

4. előadás:

### A kód és fázismérés elve. A helymeghatározás hibaforrásai: a műholdhoz kapcsolódó hibák (órahibák, pályahibák), különleges hibák (műholdgeometria hatása, relativisztikus hatások), a mérőjel terjedéséhez kapcsolódó hibák (az ionoszféra hatása)

Az előző előadáson megismerkedtünk a GPST időrendszer, valamint a GPS műholdak pályaszámításának alapjaival. A következőkben át fogjuk tekinteni az alapvető mérési eljárásokat, ideértve a kódmérés illetve a fázismérés elvét. Ezt követően rátérünk a helymeghatározást terhelő különféle hibaforrások tárgyalására.

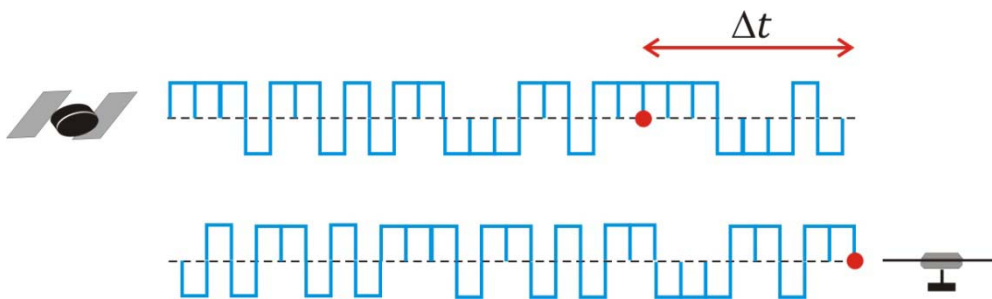
#### 4.1. A kódmérés elve

Mint azt az előző előadáson láthattuk, a műholdak által sugárzott vivőjeleket különféle ál-véletlen zaj jellegű kódokkal modulálják. A kódok értéke függvénye a GPS időnek, így tulajdonképpen egy időbélyeggel látják el a kódsorozatot. A kódmérés végrehajtásának feltétele, hogy a vevőberendezés ismerje a kódok előállításának metódusát (képletét), így a saját vevőórájának időjelét felhasználva elő tudjon állítani egy referencia kódsorozatot. A kód-korrelációs technikával történő műhold-vevő távolság meghatározásakor első lépésben a vevő előállítja a vivőfrekvenciának megfelelő referenciajelet, majd az modulálja az adott műhold PRN kódjával. Az ily módon kódolt referenciajelet összehasonlítja az észlelt műholdjellel (4.1 ábra). Mivel a kódok ál-véletlen jellegűek, így a két jelet keresztkorrelációjából a futási idő ( $\Delta t$ ) meghatározható. A futási időt megszorozva a terjedési sebességgel ( $c$ ) kiszámíthatjuk az ún. pszeudo-távolságot. Meg kell jegyeznünk, hogy ez több okból sem egyezik meg az észlelés időpontjában a műhold és a vevő geometriai távolságával. Egyrészt a számításokat terhelik a műholdra és a vevőóra hibák és egyéb hardver okozta késleltetések, másrészt a jel kibocsátása és észlelése között mind a műhold, mind pedig a földi pont elmozdult.

Ennek megfelelően a kódméréssel meghatározott  $\Delta t$  érték nem más, mint az észlelés időpontja ( $t_R$  - a vevőórával mérve) és a kisugárzás időpontjának ( $t^S$  - a műholdórával mérve) különbsége. Mivel mindkét óra hibával terhelt, így felírhatjuk az alábbi egyenletet az észlelt terjedési időre:

$$\Delta t = t_R - t^S = (t_R(GPS) - \delta_R) - (t^S(GPS) - \delta^S) = \Delta t(GPS) + \Delta\delta, \quad (4.1)$$

ahol  $t_R(GPS)$  és  $t^S(GPS)$  a GPS időrendszerben értelmezett észlelési és kisugárzási időpont, míg  $\delta_R$  és  $\delta^S$  a műholdóra és a vevőóra hibája. Mivel a műholdóra hiba értéke a navigációs üzenetből a kódméréssel történő helymeghatározáshoz kellő pontossággal ismert, így a (4.1) képletben szereplő relatív órahiba ( $\Delta\delta$ ) értéke tulajdonképpen a vevőóra hiba függvénye.



4.1 ábra: A kódmérés elve

A pszeudotávolság az észlelt terjedési idő és a fénysebesség szorzataként számítható:

$$R = c\Delta t = c\Delta t(GPS) + c\Delta\delta = \rho + c\Delta\delta. \quad (4.2)$$

ahol  $\rho$  a valódi (GPS időben mért) terjedési időből számított távolság. Meg kell jegyeznünk, hogy azonban ez sem egyezik meg a geometriai távolsággal, mivel a jelterjedés során a Föld elfordult a műholdhoz képest:

$$\rho = \rho(t^S, t_R) = \rho(t^S, t^S + \Delta t) = \rho(t^S) + \rho(t^S)\Delta t. \quad (4.3)$$

A kódérés pontosságának leírására a gyakorlatban elterjedt hüvelykszabály azt mondja ki, hogy a távolságmérés pontossága a chip-frekvencia (egyetlen kódérték) kb. 1%-a. Azaz C/A kód esetén mivel a kód frekvenciája 1,023 MHz, így egyetlen kódértékhez mintegy 300 méteres terjedési út tartozik. Abban az esetben, ha el tudjuk érni a kódértéken belül az 1%-os pontosságot, akkor ez mintegy 3 métere távolságmeghatározási pontosságnak felel meg.

A pontosabb P kód esetén a kód frekvenciája 10,23 MHz, így egyetlen kódértékhez 30 méteres terjedési út tartozik, ami 0,3 méteres távolságmeghatározási pontosságot eredményez.

Megjegyezzük, hogy a vevőben előállított referencijel és az észlelt jel korrelláltatása után az észlelt jelről eltávolítható a kódmoduláció. Ezt követően az észlelésekről le tudjuk választani a navigációs üzeneteket is, amelyek alapján a vevők el tudják végezni a műholdak pozícióinak számítását. A navigációs üzenetek dekódolása és eltávolítása után az észlelt jelből gyakorlatilag a nyers vivőhullámot állítjuk vissza. Ezt a következő fejezetben ismertett fázismérés végrehajtásához tudjuk használni.

#### 4.2. A fázismérés elve

A következőkben vizsgáljuk meg a vivőjel segítségével történő távolságmérés lehetőségét. Mint a korábbiakban láthattuk, a kódérés pontossága még a nagyobb pontosságú P kód esetén is mintegy 0,3 méterre tehető. Mivel a vivőjelek hullámhossza nagyságrendileg 20 cm-es, ezért a vivőjel hullámainak felhasználásával nagyobb távolságmeghatározási pontosság is elérhető.

Írjuk fel egy a műholdról kibocsátott rádiójel fázisát a műholdtól  $\rho$  távolságra:

$$\varphi^S(t) = \omega^S t - \omega^S \frac{\rho}{c} - \varphi_0^S \quad (4.4)$$

ahol  $\varphi_0^S$  a műhold órahiba és egyéb hardverkésések okozta kezdőfázis, illetve  $\omega^S$  a műhold oszcillátorának körfrekvenciája.

A vevőben generált jel fázisa:

$$\varphi_R(t) = \omega_R t - \varphi_{0R} \quad (4.5)$$

ahol  $\varphi_{0R}$  a vevő órahiba és egyéb vevőben található hardverkésések okozta kezdőfázis, illetve  $\omega_R$  a vevő oszcillátorának körfrekvenciája.

Ha eltekintünk a hardverkésésektől és feltételezzük, hogy a kezdőfázisokat csak az órahibák okozzák, akkor azok értékét felírhatjuk az órahibák és a körfrekvenciák függvényeként:

$$\varphi_0^S = \omega^S \delta^S, \quad \text{és} \quad \varphi_{0R} = \omega_R \delta_R. \quad (4.6)$$

A két jel fázisának összevetéséből előállíthatjuk a lekevert fázist:

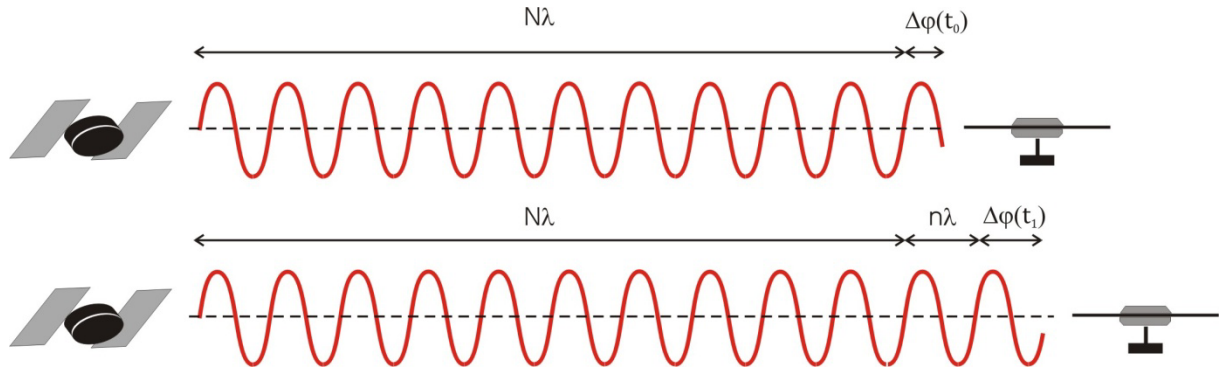
$$\varphi_R^S(t) = \varphi^S(t) - \varphi_R(t) = \omega^S t - \omega^S \frac{\rho}{c} - \omega^S \delta^S - \omega_R t + \omega_R \delta_R. \quad (4.7)$$

A (4.7) egyenletből látható, hogy a körfrekvenciák és a vevőórahibák ismeretében a lekevert fázisból meghatározható a valódi távolság.

