

# Vetülettan

## [1.](#), [2.](#), [3.](#), [4.](#), [5.](#), [6.](#), [7.](#), [8.](#), [9.](#), [10.](#), [11.](#), [12.](#), [13.](#), [14.](#) előadás

### 1. előadás

#### Bevezetés

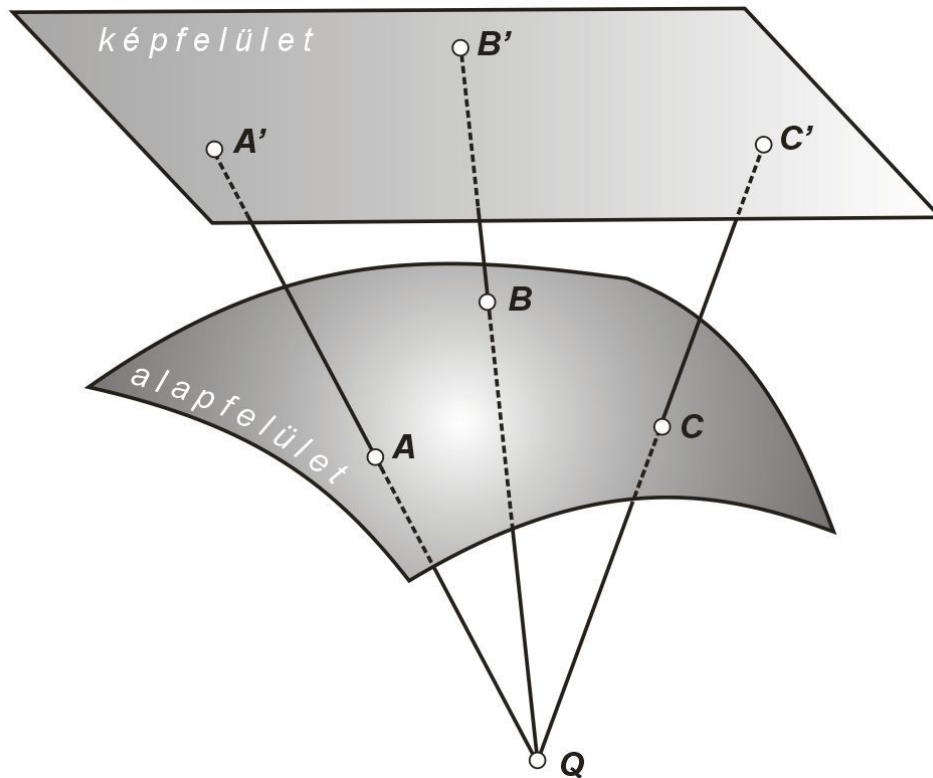
#### A vetítés fogalma

Geodéziai méréseinket általában a Föld felszínén (egyes esetekben, pl. földalatti létesítményekben a Föld felszínéhez viszonylag közel) végezzük. Vízszintes értelmű geodéziai méréseink eredményeit legtöbbször síkkoordináta-rendszerben számítjuk és síkon (térképen) ábrázoljuk. Éppen ezért a mérések által szolgáltatott eredményeket (pl. a vízszintes geodéziai hálózat pontjait) síkra kell vetíteni.

Mivel a Föld szabálytalan idom, először olyan idommal kell helyettesítenünk, amely alakját és méreteit tekintve jól megközelíti a Föld felszínét, és matematikai meghatározása viszonylag egyszerű. A vetítés megkezdése előtt mérési eredményeinket erre a Földet helyettesítő felületre az ún. *alapfelületre* kell vonatkoztatni. Ennek a redukálásnak a végrehajtásával a *felsőgeodézia* foglalkozik. Ez a művelet elkerülhetetlenül elhanyagolásokkal jár. Az elhanyagolások mértéke annál kisebb, minél jobban megközelíti az alapfelület a Föld fizikai felszínét.

Vetülettani értelemben a vetítés az *alapfelületről* történik a *képfelületre*. Itt már nem lehetnek elhanyagolások, mert mindkettő matematikai felület. Ez a vetítés geometriai vagy matematikai törvények szerint történik. Vetítésről a szó szoros értelmében akkor beszélünk, amikor egy kijelölt  $Q$  vetítési központból (ami a végtelenben is lehet) kiinduló és az alapfelület vetítendő pontjain ( $A, B, C \dots$ ) átmenő vetítősugarakkal a pontok ( $A', B', C' \dots$ ) képét a képfelületen kidöfjük (1.1. ábra). Ezt a vetítést, amikor a kép geometriai úton előállítható; *perspektív vetítésnek* nevezzük. Mivel minden geometriai kapcsolat matematikailag is kifejezhető kimondhatjuk, hogy a *perspektív vetítés során a kép mind geometriailag, mind matematikailag előállítható*.

