

GÖMBHÁROMSZÖGTANI SZÁMÍTÁSOK

A gömb felületén két pont legrövidebb összekötő vonala *főkörív*, vagyis olyan kör íve, amelynek síkja átmegy a gömb középpontján. Egy gömbháromszög *csúcsai* a gömb középpontjából kiinduló három félegyenesnek a gömbfelülettel alkotott metszéspontjai-ként adódnak. A gömbháromszög *a, b, c oldalán* a három félegyenes által páronként bezárt három, 180° -nál kisebb szöget értjük. A gömb felületén a gömbháromszög mindegyik oldalának egy-egy főkörív felel meg (1.ábra). A gömbháromszög *a, b, c* oldalai-val rendre a szemközti α, β, γ szögei az oldalának megfelelő főkörívek közötti 180° -nál kisebb szögek, vagy - másképpen kifejezve - a három félegyenes által meghatározott három sík által bezárt szögek. Mind az oldalakat, mind a szögeket *szögértékben* fejezzük ki.

A gömbháromszög szögeinek összege mindig nagyobb 180° -nál:

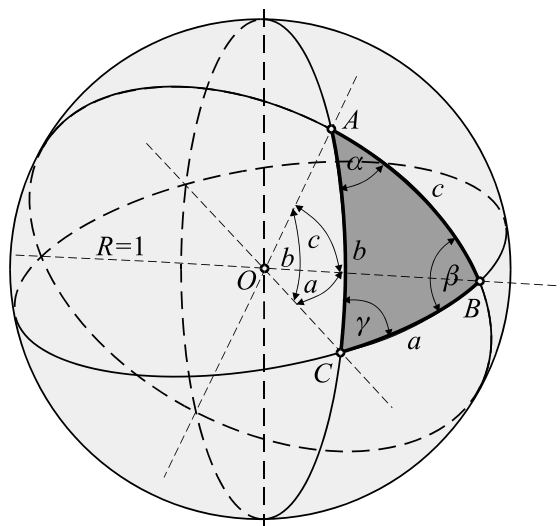
$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$$

Az $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$ különbséget a gömbháromszög *gömbi szögfeleslegének* nevezzük. Az ε az alábbi összefüggésekkel is számítható:

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} \rho,$$

ahol F a gömbháromszög területe, R a gömb sugara, ρ pedig az analitikus szögegység. Oldalából:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2}}, \quad \text{amelyben} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$



1.ábra

Oldalából és szögekből:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \sin \gamma}{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \cos \gamma}.$$

A valódi gömbi meridián konvergencia két pontot összekötő ortodróma végpontjaiban az azimut és ellenazimut 180° -tól eltérő különbsége:

$$\gamma = \alpha_{BA} - \alpha_{AB} \pm 180^\circ$$

Alapvető összefüggések:

1. $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ (szinusztétel)
2. $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ (oldal koszinusztétel)
3. $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$ (szög koszinusztétel)
4. $\sin a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma + \cos a \cos \gamma,$
5. $\sin \alpha \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos \alpha \cos c.$

Ha adva van	akkor a többi alkotórészeket megadó formulák száma
a három oldal: $a, b, c,$ a három szög: $\alpha, \beta, \gamma,$ két oldal és az általuk közbezárt szög: $a, b, \gamma,$ egy oldal és a rajta lévő két szög: $c, \alpha, \beta,$ két oldal és az egyikkel szemben levő szög: a, b, β két szög és az egyikkel szemben levő oldal: $\alpha, \beta, b,$	$\alpha(2), \beta$ és $\gamma(1)$ $a(3), b$ és $c(1)$ $\beta(4), \alpha$ és $c(1)$ $b(5), a$ és $\gamma(1)$ $\alpha(1), c(5), \gamma(1),$ $a(1), \gamma(4), c(1),$

Napier (Neper) képletek:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \frac{\cos \frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\cos \frac{(\alpha+\beta)}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \frac{\sin \frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\sin \frac{(\alpha+\beta)}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos \frac{(a-b)}{2}}{\cos \frac{(a+b)}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin \frac{(a-b)}{2}}{\sin \frac{(a+b)}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