Sajnos azonban a fázisnak csak a törtrészét tudjuk mérni, mivel nem ismerjük a műhold és a vevő közötti egész ciklusok számát. Ez utóbbit nevezzük ciklustöbbleteltetésnek (jele:  $N$ ). Abban az esetben, ha a vevő a bekapcsolása után folyamatosan követi a műholdat és folyamatosan végzi a fázismérést, akkor a ciklustöbbleteltetés értékét elegendő csak a műholdészlelés kezdőidőpontjára meghatározni, ezt követően a fázis értéke a ciklustöbbleteltetés ismeretében, a mért törtrész és az észlelés kezdete óta beérkezett teljes ciklusok száma ( $n$ ) függvényeként már számítható (4.2 ábra):

$$\varphi_R^S(t) = \Delta\varphi_R^S \Big|_{t_0}^t + 2\pi N = 2\pi N + 2\pi n + \Delta\varphi(t) \quad (4.8)$$

ahol  $\Delta\varphi_R^S(t)$  a teljes lekevert fázis értéke, míg  $\Delta\varphi(t)$  a két jel fáziskülönbségének értéke a  $t$  időpontban.



4.2 ábra: A fázismérés végrehajtása  $t_0$  és  $t_1$  időpontban

A következőkben térjünk át a ciklusszámra a fázis helyett (azaz osszuk el a teljes lekevert fázist  $2\pi$ -vel):

$$\Psi_R^S(t) = \frac{1}{2\pi} \varphi_R^S(t) \quad (4.9)$$

A (4.7), (4.8) és (4.9) egyenletek összevetéséből levezethető a mérhető ciklusszám és a műhold-vevő távolságok összefüggése:

$$\Psi = -\Delta\Psi_R^S = f \frac{\rho}{c} + f\Delta\delta + N \quad (4.10)$$

vagy:

$$\Psi = \frac{1}{\lambda} \rho + \frac{c}{\lambda} \Delta\delta + N \quad (4.11)$$

a (4.11) képletből vegyük észre, hogy a ciklusszámot beszorozva a hullámhosszal ismét pszeudotávolsághoz jutunk. A nagy különbség a kódéréshez képest azonban az, hogy a fázismérés során a vevőjel hullámhossza századának megfelelő pontosság érhető el, azaz ebben az esetben a pszeudotávolság meghatározásának pontossága néhány mm-re tehető.

Meg kell azonban említenünk, hogy ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy fázisméréssel mm-es pontosság érhető el. A következőkben a helymeghatározást terhelő szabályos hibákkal

fogunk foglalkozni, amelyek megfelelő figyelembevételre vagy kezelésre nélkül a fázismérések kellően pontos feldolgozása nem lehetséges.

### 4.3. A helymeghatározást terhelő hibaforrások

A helymeghatározást terhelő hibaforrások tárgyalásánál a műholdtól a vevő felé fogunk haladni. Ennek megfelelően az alábbi hibaforrásokkal és azok kezelésével fogunk foglalkozni:

- műholdóra és pályahibák,
- különleges hibák:
  - a műholdgeometria hatása,
  - relativisztikus hatások,
- a mérőjel terjedéséhez kapcsolódó hibák:
  - az ionoszféra hatása,
  - a troposzféra hatása,
- a jelek vételéhez kapcsolódó hibák:
  - ciklusgrások,
  - fáziscentrum külpontosság,
  - többutas terjedés.

Megjegyezzük, hogy a fenti hibák közül a troposzféra hatásával, illetve a jelek vételéhez kapcsolódó hibákkal az 5. előadás keretében fogunk foglalkozni.

#### 4.3.1. A műhold órahibák

A korábbiakban láthattuk, hogy a helymeghatározáshoz felhasznált távolságméréseket kód-méréssel vagy fázis-méréssel állítjuk elő. Mivel a globális helymeghatározó rendszereknél a nagyszámú konkurrens felhasználó miatt jellemzően egyutas rendszerekről van szó, ezért nagyon fontos a műholdak és a vevőberendezések időszinkronjának előállítása. Első lépésben foglalkozunk csak a műholdak időszinkronjának a biztosításával, azaz azzal, hogy a műholdakon elhelyezett órák szinkronizálva legyenek a GPST rendszeridővel.

Mielőtt rátérnénk az órahibák részleteinek tárgyalására, végezzünk egy becslést arra, hogy milyen pontos frekvencia-etalonokat kell használnunk a műholdakon. Ha feltételezzük, hogy az órahiba miatt nem engedünk meg nagyobb távolsághibát 1,5 méternél, akkor az órahiba értéke nem haladhatja meg az 5 ns értéket. Abban az esetben, ha 6 órás modellfrissítéseket tételezünk fel minden műholdon, akkor az 5ns-os maximális órahiba érték:

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{5ns}{6 \cdot 3600s} = 2 \cdot 10^{-13} \quad (4.12)$$

minimális relatív frekvenciastabilitással érhető el, ami megköveteli a stabil frekvencia-etalonok, azaz atomórák használatát a műholdakon.

A műhold órahibák leírásához vizsgáljuk meg röviden egy frekvencia-etalon által előállított időjelek hibáit. Egy ideális  $f_1$  frekvencia-etalon által előállított rezgés  $T_1$  periódusideje az ismert képlettel számítható:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} \quad (4.13)$$

A frekvencia-etalonnal mért időintervallom felírható a periódusidő vagy a frekvencia függvényeként:

$$(t - t_0) = N \cdot T_1 = \frac{N}{f_1} \quad N - \text{ciklusok száma} \quad (4.14)$$

A (4.14) egyenletben a ciklusszám meghatározható a frekvencia időszerinti integráljával:

$$N(t) = \int_{t_0}^t f_1 dt = f_1(t - t_0) \quad (4.15)$$

Sajnos a valós frekvenciaetalonok nem jellemezhetőek tökéletesen konstans frekvenciával. Egy valós frekvenciaetalon frekvenciája időben változó mennyiség, amelynek időbeli változását az alábbi polinommal írhatjuk le:

$$f_i(t) = f_1 + \Delta f_i + \dot{f}(t - t_0) + \tilde{f}(t) \quad (4.16)$$

ahol  $f_1$  a nominális frekvencia,  $\Delta f_i$  a konstans frekvenciaeltérés (bias)  $\dot{f}$  a frekvenciaeltérés időbeli változása (az óra driftje), míg  $\tilde{f}(t)$  a frekvencia véletlenszerű változása.

A valós ciklusszámlálás eredményét tehát a (4.16) és (4.15) képletek összevetésével kaphatjuk:

$$N_i(t) = \int_{t_0}^t f_i(t) dt = f_1(t - t_0) + \Delta f_i(t - t_0) + \frac{\dot{f}_i(t - t_0)^2}{2} + \int_{t_0}^t \tilde{f}_i(t) dt \quad (4.17)$$

ezáltal a mért időtartam a (4.14) képlet alapján:

$$t_i - t_0 = t - t_0 + \frac{\Delta f_i(t - t_0)}{f_1} + \frac{\dot{f}_i(t - t_0)^2}{2f_1} + \int_{t_0}^t \frac{\tilde{f}_i(t)}{f_1} dt. \quad (4.18)$$

Jelöljük az órahibát a kezdeti  $t_0$  időpontban  $\Delta t_i(t_0)$ -al, ekkor az órahiba felírható egy tetszőleges  $t$  időpontban az alábbiak szerint:

$$\Delta t_i(t) = t_i - t = \Delta t_i(t_0) + \frac{\Delta f_i(t - t_0)}{f_1} + \frac{\dot{f}_i(t - t_0)^2}{2f_1} + \int_{t_0}^t \frac{\tilde{f}_i(t)}{f_1} dt \quad (4.19)$$

A (4.19) képletet az együtthatók új jelölésével az alábbi alakra hozhatjuk:

$$\Delta t_i(t) = t_i - t = T_i(t_0) + R_i(t - t_0) + \frac{D_i}{2}(t - t_0)^2 + \int_{t_0}^t y(t) dt \quad (4.20)$$

ahol  $T_i$  az óraállás hiba (bias) másodperc egységben, az  $R_i$  az órajárás hiba (drift) ami a frekvencia nominális értékétől való konstans eltérés következménye, míg  $D_i$  a frekvenciaetalon öregedését mutatja és drift rátának nevezzük. A képlet utolsó tagjában pedig a véletlen jellegű frekvenciaingadozás hatását láthatjuk.

A műholdak által sugárzott jelek és adatok során már bemutattuk, hogy a  $T_i$ ,  $R_i$  és  $D_i$  együtthatókat a műholdüzenetek tartalmazzák, ezáltal a vevők a műhold órahibáját a navigációs üzenetkből meg tudják határozni.