A gyakorlatban többnyire nem jelölünk ki vetítési központot, így az alapfelületi adatokból a képfelületre vonatkozókat csak matematikai úton tudjuk meghatározni, geometriailag nem. A *vetítés matematikailag mindig elvégezhető*, tehát vannak olyan ábrázolási módok (vetületek) is, amelyek geometriai úton jönnek létre, anélkül, hogy vetítési központot jelölnénk ki. A perspektivitás elvét ezért a gyakorlatban csak arra használjuk fel, hogy a vetítés matematikai törvényeit a szemlélet segítségével egyszerűbben állíthassuk fel, mert figyelembe véve, hogy az alapfelület a Föld helyettesítője, a vetítés a gyakorlatban valójában nem hajtható végre.



1.1. ábra. Perspektív vetítés

### **A földalakat helyettesítő felületek**

Matematikai összefüggések felhasználásával csak akkor tudjuk a vetítést elvégezni, ha az alap- és a képfelület is zárt matematikai képletekkel, vagy matematikai sorokkal leírható. A Föld fizikai felszínét megközelítő alapfelület meghatározása a *felsőgeodézia* feladata. A közelítés megkívánt pontossága a különféle feladatok esetén változik, hiszen a képfelületen való ábrázolás pontossága is függ a megközelítés fokától. Gyakorlati okokból viszont arra törekszünk, hogy az alapfelület egyenletei minél egyszerűbbek legyenek.

A Föld felületéről a képfelületre (általában síkra) való áttérés első lépése tehát megközelítéssel jár, minélfogva elhanyagolásokat kell tudomásul vennünk. Ha viszont a Földet helyettesítő idomban megállapodtunk, a további lépés, a tulajdonképpeni vetítés már szigorú matematikai törvények szerint történik, és csupán a megkívánt pontosságtól függ, hogy a matematikai összefüggések (egyenletek, sorok) számszerű feloldását milyen élességgel kell elvégezni.

A geodéziában – mint ismeretes – a földalakat első megközelítője a *geoid*. Geoidnak nevezzük a nehézségi erőter potenciáljának azt a szintfelületét, amelynek potenciálértéke megegyezik az átlagos középtengerszintek potenciálértékével. A geoid, mint valamennyi más szintfelület szintén szabálytalan, ezért matematikai összefüggései gyakorlati célokra túl bonyolultak. (A nehézségi erő potenciálfelületei olyan felületek, amelyek minden pontjukban merőlegesek a nehézségi erő irányára. A nehézségi erő a Föld szabálytalan tömegeloszlása következtében szabálytalanul változik,

ezért szabálytalanok a szintfelületek is.) A geoid szabálytalan felület, ezért vetületi alapfelületnek nem alkalmas.

A földalak másik – jobban illeszkedő – megközelítője a *normálszferoid*, amely egy szabályosan változónak képzelt nehézségi erő potenciálfelülete, és mint ilyen, matematikailag már meghatározottnak tekinthető. Egyenletei azonban igen bonyolultak, és így alapfelületnek még ez sem alkalmas.

A megközelítés harmadik foka a *forgási ellipszoid*. (Forgási ellipszoidot akkor kapunk, ha egy ellipszist a kistengelye körül  $180^\circ$ -kal elforgatunk. Az ellipszis által kialakított idom a forgási ellipszoid.) Ha ennek alakját és méreteit helyesen választjuk meg, csak kevéssé tér el a *normálszferoidtól*. Egyenletei egyszerűbbek, és így a forgási ellipszoid alkalmas arra, hogy földi vetületeink alapfelülete legyen.

Kisebbségi területek geodéziai felméréséhez a Földet *gömbbel* helyettesíthetjük. A gömböt úgy vesszük fel, hogy a forgási ellipszoidot az ábrázolandó terület közepe táján egy pontban másodrendűen érintse. Ebben az esetben ez az ún. *közepessugarú gömb* a vetítés alapfelülete. Ezt a gömböt a matematikában *simulógömbnek* vagy *Gauss-gömbnek* is nevezik. (A simulógömb olyan gömb, amely az ellipszoidot valamely pontjában másodfokúan érinti. Másodrendű érintéskor a két felület közös pontjában nemcsak a  $z = f(x, y)$  alakú függvények első differenciálhányadosai értékének, hanem a második differenciálhányadosok értékének is egyenlőknek kell lenniük a két felületre nézve.) Földrajzi (geográfiai) célú ábrázoláshoz – ahol az ábrázolás méretaránya és ennek megfelelően a megkívánt pontosság is kicsi – nagyobb területek, *sőt az egész földfelület* ábrázolásához is választanak gömböt alapfelületnek.

A *gömb* azonban *nem csak alapfelület, hanem képfelület is lehet*, mert előfordul, hogy az ellipszoidról a gömbre vetítünk. Ennek jellegzetes példája a közismert *földgömbön* való ábrázolás, de a gömbre való vetítést geodéziai vonatkozásban is alkalmazzuk.

