

3. előadás:

A GPST időrendszer. A műholdak által sugárzott jelek és adatok. A műholdak koordinátáinak meghatározása a mérés pillanatában

A globális navigációs műholdrendszerekkel a térbeli ívmetszés segítségével határozhatjuk meg a GNSS vevő helyzetét. Mivel azonban az ívmetszéshez felhasználandó távolságokat közvetlenül mérni nem tudjuk, így célszerűen a mikrohullámú távmérés eszköztárát használjuk fel a távolságok meghatározásához. Ennek megfelelően a távolságokat egy elektromágneses jel terjedési idejéből és annak terjedési sebességéből határozzuk meg. Ebből is látható, hogy a megfelelő pontosságú navigációs célú helymeghatározáshoz a futási idő meghatározása elengedhetetlen, ezért röviden tekintsük át a felsőgeodéziában használatos különféle időfogalmakat.

Az idő mint fogalom definiálásakor meg kell különböztetnünk az időpont és az időtartam fogalmát. Időpontnak nevezzük egy időbeli kiterjedés nélküli esemény bekövetkezésének pillanatát (pl. a sugárzott jel észlelésének pillanatát), míg időtartam alatt két időpont között eltelt időt értjük (pl. a terjedési idő a jel észlelésének pillanata, illetve a jel kibocsátásának pillanata között eltelt idő), valamilyen általunk választott egységben mérve.

Egységként általában valamilyen periodikusan ismétlődő jelenség két előfordulása közötti időtartamot használjuk fel. Ilyen jelenség lehet a Föld forgása, a Föld Nap körüli keringése vagy éppen a cézium 133 atom két hiperfinom szint közötti átmenete során fellépő sugárzás periódusideje.

Mivel a felsőgeodéziában mindhárom említett időegységet használjuk, ezért röviden tekintsük át a Föld forgásához (GAST, GMST, és a világidő – UT1), a Föld keringéséhez (a dinamikai idő), illetve az atomi energiaszint-átmenet során fellépő elektromágneses sugárzáshoz kapcsolódó időrendszereket (atomidő – TAI, koordinált világidő – UTC, GPS idő - GPST).

3.1. A Föld forgásán alapuló időrendszerek

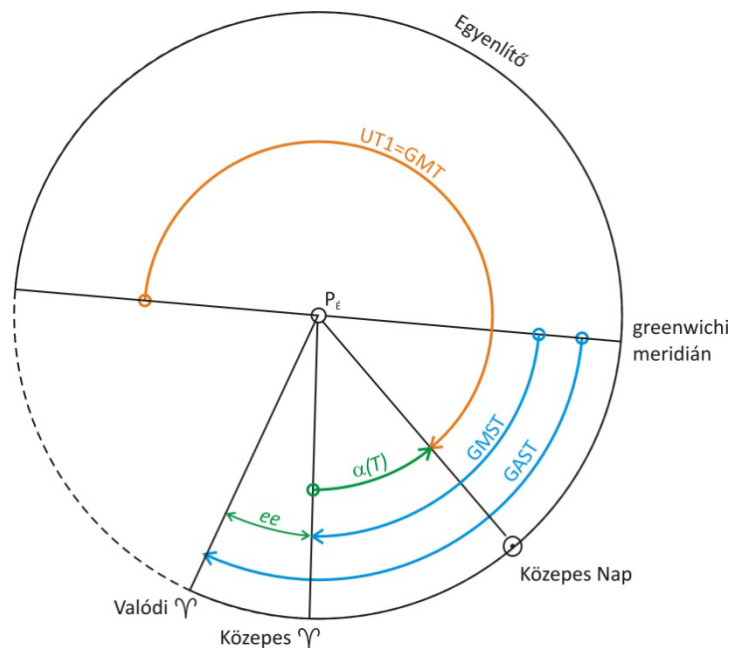
A Föld forgásán alapuló időrendszereket a 3.1 ábrán láthatjuk. Valódi csillagidő (Apparent Sidereal Time – AST) alatt a helyi meridiánsík és a Tavaszpont által bezárt óraszöget értjük, amelyet a Tavaszpont felső kulminációjától mérünk az óramutató járásával ellentétes irányban (0-24h). Mivel a valódi csillagidő definiálásakor felhasználtuk a helyi meridiánsíkot, ezért ez alapvetően helyi idő. Abban az esetben, ha a valódi csillagidőt a greenwich-i meridiánsíkra vonatkoztatjuk, akkor azt GAST jelöléssel látjuk el és greenwich-i valódi csillagidőnek nevezzük.

Közepes csillagidő alatt a helyi meridiánsík és az ún. közepes Tavaszpont által bezárt óraszöget értjük. Mivel a Föld forgása nem egyenletes, ezért a rövid periódusú egyenletlenségeket kisimítva, azaz a közepes Tavaszpont helyzetét definiálva egy egyenletesebb időrendszerhez juthatunk. Ennek érdekében a közepes Tavaszpont definiálásakor csak a normálperecesszió (luniszoláris és planetáris perecesszió)hatását vesszük figyelembe, a perecessziózavar hatását, azaz a:

- a Nap deklinációjának változásából eredő féléves;
- a Föld ellipszis pályájából eredő éves;
- a Hold deklinációjának változásából eredő 14 napos;
- a Hold ellipszis pályájából eredő 28 napos periódusú változásokat nem.

A fentiek miatt a Tavaszpont tényleges és közepes helyzete közötti eltérést a Tavaszpont időegyenlítése (ee – Equation of equinoxes) írja le, amely csillagászati évkönyvekben megtalálható.

A csillagidők azonban nem felelnek a polgári célú felhasználáshoz, hiszen a csillagnap mintegy 4 perccel rövidebb az ún. szoláris napnál (ami a Nap lokális meridián feletti felső kulminációi között eltelt időnek felel meg). Ezáltal az év folyamán a csillagidő és a szoláris idő egyre nagyobb mértékben térnek el egymástól. Annak érdekében, hogy a polgári célú felhasználást támogató időrendszer is kialakítható legyen, bevezették a világidő (UT1) fogalmát. Az UT1 valójában a greenwich-i meridián átellenes oldala és a közepes Nap által bezárt óraszög. Az UT1 kiszámítható a greenwich-i közepes csillagidőből is, ehhez az $\alpha(T)$ óraszög megegyezései képletét kell felhasználnunk.



3.1 ábra: A Föld forgásán alapuló időrendszerek

3.2. A Föld Nap körüli keringéséhez kapcsolódó időrendszerek

A Föld forgásához kötött időrendszerek nagy hátránya, hogy a Föld forgásának egyenetlensége miatt maguk az időrendszerek sem egyenletesek. Márpedig műholdak pályaszámításához és a newtoni mechanika időfüggő mozgásegyenleteinek megoldásához ún. inerciaidőt kell alkalmaznunk (mivel az említett egyenletek csak inerciarendszerekben érvényesek). A szoláris és csillagidők ezen hátrányának kiküszöbölése érdekében bevezették a Földi Dinamikai Időt (Terrestrial Dynamic Time – TDT). Ebben az időrendszerben az időegységet a Föld Nap körüli keringéséből vezették le, nevezetesen a TDT kezdőidőpontja az 1900 tropikus év kezdete, időskáálája pedig az 1900. tropikus év hossza. Ez a rendszer már kvázi inerciaidő, így alkalmas lehet a Föld körül keringő műholdak pályaszámítására. A Földi Dinamikai Időt 1991-ben leváltotta a Földi Idő (Terrestrial Time – TT).

Egy másik dinamikai időrendszer a Baricentrikus Dinamikai Idő (Barycentric Dynamic Time – TDB), amely a Naprendszer tömegközéppontjával együtt mozgó inerciaidő. Ezt az időrendszert a Naprendszer bolygóinak pályaszámításához használhatjuk fel.

Valójában ma már a Nemzetközi Csillagászati Unió (IAU) ajánlásai alapján áttértek a Geocentrikus Koordinátaidő (Geocentric Coordinate Time – TCG) és a Baricentrikus Koordinátaidő (Barycentric Coordinate Time – TCB) használatára. Ezek az időrendszerek már relativisztikus szemléletű időrendszerek és jelenleg ezek tekinthető a legtökéletesebb inerciaidőknek a Föld környezetében (TCG) és a Naprendszerben (TCB). Megjegyezzük, hogy a GNSS műholdak tudományos igényű pályaszámítása során felhasznált bolygó efemeridák (Development Ephemerides 405 - DE405) levezetésénél a TCB-vel egyenrangú időrendszert használt a NASA Jet Propulsion Laboratory.