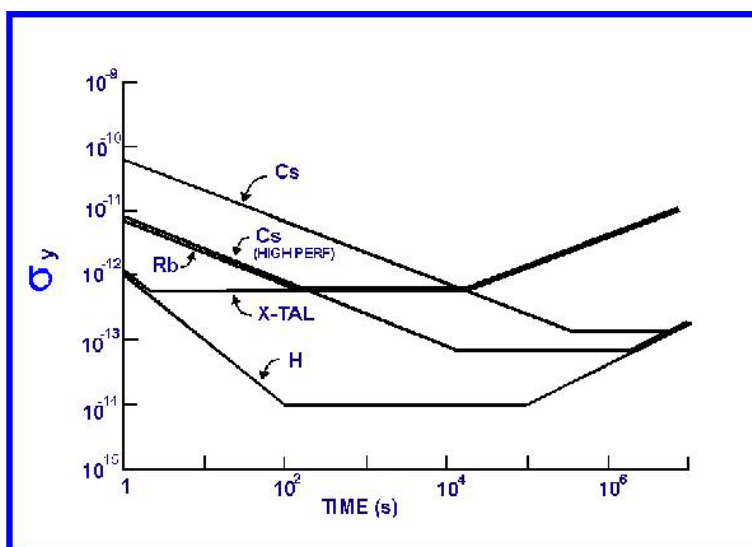
Az atomórák frekvenciastabilitását a (4.20) képletben található véletlenjellegű órahibák vizsgálatával végezhetjük el. A (4.20) képletben szereplő  $y(t)$  mennyiség tulajdonképpen a véletlenszerű órahiba időszerinti deriváltjának értéke:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad dx(t) - \text{a véletlen jellegű órahiba} \quad (4.21)$$

A frekvenciastabilitás számszerűsítésére az ún. Allan-varianciát használjuk:

$$\sigma_y^2(t) \approx \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m \left[ \frac{(x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k)}{\tau^2} \right]^2; \quad m \rightarrow \infty \quad (4.22)$$

vegyük észre, hogy az Allan-variancia kiküszöböli az órák driftjének hatását (azzal, hogy két egymást követő órahiba különbség eltéréséből számol varianciát), így valóban a frekvenciastabilitás mérőszáma. A (4.22) képletben  $\tau$  a vizsgálat időtartama, ami alapján beszélhetünk rövid és hosszútávú frekvenciastabilitásról. A 4.6 ábrán különböző frekvenciaetalonok (cézium, cézium-rubídium, hidrogén-mézer, X-TAL kvarc oszcillátor) Allan-varianciáit láthatjuk  $\tau$  függvényében. Az ábrából jól látható, hogy a hidrogén-mézer jobb frekvenciastabilitással jellemezhető, mint a Cs, Cs-Rb oszcillátorok, illetve az is, hogy a kvarc oszcillátorok különösen hosszabb távon nagyságrendekkel nagyobb Allan-varianciával jellemezhetők az atomórákhoz képest.



4.3 ábra: Különböző oszcillátorok Allan-varianciái

Az előbbiekből látható, hogy a műhold órahibák kulcsfontosságúak a helymeghatározás szempontjából, hatásuk elérheti akár az 1,5-2 méteres hibát a távolságra vetítve. Pontosán ezt a tényt használták fel korábban a GPS rendszer pontosságának mesterséges lerontására. A Selective Availability (S/A) technika felhasználásakor a műhold órahibákat mesterségesen lerontották, annak érdekében, hogy a civil felhasználók csak alacsonyabb pontosságú helymeghatározást tudjanak végezni. A pontosságrontás hatására a sztenderd helymeghatározási szolgáltatás (SPS) jelenlegi 15 méteres pontosságát (3D), mintegy 100m-re rontották le vízszintes értelemben.

2000. május 1-től az S/A-t kikapcsolták, mivel a differenciális feldolgozási technikák miatt nem volt értelme a fenntartásának.

#### 4.3.2. A műhold pályahibák

A helymeghatározáshoz elengedhetetlen a műholdak pályájának pontos ismerete. Ezeket a pályákat a földi követőállomások (4.4 ábra) által végzett mérések alapján határozzák meg. A valósidejű navigációs alkalmazások elősegítésére a műholdak a navigációs üzenetekben sugározzák az ún. fedélzeti pályaelemeket. Jelenleg ezek a pályák megközelítőleg 1 méteres pályameghatározási pontosságot tesznek lehetővé. A pályahibák és a GPS mérésekkel meghatározott két földi pont közötti vektorok hibáinak összefüggésére a Bauersima-képletet használhatjuk:

$$\Delta x(m) \approx \frac{l}{d} \cdot \Delta X(m) \approx \frac{l(km)}{25000(km)} \cdot \Delta X(m) \quad (4.23)$$

ahol  $\Delta x$  a földi vektor hibája,  $l$  a vektor hossza míg  $\Delta X$  a pályahiba értéke. A (4.23) képletből látható, hogy egy 100 km hosszú földi vektort a fedélzeti pályaadatok jellemző 1 méteres pályahiba esetén 4 mm-es hibával tudjuk meghatározni. Bár ez a pontosság a legtöbb geodéziai alkalmazás pontossági igényeit kielégíti, nagyobb kiterjedésű alaphálózati mérések vagy nagy pontosságú mozgásvizsgálatok esetén a fedélzeti pályák már nem adnak megfelelő pontosságot. Emiatt a Nemzetközi GNSS szolgálat a követőállomásoknál jóval nagyobb számú állomásból álló hálózatának méréseit felhasználva egyéb pályamegoldásokat is publikál. A különféle GPS pályamegoldásokat a 4.1 táblázat tartalmazza.

Pályatípus	Pályahiba	Látencia	Frissítés	Időbeli felbontás
Fedélzeti pályák (broadcast)	kb. 100 cm	valós időben	kb. 2 óra	(4 óra érvényesség)
Ultra-rapid (előrejelzett rész)	kb. 5 cm	valós időben	UTC 3 <sup>h</sup> , 9 <sup>h</sup> , 15 <sup>h</sup> , 21 <sup>h</sup>	15 perc
Ultra-rapid (észlelt rész)	kb. 3 cm	3-9 óra	UTC 3 <sup>h</sup> , 9 <sup>h</sup> , 15 <sup>h</sup> , 21 <sup>h</sup>	15 perc
Rapid	kb. 2,5 cm	17-41 óra	UTC 17 <sup>h</sup>	15 perc
Final	kb. 2,5 cm	12-18 nap	minden csütörtökön	15 perc

4.1 táblázat: Különféle GPS pályamegoldások jellemzői

#### 4.3.3. A műholdgeometria hatása

A helymeghatározás pontossága nem csak a műholdak óra és pályahibáitól, hanem azok geometriai elrendezésétől is függ. A geometriai elrendezést egyrészt befolyásolja a mérés időpontjában a műholdak elhelyezkedése az égbolton, másrészt a mérés környezetében elhelyezkedő, az égbolt egy részét kitakaró objektumok elhelyezkedése és mérete. A 4.4 ábrán két különböző műholdgeometriát láthatunk. A bal oldali ábrán a műholdak az égbolton egyenletesebben helyezkednek el mint a jobb oldali ábrán. Ennek következtében a vízszintes helymeghatározás az első esetben pontosabb, mint a másodikban. Ez könnyen belátható, hiszen a második esetben a térbeli ívmetszés megoldásánál az ívek nagyon lapos szögben metszik egymást, ezért a metszéspontok meghatározása bizonytalanává válik.

A műholdgeometria hatását a pontosságigulás (dilution of precision – DOP) mennyiségével jellemezhetjük. A DOP értékek fejezik ki a helyzethiba és a műhold-vevő távolsághibájának arányát:

$$\text{helyzethiba} = DOP \cdot URE \quad (4.24)$$

A DOP értékek matematikai úton, mérések nélkül is meghatározhatók a műholdak előzetes pályadataiból, az almanachból. Az eljárás nagy előnye, hogy a mérés helyszínének és a tervezett mérési időpontnak függvényében előre meghatározható a műholdgeometria hatása, így a mérés pontos időpontja és tartama az optimális eredményre elérése érdekében megtervezhető.

A DOP értékek matematikai értelmezéséhez induljunk ki az abszolút helymeghatározás linearizált közvetítőegyenletéből:

$$P_r^S = \rho_{r0}^S - \frac{X^S - X_{r0}}{\rho_{r0}^S} x_r - \frac{Y^S - Y_{r0}}{\rho_{r0}^S} y_r - \frac{Z^S - Z_{r0}}{\rho_{r0}^S} z_r + c\Delta\delta \quad (4.25)$$

ahol  $P_r^S$  a mért pszeudotávolság a műhold és a vevő között,  $\rho_{r0}^S$  a valódi távolság,  $X^S, Y^S, Z^S$  a műhold koordinátái a mérés pillanatában,  $X_{r0}, Y_{r0}, Z_{r0}$  a vevő előzetes koordinátái,  $x_r, y_r, z_r$  a vevő koordinátaváltozásai, míg  $c\Delta\delta$  az órahibák hatása a pszeudotávolságra. Írjuk fel a pontmeghatározás alakmátrixát  $n$  db műhold esetére:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{X^1 - X_{r0}}{\rho_{r0}^1} & -\frac{Y^1 - Y_{r0}}{\rho_{r0}^1} & -\frac{Z^1 - Z_{r0}}{\rho_{r0}^1} & +1 \\ -\frac{X^2 - X_{r0}}{\rho_{r0}^2} & -\frac{Y^2 - Y_{r0}}{\rho_{r0}^2} & -\frac{Z^2 - Z_{r0}}{\rho_{r0}^2} & +1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ -\frac{X^n - X_{r0}}{\rho_{r0}^n} & -\frac{Y^n - Y_{r0}}{\rho_{r0}^n} & -\frac{Z^n - Z_{r0}}{\rho_{r0}^n} & +1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

A kiegyenlített paraméterek (koordináták és az órahiba) súlykoefficiens mátrixa az alábbi módon számítható:

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} q_{XX} & q_{XY} & q_{XZ} & q_{Xt} \\ q_{YX} & q_{YY} & q_{YZ} & q_{Yt} \\ q_{ZX} & q_{ZY} & q_{ZZ} & q_{Zt} \\ q_{tX} & q_{tY} & q_{tZ} & q_{tt} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

A különböző DOP értékeket a súlykoefficiens mátrix elemeiből számíthatjuk.