Egészen kicsi kiterjedésű, helyi jellegű felmérésekhez végül a Föld felszínét *síkkal* helyettesíthetjük, ilyenkor természetesen vetítésre nincs szükség.

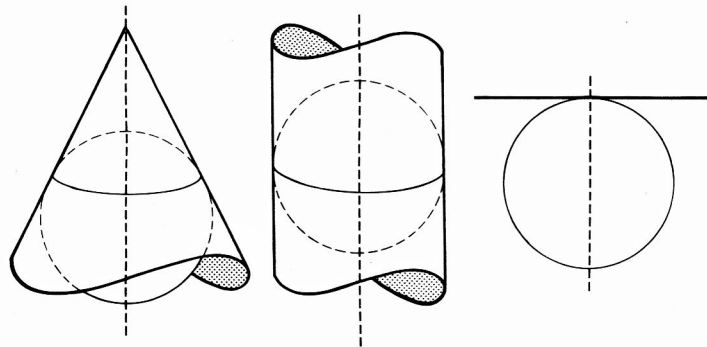
A következőkben az itt felsorolt vetületi alap- és képfelületeket az egyszerűbbtől a bonyolultabb felé haladva tárgyaljuk (sík, gömb, forgási ellipszoid).

Meg kell jegyeznünk még, hogy az alapfelületnek választott idom felszínét mindig a *tengerszint magasságában* levőnek képzeljük el.

### **Vetületi alap- és képfelületek** **A sík és a síkba fejthető felületek**

Az alapfelületről a vetítést legtöbbször nem közvetlenül a síkra, hanem *síkba fejthető* felületre végezzük, amit azután egy alkotója mentén felvágva a síkba kiterítünk. Ilyen felület lehet a *kúp* és a *henger palástja*. Vetületi képfelületnek

kör keresztmetszetű egyenes kúpot, illetve kör vagy ellipszis keresztmetszetű egyenes hengert használunk (1.2. ábra).



1.2. ábra. Kúp, henger és közvetlen síkvetület

A síkon a pontok meghatározása rendszerint *derékszögű* (ortogonális), ritkábban *poláris* (sarki) koordinátákkal történik, a számításokat pedig a *síkháromszögtan* (sík-trigonometria) szabályai szerint végezzük.

A geodéziában használatos derékszögű koordináta-rendszer  $x$  (abszcissza-) tengelyének pozitív ága vagy északra, vagy délre mutat. Az  $y$  (ordináta-) tengely pozitív ágának irányát mindig úgy jelöljük ki, hogy az  $x$  tengely pozitív ága abba az óramutató járásának megfelelő értelemben  $90^\circ$ -os elfordulással legyen beforgatható.

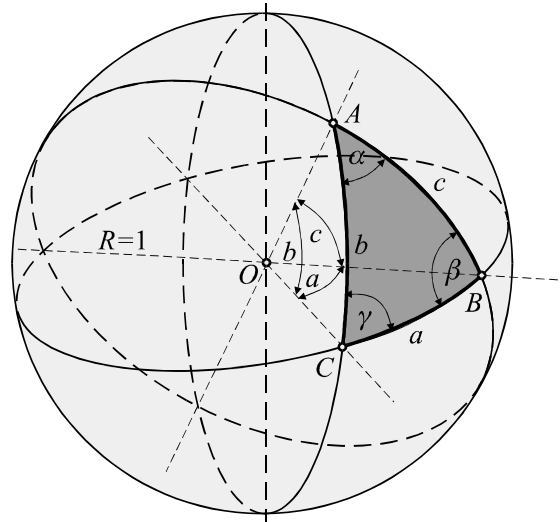
Magyarországon a geodéziai gyakorlatban északi és déli tájékozású koordináta-rendszert is alkalmazunk. Külföldi feladatoknál mindig meg kell győződni a kérdéses helyen használatos tájékozásról és a koordináták betűjelzéseiről.

## A gömb

### A gömbháromszög

Valamely ponttól azonos távolságra levő pontok mértani helyét gömbnek nevezzük. A gömböt ez az egyetlen adat, az  $R$  sugár meghatározza. A gömbön a számításokat a *gömbháromszögtan* (gömbi trigonometria) segítségével végezzük.

A *gömbháromszög csúcsai* a gömb középpontjából kiinduló három félegyenesnek a gömbfelülettel alkotott metszéspontjaiként adódnak. A gömbháromszög  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalán a három félegyenes által páronként bezárt három,  $180^\circ$ -nál kisebb szöget értjük. A gömb felületén a gömbháromszög mindegyik oldalának egy-egy *főkörív* felel meg (1.3. ábra). (Gömbi *főkörnek* azt a gömbi kört nevezzük, amelynek síkja átmegy a gömb középpontján, tehát sugara azonos a gömb  $R$  sugarával. A gömbnek minden egyéb síkmetszete *gömbi kiskör*.) A gömbháromszög  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalával rendre a szemközti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  szögei a megfelelő főkörívek közötti  $180^\circ$ -nál kisebb szögek, vagy – másképpen kifejezve – a három félegyenes által meghatározott három sík által bezárt szögek. Mind az oldalakat, mind a szögeket *szögértékben* fejezzük ki.