3.3. Az atomidő

Az inerciaidőrendszerek fenntartásához és realizálásához szükséges volt egy nagy pontosságú időrendszer kialakítása. Ennek érdekében a Nemzetközi Súly és Mértékügyi Hivatal (BIPM) tartja fent az ún. nemzetközi atomidőt (International Atomic Time – TAI). A TAI időegysége az atomi másodperc, amely a cézium 133 atommag két hiperfinom átmenetéhez tartozó sugárzás periódusidejének $9\,192\,731\,770$ -szerese, ami gyakorlatilag megegyezik a földi idő másodperc egységével. Így a TT és a TAI között az alábbi konstant eltérés írható fel:

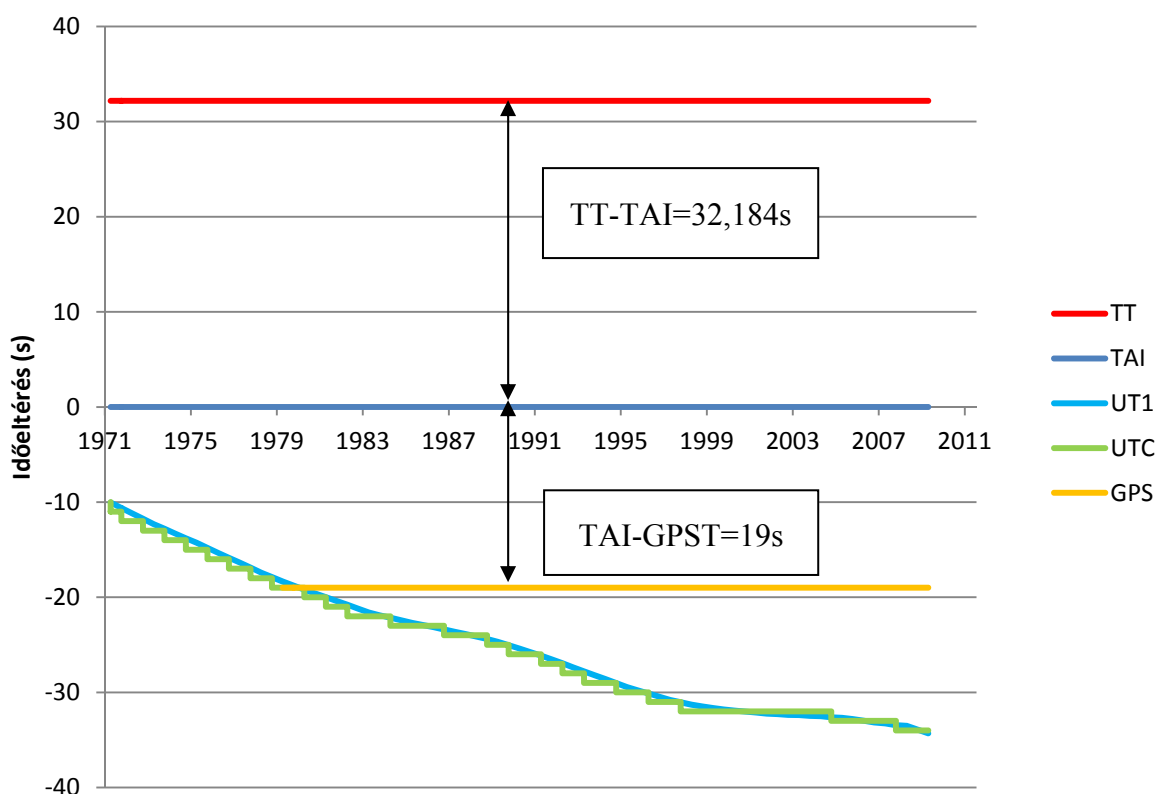
$$TT = TAI + 32,184s.$$

A TAI fenntartásában jelenleg a világon mintegy 70 obszervatóriumban elhelyezett 200 atomóra vesz részt.

A nemzetközi atomidő előnye, hogy egyenletes időskálájú, könnyeb realizálható időrendszer. Ugyanakkor nagy hátránya, hogy a Föld forgásához köthető világidőtől eltér az egysége, így az UT1 és a TAI között egyre nagyobb eltérések tapasztalhatóak. A két időrendszer előnyeinek ötvözésére vezették be az ún. koordinált világidőt (Universal Time Coordinated – UTC). Az UTC tulajdonképpen egy atomidő, egysége az atomi másodperc. Ugyanakkor a definiálásában időnként egy-egy szökőmásodpercet (leap seconds) iktatnak be annak érdekében, hogy jól közelítse a világidőt. Abban az esetben, ha az UT1 és az UTC értéke 0.9 másodpercnél jobban eltér egymástól, akkor 1 másodperccel eltolják az UTC kezdőpontját, hogy a jó illeszkedés továbbra is fennálljon.

3.4. A GPST időrendszer

A GPST időrendszer alapja szintén az atomi másodperc. Az időrendszer kezdőepochája 1980. január 6. 0h. Meg kell jegyeznünk, hogy a kezdőepocha vasárnapra esik, ezért minden GPS hét vasárnapkal kezdődik és szombattal fejeződik be.



3.2 ábra: A TT, TAI, UT1, UTC és a GPST időrendszerek kapcsolata

A GPST időrendszer és a TAI között a bevezetés időpontjának megfelelően 19 másodperces konstans időeltérés állt fenn. Ez megfelelt a bevezetés időpontjában az UTC szökómásodperceinek számával. 2010-ben emiatt a szökómásodpercek értéke 15 másodperc volt, azaz ennyivel tért el a GPS idő az UTC-től.

A GPS idő előállítható a műholdak által sugárzott navigációs üzenetekből. A navigációs üzenetekben általában a GPS hét sorszáma (Week No – WN), illetve a héten belüli időpont (Time of Week – TOW) értékét sugározzák. Ezekből a GPST időpont az alábbi képlettel számítható:

$$GPST = 604800 \cdot WN + TOW.$$

A TT, UT1, UTC, TAI és GPST időrendszerek kapcsolatát a 3.2 ábrán mutatjuk be.

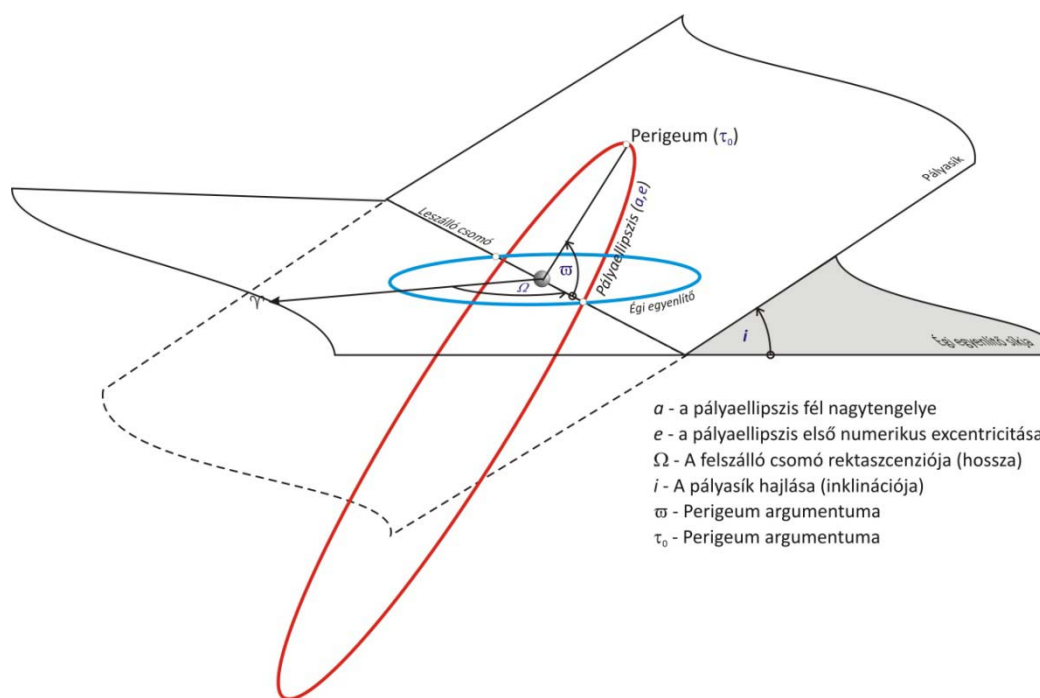
3.5. A műholdak pályameghatározása

Az időrendszerek alapjainak áttekintése után térjünk át a műholdak helyzetének meghatározására. Mint azt a műholdas helymeghatározás alapelvénél már láthattuk, a globális helymeghatározó rendszerek a térbeli ívmetszés eljárását alkalmazzák a helymeghatározás megvalósításához. A térbeli ívmetszés felhasználásakor a műholdak helyzetét ismernünk kell, így a mérés pillanatában meg kell tudnunk határozni, hogy a műholdnak mik a koordinátái. A következőkben ezt fogjuk áttekinteni.