A teljes geometriát (térbeli + idő) a GDOP (Geometric Dilution of Precision) érték fejezi ki:

$$GDOP = \sqrt{q_{XX} + q_{YY} + q_{ZZ} + q_{tt}} \quad (4.28)$$

A térbeli helyzetre vonatkozó DOP érték a PDOP (Position Dilution of Precision):

$$PDOP = \sqrt{q_{XX} + q_{YY} + q_{ZZ}} \quad (4.29)$$

Az időmeghatározásra vonatkozó DOP érték pedig a TDOP (Time Dilution of Precision):

$$TDOP = \sqrt{q_{tt}} \quad (4.30)$$

A geodéziai gyakorlatban fontosabb, hogy a PDOP érték helyett azt szét tudjuk választani vízszintes és magassági pontosságígulásra. Ennek érdekében a súlykoefficiens mátrixot át kell forgatnunk topocentrikus koordinátarendszerbe. A forgatási mátrix elemei felírhatóak a vevő földrajzi szélességének és hosszúságának ismeretében:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

A súlykoefficiens mátrix a helyi rendszerben tehát:



$$\mathbf{Q}_{helyi} = \mathbf{RQ}_X \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} & q_{xt} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} & q_{yt} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} & q_{zt} \\ q_{tx} & q_{ty} & q_{tz} & q_{tt} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Így a horizonti koordináta-rendszerben a vízszintes és a magassági helymeghatározást jellemző DOP értékek már számíthatóak az alábbiak szerint:

Vízszintes értelemben:

$$HDOP = \sqrt{q_{xx} + q_{yy}}, \quad (4.33)$$

Magassági értelemben:

$$VDOP = \sqrt{q_{zz}}. \quad (4.34)$$

Bizonyítható az is, hogy az alábbi összefüggés áll fenn a *HDOP*, *VDOP* és *PDOP* értékek között:

$$PDOP = \sqrt{HDOP^2 + VDOP^2} \quad (4.35)$$

Az előbbieket alapján láthattuk, hogy a műholdak előzetes pályadatainak valamint a vevő közelítő pozíciója ismeretében a műholdgeometria hatását előzetesen is meg lehet vizsgálni, ami nagy segítséget nyújt a mérésre alkalmas időpontok optimális kiválasztásában.

#### 4.3.4. Relativisztikus hatások

A helymeghatározás során mind a vevő, mind pedig a műhold eltérő gravitációs mezőben halad, illetve folyamatos gyorsulást szenved, ezáltal mind a speciális, mind pedig az általános relativitáselmélet következményeit figyelembe kell vennünk a helymeghatározásban.

Az általános relativitáselmélet következtében az alábbi hatásokat kell figyelembe vennünk:

1. A nehézségi erőter relativisztikus perturbációkat okoz a műholdak pályájában, ami megközelítőleg  $3 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$  nagyságrendű:

$$d\mathbf{p} = -\frac{3\mu^2 a(1-e^2)}{c^2} \frac{\mathbf{p}}{\rho^5} \quad (4.36)$$

2. A műhold jelének terjedési alakja nem egyezik meg az euklideszi távolsággal. Ennek hatása a legnagyobb műhold-vevő távolság esetén 18,7mm a távolságmérésben. Megjegyzendő, hogy relatív helymeghatározás esetén a hatás csak 0,001 ppm (1000 km-en 1 mm):

$$\delta^{rel} = \frac{2\mu}{c^2} \ln \frac{\rho^S + \rho_r + \rho_r^S}{\rho^S + \rho_r - \rho_r^S} \quad (4.37)$$

3. A műholdóra járása a nehézségi térerősség változása miatt is változik:

$$\delta^{rel} = \frac{f'_0 - f_0}{f_0} = \frac{\Delta U}{c^2} \approx \frac{\mu}{c^2} \left[ \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right] = -5,2932 \cdot 10^{-10} \quad (4.38)$$

A speciális relativitáselmélet következtében pedig az alábbi hatást kell figyelembe vennünk:

1. A műholdóra járása a műhold sebessége miatt eltér a földi órák járásától:

$$\delta^{rel} = \frac{f'_0 - f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 = 8,308 \cdot 10^{-11} \quad (4.39)$$

Az órajárások figyelembevételének érdekében a műholdak oszcillátorának alapfrekvenciáját csökkentik a nominális 10,23 MHz-es értékhez képest. Ezzel a csökkentések mind az általános-, mind a speciális relativitáselmélet órajárásra kifejtett hatását ki lehet küszöbölni:

$$\begin{aligned} \delta^{rel} &= \delta_{\text{ált}}^{rel} + \delta_{\text{spec.}}^{rel} = -5,2933 \cdot 10^{-10} + 8,308 \cdot 10^{-11} = 4,46 \cdot 10^{-10} \\ &\Downarrow \\ df &= \delta^{rel} \cdot f_0 = 4,57 \cdot 10^{-3} \text{ Hz} \\ &\Downarrow \\ f_0^S &= 10,22999999543 \text{ MHz} \end{aligned} \quad (4.40)$$

A speciális relativitáselmélet (4.39) egyenlettel számított hatásánál körpályát feltételeztünk. Mivel azonban a GNSS holdak pályája enyhén lapult ellipszis, így az ebből eredő relativisztikus hatást is figyelembe kell vennünk. GPS mérések esetén ezt a relativisztikus hatást a vevők határozzák meg, és a fedélzeti pályaelemek alapján számított műhold óra hiba meghatározásakor veszik figyelembe. GLONASS mérések esetén az elliptikus pályából eredő relativisztikus hatást a fedélzeti pályaelemek órakorrekciói már tartalmazzák, így ebben az esetben a vevőknek nem kell meghatározni a relativisztikus korrekció értékét.

Az ellipszis pályából eredő relativisztikus hatás értékét az alábbi képlettel határozhatjuk meg:

$$\Delta t_{\text{ell}}^{rel} = F \cdot e \sqrt{a} \sin E_k, \quad (4.41)$$

ahol (a,e) a pályae ellipszis paraméterei,  $E_k$  az excentrikus anomália értéke, míg F az alábbi egyenlettel meghatározható konstans:

$$F = \frac{-2\sqrt{GM}}{c^2} = -4.442\,807\,633 \cdot 10^{-10} \left[ \frac{s}{\sqrt{m}} \right]. \quad (4.42)$$

A speciális relativitáselmélet következményei a vevőóra járására is hatással vannak. Ezt a hatás Sagnac-hatásnak nevezzük, amelyet a vevők szoftverei figyelembe vesznek a mérések feldolgozása során.

Mivel a vevő forog a Földforgástengelye körül, ezért az érintőirányú sebesség az Egyenlítőn:

$$v \approx \frac{2 \cdot R \pi}{86400} \approx 0,5 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (4.43)$$

Ezek alapján a relativisztikus hatás:

$$\delta^{rel} = \frac{f'_0 - f_0}{f_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 = 1,3 \cdot 10^{-12} \quad (4.44)$$

Ez a relativisztikus hatás 1 óra alatt mintegy 5ns hibát okoz, ami megközelítőleg 1,5 méteres távolsághibának felel meg. A Sagnac hatást általában a navigációs célú helymeghatározás során nem vesszük külön figyelembe, értékét az egyes epochákban meghatározott vevőóra hiba tartalmazza.

A Sagnac-hatást a vevő és a műhold helyvektora valamint a Föld forgásának szögsebességvektora felhasználásával az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$\delta^{rel} = \frac{1}{c} (\mathbf{p}_r - \mathbf{p}^s) \cdot (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{p}_r) \quad (4.45)$$

Összegezve tehát a relativisztikus hatásokat azt mondhatjuk, hogy az általános-, és a speciális relativitáselméletből eredő hatásokat alapvetően a műholdak alaphfrekvenciájának a változtatásával küszöbölik ki. Az elliptikus pályából eredő hatásokat azonban vagy a műholdra hiba értékét leíró polinomok együtthatói tartalmazzák (pl. GLONASS) vagy pedig a vevőknek kell kiszámítani és figyelembe venni (pl. GPS). Az előbbi több számítási feladatot ró a műholdakra, így nagyobb kapacitású hardverelemeket igényel, míg az utóbbi megoldás e számításokat a vevők hardverére bízta.

