

VETÜLETI ÁTSZÁMÍTÁSOK

1. Síkbeli hasonlósági (Helmert-féle) transzformáció kiegyenlítéssel

Kettőnél több közös pont esetén a két rendszert nem lehet egymásra illeszteni úgy, hogy minden közös pont egyidejűleg fedje egymást. Ekkor azt a megoldást választjuk, hogy a két hálózat illesztésénél a pontok maradék ellentmondásainak négyzetösszege a legkisebb legyen.

Maradék ellentmondás alatt a közös pontok II. rendszerebeli koordinátái és a közös pontok I. rendszerből átranzformált koordinátái közötti eltéréseket értjük.

Ebben az esetben az a, b együtthatókat a legkisebb négyzetek módszerével az alábbi számítás eredményeként kapjuk meg. (A levezetés részleteit mellőzzük.)

1. Mindkét rendszerben számítjuk a súlyponti koordinátákat:

$$y_{SP I} = \frac{\sum y_{i I}}{n}, \quad x_{SP I} = \frac{\sum x_{i I}}{n},$$
$$Y_{SP II} = \frac{\sum Y_{i II}}{n}, \quad X_{SP II} = \frac{\sum X_{i II}}{n},$$

ahol n a közös pontok száma.

A két koordináta-rendszer egymásnak megfelelő közös kezdőpontja mindkét rendszerben a súlypont lesz. Toljuk el a koordináta-tengelyeket a súlypontba.

2. Képezzük a súlypontra vonatkozó koordinátákat mindkét rendszerben.

A súlypontra vonatkozó koordináták az I. rendszerben:

$$\begin{aligned} y'_{1 I} &= y_{1 I} - y_{SP I} & x'_{1 I} &= x_{1 I} - x_{SP I} \\ &\dots & & \\ y'_{i I} &= y_{i I} - y_{SP I} & x'_{i I} &= x_{i I} - x_{SP I} \\ &\dots & & \\ y'_{n I} &= y_{n I} - y_{SP I} & x'_{n I} &= x_{n I} - x_{SP I} \end{aligned}$$

A súlypontra vonatkozó koordináták a II. rendszerben:

$$\begin{aligned} Y'_{1 II} &= Y_{1 II} - Y_{SP II} & X'_{1 II} &= X_{1 II} - X_{SP II} \\ &\dots & & \\ Y'_{i II} &= Y_{i II} - Y_{SP II} & X'_{i II} &= X_{i II} - X_{SP II} \\ &\dots & & \\ Y'_{n II} &= Y_{n II} - Y_{SP II} & X'_{n II} &= X_{n II} - X_{SP II} \end{aligned}$$

3. A torzulási együtthatók:

$$a = \frac{\sum y'_{iI} Y'_{iII} + \sum x'_{iI} X'_{iII}}{\sum y'^2_{iI} + \sum x'^2_{iI}},$$

$$b = \frac{\sum x'_{iI} Y'_{iII} - \sum y'_{iI} X'_{iII}}{\sum y'^2_{iI} + \sum x'^2_{iI}}.$$

4. A transzformációs egyenletek felírása:

$$Y_{P II} = Y_{SP II} + a(y_{PI} - y_{SP I}) + b(x_{PI} - x_{SP I}),$$

$$X_{P II} = X_{SP II} + a(x_{PI} - x_{SP I}) - b(y_{PI} - y_{SP I}).$$

5. A közös pontok transzformáció utáni maradék ellentmondásainak vetületeit (dY_i, dX_i) úgy számítjuk, hogy a közös pontok I. rendszerben ismert koordinátáit a 4. pont egyenleteivel átszámítjuk a II. rendszerbe, és képezzük minden közös pontra az eredeti és a *-gal jelölt átszámított koordináták különbségét:

$$dY_i = Y_{i II} - Y_{i II}^*, \quad dX_i = X_{i II} - X_{i II}^*.$$

A maradék ellentmondások összegének 0-t kell adnia:

$$\sum dY_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum dX_i = 0.$$

6. A pontok illeszkedésének megbízhatóságát a

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum dY_i^2 + \sum dX_i^2}{f}}$$

középhibával jellemezhetjük, ahol $f = 2n - 4$.