Első közelítésben írjuk fel az ún. kéttest problémát a műholdak mozgására (Newton II. törvénye):

$$\mathbf{r} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

ahol \mathbf{r} a két tömegpont (a Föld és a műhold) helyzetének különbségvektora, G az univerzális gravitációs állandó, m_1 és m_2 pedig a tömegpontok tömege. Mivel a fenti egyenlet egy másodrendű homogén vektor-differenciálegyenlet, ezért összesen 6 integrálási állandót kell rögzíteni ahhoz, hogy a műhold pályája egyértelműen meghatározható legyen. Ezt a hat integrálási állandót hívjuk Kepler-féle pályaelemeknek. A Kepler-féle pályaelemek definíciója a 3.3 ábrán látható.



3.3 ábra: A Kepler féle pályaelemek

A műholdak pályaszámítása a következő lépésekben történik:

1. Pályasíkbeli koordináták számítása (a műhold helyzete az ellipszispályán az ellipszis tengelyeihez illeszkedő derékszögű koordinátarendszerben meghatározva)
2. A pályasíkbeli koordináták transzformálása térbeli derékszögű koordinátarendszerekbe (pl. égi egyenlítői vagy horizonti koordinátarendszerekbe).

A számítási lépések egyszerűsítése érdekében a koordinátarendszerek kezdőpontját oly módon vesszük fel, hogy azok egybeessenek a Föld tömegközéppontjával, ily módon a transzformáció csak forgatásokat fog tartalmazni.

3.5.2. Pályasíkbeli koordináták számítása

A műholdak pályasíkbeli helyzetét akár egyetlen szögmennyiséggel is jellemezhetjük. Ezt a szöget háromféleképpen értelmezhetjük:

- felhasználhatjuk a valódi anomáliát (ν), ami a perigeumpont-geocentrum-műhold szög;
- az excentrikus anomáliát (E), ami a perigeumpont a pályaellipszis középpontja és a műhold által bezárt szög; valamint
- az ún. középanomáliát (M), amelynek nincs geometriai értelmezése, ez tulajdonképpen az időben egyenletesen változó szögmennyiség.

Kepler III. törvénye alapján a műhold átlagos szögsebessége kiszámítható:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^3 4\pi^2}{\mu}}} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.2)$$

ahol μ a geocentrikus gravitációs állandó ($\mu = GM_F$), ahol M_F a Föld tömege.

Az átlagos szögsebesség ismeretében a középanomália értéke számítható, amennyiben ismerjük egy tetszőleges epochában a középanomália értékét:

$$M(t) = M(t_0) + n(t - t_0). \quad (3.3)$$

A középanomália, illetve a referencia epocha (t_0) értékét a műholdak navigációs üzenetei tartalmazzák. Ezáltal a mérés időpontjának megfelelő időpontra a középanomália értéke előállítható. Mint ahogyan azonban azt már említettük, a középanomáliának nincsen geometriai tartalma. Ezért át kell térnünk az excentrikus anomáliára, amelyet az alábbi ún. Kepler-egyenletből határozhatunk meg:

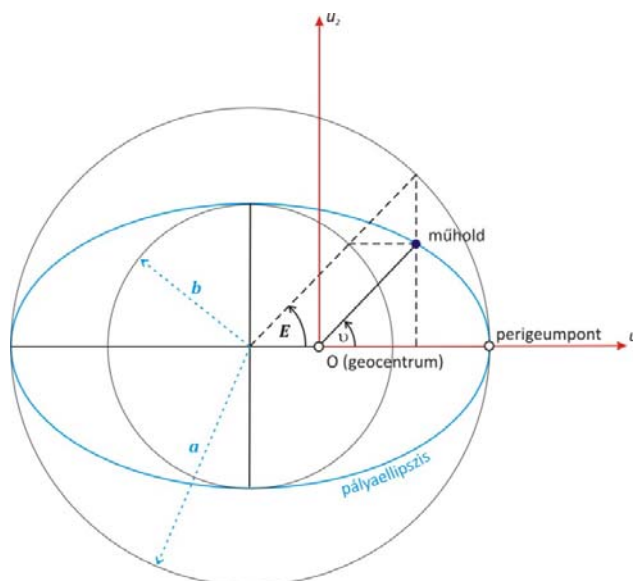
$$M(t) = E(t) - e \cdot \sin E(t). \quad (3.4)$$

Mivel a pályaszámításhoz az excentrikus anomáliára van szükségünk, így a Kepler-egyenletet az alábbi alakra hozhatjuk:

$$E(t) = M(t) + e \cdot \sin E(t). \quad (3.5)$$

A fenti egyenlet megoldása iteratív úton történik. Az első lépésben $E(t) = M(t)$ feltételezéssel élünk, majd kiszámítjuk az $E(t)$ következő értékét. Ezt követően megismételjük a számításokat addig, amíg az $E(t)$ értékek már kellően kis változást szenvednek az egymást követő iteratív lépésekben.

Miután meghatároztuk az excentrikus anomália értékét, ki fogjuk számítani a valódi anomália értékét a t időpontban. Erre azért van szükségünk, mivel a koordináta-rendszerünket úgy vettük fel, hogy az origója a Föld tömegközéppontjában helyezkedjen el. Az excentrikus anomália és a valódi anomália között geometriai úton levezethetőek az összefüggések a következők szerint. Az egyes mennyiségek értelmezését a 3.4 ábrán láthatjuk.



3.4 ábra: A pályasíkbeli koordináták (u_1, u_2) számítása az excentrikus anomáliákból

Első lépésként határozzuk meg a műholdra mutató helyzetvektor hosszát (r). Ehhez írjuk fel az $r \cdot \sin v$ és az $r \cdot \cos v$ szorzatokat az excentrikus anomália függvényeként. Ehhez húzzunk egy a és egy b sugarú kört az ellipszis középpontja köré.

$$r \sin v = b \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (3.6)$$

$$r \cos v = a \cos E - ae = a(\cos E - e). \quad (3.7)$$

A fenti két egyenlet négyzetösszegét képezve:

$$r^2 = a^2 \left[\begin{array}{l} \sin^2 E - e^2 \sin^2 E + \\ \cos^2 E + e^2 - 2e \cos E \end{array} \right]. \quad (3.8)$$

A fenti egyenletben elvégezve az egyszerűsítéseket azt kapjuk, hogy:

$$r = a[1 - e \cos E]. \quad (3.9)$$

Ezáltal meghatároztuk a helyvektor hosszát. Ha ismernénk a valódi anomália értékét, akkor az ellipszishoz kötött koordinátarendszerben már könnyen kiszámítható lennének a műholdak derékszögű koordinátái.

A valódi anomália számításához a (3.7) és a (3.9) egyenletek felhasználásával írjuk fel az $r(1 + \cos v)$ és az $r(1 - \cos v)$ szorzatokat:

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos E), \text{ és} \quad (3.10)$$

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos E). \quad (3.11)$$

Osszuk el a két egyenletet egymással:

$$\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} = \frac{1 + e}{1 - e} \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E} \quad (3.12)$$

A trigonometrikus azonosságokat felhasználva a valódi anomália kiszámításához az alábbi képletet vezethetjük le:

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \Rightarrow v = 2 \arctan \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (3.13)$$

Mivel most már ismerjük mind a helyzetvektor hosszát (r), mind pedig a valódi anomália értékét (v), így a pályaellipszis nagytengelyeihez tájolt derékszögű koordinátarendszerben a koordináták már számíthatóak a valódi, vagy akár az excentrikus anomáliák segítségével is.

$$\begin{aligned} u_1 &= r \cos v = a(\cos E - e), \\ u_2 &= r \sin v = b \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.5.3. A pályasíkbeli koordináták számítása Földhöz kötött térbeli derékszögű koordinátarendszerbe

A következő lépésben a 3.3 ábrán látható pályaellipszishoz kötött derékszögű koordinátarendszert kell beforgatnunk az égi egyenlítői koordinátarendszerbe. Ehhez három pályaelemet, a perigeum argumentumát (ω), az inklinációt (i) és felszálló csomó rektaszcenzióját (Ω) kell felhasználnunk.

