R^j a műhold helyvektora, míg $\dot{R}^j$ a műhold sebességvektora.

Ezen felül kódmérések esetén figyelembe kell vennünk a műholdak hardverkésését is, ami a navigációs üzenetben található T_{GD} (differenciális csoport késés) értékkel jellemezhető. Az L_1 vivőjelen ennek hatása $-T_{GD}$, míg L_2 vivőjelen a hardverkésés $-\gamma T_{GD}$ hibát okoz.

7.1.2. A kódmérésen alapuló abszolút helymeghatározás

A (7.2) egyenletet felhasználva írjuk fel az abszolút helymeghatározás matematikai modelljét. A modell felírásához feltesszük, hogy a műhold órahibáját, a troposzféra és az ionoszféra hatását korrekcióként figyelembe tudjuk venni. Ennek eredményeképpen a közvetítő egyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{aligned} & P_{k,L_1}^j - c\Delta t^j\left(t_i - \tau_k^j\right)_0 - \rho_k^j\left(t_0, t_i\right) - T_k\left(t_i\right) - I_k^j\left(t_i\right) = \\ & = \frac{X^j(t_0) - X_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \cdot \delta x - \frac{Y^j(t_0) - Y_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \cdot \delta y - \frac{Z^j(t_0) - Z_k(t_i)}{\rho_k^j(t_0, t_i)} \cdot \delta z - c\delta t_k\left(t_i\right) + v_{P_{k,L_1}^j} \end{aligned} \tag{7.18}$$

amely röviden:

$$b_{k,L_1}^j = a_{k,1} \cdot \delta x + a_{k,2} \cdot \delta y + a_{k,3} \cdot \delta z - a_{k,4} \delta t_k + v_{k,L_1} \tag{7.19}$$

Az egyenletből láthatjuk, hogy meghatározandó ismeretlen paraméterként csak a három vevőkoordináta változása, illetve a vevőóraihiba értéke maradt meg.

A kódmérésen alapuló abszolút helymeghatározás alkalmazási területe egyrészről a geodéziai és navigációs vevők C/A kódmérésének feldolgozása fedélzeti pályaadatok felhasználásával (troposzféra modellből, ionoszféra a navigációs üzenetekből), valamint a C/A mérések utólagos feldolgozása (állomáskoordináták és vevő-órahibák becslése) – pontosabb modellekkel figyelembe vehetőek a légkör sebességmódosító hatásai, illetve akár ionoszféra-mentes lineáris kombináció is feldolgozható.

9. feladat

Abszolút helymeghatározás kódméréssel

Határozzuk meg a BUTE permanens állomás 2011. március 31-én 8.15-kor végzett kódméréseiből a vevő koordinátáit. Ehhez felhasználhatjuk a megadott dátumhoz tartozó fedélzeti pályaelemeket, illetve a BUTE állomás mérési fájlját. A kérdéses időponthoz tartozó észlelések RINEX formátumban:

```
     2.11           OBSERVATION DATA    M (MIXED)           RINEX VERSION / TYPE
teqc  2011Oct11                         20121013 11:01:38UTCPGM / RUN BY / DATE
BUTE                                                        MARKER NAME
11209M001                                                   MARKER NUMBER
BUTE                DGS                                     OBSERVER / AGENCY
4722K06130          TRIMBLE NETR5                           REC # / TYPE / VERS
30436720            TRM55971.00     TZGD                    ANT # / TYPE
  4081882.3704  1410011.1376  4678199.3815                  APPROX POSITION XYZ
        0.0000        0.0000        0.0000                  ANTENNA: DELTA H/E/N
     1     1                                                WAVELENGTH FACT L1/2
     6    L1    L2    C1    P2    S1    S2                  # / TYPES OF OBSERV
    30.0000                                                 INTERVAL
  2011     3    31     8    15    0.0000000     GPS         TIME OF FIRST OBS
    15                                                      LEAP SECONDS
                                                            END OF HEADER
 11  3 31  8 15  0.0000000  0  9G24G32G11G20G23G17G31G14G19
 106396223.617 9  82906203.095 9  20246536.047    20246549.313          50.300
        41.000
 107722841.464 9  83939903.728 9  20498979.203    20498991.148          50.900
        40.400
 108953737.336 9  84899073.230 9  20733217.539    20733227.953          50.300
        40.600
 109564476.700 9  85375008.196 9  20849437.633    20849448.352          50.800
        39.900
 120267163.893 9  93714742.599 9  22886082.445    22886092.234          47.100
        32.500
 120515208.904 9  93907989.961 9  22933285.211    22933299.406          47.100
        34.900
 121411817.449 9  94606703.383 9  23103898.227    23103913.508          47.500
        32.700
 125625722.884 9  97890223.394 8  23905792.133    23905808.094          39.900
        25.300
 132233071.431 9 103038797.101 8  25163147.570    25163165.914          39.900
        21.500
```