2. Átszámítás érintő hengervetületi rendszerek között koordináta-módszerrel

Az I. rendszer (pl. HKR) síkkoordinátáiból segéd földrajzi koordináták számítása:

$$\varphi'_I = 2 \arctan e^{\frac{x_I}{R}} - 90^\circ, \quad \lambda'_I = \frac{y_I}{R} \rho^\circ.$$

Átszámítás a II. rendszer (pl. HÉR) segéd földrajzi koordináta-rendszerébe:

$$\sin \varphi'_II = \sin \varphi'_I \cos \Delta\varphi_O + \cos \varphi'_I \sin \Delta\varphi_O \cos \lambda'_I,$$

$$\sin \lambda'_II = \frac{\cos \varphi'_I \sin \lambda'_I}{\cos \varphi'_II}.$$

Síkkordináták a II. rendszerben:

$$y_{II} = R \frac{\lambda'_{II}}{\rho^{\circ}}, \quad x_{II} = R \ln \operatorname{tg} \left(45^{\circ} + \frac{\varphi'_{II}}{2} \right),$$

ahol y_I, x_I, y_{II}, x_{II} az átszámítandó pont síkkordinátái az I. és a II. vetületi rendszerben, $R = 6\,378\,512,966$ m, azaz a régi magyarországi Gauss-gömb sugara és

$$\rho^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi}.$$

A két vetületi kezdőpont földrajzi szélességének különbsége: $\Delta\varphi_0 = \varphi_{0II} - \varphi_{0I}$.

$$\text{HÉR} \Rightarrow \text{HKR} \quad \Delta\varphi_0 = -1^{\circ} 34' 2'',$$

$$\text{HKR} \Rightarrow \text{HÉR} \quad \Delta\varphi_0 = +1^{\circ} 34' 2'',$$

$$\text{HKR} \Rightarrow \text{HDR} \quad \Delta\varphi_0 = -1^{\circ} 34' 1'',$$

$$\text{HDR} \Rightarrow \text{HKR} \quad \Delta\varphi_0 = +1^{\circ} 34' 1''.$$

3. Átszámítás a budapesti sztereografikus vetület és az érintő hengervetületek között koordináta-módszerrel

3.1 Átszámítás a budapesti sztereografikus vetületből hengervetületbe

Először számítjuk az átszámítandó pont β'_I segéd pólustávolságát és a vetületi kezdőpontról az átszámítandó pontra menő irány δ_I irányszögét:

$$\beta'_I = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{y_I^2 + x_I^2}}{2R}, \quad \delta_I = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y_I}{x_I}.$$

A sztereografikus irányszögből számítható az új tájékozásnak megfelelő azimut:

$$\alpha_{II} = \delta_I - 6,44'' + 180^{\circ}.$$

Számoljunk

$$\alpha_{II} = \delta_I - 6,44'' \text{ -vel,}$$

mert az a következőkben egyszerűsítést jelent.

A hengervetületre vonatkozó segédföldrajzi koordináták:

$$\sin \varphi'_{II} = \cos \beta'_I \sin \Delta\varphi_0 + \sin \beta'_I \cos \Delta\varphi_0 \cos \alpha_{II},$$

$$\sin \lambda'_{II} = \frac{\sin \beta'_I \sin \alpha_{II}}{\cos \varphi'_{II}}$$

A hengervetület vetületi egyenleteivel:

$$y_{II} = R \frac{\lambda'_{II}}{\rho^o}, \quad x_{II} = R \ln \operatorname{tg} \left(45^o + \frac{\varphi'_{II}}{2} \right).$$

A két vetületi kezdőpont földrajzi szélességének különbsége: $\Delta\varphi_o = \varphi_{oII} - \varphi_{oI}$.

$$\text{Szt} \Rightarrow \text{HÉR} \quad \Delta\varphi_o = +1^o 13' 40,8628'',$$

$$\text{Szt} \Rightarrow \text{HKR} \quad \Delta\varphi_o = -0^o 20' 21,1372'',$$

$$\text{Szt} \Rightarrow \text{HDR} \quad \Delta\varphi_o = -1^o 54' 22,1372''.$$

3.2 Átszámítás érintő hengervetületből budapesti sztereografikus vetületbe

A hengervetületi síkkordinátákból számított segédföldrajzi koordináták:

$$\varphi'_I = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\frac{x_I}{R}} - 90^o, \quad \lambda'_I = \frac{y_I}{R} \rho^o$$

Átszámítás a II. rendszer (transzverzális sztereografikus) segéd földrajzi koordináta-rendszerébe:

$$\sin \varphi'_{II} = \sin \varphi'_I \cos \Delta\varphi_o + \cos \varphi'_I \sin \Delta\varphi_o \cos \lambda'_I,$$

$$\sin \lambda'_{II} = \frac{\cos \varphi'_I \sin \lambda'_I}{\cos \varphi'_{II}}.$$

Előzetes síkkordináták a II. rendszerben, transzverzális elhelyezésű sztereografikus vetületi egyenletekkel:

$$(x_{II}) = 2R \frac{\sin \varphi'_{II}}{1 + \cos \varphi'_{II} \cos \lambda'_{II}}, \quad (y_{II}) = 2R \frac{\cos \varphi'_{II} \sin \lambda'_{II}}{1 + \cos \varphi'_{II} \cos \lambda'_{II}}.$$

Az átszámított pont távolsága a vetületi kezdőponttól és az egyenes szakasz előzetes irányszöge:

$$p'_{II} = \sqrt{(y_{II})^2 + (x_{II})^2}, \quad (\delta_{II}) = \operatorname{arctg} \frac{(y_{II})}{(x_{II})} \text{ (síknegyedek figyelembe vétele!)}.$$

Eddig a tájékozási különbséget nem vettük figyelembe, ezért $\delta_{II} = (\delta_{II}) + 6,44''$.