1.3. ábra. Gömbháromszög (sötétítve)

A gömbháromszög szögeinek összege mindig nagyobb  $180^\circ$ -nál:

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$$

Az  $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$  különbséget a gömbháromszög *gömbi szögfeleslegének* nevezzük. Az  $\varepsilon$  számítható a gömbháromszög területéből is:

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} \rho, \quad (1.1)$$

ahol  $F$  a gömbháromszög területe,  $R$  a gömb sugara,  $\rho$  pedig az analitikus szögegységnek megfelelő fok- vagy másodperc-érték.

$$\rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad \rho'' = \frac{180}{\pi} 3600'' = 206\,264,806\,2471''.$$

A teljes gömb gömbi szögfeleslege:

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2} = \frac{4R^2\pi}{R^2} = 4\pi = 720^\circ.$$

Ha ismerjük a gömbháromszög két oldalát és a közbezárt szöget:

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2} \sin \gamma}{1 + \tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2} \cos \gamma}.$$

A gömbháromszög oldalainak ismeretében:

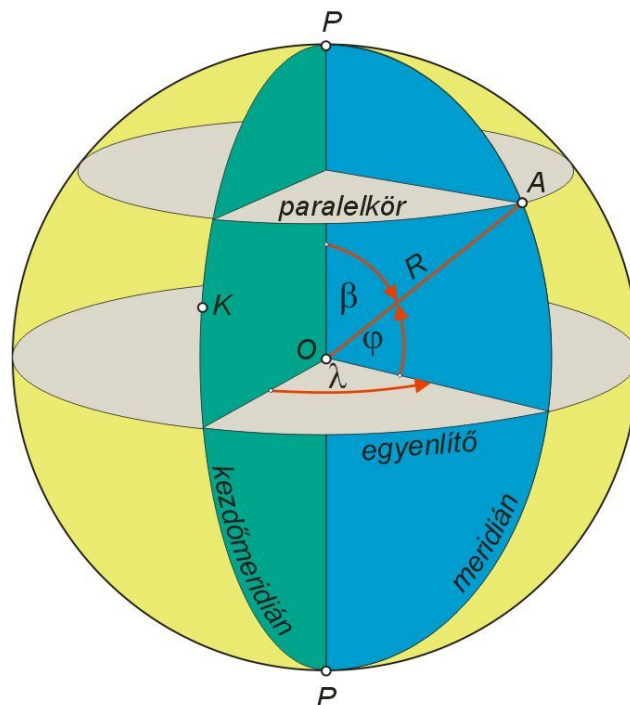
$$\tan \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} \tan \frac{s-c}{2}}, \text{ ahol } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

### Fokhálózat és a gömbi földrajzi koordináták

Ha a Földet helyettesítő gömb tetszőleges átmérőjének egyik végpontját északi, a másik végpontját déli *pólusnak* (sarknak) tekintjük, akkor a gömb középpontjára illeszkedő és az előbbi átmérőre merőleges sík a gömb felületéből az *egyenlítőnek* nevezett *gömbi főkört* (legnagyobb gömbi kör) metszi ki.

Az egyenlítő síkjára merőleges és az előbbi átmérőn átmenő síkokat *meridián-síkoknak* nevezzük. A meridián-sík a gömb felszínéből a *meridiánnak* (*délkör*, *hosszúsági kör*, *hosszúsági vonal*) nevezett gömbi főkört metszi ki. Az egyenlítő síkjával párhuzamos síkok a gömbfelületből a *paralelköröket* (*szélességi köröket*, *szélességi vonalakat*) metszik ki. A paralelkörök gömbi *kis körök*.

A meridiánok és paralelkörök vonalhálózatát *földrajzi fokhálózatnak* nevezzük. A gömbfelület pontjainak meghatározása *földrajzi koordinátákkal*, *gömbfelületi derékszögű* (*ortogonális*) vagy *poláris* (*sarki*) *koordinátákkal*, illetve *térbeli derékszögű koordinátákkal* történhet.