Az előbbieket alapján a GPS műholdak műholdóra hibájának meghatározását a (3.33) és (3.34) egyenletek módosított alakjával kell elvégeznünk:

$$\delta_{L1}^S = a_0 + a_1(t - t_C) + a_2(t - t_C)^2 - T_{GD} + \Delta t_{ell}^{rel}, \quad (4.46)$$

ugyanaz az  $L_2$  vivőfázisra:

$$\delta_{L1}^S = a_0 + a_1(t - t_C) + a_2(t - t_C)^2 - \gamma T_{GD} + \Delta t_{ell}^{rel}. \quad (4.47)$$

#### 4.3.5. Az ionoszféra hatása

Az időmérésre visszavezetett távolságmeghatározás során azzal a feltételezéssel élünk, hogy a mérőjelek konstans  $c$  sebességgel terjednek, ahol  $c$  a fény sebessége vákuumban. Ez a feltételezés a légkörben nem állja meg a helyét, így a légkör sebességmódosító hatása miatt további korrekciókra van szükségünk.

A légkör sebességmódosító hatását a törésmutató fejezi ki:

$$n = \frac{c}{v} \quad (4.48)$$

A légkör a mikrohullámú jelek terjedésének szempontjából két fő részre osztható. A légkör 50-1000km közötti magasságban fekvő része az ionoszféra, amelyben a Nap ionizáló sugárzásának hatására szabad elektronok találhatóak. A légkör alsó kb. 12 km-es része a troposzféra, ahol a légkör tömegének jelentős része található, ideértve a légkörben található vízpára gyakorlatilag teljes mennyiségét is.

Az ionoszféra a rádióhullámok terjedése szempontjából diszperzív közeg, azaz a törésmutató értéke függ a jel frekvenciájától is. Ezen felül természetesen az ionoszféra hatása függ a Nap ionizáló sugárzásának mértékétől is, azaz a mérés napszakától, az évszaktól, a földrajzi szélességtől és a napfolttevékenységtől is.

Az elektromágneses jelek terjedése szempontjából diszperzív közegben meg kell különböztetnünk a fázissebességet és a csoportsebességet. A fázissebesség egy egyszerű elektromágneses jel terjedési sebessége (pl. vivőjel):

$$v_f = \lambda \cdot f \quad (4.49)$$

A csoportsebesség ezzel szemben több egymástól kismértékben eltérő frekvenciájú jelek terjedési sebessége (pl. kódjelek):

$$v_{cs} = -\frac{df}{d\lambda} \lambda^2 \quad (4.50)$$

Mivel a két sebesség eltér egymástól, ezért az ionoszféra hatása nem egyezik meg a fázismérések illetve a kódérések esetére. A következőkben a hatás eltérését fogjuk megvizsgálni egy kicsit részletesebben.

Először is fejtjük ki a fázismérés teljes differenciálját:

$$dv_f = f d\lambda + \lambda df, \quad (4.51)$$

A (4.51) egyenletet átrendezve:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{dv_f}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}. \quad (4.52)$$

Helyettesítsük be a (4.52) egyenletet a csoportsebesség egyenletébe (4.50):

$$v_{cs} = -\frac{dv_f}{d\lambda} \lambda + f\lambda \quad (4.53)$$

vegyük észre, hogy a (4.53) egyenletbe  $f\lambda$  szorzat megegyezik a fázissebesség értékével. Ezáltal eljutottunk a Raleigh-egyenlethez, ami megteremti az összefüggést a fázis és a csoportsebesség között:

$$v_{cs} = v_f - \frac{dv_f}{d\lambda} \lambda \quad (4.54)$$

Az ionoszféra távolságmérésekre kifejtett hatásának leírása érdekében vezessük be a fázis és a csoport törésmutató fogalmát:

$$v_f = \frac{c}{n_f} \quad \text{és} \quad v_{cs} = \frac{c}{n_{cs}} \quad (4.55)$$

Mivel a (4.51) képletben a fázissebesség deriváltja:

$$\frac{dv_f}{d\lambda} = -\frac{c}{n_f^2} \frac{dn_f}{d\lambda}, \quad (4.56)$$

így a Raleigh-egyenlet a törésmutatókkal is felírható:

$$\frac{c}{n_{cs}} = \frac{c}{n_f} + \lambda \frac{c}{n_f^2} \frac{dn_f}{d\lambda}. \quad (4.57)$$

A (4.57) egyenletet  $c$ -vel egyszerűsítve majd invertálva (felhasználva az  $(1+\varepsilon)^{-1}=1-\varepsilon$  közelítést) a módosított Raleigh-egyenlethez jutunk:

$$n_{cs} = n_f \left( 1 - \lambda \frac{1}{n_f} \frac{dn_f}{d\lambda} \right) = n_f - \lambda \frac{dn_f}{d\lambda} \quad (4.58)$$

vagy a frekvenciákra áttérve:

$$n_{cs} = n_f + f \frac{dn_f}{df} \quad (4.59)$$

A fázis-törésmutató értékét a jel frekvenciája szerint sorbafejtjük:

$$n_f = 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_3}{f^3} + \frac{c_4}{f^4} + \dots \quad (4.60)$$

ahol a  $c_i$  együtthatók az elektronsűrűségtől függő polinomegyütthatók.

A sorfejtést  $c_2$  tagnál abbahagyva, majd azt deriválva  $f$  szerint azokat beírhatjuk a módosított Raleigh-egyenletbe (4.59):

$$n_{cs} = 1 + \frac{c_2}{f^2} - f \frac{2c_2}{f^3} = 1 - \frac{c_2}{f^2}. \quad (4.61)$$

Jól látható, hogy míg a fázis-törésmutató értéke az egységtől  $+\frac{c_2}{f^2}$  értékkel tér el, addig a csoport-törésmutató ugyanennyivel kisebb az egységnél. Ezek alapján az ionoszférában a kód késik, míg a fázis siet. Ennek következtében a fázismérésből számított távolság az ionoszféra miatt rövidebb, míg a kódtávolság hosszabb a valódi értéknél. Megjegyezzük, hogy  $c_2$  értéke jó közelítéssel  $-40,3N_e$ , ahol  $N_e$  a szabad elektronok száma.

Az ionoszféra távolságokra kifejtett hatása az alábbiak szerint számítható:

$$\Delta^{Iono} = \int n ds - \int ds_0 \quad (4.62)$$

Az előzőek szerint a fázis- és kódtávolságokra kifejtett hatás a következők szerint számítható:

$$\Delta_f^{Iono} = \int \left( 1 + \frac{c_2}{f^2} \right) ds - \int ds_0 \quad (4.63)$$

és

$$\Delta_{cs}^{Iono} = \int \left( 1 - \frac{c_2}{f^2} \right) ds - \int ds_0 \quad (4.64)$$

Az integrálásokat az egyszerűség kedvéért a geometriai távolság szerint elvégezve:

$$\Delta_f^{Iono} = \int \frac{c_2}{f^2} ds_0 \quad \text{és} \quad \Delta_{cs}^{Iono} = -\int \frac{c_2}{f^2} ds_0 \quad (4.65)$$

azaz:

$$\Delta_f^{Iono} = -\frac{40,3}{f^2} \int N_e ds_0 \quad \text{és} \quad \Delta_{cs}^{Iono} = \frac{40,3}{f^2} \int N_e ds_0 \quad (4.66)$$

Bevezetve a teljes elektrontartalom fogalmát (Total Electron Content – TEC) az ionoszféra hatása az alábbiak szerint határozható meg:

$$TEC = \int N_e ds_0 \quad (4.67)$$

$$\Delta_f^{Iono} = -\frac{40,3}{f^2} TEC \quad \text{és} \quad \Delta_{cs}^{Iono} = \frac{40,3}{f^2} TEC \quad (4.68)$$

A TEC értékek mértékegysége a TEC egység (TEC Unit – TECU). 1 TECU  $10^{16}$  elektronnak felel meg négyzetméterenként.

A szabad elektronok száma napi maximum értékét általában helyi idő szerint 14<sup>h</sup>-kor éri el. A TEC értékek a havi TEC átlagértékek körüli 20-25%-os tartományban szórnak.

Általánosan kijelenthető, hogy a közepes szélességeken az TEC értékek gradiense sokkal kisebb, mint az egyenlítőhöz közeli területeken, vagy éppen a pólusoknál.

#### 4.3.5.1. Az ionoszféra hatásának figyelembevétele

A globális helymeghatározó rendszerek esetén az ionoszféra hatását többféleképpen is figyelembe vehetjük. A legegyszerűbb ionoszféra modell az ún. egyszerű ionoszféra-réteg modell. Ebben a modellben az elektronokat a Föld felszíne felett 350 km-rel elhelyezkedő gömbhéjra integrálva képzeljük el. Az így megadott elektronsűrűség a TVEC (Total Vertical Electron Content). Mivel a TVEC érték csak a zenitirányú műholdakra biztosítja a helyes ionoszféra okozta késleltetés meghatározását, ezért a vertikális késleltetéseket egy leképezési függvénnyel kell átszámítani a műhold irányára. Ehhez a 4.4 ábrán látható modellt használhatjuk fel.