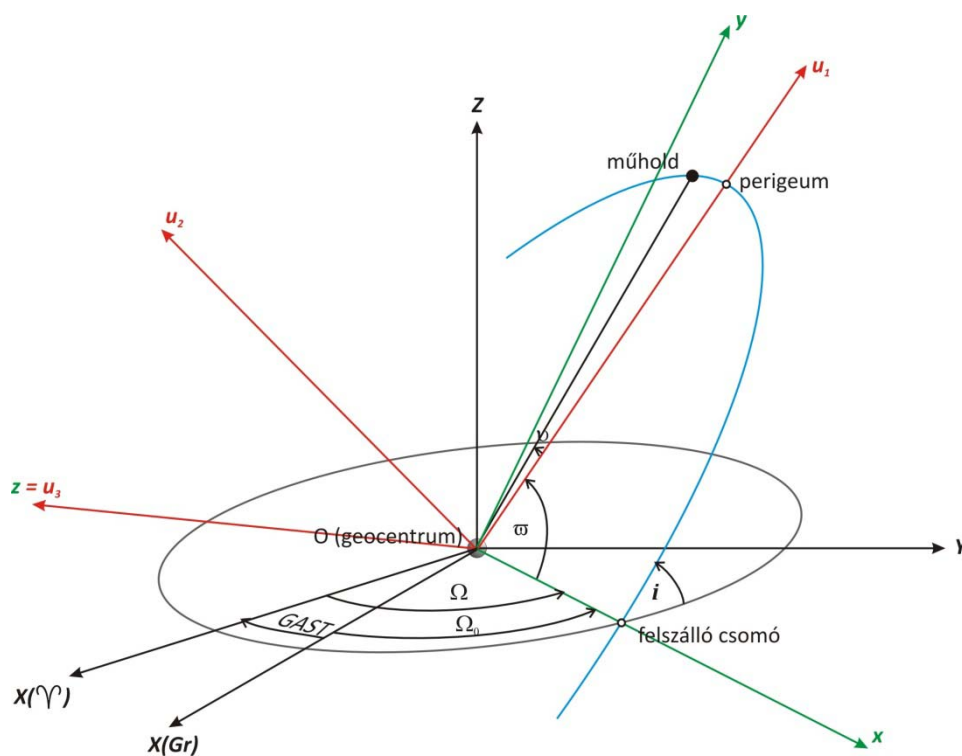
Az egyes forgatások lépései az alábbiak (3.5 ábra):

1. az u_1, u_2, u_3 rendszerből az x, y, z rendszerbe forgatunk a pályasíkban $(-\omega)$, euz követően
2. beforgatjuk az x, y, z rendszert az égi egyenlítő síkjába $(-i)$, majd
3. elforgatjuk a koordinátarendszert $(-\Omega)$ mértékben a z tengely körül.

A forgatási mátrix tehát:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-i)\mathbf{R}_3(-\omega) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a helymeghatározáshoz a Földdel együtt forgó koordinátarendszerbe célszerű a műhold pozíciójának a meghatározása. Ennek megfelelően vagy egy 4. forgatásra is szükségünk van (a z tengely körül GAST mértékben), vagy a felszálló csomó rektaszcenziója helyett annak hosszúságával forgatunk (Ω_0) a (3.15) képletben.



3.5 ábra: Pályasíkbeli koordináták átszámítása égi egyenlítői rendszerbe

Az eddigiekben részletezett pályaszámítás során azzal a feltételezéssel éltünk, hogy a műholdak mozgását leírhatjuk a kéttest problémával. A valóságban ez a feltételezés nem állja meg a helyét, mert egyrészt a Föld nehézségi erőtere nem homogén, így a Föld nem helyettesíthető egy tömegponttal, másrészt egyéb erőhatások is érik a műholdakat. Ezen perturbáló erők hatására a Kepler-féle pályaelemek folyamatosan változnak. A műholdak a felhasználók felé sugárzott pályaadatokban a Kepler-féle pályaelemek változásáról is szolgáltatnak információkat, így az aktuális navigációs üzenetek segítségével rövid ideig érvényes Kepler pályákat határozhatunk meg. Ezen pályák sorozatát simuló pályáknak nevezzük (osculating orbit).

3.5.4. GPS műholdak pályaszámítása fedélzeti pályaadatokból

A következőkben tekintsük át a fedélzeti pályaadatokból történő pályaszámítás lépéseit. Ehhez első lépésként tekintsük át, hogy milyen pályaadatokat szolgáltat a GPS a navigációs üzenetekben. A 3.5 ábrán a 29-es PRN számú műhold 2010. augusztus 12-én GPS idő szerint 16 órakor sugárzott pályadatait láthatjuk RINEX fájlformátumban. Az egyes mezők értelmezése az ábra alsó felében található. A navigációs üzenet első sorában található a műhold azonosítója, az időbélyeg, valamint a műhold órahiba leírására szolgáló másodfokú polinom együtthatói.

A második sorban található az efemerisz azonosító, a radiális korrekció szinuszos együtthatója (Crs), a középmozgás korrekciója (Δn) valamint a középmozgás értéke a kezdőepochára vonatkoztatva.

A harmadik sor tartalmazza a pályamenti korrekció koszinuszos együtthatóját (Cuc), a pályaeccentricitását, a pályamenti korrekció szinuszos együtthatóját (Cus) valamint a pályaeccentricitás fél nagytengelyének négyzetgyökét.

A negyedik sorban található a referenciaepocha értékét (ToE), a pályasíkra merőleges korrekció koszinuszos és szinuszos együtthatóját (Cic, Cis) valamint a felszálló csomó hosszát (OMEGA).

```
11 11 3 31 7 59 44.0 -.138827599585D-03 -.306954461848D-11 .000000000000D+00
.260000000000D+02 .123437500000D+02 .607989610922D-08 .143327691152D+01
.741332769394D-06 .116681606742D-01 .116173177958D-04 .515351079750D+04
.374384000000D+06 -.244006514549D-06 -.116671796900D+00 .856816768646D-07
.888487466669D+00 .119156250000D+03 .917861836195D+00 -.885108296885D-08
.953611150304D-10 .100000000000D+01 .162900000000D+04 .000000000000D+00
.200000000000D+01 .000000000000D+00 -.116415321827D-07 .260000000000D+02
.374399000000D+06
```

PRN YY MM DD HH mm ss.s	órahiba, a0(s)	drift a1(s/s)	drift ráta a2(s/s ²)
Efem. adatok azonosítója	Crs (méter)	Δn (rad/s)	M0 (rad)
Cuc (rad)	e (excentr.)	Cus (rad)	sqrt(a) (sqrt(m))
ToE (sec, a GPS héten)	Cic (rad)	OMEGA (rad)	Cis (rad)
i0 (rad)	Crc (méter)	omega (rad)	OMEGA DOT (rad/sec)
IDOT (rad/sec)	L2 kódok száma	GPS hét	L2 P adat
SV megbízhatóság (m)	SV health	TGD (sec)	IODC
Transm. Time of Msg.			

Megjegyzések:

OMEGA: A GPS hét kezdetére vonatkozik

TGD: Group Delay Differential

3.6. ábra: Navigációs üzenetek RINEX 2.11 formátumban

Az ötödik sor tartalmazza az inklináció értékét a referenciaepochában (i0), a radiális korrekció koszinuszos együtthatóját (Crc), a perigeum argumentumát (omega), illetve a felszálló csomó hosszának driftjét (OMEGA DOT).

A hatodik sorban szerepel az inklináció időbeli változása (IDOT) valamint egyéb olyan információk, amelyek a navigációs üzenet helyességére, a műhold állapotára utalnak.

A pályaszámítás a 3.6 ábrán található adatokból a következő lépésekben történik:

1. Határozzuk meg a középmozgás értékét a pályaeccentricitás fél nagytengelyének hosszából:

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.16)$$

ahol $\mu=GM$ a geocentrikus gravitációs állandó, értéke a WGS-84 vonatkoztatási rendszerben: $398600,5 \text{ km}^3\text{s}^{-2}$.