1.4. ábra. Gömbi földrajzi koordináták

A földrajzi koordináták: a földrajzi szélesség (*sarkmagasság*) és a földrajzi hosszúság. Valamely felületi *A* pont  $\varphi$  gömbi földrajzi szélességén azt a szöveget értjük, amelyet az *A* pont normálisa az egyenlítő síkjával bezár. A  $\lambda$

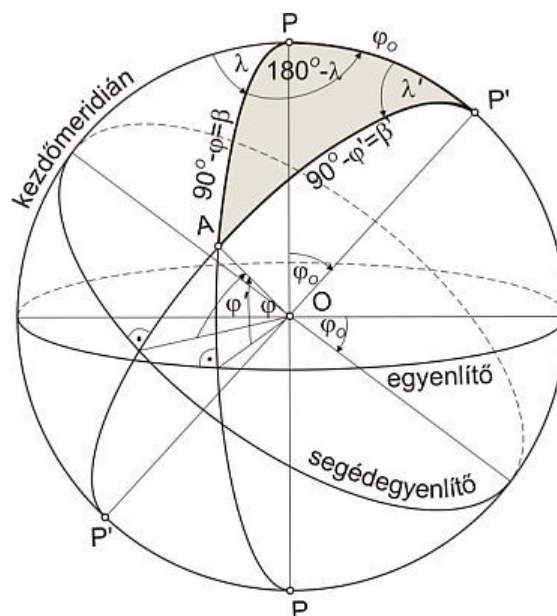
*gömbi földrajzi hosszúság* pedig az a szög, amit az  $A$  pont meridiánjának síkja, valamely tetszőleges  $K$  ponton kezdőmeridián síkjával bezár (1.4. ábra). A földrajzi szélesség pótszögét *pólustávolságnak* nevezzük ( $\beta$ ):

$$\beta = 90^\circ - \varphi.$$

A földrajzi szélességet az egyenlítőtől északra északi, délre déli szélességnek nevezzük, és pozitív, illetve negatív előjelűnek vesszük. A kezdőmeridiántól keletre eső pontok földrajzi hosszúságát keleti, a nyugatra esőket pedig nyugati hosszúságnak nevezzük, és pozitív, illetve negatív előjelűnek tekintjük.

Mivel a meridiánokat a kezdőmeridiántól kezdve két irányban  $0^\circ$ -tól  $180^\circ$ -ig számozzák, a számtartomány tehát összesen  $360^\circ$ -ra terjed ki, ezért valamely földrajzi hosszúság a megfelelő meridián-sík által kimetszett teljes körnek csak a pólustól pólusig terjedő fél ívét határozza meg. Ezért meridiánon rendszerint csak ezt a fél ívet értjük, és a csatlakozó fél ívet *átellenes meridiánnak* nevezzük.

A földrajzi koordinátákat a Föld forgástengelyét képviselő átmérőhöz viszonyítottuk. Vetülettani számításokban gyakran előfordul, hogy nem a pólusokat összekötő átmérőhöz, hanem a gömbnek egy másik átmérőjéhez kell adatainkat viszonyítani. Ilyenkor az új átmérő végpontjait *segédpólusnak*, a gömb középpontjában az átmérőre merőlegesen fektetett síknak a gömbfelülettel alkotott metszsvonalát *segédegyenlítőnek*, a vele párhuzamos síkok gömbfelülettel való metszeteit pedig *segédmeridiánoknak* nevezzük. A segédparalelkörök és segédmeridiánok hálózata a *segédfokhálózat*. Ebben a rendszerben a földrajzi koordináták mintájára alakított koordináták a *segéd földrajzi koordináták*: a *segéd földrajzi szélesség* ( $\varphi'$ ) és a *segéd földrajzi hosszúság* ( $\lambda'$ ). A segéd földrajzi szélesség pótszögét ( $\beta'$ ) *segéd-pólustávolságnak* nevezzük.



1.5. ábra. Gömbi segéd földrajzi koordináták

A  $\lambda'$  szöveget a segédpólus valódi meridiánjától számítjuk, mert ez az egyetlen gömbi főkör, amely a segédpóluson átmenő segéd- és egyben valódi meridián is (1.5. ábra). Az ábrán felvázoltuk a  $P$  pólust és az egyenlítőt, a  $P'$  segédpólust és a segédegyenlítőt, valamint egy tetszőleges  $A$  pont meridiánját és segédmeridiánját. A  $\varphi_0$  az egyenlítő síkja és a segédegyenlítő síkja által bezárt szög, amely egyenlő a  $P'$  valódi pólustávolságával ( $\beta_{P'}$ ). A valódi és a segéd földrajzi koordináták közötti összefüggés az  $A P P'$  poláris gömbháromszögből megállapítható. Ha ismertek az  $A$  pont  $\varphi$  és  $\lambda$  valódi földrajzi koordinátái, akkor a gömbháromszög oldal-koszinusz és szinusz tételének alkalmazásával az egyenlítő síkjával  $\varphi_0$  szöveget bezáró segédegyenlítőre vonatkozó segéd földrajzi koordináták a

$$\sin \varphi' = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \lambda, \quad (1.2)$$

$$\sin \lambda' = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi'}$$

képletekből számíthatók. Ha pedig a segéd földrajzi koordináták adottak, akkor a valódi földrajzi koordinátákat a