Az ionoszférikus pontban látható  $E'$  szög értéke az ábrán látható fekete háromszögből szinusz tétellel számítható:

$$\frac{\sin(90 - E')}{R} = \frac{\sin(90 + E)}{R + H}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cos E'}{R} = \frac{\cos E}{R + H} \Rightarrow \cos E' = \frac{R}{R + H} \cos E \quad (4.69)$$

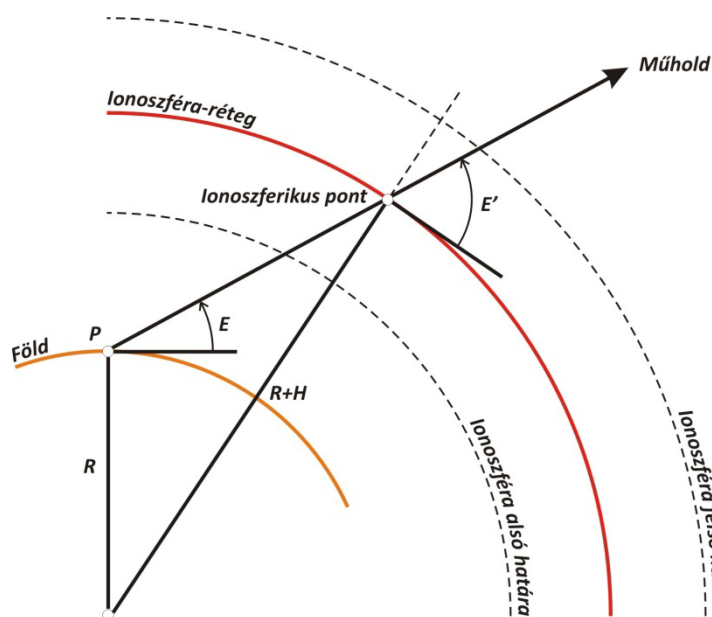
Így a ferdeségi szorzó értéke az alábbi leképezési függvénnyel számítható:

$$F = \frac{1}{\sin E'}. \quad (4.70)$$

Így a műholdirányú ionoszférikus késleltetés az alábbi képletekkel számíthatók:

$$\Delta_f^{Iono} = -\frac{40,3}{f^2} \frac{TVEC}{\sin E'} \quad \text{és} \quad \Delta_{cs}^{Iono} = \frac{40,3}{f^2} \frac{TVEC}{\sin E'} \quad (4.71)$$

Megjegyezzük, hogy az ionoszféra hatása mérsékelt égövben átlagos körülmények között nyáron éjszaka 10-15 TECU esetén az L1 vivőjelen 1,6-2,4 m, míg a déli órákban 50-75 TECU esetén az L1 vivőjelen 8-12 méter.



4.4 ábra: Az egyszerű ionoszféra-réteg modell leképezési függvényének származtatása

Az ionoszféra hatásának figyelembevétele a mérések feldolgozása során az alábbi módokon történhet:

- **Mérés útján:** Japánban például az ionoszférát vizsgáló obszervatóriumok óránként határozzák meg a TEC értékeket, ami alapján az ionoszféra hatása számszerűsíthető.
- **Beclés útján:** a mérések feldolgozása során ismeretlenként vihetjük be a feldolgozásba az ionoszféra elektrontartalmát. A feldolgozások során ekkor sok fölös mérésre, illetve nagy kiterjedésű hálózatokra van szükségünk.
- **Számítás útján:** globális, regionális és esetleg lokális ionoszféra modellekkel írjuk le az ionoszféra elektrontartalmát, így a késleltető hatás számítható. Ilyen modell például a globális Klobuchar vagy a NeQuick modell.
- **Kiküszöbölés:** Felhasználva az ionoszféra azon tulajdonságát, hogy a késleltető hatás frekvenciafüggő, a két frekvencián végzett észlelések lineáris kombinációjával a hatás kiejthető.

#### 4.3.5.2. A Klobuchar modell

Klobuchar (1987) egy egyszerű ionoszféra modellt fejlesztett ki, amellyel az egyfrekvenciás észleléseket végző navigációs vevők az ionoszféra okozta késleltetéseket kellő pontossággal figyelembe tudják venni. A modell alkotásánál az elsődleges cél az volt, hogy matematikailag minél egyszerűbb legyen a modell, hiszen kis számítási kapacitású vevőkben is alkalmazni kell az algoritmust.

A modell az ionoszféra okozta vertikális irányú késleltetést egy koszinusz függvény segítségével adja meg a nappali időszakban, míg az éjszakai órákban konstans értéket feltételez (4.5 ábra).

Az ionoszféra okozta időkéésés zenitirányban az alábbi képlettel adható meg:

$$\Delta T_v^{Iono} = A_1 + A_2 \cos\left(\frac{2\pi(t - A_3)}{A_4}\right),$$

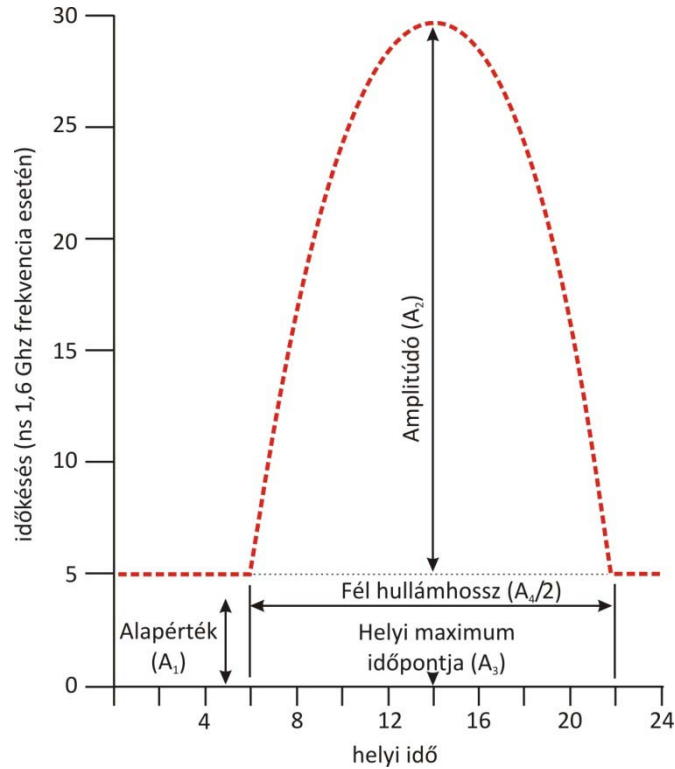
ahol:

$$A_1 = 5 \cdot 10^{-9} s = 5 ns, \quad (4.72)$$

$$A_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \varphi_{IP}^m + \alpha_3 (\varphi_{IP}^m)^2 + \alpha_4 (\varphi_{IP}^m)^3,$$

$$A_3 = 50400 s \text{ helyi idő},$$

$$A_4 = \beta_1 + \beta_2 \varphi_{IP}^m + \beta_3 (\varphi_{IP}^m)^2 + \beta_4 (\varphi_{IP}^m)^3$$



4.5 ábra: A Klobuchar-féle ionoszféramodell paraméterei

Megjegyezzük, hogy az  $A_1$  paraméter az ionoszféra éjszakai minimumértékének a hatását adja meg. Az  $A_2$  és  $A_4$  együtthatók meghatározásában szereplő  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterek a műholdak navigációs üzenetének részét képezik. Fontos továbbá kiemelni, hogy a modell második tagja nem vehet fel negatív értéket.

A (4.72) egyenletben található koszinusz függvény paraméterét a késleltetés fázisának is nevezzük. A fázist felhasználva az ionoszférikus késleltetés az alábbi alakban is felírható:

$$\Delta T_v^{Iono} = A_1 + A_2 \cos(x), \quad (4.73)$$

ahol  $x$  a fázis:

$$x = \frac{2\pi(t - A_3)}{A_4}. \quad (4.74)$$

A  $t$  változó a helyi idő értéke az ionoszférikus pontban:



$$t = \frac{\lambda_{IP}}{15} + t_{UT}, \quad (4.75)$$

ahol  $\lambda_{IP}$  az ionoszférikus pont földrajzi hosszúsága fok egységben, míg  $t$  és  $t_{UT}$  óra egységben értendő. Gyakorlati számításokban általában a (4.73) képlet másodpercben kifejezett változatát használjuk.