2. A korrekciók érvényességi időtartama:

$$t_k = t - t_{oe} \quad (3.17)$$

3. A javított középmozgás meghatározásához vegyük figyelembe a navigációs üzenetben szereplő Δn értéket:

$$n = n_0 + \Delta n \quad (3.18)$$

4. A számítási időpontban így a középánómia értéke már meghatározható:

$$M_k = M_0 + n \cdot t_k \quad (3.19)$$

5. A középánómia függvényében az excentrikus anomália meghatározható a Kepler-egyenletből fokozatos közelítéssel:

$$E_k = M_k + e \cdot \sin E_k \quad E_{k0} = M_k \quad (3.20)$$

6. Az excentrikus anomália segítségével kiszámíthatjuk a valódi anomália értékét:

$$\nu_k = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan \frac{E_k}{2} \right) \quad (3.21)$$

7. A valódi anomália és a perigeum argumentuma ismeretében kiszámítható a műhold helyzete a pályasíkban (a felszálló csomóvonalhoz képest).

$$\varphi_k = \nu_k + \varpi \quad (3.22)$$

8. Ezt követően ki kell számítanunk a pályaelemek változása miatti korrekciókat, azaz a pályamenti, a radiális és a pályasíkra merőleges korrekciókat:

A pályamenti korrekció értéke:

$$\delta u_k = C_{uc} \cos 2\varphi_k + C_{us} \sin 2\varphi_k \quad (3.23)$$

A radiális korrekció értéke:

$$\delta r_k = C_{rc} \cos 2\varphi_k + C_{rs} \sin 2\varphi_k \quad (3.24)$$

A pályasíkra merőleges korrekció értéke pedig:

$$\delta i_k = C_{ic} \cos 2\varphi_k + C_{is} \sin 2\varphi_k \quad (3.25)$$

9. Ezt követően számítható a javított szöghelyzet a pályasíkban:

$$u_k = \varphi_k + \delta u_k \quad (3.26)$$

10. A javított geocentrikus távolság (r) pedig:

$$r_k = a(1 - e \cos E_k) + \delta r_k \quad (3.27)$$

11. A javított inklináció:

$$i_k = i_0 + \frac{di}{dt} t_k + \delta i_k \quad (3.28)$$

12. Miután ismerjük a szöghelyzet, illetve a geocentrikus távolság javított értékeit (3.26) és (3.27), így számíthatóak a pályasíkban értelmezett geocentrikus koordináták:

$$\begin{aligned}x_k &= r_k \cos u_k \\y_k &= r_k \sin u_k \\z_k &= 0\end{aligned}\tag{3.29}$$

13. A WGS-84 rendszerben értelmezett térbeli derékszögű koordináták számításához meg kell még határoznunk a felszálló csomópont javított hosszát:

$$\begin{aligned}\Omega_k &= \Omega_0 + (\Omega - \omega_E) t_k - \omega_E t_{oe} \\ \omega_E &= 7292115.1467 \cdot 10^{-11} [\text{rad} / \text{s}]\end{aligned}\tag{3.30}$$

14. Végezetül a javított inklináció és a javított felszálló csomó hosszával történő forgatások eredményeképpen megkaphatjuk a műhold WGS-84 rendszerben értelmezett térbeli derékszögű koordinátáit:

$$\begin{aligned}X^S &= x_k \cos \Omega_k - y_k \cos i_k \sin \Omega_k \\Y^S &= x_k \sin \Omega_k + y_k \cos i_k \cos \Omega_k \\Z^S &= y_k \sin i_k\end{aligned}\tag{3.31}$$

15. A műhold órahiba értékének meghatározása az órahiba polinomos leírása segítségével határozható meg, ahol a polinomegyütthatókat a navigációs üzenet első sorában találhatjuk meg:

$$\delta^S = a_0 + a_1(t - t_C) + a_2(t - t_C)^2\tag{3.32}$$

meg kell jegyeznünk, hogy a fedélzeti pályaelemekben található a_0, a_1, a_2 órahiba értékét leíró polinomegyütthatók a két frekvencián végzett méréseket végző felhasználó által tapasztalt órahibát, valamint a műholdak differenciális csoport késését tartalmazzák (az L1 és L2 fázison végzett kódmerések hardverkésései). Emiatt az L1 fázison végzett mérésekre figyelembe kell vennünk a differenciális csoportkésés (T_{GD}) órahibára kifejezett értékét is:

$$\delta_{L1}^S = a_0 + a_1(t - t_C) + a_2(t - t_C)^2 - T_{GD},\tag{3.33}$$

ugyanaz az L2 vivőfázisra:

$$\delta_{L1}^S = a_0 + a_1(t - t_C) + a_2(t - t_C)^2 - \gamma T_{GD},\tag{3.34}$$

ahol:

$$\gamma = \frac{f_{L1}^2}{f_{L2}^2} = \left(\frac{77}{60}\right)^2,\tag{3.35}$$

3.5.5. GPS műholdak koordinátáinak számítása az almanachból

A GPS műholdak a saját fedélzeti pályadataikon túl, egy ún. almanachot is sugároznak a felhasználók felé. Az almanachban a teljes konstelláció közelítő pályadatai megtalálhatóak annak érdekében, hogy a navigációs vevők saját pozíciójuknak közelítő ismeretében meg tudják határozni a horizont felett található műholdakat, ezáltal felgyorsítható a műholdak észlelése.

Másrésről az almanachban található adatok lehetővé a műholdpályák alacsonyabb pontosságú, de hosszabb távú előrejelzését is. Az előrejelzett pályaadatok segítségével megvizsgálhatjuk egy jövőbeli időpontra a műholdgeometria hatását, így megtervezhetjük GPS méréseink optimális időpontját, amikor kellően nagy számú műhold egyidejű észlelése lehetséges és a műholdak geometriai elrendezése is optimális a helymeghatározáshoz. A GPS rendszer teljes kiépítéséig a statikus mérések tervezése elengedhetetlen volt, manapság már

inkább csak városi környezetben, nagyarányú kitakarások esetén végezzük el ezeket a tervezéseket annak érdekében, hogy megfelelő minőségű méréseket tudjunk végrehajtani.

Az almanachban szereplő adatok az alábbiak:

- az excentricitás (e),
- a referencia epocha (t_{0a}) másodperc egységben,
- az inklináció javítása (δi) félkör egységben,
- felszálló csomó hosszának változása (OMEGADOT) félkör/másodperc egységben,
- a pályae ellipszis fél nagytengelyének négyzetgyöke ($a^{0.5}$) $m^{0.5}$ egységben,
- a felszálló csomó hosszúsága a GPS hét kezdetén (Ω_0) félkör egységben
- a perigeum argumentuma (ω) félkör egységben,
- a közép anomália értéke a referencia epochában (M_0) félkör egységben,
- az órahiba értéke (af_0) másodperc egységben,
- a műholdóra driftje (af_1) másodperc/másodperc egységben.

Megjegyezzük, hogy az almanachban az Ω_0 paraméter számítása során a hét elején érvényes greenwichi csillagidő értékét használják fel, azaz:

$$\Omega_0 = \Omega(t_a) - GAST(t_0) \quad (3.36)$$

Az almanachból történő pályaszámítás az alábbi lépésekben történik:

1. A középmozgás meghatározása:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.37)$$

2. A közép anomália értéke a t időpontban:

$$M = M_0 + n(t - t_a) \quad (3.38)$$

3. Az inklináció értéke:

$$i = 54^\circ + \delta i \quad (3.39)$$

4. A felszálló csomó hossza:

$$l = \Omega_0 + \Omega(t - t_a) - \omega_E(t - t_0) \quad (3.40)$$

5. A műhold órahiba kiszámítása az almanachból:

$$\delta^S = a_0 + a_1(t - t_a) \quad (3.41)$$

A fenti lépésekkel kiszámíthatjuk azokat a kiinduló adatokat, amelyekkel a pályaszámítás már végrehajtható a korábban már leírt módszerrel. Megjegyezzük, hogy a többi pályaparaméter (a , e és ω) értéke az almanachból történő pályaszámítás esetén nem változik az idő függvényében.

3.5.6. A műholdak helyzetének számítása a horizonti koordinátarendszerben

Az előző fejezetekben láthattuk, hogy miként határozható meg a geocentrikus térbeli derékszögű koordinátarendszerben a műholdak helyzete a fedélzeti pályaelemek segítségével. Számos esetben azonban nem csak erre van szükségünk, hanem arra is, hogy a vevő földrajzi helyzetének függvényében milyen irányban található meg az adott műhold egy bizonyos időpillanatban. Ehhez a geocentrikus koordinátarendszerekből át kell térnünk a vevő földrajzi helyzetének megfelelő horizonti koordinátarendszerbe. A horizonti koordináták (A – azimut és h – magassági szög) alapján meghatározható a műhold iránya az észlelőhöz képest, de például a magassági szöget a légkör okozta szabályos hibák meghatározása során is felhasználjuk.

A transzformációhoz első lépésben a geocentrikus koordinátarendszertől át kell térnünk a topocentrikus koordinátarendszerbe. Ez nem jelent mást, mint azt, hogy a térbeli derékszögű koordinátarendszerünk origóját áthelyezzük a vevő földrajzi helyzetének megfelelő pontba, illetve elforgatjuk azt oly módon, hogy a Z koordinátatengely az ellipszoidi normálissal essen egybe, az X meridiánirányú legyen és az északi irányba mutasson, míg az Y az XZ síkra merőleges legyen és balsodrású rendszert alkosson.