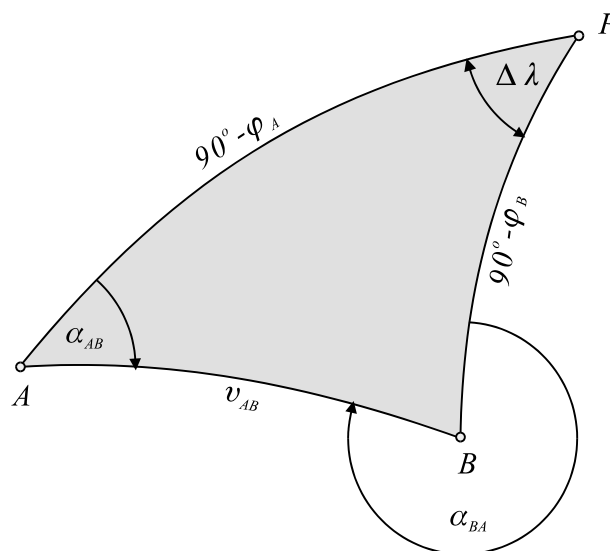
GEODÉZIAI FŐFELADATOK GÖMBÖN

Első geodéziai főfeladat gömbön

$$\varphi_A, \lambda_A, \alpha_{AB}, s_{AB} \rightarrow \varphi_B, \lambda_B, \alpha_{BA}$$

Adottak: az A pont φ_A, λ_A gömbi földrajzi koordinátái, az A pontbeli α_{AB} azimut, az A és a B pontok közötti s_{AB} gömbi ívhossz és a gömb R sugara (2. ábra).

Számítandók: a B pont φ_B, λ_B gömbi földrajzi koordinátái és a B pontbeli α_{BA} azimut.



2. ábra

Megoldás:

Az AB ívhez tartozó középponti szög:

$$\nu_{AB}^\circ = \frac{s_{AB}}{R} \rho^\circ \quad , \text{ ahol } \rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} .$$

A B pont gömbi földrajzi koordinátái:

$$\sin \varphi_B = \cos \nu_{AB} \sin \varphi_A + \sin \nu_{AB} \cos \varphi_A \cos \alpha_{AB} .$$

$$\sin \Delta \lambda = \frac{\sin \alpha_{AB} \sin \nu_{AB}}{\cos \varphi_B} , \quad \lambda_B = \lambda_A + \Delta \lambda_{AB} .$$

Az ellenazimut szinusza:

$$\sin \alpha_{BA} = - \frac{\sin \Delta \lambda_{AB} \cos \varphi_A}{\sin \nu_{AB}} .$$

Második geodéziai főfeladat gömbön

$$\varphi_A, \lambda_A, \varphi_B, \lambda_B \rightarrow \alpha_{AB}, \alpha_{BA}, s_{AB}$$

Adottak: az A és B pontok φ_A, λ_A és φ_B, λ_B gömbi földrajzi koordinátái (2. ábra).

Számítandók: az A és B pontbeli α_{AB} és α_{BA} azimut és a két pont közti s_{AB} gömbi ív hossza.

Megoldás:

Az AB ívhez tartozó középponti szög:

$$\cos \nu_{AB} = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta\lambda_{AB},$$

$$\text{ahol: } \Delta\lambda_{AB} = \lambda_B - \lambda_A.$$

A gömbi ívhossz:

$$s_{AB} = \frac{R\nu_{AB}}{\rho}.$$

Az A és B pontbeli azimutok szinuszai:

$$\left[\sin \alpha_{AB} = \frac{\sin \Delta\lambda_{AB} \cos \varphi_B}{\sin \nu_{AB}} \right] \quad (1)$$

A kiszámított szinusz értékekből csak szemlélet alapján tudjuk eldönteni, hogy az α szögek melyik szögnegyedben vannak. Egyértelművé akkor válik a feladat, ha a $\cos \alpha$ -t is kiszámítjuk:

$$\left[\cos \alpha_{AB} = \frac{\sin \varphi_B - \sin \varphi_A \cos \nu_{AB}}{\cos \varphi_A \sin \nu_{AB}} \right] \quad (2)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha)$$

Ezután már csak a szögletes zárójelbe tett képleteket használjuk.

$$\text{Ha } \alpha_{AB} (1) \geq 0, \text{ akkor } \alpha_{AB} = \alpha_{AB} (2), \text{ máskor } \alpha_{AB} = 360^\circ - \alpha_{AB} (2).$$

Az α_{BA} számításához a képletekben az A, B indexeket felcseréljük.