A RINEX állományból látható, hogy ebben az időpontban összesen 9 GPS műholdra végzett kódmérést a vevő, ezek a PRN 24, 32, 11, 20, 23, 17, 31, 14 és 19-es holdak voltak. Az egyes holdakhoz tartozó L1 frekvencián végzett pszeudotávolság mérések az egyes sorok negyedik oszlopában találhatóak (lásd a RINEX állomány fejlécében a # / TYPES OF OBSERV sort).

Így a számításokhoz az alábbi méterben kifejezett kódtávolságokat fogjuk felhasználni:

PRN11	20733217.54	PRN 23	22886082.45
PRN14	23905792.13	PRN 24	20246536.05
PRN17	22933285.21	PRN 31	23103898.23
PRN19	25163147.57	PRN 32	20498979.20
PRN20	20849437.63		

A számítások elvégzése során meg kell határoznunk az egyes kódmérések javításait (órahiba, ionoszferikus javítás, troposzferikus hatások, Föld forgásának hatása), majd felírjuk a javítási egyenletek alapján a helymeghatározás normálegyenlet rendszerét. Ezt követően elvégezhetjük a legkisebb négyzetek szerinti kiegyenlítést és meghatározhatjuk a vevő koordinátáit.

Határozzuk meg a kódmérések javításait, valamint a normál egyenletrendszer alakmátrixának együtthatóit a PRN 11-es számú műholdra:

1. A megadott mérési epocha időpontja a GPS hét elejétől kezdve másodpercben kifejezve:

$$t = 4 \cdot 86400 + 8 \cdot 3600 + 15 \cdot 60 = 375\,300 s$$

2. A PRN 11 műholdra végzett kódtávolság felhasználásával határozzuk meg a jel kibocsátásának időpontját:

$$t - \tau = 375\,300 - \frac{20\,733\,217.54}{299\,792\,458} = 375\,299{,}930\,841\,s$$

3. Határozzuk meg a jel kibocsátásának időpontjára a PRN 11-es számú műhold WGS-84 koordinátáit (lásd 3. előadás 2. feladat):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ECEF} = \begin{bmatrix} 22\,107\,591{,}99 \\ 8\,235\,343{,}78 \\ 12\,203\,508{,}31 \end{bmatrix} [m]$$

4. Határozzuk meg a műhold órahiba értékét (4.46) és annak hatását a kódtávolságokra:

Az órahiba polinom alapján számított érték:

$$\delta_0^{PRN11} = a_0 + a_1(t - \tau - t_0) + a_2[(t-\tau) - t_0]^2 = -1.388304 \cdot 10^{-4}\ [s]$$

melynek hatása a kódtávolságokra:

$$\Delta P_0^{PRN11} = c \cdot \delta_0^{PRN11} = 41\,620{,}31\,[m]$$

Az elliptikus pályából eredő relativisztikus korrekció (4.41):

$$\Delta t_{ell}^{rel} = -4.442\,807\,633 \cdot 10^{-10} \left[\frac{s}{\sqrt{m}}\right] \cdot e \cdot \sqrt{a} \sin E = -2.67 \cdot 10^{-8}\ [s]$$

melynek hatása a kódtávolságokra:

$$\Delta P_{ell}^{rel} = c \cdot \Delta t_{ell}^{rel} = -8{,}01\,[m]$$

A differenciális csoportkésés hatása az L1 frekvencián végzett kódmérésekre a fedélzeti pályaadatok alapján:

$$\Delta t_{GD} = -T_{GD} = 1{,}164153 \cdot 10^{-8}\ [s]$$

melynek hatása a kódtávolságokra:

$$\Delta P_{GD} = -c \cdot T_{GD} = 3{,}49\,[m].$$

A teljes órahiba hatásával javított kódtávolság tehát:

$$\left(P^{PRN11}\right)' = P^{PRN11} + \Delta P_0^{PRN11} + \left(\Delta P_{ell}^{rel}\right)_{PRN11} + \left(\Delta P_{GD}\right)_{PRN11} = 20691592{,}71\,[m]$$