Első lépésben helyezzük át a térbeli derékszögű koordinátarendszerünk origóját a vevő földrajzi helyzetének megfelelő pontba:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_X \\ s_Y \\ s_Z \end{bmatrix} = \mathbf{r}^S - \mathbf{r}^P = \begin{bmatrix} X^S - X_P \\ Y^S - Y_P \\ Z^S - Z_P \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

ahol \mathbf{r}^S a műhold geocentrikus helyvektora, míg \mathbf{r}^P a vevő helyzetének geocentrikus helyvektora.

A következő lépésben az \mathbf{s} vektor felhasználásával számítsuk ki a topocentrikus koordinátákat. Ehhez szükségünk lesz a vevő ellipszoidi földrajzi koordinátáira, amelyet iterációs úton állíthatunk elő:

$$\lambda_P = \arctan \frac{Y_P}{X_P} \quad (3.43)$$

$$\varphi_P = \arctan \frac{Z_P + e^2 N_P \sin \varphi_P}{\sqrt{X_P^2 + Y_P^2}} \quad (3.44)$$

ahol N_P az ellipszoid harántgörbületi sugara:

$$N_P = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi_P + b^2 \sin^2 \varphi_P}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_P}}. \quad (3.45)$$

Vegyük észre, hogy a (3.40) egyenletben a földrajzi szélesség mindkét oldalon szerepel, ezért az egyenletet csak iteratív úton tudjuk megoldani. Bár a vevő ellipszoid feletti magasságára a számításokhoz nincsen szükségünk, a teljesség igénye miatt azt az alábbi képlettel határozhatjuk meg a földrajzi szélesség ismeretében:

$$h_P = \frac{\sqrt{X_P^2 + Y_P^2}}{\cos \varphi_P} - N_P. \quad (3.46)$$

A vevő helyzetének ellipszoidi földrajzi koordinátái alapján felírható az a forgatási mátrix, amely segítségével az \mathbf{s} vektorból a műhold topocentrikus koordinátái kiszámíthatóak:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_P \cos \lambda_P & -\sin \varphi_P \sin \lambda_P & \cos \varphi_P \\ -\sin \lambda_P & \cos \lambda_P & 0 \\ \cos \varphi_P \cos \lambda_P & \cos \varphi_P \sin \lambda_P & \sin \varphi_P \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

így a műhold helyzete a topocentrikus koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{x}_{topo}^S = \begin{bmatrix} X_{topo}^S \\ Y_{topo}^S \\ Z_{topo}^S \end{bmatrix} = \mathbf{R} \times \mathbf{s}. \quad (3.48)$$

A topocentrikus koordináták ismeretében a műholdak horizonti koordinátái már könnyen meghatározhatóak:

$$\delta^S = \arctan \frac{Z_{topo}^S}{\sqrt{(X_{topo}^S)^2 + (Y_{topo}^S)^2}}, \quad (3.49)$$

és

$$\alpha^S = \arctan \frac{Y_{topo}^S}{X_{topo}^S}, \quad (3.50)$$

ahol δ^S a műhold magassági szöge, míg α^S a műhold geodéziai azimutja (az északi iránytól mért azimutja). Vegyük észre, hogy a (3.50) képletben az irányszögszámításhoz hasonlóan el kell döntenünk, hogy a műhold melyik térszögben található. Az állásponttól délre található műholdak esetén az X koordináta értékek negatívak, így a (3.50) képlettel számított azimuthoz 180° -ot hozzá kell adni. Az észak-nyugati térszögben található műholdak esetén a (3.47) képlettel számított azimutot pedig 360° -kal kell megnövelni a helyes érték meghatározásához.

1. feladat

GPS műhold térbeli derékszögű koordinátáinak számítása almanachból

Az SV11-es műhold 2011. március 31-én érvényes almanach szerinti pályaelemei az alábbiak:

Azonosító:	11
Állapot (health):	0
excentricitás (e):	0,011 672 973 630
referencia epocha (t_a):	405 504,0 [s]
inklináció (i):	0,888 477 3254 [rad]
a felszálló csomó driftje ($\dot{\Omega}$):	-8,414 644 981 [rad/s]
a fél nagytengely hosszának négyzetgyöke (\sqrt{a}):	5153,441 895 [$m^{1/2}$]
a felszálló csomó hossza	
a GPS hét kezdetén ($\dot{\omega}$):	-0,116 940 618 [rad]
a perigeum argumentuma (ω):	0,917 901 397 [rad]
Középanómália (M_0):	-0,310 368 896 [rad]

órahiba (a_0):	-1,392 364 502 [s]
a műholdóra driftje (a_1):	-3,637 978 807 [s/s]
GPS hét:	605 (+1024)

Számítsuk ki a fenti almanach adatokból a műhold pozícióját 2011. március 31-én 8:14:59 GPS időrendszerben kifejezett epochában.

1. Határozzuk meg a kívánt időponthoz tartozó GPS héten belüli időpontot másodperc egységben. Mivel a szóbanforgó GPS hét 2011. március 27-én kezdődött (1629-es hét), így:

$$t = 4 \cdot 86400 + 8 \cdot 3600 + 14 \cdot 60 + 59 = 375\,299\text{s}$$

2. Határozzuk meg a pályellipszis fél nagytengelyének hosszát:

$$a = 5153,441895^2 = 26\,557\,963,37 [m]$$

3. Az átlagos szögsebesség:

$$n_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = 1,458\,736 \cdot 10^{-4} \left[\frac{1}{s}\right]$$

4. A műhold keringésének periódusideje:

$$T = \frac{2\pi}{n_0} = 43072,800 [s]$$

5. A korrekciók érvényességi időtartama:

$$t_k = t - t_a = -30\,205\text{ s}$$

6. A középánómia értéke a kérdéses időpontban:

$$M = M_0 + nt_k = -4,716\,481\,666\,69 (+2\pi) = 1,566\,703\,640\,49 [rad]$$

7. Számítsuk ki a Kepler-egyenlet segítségével az excentrikus anomáliát (E) a pályaeellipszis első numerikus excentricitásának felhasználásával (e)

$$\text{Iteráció \#1: } E_1 = M + e \sin M = 1,578\,376\,516\,36 [rad]$$

$$\text{Iteráció \#2: } E_2 = M + e \sin E_1 = 1,578\,376\,278\,76 [rad]$$

$$\text{Iteráció \#3: } E_3 = M + e \sin E_2 = 1,578\,376\,278\,78 [rad]$$

$$\text{Iteráció \#4: } E_4 = M + e \sin E_3 = 1,578\,376\,278\,78 [rad]$$

8. A (3.21) egyenlet segítségével számítsuk ki a valódi anomália értékét:

$$\nu = 2 \arctan \left[\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right] = 1,590\,048\,665\,79 [rad]$$

9. A vezérsugár hossza (r)

$$r = a(1 - e \cos E) = 26\,560\,313,21 [m]$$

10. A műhold pályasíkbeli koordinátái az u_1, u_2, u_3 rendszerben (3.5 ábra):

$$u_1 = r \cos \nu = -511\,316,56 \text{ [m]}$$

$$u_2 = r \sin \nu = 26\,555\,391,03 \text{ [m]}$$

11. Az inklináció értéke (i): vegyük észre, hogy a megadott almanach fájlban már az inklináció teljes értéke szerepel, így az adatokban szereplő inklináció értékét közvetlenül felhasználhatjuk. Ezzel szemben a nyers navigációs üzenetekben sugárzott almanach csak az 54° -os nominális inklináció érték javításait tartalmazza, ekkor a (3.39) egyenlet segítségével számíthatjuk ki az inklináció értékét.

12. A felszálló csomó hosszának meghatározása (3.40):

$$\Omega_0(t) = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_a) - \omega_E(t - t_0) = -27,483\,921\,677 \text{ [rad]}$$

13. Határozzuk meg az egyes forgatási mátrixokat a pályasíkbeli és a térbeli derékszögű koordinátarendszerek között:

$$\mathbf{R}_z(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,607\,488\,473 & -0,794\,328\,493 & 0 \\ 0,794\,328\,493 & 0,607\,488\,473 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,630\,594\,524 & -0,776\,112\,457 \\ 0 & 0,776\,112\,457 & 0,630\,594\,524 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(-\Omega_0(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_0(t)) & -\sin(\Omega_0(t)) & 0 \\ \sin(\Omega_0(t)) & \cos(\Omega_0(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,703\,552\,445 & 0,710\,643\,340 & 0 \\ -0,710\,643\,340 & -0,703\,552\,445 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Végezetül határozzuk meg a műhold térbeli derékszögű koordinátáit a Földhöz kötött rendszerben:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ECEF} = \mathbf{R}_z(-\Omega_0(t)) \mathbf{R}_x(-i) \mathbf{R}_z(-\omega) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22\,106\,294,71 \\ 8\,233\,926,42 \\ 12\,205\,098,44 \end{bmatrix} \text{ [m]}$$

2. feladat

GPS műhold pozíciójának számítása fedélzeti pályaelemekből

Számítsuk ki a 3.6 ábrán található fedélzeti pályaelemekből a műhold pozícióját 2011. március 31-én 8:14:59 GPS időrendszerben kifejezett epochában. A térbeli derékszögű koordináták mellett határozzuk meg a BUTE permanens állomás helyzetében a műhold

horizonti koordinátáit is. A BUTE állomás helyzete a WGS-84 koordinátarendszerben: $\varphi = 47^\circ 28' 51,39741''$, $\lambda = 19^\circ 03' 23,50703''$ és $h = 180,798\text{m}$.