$$\sin \varphi = \sin \varphi' \cos \varphi_0 + \cos \varphi' \sin \varphi_0 \cos \lambda', \quad (1.3)$$

$$\sin \lambda = \frac{\cos \varphi' \sin \lambda'}{\cos \varphi}$$

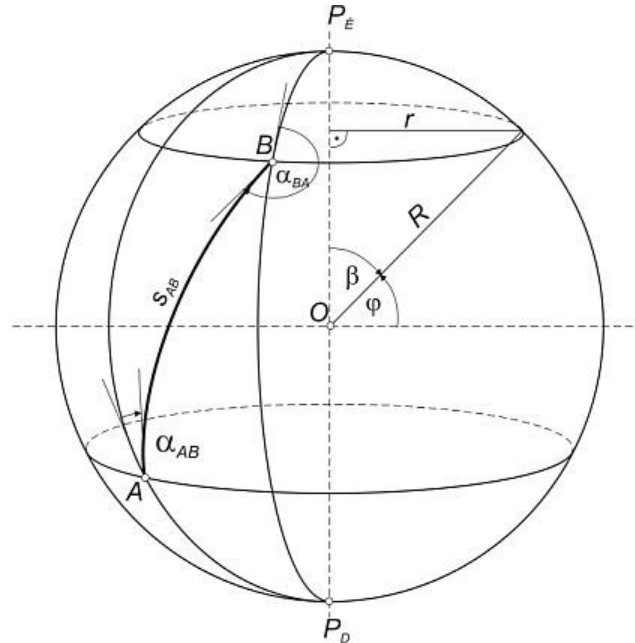
képletekből határozzuk meg.



## 2. előadás

### További gömbi fogalmak

Valamely gömbi főkör ívének  $\alpha$  azimutja az ív egy tetszőleges pontjában az a szög, amit az ív és a meridián érintői zárnak be egymással az adott pontban. Az azimutot a meridián északi ágától kiindulva az óramutató járásával megegyező irányban számítjuk  $0^\circ$ -tól  $360^\circ$ -ig (2.1. ábra bal oldali része).



2.1. ábra. Azimutok és egy paralelkör sugara

A meridiánok sugara azonos a gömb  $R$  sugarával. A  $\varphi$  földrajzi szélességű paralelkör sugara (2.1. ábra jobb oldali része):

$$r = R \cos \varphi = R \sin \beta. \quad (2.1)$$

Forgásfelületen a *legrövidebb vonalat* általánosan *geodéziai vonalnak*, más szóval *ortodrómának* nevezzük. A gömb két pontja közötti legrövidebb vonal a két ponton átmenő gömbi főkörnek a két pont által határolt rövidebb íve. Így tehát a gömbön a geodéziai vonal, az ortodróma és a gömbi főkör elnevezés ugyanazt a fogalmat jelöli.

A geodéziai vonal – minden forgásfelületen érvényes általános egyenlete:

$$r \sin \alpha = k \text{ (konstans)}, \quad (2.2)$$

ahol  $r$  a ponton átmenő paralelkör sugara,  $\alpha$  pedig a geodéziai vonal azimutja a pontban. (Ez *Clairaut tétele*). Mivel gömbön az egyenlítő a legnagyobb paralelkör

$$r_{\max} = R,$$

és

ebből

$$r_{\max} (\sin \alpha)_{\min} = k,$$

$$(\sin \alpha)_{\min} = \frac{k}{r_{\max}} = \frac{k}{R}.$$

Ez a hányados határozza meg azt az azimutot, amely alatt az ortodróma az egyenlítőt metszi, tehát az  $\alpha$ -nak az egyenlítőn van a minimuma.

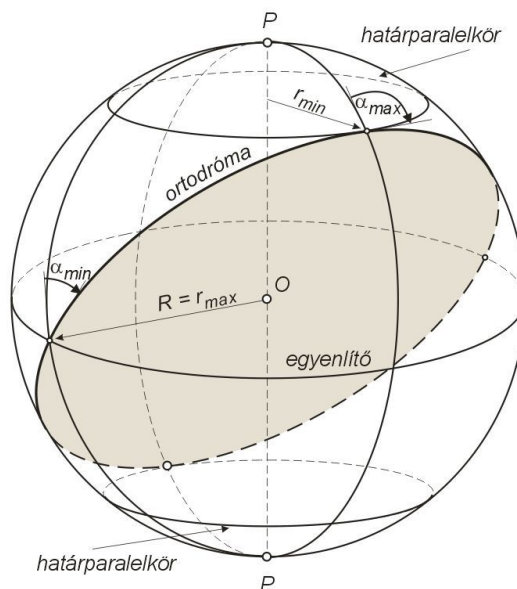
Az ortodrómán a pólusok felé haladva a paralelkör sugarának csökkenésével az azimut egyre jobban nő, egészen  $90^\circ$ -ig, amikor is:

$$(\sin \alpha)_{\max} = 1 = \frac{k}{r_{\min}},$$

és

$$r_{\min} = k.$$

Abban a pontban, amelyben az azimut  $90^\circ$ -ot ér el, a gömbi főkör érinti a ponton átmenő paralelkört, de át már nem metszi. A  $k$  konstans annak a legrövidebb *határparalelkörnek* a sugarát jelenti, amelyet a gömbi főkör elérhet, és ahonnan a határparalelkör érintéséig megtett úttal szimmetrikus alakú vonalon, növekvő azimutal tér vissza az egyenlítőn levő kiindulási pontjával átellenes pontjába. Az egyenlítőt most dél felé elhagyva a déli félgömbön halad tovább az északi félgömbön megtett útjával szimmetrikus vonalon egészen az egyenlítőn levő kiindulási pontig (2.2. ábra).



2.2. ábra. Ortodróma és határparalelkörei

A meridiánok és az egyenlítő is – mint tudjuk – gömbi főkörök. A meridián azimutja minden pontjában  $0^\circ$  vagy  $180^\circ$ , határparalelkörének sugara zérus, tehát határparalelkörei a pólusok. Az egyenlítő olyan ortodróma (és egyben paralelkör), amelynek azimutja minden pontjában  $90^\circ$  vagy  $270^\circ$ , határparalelkörének sugara:

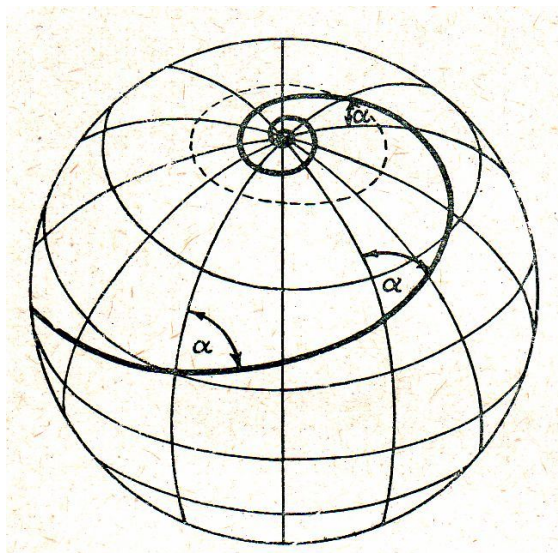
$$R = k,$$

vagyis az egyenlítő önmagának a határparalelköre (nem lép ki önmagából). A paralelkörök síkja (az egyenlítő kivételével) nem megy át a gömb középpontján, ezért a paralelkörök nem ortodróma.

A forgásfelületek másik nevezetes vonala a *loxodróma*. A loxodróma olyan folytonos görbe vonal, amely minden pontjában azonos szöget zár be a meridián irányával, tehát azimutja állandó (2.3. ábra):

$$\alpha = k \text{ (konstans).}$$

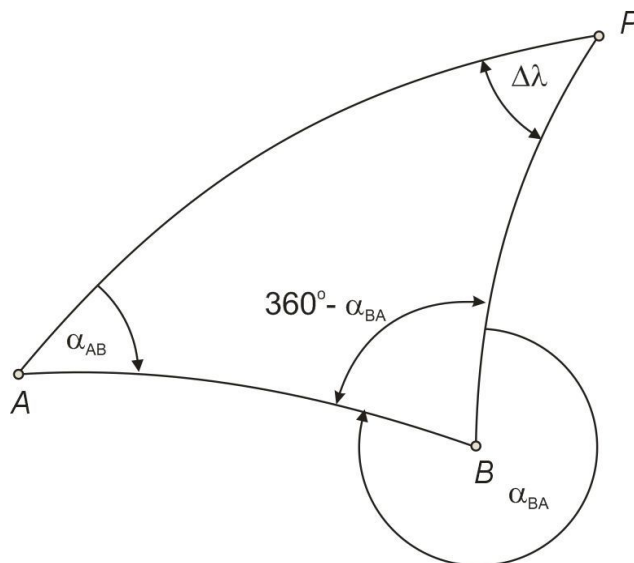
A loxodróma a gömbön a meridián ( $\alpha = 0^\circ$  vagy  $180^\circ$ ), valamint az egyenlítő mentén ( $\alpha = 90^\circ$  vagy  $270^\circ$ ) gömbi főkör, a paralelkörök mentén ( $\alpha = 90^\circ$  vagy  $270^\circ$ ) gömbi kis kör, más irányban pedig olyan csavarvonal, amely aszimptotikusan közeledik a pólushoz.