5. Határozzuk meg az ionoszféra és a troposzféra okozta késleltetést a PRN 11 műholdra végzett kódmérésekre. A Klobuchar-modellt használjuk az ionoszféra (lásd 4. fejezet 3. feladat), míg a Saastamoinen-modellt a troposzféra modellezésére (5. fejezet 6. feladat)! Az így kapott műhold irányú késleltetések metrikus értékei:

$$I = 4{,}63\,[m],$$
$$T = 2{,}62\,[m].$$

6. A teljes korrigált kódtávolság:

$$\left(P^{PRN11}\right)' = P^{PRN11} + \Delta P_0^{PRN11} + \left(\Delta P_{ell}^{rel}\right)_{PRN11} + \left(\Delta P_{GD}\right)_{PRN11} - I - T = 20691585{,}47\,[m]$$

7. A BUTE permanens állomás előzetes koordinátái, valamint a PRN 11 műhold jel kibocsátásának időpillanatában ismert WGS-84 koordinátái alapján meghatározhatjuk a geometriai távolság (ρ_0) előzetes értékét:

$$\left(\rho_{BUTE}^{PRN11}\right)_0 = \sqrt{\left[X^{PRN11}(t-\tau) - \left(X_{BUTE}\right)_0\right]^2 + \left[Y^{PRN11}(t-\tau) - \left(Y_{BUTE}\right)_0\right]^2 + \left[Z^{PRN11}(t-\tau) - \left(Z_{BUTE}\right)_0\right]^2} =$$
$$= 20691583{,}98\,[m]$$

Vegyük észre, hogy mivel a műhold koordinátáit a Földdel együtt forgó koordinátarendszerben (ECEF) határoztuk meg, így a Föld elfordulásának a hatását nem kell külön a (7.16) egyenlettel figyelembe vennünk.

8. A (7.18) egyenlet segítségével írjuk fel a kódtávolságok közvetítő egyenletét. Ehhez ki kell számítanunk az alakmátrix együtthatóit:

$$-\frac{X^{PRN11}(t-\tau) - X_{BUTE}(t)}{\left(\rho_{BUTE}^{PRN11}\right)_0} = -0{,}87116$$

$$-\frac{Y^{PRN11}(t-\tau) - Y_{BUTE}(t)}{\left(\rho_{BUTE}^{PRN11}\right)_0} = -0{,}32986$$

$$-\frac{Z^{PRN11}(t-\tau) - Z_{BUTE}(t)}{\left(\rho_{BUTE}^{PRN11}\right)_0} = -0{,}36369$$

A vevő órahiba értéke helyett általában annak kódtávolságokra kifejtett metrikus hatását határozzuk meg paraméterként, így e paraméter együtthatója minden esetben 1.

A tisztatag vektor PRN 11 műholdhoz tartozó eleme pedig:

$$l_{BUTE}^{PRN11} = \left(P^{PRN11}\right) - \left(\rho_{BUTE}^{PRN11}\right)_0 = 1{,}49\,[m]$$

A javítási egyenletrendszer alakmátrixának és tisztatag vektorának összeállítása

Az (1)-(8) lépéseket minden egyes mért kódtávolságra végre kell hajtani. Így meghatározhatjuk az alakmátrix, illetve a tisztatag vektor elemeit. Ezt követően már csupán a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítést kell végrehajtanunk. A méréseinket az egyszerűség kedvéért egység súlyú méréseknek feltételezzük. Természetesen elképzelhető más súlyozási stratégia is. Ilyen például a zenitszög koszinuszával történő súlyozás, ami jobban kifejezi a különböző magassági szögek alatt látszó műholdakra végzett kódtávolság mérések súlyviszonyait.