A feladathoz felhasznált egyéb adatok:

- geocentrikus gravitációs állandó: $GM = 3,986\,005\,000 \cdot 10^{14}$

- A Föld forgási szögsebessége: $\omega_E = 7,292\,115\,1467 \cdot 10^{-5} \left[\frac{1}{s} \right]$

- A WGS-84 ellipszoid adatai:

a fél nagytengely hossza: $a = 6\,378\,137,000\text{ m}$

a fél kistengely hossza: $b = 6\,356\,752,314\text{ m}$

1. Számítsuk ki a kívánt időponthoz tartozó GPS héten belüli időpontot másodperc egységben. Mivel a szóbanforgó GPS hét 2011. március 27-én kezdődött (1629-es hét), így:

$$t = 4 \cdot 86400 + 8 \cdot 3600 + 14 \cdot 60 + 59 = 375\,299\text{s}$$

2. A műhold pálya fél nagytengelyének hossza:

$$a = \left(0,515\,351\,079\,750 \cdot 10^4 \right)^2 = 26\,558\,673,540 [m]$$

3. Az átlagos szögsebesség (n_0):

$$n_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = 1,458\,678 \cdot 10^{-4} \left[\frac{1}{s} \right]$$

4. A fedélzeti pálya Δn szögsebesség javításának felhasználásával kapjuk a javított szögsebességet (n):

$$n = n_0 + \Delta n = 1,458\,739 \cdot 10^{-4} \left[\frac{1}{s} \right]$$

5. A korrekciók érvényességi időtartama, azaz a fedélzeti pálya érvényességétől eltelt idő:

$$t_k = t - t_{oE} = 915\text{ s}$$

6. A középanómália (M):

$$M = M_0 + n \cdot t_k = 1,566\,751\,485\,73 [rad]$$

7. Számítsuk ki a Kepler-egyenlet segítségével az excentrikus anomáliát (E) a pályaellipszis első numerikus excentricitásának felhasználásával (e)

$$\text{Iteráció \#1: } E_1 = M + e \sin M = 1,578\,419\,550\,96 [rad]$$

$$\text{Iteráció \#2: } E_2 = M + e \sin E_1 = 1,578\,419\,307\,37 [rad]$$

$$\text{Iteráció \#3: } E_3 = M + e \sin E_2 = 1,578\,419\,307\,39 [rad]$$

$$\text{Iteráció \#4: } E_4 = M + e \sin E_3 = 1,578\,419\,307\,39 [rad]$$

8. A (3.21) egyenlet segítségével számítsuk ki a valódi anomália értékét:

$$\nu = 2 \arctan \left[\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right] = 1,590\,086\,874\,93 \text{ [rad]}$$

9. A (3.22) egyenlet segítségével számítsuk ki a műhold szöghelyzetét a pályasíkban:

$$\varphi_k = \nu + \varpi = 2,507\,948\,711\,13 \text{ [rad]}$$

10. Számítsuk ki a pályamenti korrekció értékét (3.23):

$$\delta u_k = C_{uc} \cos 2\varphi_k + C_{us} \sin 2\varphi_k = -1,086\,48 \cdot 10^{-5} \text{ [rad]}$$

11. Számítsuk ki a radiális korrekció értékét (3.24):

$$\delta r_k = C_{rc} \cos 2\varphi_k + C_{rs} \sin 2\varphi_k = 23,83 \text{ [m]}$$

12. Számítsuk ki a pályasíkra merőleges korrekció mértékét (3.25):

$$\delta i_k = C_{ic} \cos 2\varphi_k + C_{is} \sin 2\varphi_k = -1,546\,92 \cdot 10^{-7} \text{ [rad]}$$

13. A javított szöghelyzet:

$$u_k = \varphi_k + \delta u_k = 2,507\,937\,846\,36 \text{ [rad]}$$

14. A javított vezérsugár hossza (r)

$$r_k = a(1 - e \cos E_k) + \delta r_k = 26\,561\,059,64 \text{ [m]}$$

15. A javított inklináció (az inklináció és driftje a fedélzeti pályaelemek között megtalálható – i_0 és $IDOT$):

$$i_k = i_0 + \frac{di}{dt} t_k + \delta i_k = 0,888\,487\,399\,23 \text{ [rad]}$$

16. A műhold pályasíkbeli koordinátái az x,y,z rendszerben (3.5 ábra):

$$x_k = r_k \cos u_k = -21404732,07 \text{ [m]}$$

$$y_k = r_k \sin u_k = 15726644,08 \text{ [m]}$$

$$z_k = 0 \text{ [m]}$$

17. Számítsuk ki a felszálló csomó hosszának helyzetét a GPS hét elejére megadott Ω_0 és a felszálló csomó driftje alapján:

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\Omega - \omega_E) t_k - \omega_E t_{oe} = -27,483\,915\,120\,05 \text{ [rad]}$$

18. Ezt követően a pályasíkbeli koordinátarendszert az x tengely körül $-i$ -vel, míg a z tengely körül $-\Omega_k$ -val kell elforgatni, hogy a műhold helyzetét megkapjuk a Földhöz kötött, azzal együtt forgó koordinátarendszerben:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ECEF} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_k) & -\sin(\Omega_k) & 0 \\ \sin(\Omega_k) & \cos(\Omega_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

mivel $z_k=0$, így:

$$X = x_k \cdot \cos(\Omega_k) - y_k \sin(\Omega_k) \cos(i) = 22\,106\,756,61 \text{ m}$$

$$Y = x_k \cdot \sin(\Omega_k) + y_k \cos(\Omega_k) \cos(i) = 8\,234\,136,75 \text{ m}$$

$$Z = y_k \sin(i) = 12\,205\,744,29 \text{ m}$$

Ezzel tehát megkaptuk a műhold geocentrikus koordinátáit. A következő lépésekben kiszámítjuk annak horizonti koordinátáit is a BUTE permanens állomás földrajzi koordinátái ismeretében. Ehhez ki kell számolnunk az állomás geocentrikus koordinátáit, amelyhez fel kell használjunk a WGS-84 ellipszoid adatait.

19. Számítsuk ki a fél nagytengelyek hosszának ismeretében a WGS-84 ellipszoid különféle paramétereit:

$$\text{- a lapultság reciproka: } 1/f = \frac{a}{a-b} = 298,25722$$

$$\text{- az első numerikus excentricitás: } e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = 0,081\,819\,19$$

$$\text{- a második numerikus excentricitás: } e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} = 0,082\,094\,44$$

20. Határozzuk meg az ellipszoid harántgörbületi sugarát a földrajzi koordinátákból:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = 6\,389\,766,411 \text{ m}$$

21. A BUTE állomás térbeli derékszögű koordinátái a WGS-84 rendszerben:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{BUTE} = \begin{bmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ [(1-e^2)N+h] \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,081\,882,371 \\ 1\,410\,011,138 \\ 4\,678\,199,381 \end{bmatrix} [m]$$

22. A topocentrikus koordináták számításához térjünk át a segéd-koordinátarendszerbe (3.39):

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_X \\ s_Y \\ s_Z \end{bmatrix} = \mathbf{r}^S - \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} X^S - X_{BUTE} \\ Y^S - Y_{BUTE} \\ Z^S - Z_{BUTE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18\,024\,874,235 \\ 6\,824\,125,613 \\ 7\,527\,544,908 \end{bmatrix} [m]$$

23. Számítsuk ki a (3.47) szerinti forgatási mátrixot:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -0,696\,659\,83 & -0,240\,648\,32 & 0,675\,835\,38 \\ -0,326\,500\,87 & 0,945\,196\,90 & 0,000\,000\,00 \\ 0,638\,797\,51 & 0,220\,660\,84 & 0,737\,052\,60 \end{bmatrix}$$

24. Majd a műhold topocentrikus koordinátáit:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{topo}^S = \mathbf{R} \times \mathbf{s} = \begin{bmatrix} -9\,112\,038,973 \\ 565\,005,207 \\ 18\,568\,258,636 \end{bmatrix} [m]$$

25. Végül a topocentrikus koordináták alapján kiszámíthatjuk a műhold horizonti koordinátáit:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \delta \end{bmatrix}_{hor}^S = \begin{bmatrix} \arctan \frac{Y_{topo}^S}{X_{topo}^S} (+180^\circ) \\ \arctan \frac{Z_{topo}^S}{\sqrt{(X_{topo}^S)^2 + (Y_{topo}^S)^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 176,5^\circ \\ 63,8^\circ \end{bmatrix}$$

Ezzel a feladatot meg is oldottuk, az SV11-es műhold a kérdésben szereplő időpontban a BUTE állomáson 176,5°-os azimut és 63,8°-os magassági szög mellett látszik.