A  $\varphi_{IP}^m$  az ionoszférikus pont geomágneses szélessége. Kiszámításához ismernünk kell a geomágneses pólus földrajzi koordinátáit:  $\varphi_P=78^\circ$  és  $\lambda_P=291^\circ$ :

$$\varphi_{IP}^m = \arcsin(\sin \varphi_{IP} \sin \varphi_P + \cos \varphi_{IP} \cos \varphi_P \cos(\lambda_{IP} - \lambda_P)) \quad (4.74)$$

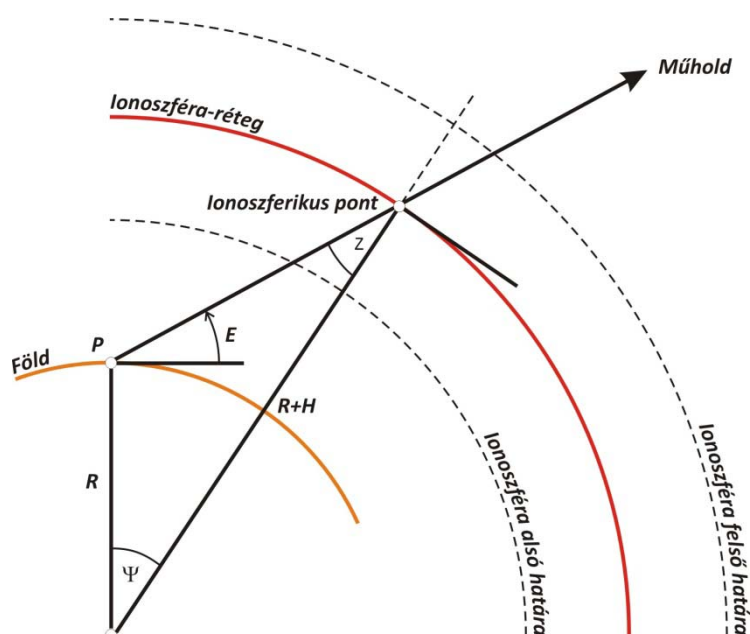
Összegezve tehát az ionoszférikus pont földrajzi koordinátái alapján meghatározható annak geomágneses szélessége. A helyi idő, valamint a geomágneses szélesség alapján az  $\alpha$  és  $\beta$  együtthatók ismeretében a vertikális irányú késleltetés a modellel meghatározható. Ezt követően a leképezési függvényből meghatározott ferdeségi szorzóval ki tudjuk számítani a műhold irányú késleltetés értékét is.

Vegyük észre, hogy amennyiben az  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$  akkor a (4.73) képlet segítségével határozzuk meg a késleltetés értékét. Amennyiben az  $x$  fázis nem esik ebbe az intervallumba, akkor csak az éjszakai alapértéket ( $A_I$ ) kell figyelembe venni.

A fentiek alapján a számítás menete a következő:

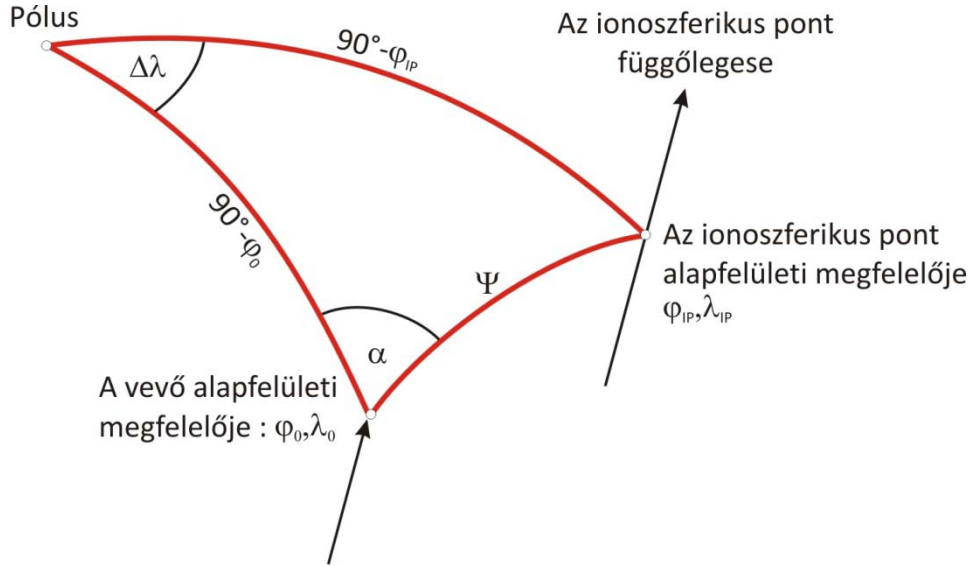
1. A vevő-műhold irány azimutjának és magassági szögének meghatározása  $t_{UTC}$  időpontban.
2. Az ionoszférikus pont és a vevő gömbi távolságának meghatározása a P-ionoszférikus pont-geocentrum háromszögből. Ehhez első lépésben a geocentrumban található  $\Psi$  szöget kell meghatároznunk (4.6 ábra):

$$\Psi = 90^\circ - E - \arcsin\left[\frac{R}{R+H} \cos E\right] \quad (4.77)$$



4.6 ábra: A gömbi távolság ( $\Psi$ ) számítása a Klobuchar modellben

3. A vevő ismert (vagy közelítő) koordinátái, továbbá az azimut és a magassági szög ismeretében kiszámíthatóak az ionoszférikus pont földrajzi koordinátái ( $\varphi_{IP}$ ,  $\lambda_{IP}$ ) (4.7. ábra).



4.7 ábra: Az ionoszférikus pont földrajzi koordinátáinak számítása

$$\varphi_{IP} = \arcsin(\sin \varphi_0 \cos \Psi + \cos \varphi_0 \sin \Psi \cos \alpha) \quad (4.78)$$

$$\lambda_{IP} = \lambda_0 + \arcsin\left(\frac{\sin \Psi \sin \alpha}{\cos \varphi_{IP}}\right) \quad (4.79)$$

4. Az ionoszférikus pont geomágneses szélességének számítása a (4.76) képlet segítségével.
5. A navigációs üzenetekben szereplő paraméterek alapján az  $A_2$  és  $A_4$  együttható számítása (4.68)
6. Végezetül a Klobuchar modell segítségével az ionoszféra okozta késleltetés kiszámítható a zenit irányban (4.68).
7. Ezt követően mivel a késleltetést időbeli késleltetésként kapjuk meg, ezért ezt át kell számítani távolság egységre, valamint a leképezési függvényt (ferdeségi szorzót) is figyelembe kell vennünk:

$$\Delta L_1^{Iono} = \Delta T_v^{Iono} \cdot c \cdot \cos E', \quad (4.80)$$

8. Mivel a Klobuchar-modell az L1 frekvenciára adja meg a késleltetés értékét, ezért (4.80)-ból ki kell számítanunk az L2 frekvenciára vonatkozó értéket is:

$$\Delta L_2^{Iono} = \Delta T_v^{Iono} \cdot c \cdot \cos E' \cdot \frac{f_1^2}{f_2^2}. \quad (4.81)$$

#### A Klobuchar-modell munkaképletei

Jól látható, hogy a fentiekben számos olyan lépést találhatunk, amelyek trigonometriai összefüggések kiértékelését igénylik. Annak érdekében, hogy a számítások a vevőkben is elvégezhetőek legyenek, további egyszerűsítéseket alkalmazunk.

Egyrészt az ionoszférikus pont gömbi távolságának meghatározásakor a (4.77) képlet helyett az alábbi közelítő alakot használhatjuk:

$$\Psi \approx \frac{445}{E[^\circ] + 20} - 4[^\circ] = \frac{0,0137}{E[\text{félkör}] + 0,11} - 0,022[\text{félkör}] \quad (4.82)$$

Ez a közelítés a gömbi távolságban kevesebb mint 0,2°-os hibát ad a 10°-nál nagyobb magassági szögek esetén.

Az ionoszférikus pont koordinátáinak számításakor a gömbi háromszög megoldása helyett síkközelítést alkalmazunk. Így az ionoszférikus pont koordinátái az alábbi alakban határozható meg:

$$\varphi_{IP} \approx \varphi_0 + \psi \cos \alpha \quad (4.83)$$

$$\lambda_{IP} \approx \lambda_0 + \frac{\psi \sin \alpha}{\cos \varphi_{IP}} \quad (4.84)$$

A síkközelítéssel eljárás jó közelítést ad az egyenlítőhöz közeli és a közepes földrajzi szélességű területeken. A pólusokhoz közel (ha a számított szélesség érték meghaladja a 75°-ot, akkor az ionoszférikus pont földrajzi szélességét 75°-nak vesszük fel, mivel ezeken a területeken a síkközelítéssel eljárás már rosszul közelíti a gömbi megoldást. Ez az eljárás nem okoz nagy problémát, mivel egyrészt a TEC értékek általában alacsonyok a pólusokhoz közeli területeken, másrészt a modell alkotásakor azzal a feltételezéssel éltek, hogy a navigációs felhasználói igények elenyészőek lesznek ezeken a területeken.

Az ionoszférikus pont geomágneses szélességének meghatározásánál szintén egy közelítő munkaképletet alkalmazunk. Ekkor a (4.70) képlet helyett a geomágneses szélességet az alábbi összefüggéssel határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \varphi_{IP}^m &= \varphi_{IP}[^\circ] + 11,6^\circ \cos(\lambda_{IP}[^\circ] - 291^\circ) = \\ &= \varphi_{IP}[\text{félkör}] + 0,064 \cos(\lambda_{IP}[\text{félkör}] - 1,617)[\text{félkör}] \end{aligned} \quad (4.85)$$

Ez a közelítés maximum 2°-os hibát okoz, ha a geomágneses szélesség értékek nem haladják meg a 65°-ot.

Egy további közelítésként a ferdeségi szorzótényező értékét a (4.70) képlet helyett az alábbi munkaképlettel számíthatjuk:

$$F = 1,0 + 16,0(0,53 - E[\text{félkör}])^3, \quad (4.86)$$

ahol  $E$  a műhold magassági szöge félkör egységben.