Az (1)-(8) lépések végrehajtása során a számítás egyes részeredményeit az alábbi táblázatokban közöljük.

PRN	X [m]	Y [m]	Z [m]
11	22107591.99	8235343.78	12203508.31
14	-7573750.83	13923474.06	21443290.62
17	8145158.90	-14396194.80	20868469.00
19	23329367.53	8667217.10	-9749416.51
20	18218663.97	-5621010.87	18317308.69
23	26725451.60	709691.40	817733.01
24	18313405.93	7541795.05	17883696.59
31	5430973.62	23727757.39	10570728.98
32	15209546.80	4716891.74	21491195.30

A műholdak helyzete a jelek kibocsátásának időpontjában a Földdel együtt forgó koordinátarendszerben

prn	relativisztikus javítás [m]	T_{GD} [m]	műhold órahiba [m]	trop. jav.	iono. jav.	összes korrekció
11	-8.01	-3.49	-41620.31	2.59	4.62	-41632.04
14	2.73	-2.65	42261.58	7.27	9.60	42250.09
17	3.91	-3.07	55219.36	4.86	6.38	55215.10
19	2.24	-4.47	-37659.87	16.57	14.19	-37683.92
20	0.78	-2.37	14632.39	2.78	4.58	14628.18
23	0.23	-6.00	94892.06	4.64	7.57	94886.08
24	-2.56	-0.42	113241.15	2.35	4.22	113232.44
31	-5.32	-3.91	18048.40	5.30	9.07	18032.62
32	-6.83	-0.98	-67685.14	2.36	4.15	-67697.50

A kódtávolságok javításai

prn	korrigált pszeudótávolságok [m]	előzetes távolságok [m]	mért és előzetes távolság különbsége [m]
11	20691585.50	20691583.98	1.52
14	23948042.22	23948044.26	-2.04
17	22988500.31	22988501.31	-1.00
19	25125463.65	25125461.66	1.99
20	20864065.81	20864064.01	1.80
23	22980968.53	22980967.69	0.84
24	20359768.49	20359768.99	-0.50
31	23121930.85	23121932.23	-1.38
32	20431281.70	20431280.11	1.59

Az előzetes távolságok és a tisztatag vektor elemei

PRN/paraméterek	x	y	z	cδ	l
11	-0.87116	-0.32986	-0.36369	-1.0	1,51
14	0.48671	-0.52253	-0.70006	-1.0	-2,03
17	-0.17675	0.68757	-0.70428	-1.0	-1,00
19	-0.76605	-0.28884	0.57422	-1.0	1,99
20	-0.67757	0.33699	-0.65371	-1.0	1,80
23	-0.98532	0.03047	0.16799	-1.0	0,85
24	-0.69900	-0.30117	-0.64861	-1.0	-0,50
31	-0.05835	-0.96522	-0.25485	-1.0	-1,39
32	-0.54464	-0.16185	-0.82290	-1.0	1,60

Az alakmátrix elemei és a tisztatag vektor

Az alakmátrix és a tisztatag vektor felhasználásával a paraméterek előzetes értékeinek változása a legkisebb négyzetek módszerével meghatározható:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ c\delta \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^T l\right) = \begin{bmatrix} -2{,}57 \\ 0{,}23 \\ 0{,}13 \\ 0{,}82 \end{bmatrix} [m].$$

A vevő kiegyenlített koordinátái:

$$\mathbf{X}_{BUTE} = \left(\mathbf{X}_{BUTE}\right)_0 + \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4\,081\,882{,}371 \\ 1\,410\,011{,}138 \\ 4\,678\,199{,}381 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2{,}57 \\ 0{,}23 \\ 0{,}13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,081\,879{,}80 \\ 1\,410\,011{,}37 \\ 4\,678\,199{,}51 \end{bmatrix} [m].$$

7.1.3. A kódmérésen alapuló differenciális helymeghatározás

A kódmérésen alapuló abszolút helymeghatározás esetén a korrekcióként figyelembe vett műholdórahibák, ionoszféra okozta késleltetések valamint a fedélzeti pálya hibái a vevő koordinátameghatározását hátrányosan befolyásolják. A differenciális helymeghatározás technikájával ezen hibahatások kódtávolságokra kifejtett hatását meg tudjuk határozni és azokat a mozgó vevő koordinátameghatározásánál figyelembe tudjuk venni. A módszer megvalósításában meg kell különböztetnünk a koordinátajavítások módszerét a kódtávolság javításának módszerétől.