Végül a végleges sztereografikus síkkordináták:

$$y_{II} = p'_{II} \sin \delta_{II}, \quad x_{II} = p'_{II} \cos \delta_{II}.$$

A $\Delta\varphi_o$ értékek:

$$\text{HÉR} \Rightarrow \text{Szt} \quad \Delta\varphi_o = -1^o 13' 40,8628'',$$

$$\text{HKR} \Rightarrow \text{Szt} \quad \Delta\varphi_o = +0^o 20' 21,1372'',$$

$$\text{HDR} \Rightarrow \text{Szt} \quad \Delta\varphi_o = +1^o 54' 22,1372''.$$

4. Átszámítás az EOVS és a GNSS mérések vonatkozási rendszere, az ETRS89 koordináták között

4.1 EHT2014 (ETRS89 – EOVS Hivatalos Helyi Térbeli Transzformáció)

eht.gnssnet.hu (vagy a gnssnet.hu oldal Szolgáltatások/Transzformáció/Utólagos menüből)

Az EHT2014 web-alapú transzformációs eljárás a GNSS mérések ETRS89 vonatkoztatási rendszere és az Egységes Országos Vetületi rendszer (EOVS) közötti mindkét irányú koordináta-transzformációt teszi lehetővé. A megújított eljárásban a pontok transzformálása a FÖMI Kozmikus Geodéziai Observatóriumában kifejlesztett, a GNSS vevőkbe is telepíthető VITEL adatbázis (javítórács) használatával történik, a négy legközelebbi rácsponthoz tartozó korrekciók interpolálásával.

A valós idejű méréseknél is alkalmazott VITEL (Valós Idejű Terepi Transzformációs ELjárás) a GNSS technikával ETRS89 rendszerben meghatározott térbeli X,Y,Z koordinátákat számítja át a Magyarországon használatos HD72 vonatkoztatási rendszerbe (y, x (EOVS koordináták), EOMA magasság). A VITEL a két vonatkoztatási rendszer között országos transzformációt alkalmaz, a síkba történő vetítést a hivatalos EOVS vetületi egyenletekkel végzi, majd az országos transzformációból adódó maradékhibákat a javításokat tartalmazó 2x2 km-es rácsháló belüli interpolációval veszi figyelembe.

Itt kézi adatbevitellel lehet pontokat áttranszformálni. Ha sok pontot szeretnénk egy fájlból bevinni, ahhoz regisztráció szükséges (ez 2016-ban: 12000 Ft + ÁFA).

4.2 ETRS89 <-> EOVS/Balti átszámítás proj4 programkönyvtárhoz készített javítórácsot használva

www.agt.bme.hu/on_line/etrs2eov (vagy a geod.bme.hu oldal On-line szolgáltatások/2D/3D-s átszámítás EOVS és ETRS89 koordináták között menüjéből)

Az ETRS89 földrajzi koordináták (hosszúság és szélesség, ellipszoid feletti magasság) és az EOVS koordináták, illetve Balti magasság közötti átszámításra a nyílt forráskódú szoftverek is alkalmasak, de különböző technikai okok miatt ennek a pontossága néhány méteres csak.

Az átszámítás pontosítása érdekében Siki Zoltán és Takács Bence a Proj.4 programkönyvtár által használható javító rácsokat hoztak létre. A javító rács használható a cs2cs (proj.4 segédprogram), az ogr2ogr (OGR segédprogram) és más Proj.4 könyvtárat használó térinformatikai programokkal is mint például QGIS, PostGIS. A javítórácsokat le lehet tölteni a http://www.geod.bme.hu/on_line/etrs2eov/etrs2eov_doc.html honlapról és a Proj.4 projekt honlapjáról is <http://proj4.org/grids.html#hungary>. Emellett egy a böngészőből is elérhető WEB-es szolgáltatást is létrehozta, mellyel egyesével vagy fájlban tárolt pontokat számíthatunk át a két rendszer között.

Miért nem WGS84 koordinátákra készítették el az átszámítást? Az európai kontinens mozgása miatt a WGS84 koordináták időben változnak, az európai referencia rendszer (ETRS89) a kontinenssel együtt mozog, így a hosszúság és szélesség értékek nem változnak az időben. A WGS84 és az ETRS89 rendszerek 1989-ben egybeestek, azóta több mint fél méter eltérés alakult ki köztük.