### 3. feladat

#### **Ionoszférikus késleltetés számítása a Klobuchar modellel**

A BUTE állomáson számítsuk ki a SV 11 műholdra L1 és L2 frekvenciákon végzett kód mérésre az ionoszférikus korrekció értékét 2011. március 11-én 8:14:59 GPS időrendszerben kifejezett epochában. A számítás kiinduló adatai az alábbiak:

A BUTE állomás koordinátái:

$$\varphi_0 = 47^\circ 28' 51,39741''$$

$$\lambda_0 = 19^\circ 03' 23,50703''$$

A Földsugár közelítő értéke:

$$R = 6\,378\,000 \text{ m}$$

Az ionoszféra rétegmodell magassága:

$$H = 350\,000 \text{ m}$$

A műhold azimutja és magassági szöge a megadott időpontban (a számításokért lásd a 3. fejezet mintapéldáit):

$$\alpha = 176,4518^\circ$$

$$E = 63,8178^\circ$$

Az ionoszféra modell számításához szükséges  $\alpha_i$  és  $\beta_i$  paraméterek megtalálhatóak az érvényes fedélzeti pályákban (ezek letölthetőek például a Német Geodéziai és Kartográfiai Hivatal GNSS adatközpontjából a <http://igs.bkg.bund.de> címről). A RINEX navigációs üzenetek fejlécében az ION ALPHA és ION BETA sorokban találhatjuk meg az együtthatókat:

```
-----
      2.10          N: GPS NAV DATA          RINEX VERSION /
TYPE
teqc 2009Jul14          20110401 00:25:03UTC / RUN BY /
DATE
      15          LEAP SECONDS
MSXP|IAx86-PII|bcc32 5.0|MSWin95->XP|486/DX+          COMMENT
teqc 2009Jul14          20110331 01:00:11UTC COMMENT
      2.1420D-08  7.4506D-09  -1.1921D-07  0.0000D+00          ION ALPHA
      1.2288D+05  0.0000D+00  -2.6214D+05  1.9661D+05          ION BETA
      9.313225746155D-10-2.664535259100D-15  589824  1629 DELTA-UTC:
AO,A1,T,W
          END OF HEADER
-----
```

1. Számítsuk ki az azimut és a magassági szög értékét félkör egységben:

$$\alpha = 0,980\,2878 \text{ [félkör]}$$

$$E = 0,354\,5433 \text{ [félkör]}$$

2. A vevő és az ionoszférikus pont alapfelületi távolsága (4.82):

$$\Psi = \frac{0,0137}{E + 0,11} - 0,022 = 0,007\,491\,33 \text{ [félkör]}$$

3. Az ionoszférikus pont földrajzi szélessége (4.83):

$$\varphi_P = \varphi + \Psi \cos \alpha = 0,256\,306\,05 \text{ [félkör]} = 46,14^\circ$$

Mivel a földrajzi szélesség kisebb mint  $75^\circ$  ( $=0,4167$  félkör), ezért további módosításra nincsen szükség. Amennyiben a földrajzi szélesség abszolút értéke meghaladja a  $0,4167$  félkör értéket, akkor az ionoszférikus pont földrajzi szélessége  $+0,4167$  az északi féltekén és  $-0,4167$  a déli féltekén.

4. Az ionoszférikus pont földrajzi hosszúsága (4.84):

$$\lambda_{IP} = \lambda_0 + \frac{\psi \sin \alpha}{\cos \varphi_{IP}} = 0,106\,538\,66 \text{ [félkör]} = 19,18^\circ$$

5. Az ionoszférikus pont geomágneses szélessége (4.85):

$$\varphi_{IP}^m = \varphi_{IP} + 0,064 \cos(\lambda_{IP} - 1,617) = 0,258\,409\,05 \text{ [félkör]}$$

6. Az ionoszférikus pontban a helyi idő meghatározásához a (4.75) képletet át kell alakítanunk másodperc és félkör egységre:

$$t[s] = 43200\lambda_{IP}[\text{félkör}] + t_{UT}[s] = 34\,301,5 \text{ s}$$

7. A Klobuchar modell amplitúdójának ( $A_2$ ) meghatározása:

$$A_2 = \sum_{i=0}^3 \alpha_i (\varphi_{IP}^m)^i = 1,538\,580 \cdot 10^{-8} [s]$$

Mivel az  $A_2 \geq 0$ , így nem kell változtatnunk az amplitúdó értékén. Amennyiben  $A_2 < 0$ , akkor  $A_2 = 0$  értékkel számolunk.

8. A periódus ( $A_4$ ) meghatározása:

$$A_4 = \sum_{i=0}^3 \beta_i (\varphi_{IP}^m)^i = 108\,790,6 [s]$$

GPS műholdak esetén a periódus nem lehet kisebb 72 000 másodpercnél (GPS ICD-200), ezért amennyiben kisebb lenne az  $A_4$  paraméter 72 000-nél, akkor  $A_4 = 72\,000$ .

9. Az éjszakai alapérték 5ns, míg a maximális késleltetés helyi ideje  $A_3 = 50\,400$  s.

10. Számítsuk ki a késleltetés számításához szükséges fázis értékét (4.74):

$$x = \frac{2\pi(t - A_3)}{A_4} = -0,929\,768 [rad].$$

11. A következő lépésben pedig határozzuk meg a zenit irányú ionoszférikus késleltetés értékét. Vegyük figyelembe, hogy ha az  $x$  periódus abszolút értéke kisebb mint  $\pi/2$ , akkor nappali időszakra vesszük figyelembe a modellt, míg ettől eltérő esetben csupán az éjszakai alapértéket kell figyelembe vennünk. Esetünkben nappali időszakról beszélünk, így a (4.73) képlet alapján:

$$\Delta T_v^{Iono} = A_1 + A_2 \cos(x) = 14,2 \text{ ns.}$$

A fenti érték hosszegységben kifejezve:

$$I = c \cdot \Delta T_v^{Iono} = 4,25 \text{ m}$$

12. A ferdeségi szorzótényező értékét a (4.86) képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$F = 1,0 + 16,0(0,53 - 0,354)^3 = 1,086\,423.$$

13. A műhold irányú késleltetés tehát az L1 frekvencián végzett kódmérésekre:

$$\Delta T^{Iono} = \Delta T_v^{Iono} \cdot F = 15,4 \text{ ns.}$$

Ugyanez hosszegységben kifejezve:

$$I = c \cdot \Delta T^{Iono} = 4,63 \text{ m}$$

14. Ugyanez a késleltetés L2 frekvencián végzett kódmérésekre:

$$\left[\Delta T^{Iono}\right]_{L2} = \gamma \cdot \Delta T^{Iono} = \frac{f_{L1}^2}{f_{L2}^2} \cdot \Delta T^{Iono} = 25,4 \text{ ns.}$$

Ugyanez hosszegységben kifejezve:

$$\left[I\right]_{L2} = c \cdot \left[\Delta T^{Iono}\right]_{L2} = 7,62 \text{ m}$$

#### 4.3.5.3. A NeQuick modell

A NeQuick modell az ARPL (Aeronomy and Radio Propagation Lab, Trieszt) és a Grazi Műszaki Egyetem által közösen fejlesztett globális, háromdimenziós, időfüggő ionoszféra modell. A modell háromdimenziós jellegéből fakadóan nincsen szükség leképezési függvényre, az ionoszférában bárhol bármilyen műhold-vevő irányra a késleltetés számítható.

A modellt elfogadta a Nemzetközi Telekommunikációs Únió Rádiókommunikációs szekciója, mint a TEC modellezés eszköztét, illetve az európai Galileo műholdrendszer is ezt a modellt fogja használni az egyfrekvenciás helymeghatározáshoz.

A számítások kiindulópontja az ionoszféra különböző rétegeinek havi mediántérképei. Annak érdekében, hogy a mérés időpontját jellemző napfolttevékenységet is figyelembe tudják venni. Ehhez vagy a napfoltok számát, vagy pedig a 10,7 cm hullámhosszú Nap által kibocsátott rádiósugárzást fluxusát lehet megadni. Ezen kívül megadhatuk még az ún. ionizációs paramétert is:

$$Az = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 \quad (4.87)$$

ahol  $\mu$  a módosított mágneses lehajlás:

$$\tan \mu = \frac{I}{\sqrt{\cos \varphi}} \quad (4.88)$$

A módosított mágneses lehajlás képletében  $I$  a valódi mágneses lehajlás, míg  $\varphi$  a földrajzi szélesség értéke.

A Galileo rendszer ionoszféra modellezése egyfrekvenciás mérések esetén az alábbiak szerint történik:

1. A navigációs üzenetekben a vevő megkapja:
  - az  $a_0$ ,  $a_1$  és  $a_2$  együtthatókat az effektív ionizációs paraméter meghatározásához;
  - az ionoszféra zavart jelző figyelmeztetést;
  - a mérés időpontját (UTC);
  - a műhold pozícióját (számítható a Kepler-féle pályaelemekből);
2. A vevő belső szoftveréből:
  - a mágneses pólus helyzete (5 évenként frissíteni kell);
  - a havi medián ionoszféra modellek (12 ITU-R térkép);
3. A számítási algoritmus az alábbi:

- A vevő előzetes helyzetének számítása kódtávolságokból (ionosferikus javítások nélkül);
- $j, l$  alapján a mágneses lehajlás számítása;
- a módosított mágneses lehajlás számítása ( $m$ );
- az effektív ionizációs paraméter meghatározása ( $Az$ );
- az effektív ionizációs paraméter ismeretében az ionoszféra okozta késleltetés számítható az NeQuick modell segítségével (algoritmus letölthető a <http://www.itu.int/oth/R0A04000018/en> oldalról)