A **koordinátajavítások módszere** esetén a bázisvevő mért koordinátáit összevetjük az ismert koordinátákkal, majd meghatározzuk a kódmérésen alapuló helymeghatározás koordinátajavításait. Ezeket a javításokat valós időben átsugározzuk a mozgó vevő felé, amely a saját kódméréseiből, abszolút helymeghatározással kiszámított koordinátáit megjavítja a bázisállomáson meghatározott koordinátajavításokkal.

A **kódtávolságok javításának módszere** azt jelenti, hogy a bázisvevő a saját pozícióinak ismeretében meghatározza az egyes műholdakra végzett kódmérések korrekcióit, majd ezeket a korrekciókat juttatjuk el a mozgó vevőbe, ahol az már a javított kódtávolságok alapján végzi el a helymeghatározást. A következőkben ez utóbbi módszer matematikai modelljét nézzük meg részletesebben.

Az ismert koordinátájú bázisállomáson észlelt kódtávolság („van") közvetítőegyenlete:

$$\begin{aligned} P^j_{b,L_1}(t_i) = {} & \rho^j_b(t_i - \tau^j_b, t_i) - c\delta t_b(t_i) + c\delta t^j(t_i - \tau^j_b) + \\ & + T_b(t_i) + I^j_b(t_i) \end{aligned} \tag{7.20}$$

A bázisállomás és a műholdak ismert koordinátái alapján meghatározhatjuk a $\rho^j_b(t_0, t_i)$ „kell" távolságot. A kódtávolságok javítása így a jól ismert módon számítható:

$$\Delta P^j_b(t_i) = \rho^j_b(t_0, t_i) - P^j_b(t_i) = c\delta t_b(t_i) - c\delta t^j(t_i - \tau^j_b) - T_b(t_i) - I^j_b(t_i) \tag{7.21}$$

A kódtávolságok a mozgó vevőben:

$$P^j_{m,L_1}(t_i) = \rho^j_m(t_i - \tau^j_m, t_i) - c\delta t_m(t_i) + c\delta t^j(t_i - \tau^j_m) + T_m(t_i) + I^j_m(t_i) \tag{7.22}$$

Mivel a $\tau^j_m \cong \tau^j_b$ezért a műholdórahibák azonosnak tekinthetők mind a mozgó, mind pedig a bázisvevő észleléseiben. Így a mozgó vevő javított kódtávolságai:

$$P^j_m(t_i) + \Delta P^j_b(t_i) = \rho^j_m(t_i - \tau^j_m, t_i) - c\delta t_{mb}(t_i) - \Delta T_{mb}(t_i) - \Delta I^j_{mb}(t_i) \tag{7.23}$$

ahol $\delta t_{mb}(t_i) = \delta t_b - \delta t_m$, ami nem más, mint a két vevő relatív órahibája.

Ha feltételezzük, hogy a légkör sebességmódosító hatása is azonos mindkét vevőre, akkor a (7.23) egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$
\begin{aligned}
P_m^j(t_i) + \Delta P_b^j(t_i) - \rho_m^j(t_0, t_i) = &- \frac{X^j(t_0) - X_m(t_0)}{\rho_m^j(t_0, t_i)} \delta x_m - \frac{Y^j(t_0) - Y_m(t_0)}{\rho_m^j(t_0, t_i)} \delta x_m - \\
&- \frac{Z^j(t_0) - Z_m(t_0)}{\rho_m^j(t_0, t_i)} - c\delta t_{mb}(t_i) + v_{P_{m,L1}^j}
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

amit röviden így is írhatunk:

$$
b_m^j = a_{m,1}\delta x + a_{m,2}\delta y + a_{m,3}\delta z + a_{m,4}\delta t_{mb} + v_m . \tag{7.25}
$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet teljes egészében megfelel a kódmérésen alapuló abszolút helymeghatározás közvetítőegyenletének. Az egyetlen apró különbség, hogy ebben az esetben nem a vevő órahiba abszolút értékét, hanem a két vevő órahiba különbségét határozhatjuk meg.