3.6. A műholdak által sugárzott jelek és adatok

A GNSS technikával történő helymeghatározás a mikrohullámú távmérőjelek vételén alapul. A továbbiak megértéséhez elevenítsünk fel néhány alapfogalmat az elektromágneses hullámok terjedésével kapcsolatban.

Az elektromágneses hullámok különféle fizikai jellemzői között a (3.51) egyenlet teremti meg az összefüggést.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} \quad (3.51)$$

Az egyes fizikai mennyiségek jele illetve mértékegysége a 3.1 táblázatban található meg.

fizikai mennyiség	jele	mértékegysége
frekvencia	f	1/s (Hz)
körfrekvencia	ω	rad/s
fázis	φ	rad
hullámhossz	λ	m
periódusidő	T	s

3.1 táblázat: Az elektromágneses hullámok fizikai jellemzői és mértékegységeik

A későbbiekben sokszor fogjuk használni a ciklus fogalmát is, ami nem más mint a 2π radiánnak megfelelő fázistartomány (azaz egy teljes hullámhossz).

A körfrekvencia és a fázis összefüggése:

$$\omega = 2\pi f = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \omega dt \quad (3.52)$$

Abban az esetben, ha egy a földi ponthoz képest álló helyzetű, ρ távolságban lévő műholdról elektromágneses hullámot bocsátunk ki a földi pont felé, akkor konstant frekvenciát és 0 kezdőfázist feltételezve felírható a földi pontban észlelhető fázis:

$$\varphi(t) = \omega \left(t - \frac{\rho}{c} \right) \quad (3.53)$$

A (3.53) egyenletben látható, hogy összefüggés teremthető a vevő által észlelt fázis és a geometriai távolság között. Ezt a tényt a későbbiekben ki fogjuk használni a műhold-vevő távolság megmérésénél.

Meg kell említenünk, hogy a valóságban a műhold és a vevő egymáshoz képest mozog. Emiatt fellép a Doppler-hatás, aminek következtében az észlelt frekvencia eltér a kibocsátott jel frekvenciájától:

$$\Delta f = f_r - f_e = -\frac{1}{c} v_p f_e, \quad (3.54)$$

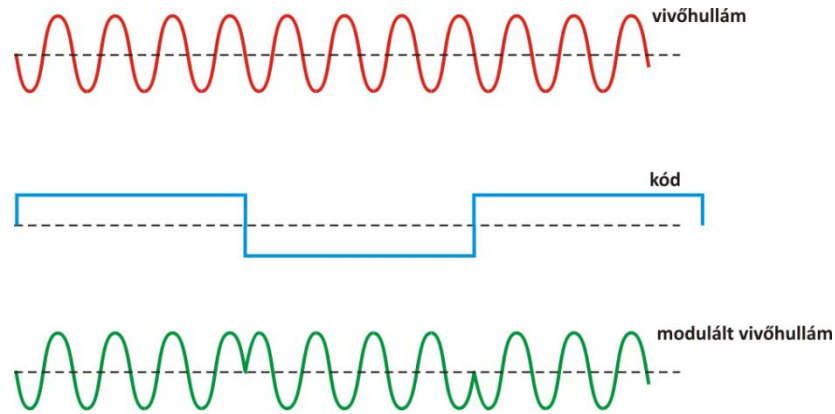
ahol f_r a vételi frekvencia, f_e a kisugárzott frekvencia, míg v_p a műhold-vevő relatív sebessége.

3.6.1. A műholdak által sugárzott mérőjelek

A műholdak fedélzetén lévő atomórák $f_0 = 10,23$ MHz frekvenciájú alapjelet, továbbá ennek felharmonikusaként két vivőjelet állítanak elő: az L1 jel frekvenciája $f_1 = 154 f_0$, hullámhossza $\lambda_1 = 19,03$ cm; az L2 jel frekvenciája $f_2 = 120 f_0$, hullámhossza $\lambda_2 = 24,42$ cm. A GPS rendszer modernizációjával 2010. május 28-án üzembe helyezték az első Block-IIF műholdat, amely már egy harmadik, az ún. L5 frekvencián is sugároz jeleket. Az L5 jel frekvenciája $f_5 = 115 f_0$.

Mivel a vivőhullám egy egyszerű szinuszhullám, így erre a kibocsátás időpontját – és egyéb információkat tartalmazó üzeneteket – ültetnek. A kibocsátás időpontját úgynevezett ál-véletlen kódok segítségével ültetik rá a vivőhullámra. Az ál-véletlen kódok +1 és -1 értékek véletlenszerűnek látszó, valójában az idő függvényében egy bonyolult matematikai képlettel leírható kódsorozatot jelentenek.

A modulálás során az ún. fázisbillentyűzés eljárását alkalmazzák. A moduláló jelek hossza oly módon lett megállapítva, hogy bennük a vivőjel egész számú ciklusa férjen el. Ennek megfelelően a modulált jel a kódjelek előjelének változásakor π fáziseltolódást szenvednek (3.6 ábra).



3.6 ábra: A vivőhullám modulálása a kódjelekkel

Jelenleg a GPS vivőhullámokat az alábbi kódjelekkel modulálják:

- a nyílt hozzáférésű C/A-kóddal: ebben az esetben a kód frekvenciája $f_0/10=1.023$ MHz (azaz 1540 teljes vivőhullám tartozik egy kódértékhez az L1 vivőfrekvencián) az 1023 bit hosszú teljes kódsorozat minden ezredmásodpercben ismétlődik, azaz egy kódérték hossza $1\mu\text{s}$ -nak felel meg. A C/A kóddal csak az L1 vivőjelet modulálják (kivéve a legújabb műholdakat);
- a nagyobb pontosságot biztosító P-kódot csak a katonai felhasználók ismerik (1994-től a P-kódot a gyakorlatilag megfejthetetlen Y-kódra módosították). Ebben az esetben a kód frekvenciája $f_0=10.24$ MHz, a kódsorozat hossza 266 naponta ismétlődik. A 266 naponta ismétlődő kódsorozat egyhetes sorozatait rendelik hozzá egy-egy műholdhoz, ez határozza meg a műhold azonosító számát, a PRN számot. A P kód hosszából következik, hogy a GPS konstelláció a jelenlegi kódok felhasználásával maximum 38 műholdból állhat. A P kóddal mind az L1, mind az L2 vivőfázist modulálják.

3.6.2. A műholdak által sugárzott navigációs üzenetek

Valamennyi műhold mindkét frekvencián sugároz navigációs üzeneteket 30 mp hosszú ún. keretekbe (frame) foglalva. Az egyes egységek 5 alrészre (subframe) tagozódnak, amelyek 10 gépi szót (word) tartalmaznak. 1 gépi szó 30 bitből áll. Mivel a 4. és 5. alrész 25-25 oldalból áll, így a teljes navigációs üzenet észlelése mintegy 12,5 percig tart.

Az egyes alrészek tartalmát a 3.2 táblázat mutatja.

alrész	szó #1	szó #2	szó #3-#10	bitek száma
1	TLM	HOW	óraparaméterek	300
2	TLM	HOW	pályaadatok és korrekciók (1)	300
3	TLM	HOW	pályaadatok és korrekciók (2)	300
4	TLM	HOW	egyéb üzenetek, UTC, ionoszféra, almanach adatok	300
5	TLM	HOW	almanach adatok	300

3.2 táblázat: A navigációs üzenetek alrészei

Ismét megjegyezzük, hogy az 1., 2. és 3. alrészben a navigációs üzenet sugárzását végző műhold saját fedélzeti pályaadatai és óraparaméterei szerepelnek, míg a 4. és 5. alrészekben a teljes műholdkonfiguráció almanach adatait találhatjuk meg.