2.3. ábra. Loxodróma

A loxodromának különösen a tengeri hajózásban van jelentősége. Régebben általában loxodromán hajóztak, mert így csak állandó azimutot kellett tartani. Hosszú útvonalon a loxodróma lényegesen hosszabb lehet a legrövidebb vonalnál, ezért újabban az ortodromán hajóznak. Az ortodroma azimutja viszont pontról pontra változik, ami sok földrajzi helymeghatározást igényel, hogy az azimut folytonos változását követhessék. Az ortodromát ezért ilyenkor szakaszokra bontották, és a szakaszokon belül loxodromával helyettesítették. A repülésben is hasonló gyakorlatot követtek.

Két pontot összekötő ortodromának a két pontnál jelentkező azimutja – a meridiánok pólus felé konvergálása miatt – általában nem  $180^\circ$ -kal különbözik egymástól, hanem  $180^\circ + \gamma$ -val, ahol  $\gamma$  a két pont között fellépő *valódi gömbi meridiánkonvergencia*.



2.4. ábra. Poláris gömbháromszög a valódi gömbi meridiánkonvergencia levezetéséhez

A valódi gömbi meridiánkonvergencia, a földrajzi hosszúságkülönbség és annak a poláris gömbháromszögnek a gömbi szögfeleslege között, amelynek egyik oldala a két vizsgált pontot összekötő ortodróma, összefüggés van (2.4 ábra). A valódi gömbi meridiánkonvergencia az előbbi meghatározás szerint, és figyelembe véve, hogy a gömbháromszög belső szögeinek összege:

$$\alpha_{AB} + (360^\circ - \alpha_{BA}) + \Delta \lambda = 180^\circ + \varepsilon,$$

$$\alpha_{AB} - \alpha_{BA} + \Delta \lambda = 180^\circ + \varepsilon,$$

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + \Delta \lambda - \varepsilon.$$

Végezzük el a

$$\gamma = \Delta \lambda - \varepsilon$$

helyettesítést!

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + \gamma \quad (2.3)$$

Ezek szerint a gömbi szögfelesleg, illetve a valódi gömbi meridiánkonvergencia:

$$\varepsilon = \Delta \lambda - \gamma \quad \gamma = \Delta \lambda - \varepsilon \quad (2.4)$$

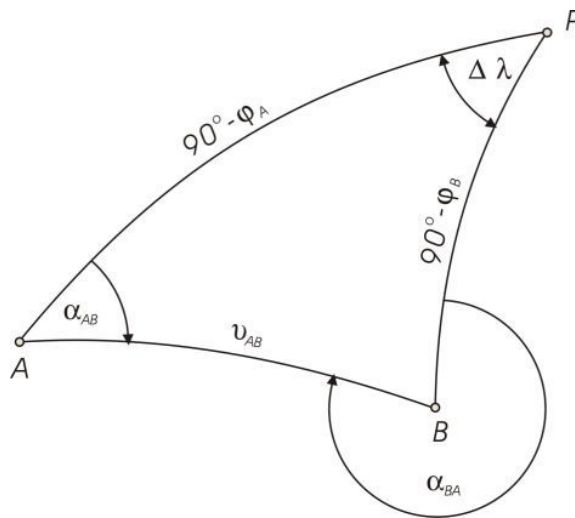
*Két pont között tehát a valódi gömbi meridiánkonvergencia egyenlő a pontokat összekötő gömbi főkör és a két pont meridiánja által meghatározott poláris gömbháromszögben a pólusnál levő szög (a földrajzi hosszúságkülönbség) és a gömbi szögfelesleg különbségével.*

### **Geodéziai alapfeladatok a gömbön**

#### **Első geodéziai alapfeladat a gömbön**

Ha ismerjük valamely A pont  $(\varphi_A, \lambda_A)$  gömbi földrajzi koordinátáit, az A és a B pontok közötti  $s_{AB}$  gömbi ív hosszát, valamint ennek az ívnek az A pontbeli

$\alpha_{AB}$  azimutját, akkor a  $B$  pont ( $\varphi_B, \lambda_B$ ) földrajzi koordinátái és a  $B$  pontbeli ( $\alpha_{BA}$ ) ellenazimut a gömbháromszög alapösszefüggéseiből számíthatók. (2.5. ábra)



2.5. ábra. Alapfeladatok a gömbön

Az  $AB$  ívhez tartozó középponti szög:

$$\nu_{AB}^{\circ} = \frac{s_{AB}}{R} \rho^{\circ}, \text{ ahol } \rho^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi}.$$

A  $B$  pont gömbi földrajzi koordinátái:

$$\sin \varphi_B = \cos \nu_{AB} \sin \varphi_A + \sin \nu_{AB} \cos \varphi_A \cos \alpha_{AB}, \quad (2.5)$$

$$\sin \Delta \lambda = \frac{\sin \alpha_{AB} \sin \nu_{AB}}{\cos \varphi_B}.$$

Az ellenazimut szinusza:

$$\sin \alpha_{BA} = -\frac{\sin \Delta \lambda \cos \varphi_A}{\sin \nu_{AB}}.$$

### Második geodéziai alapfeladat a gömbön

Két gömbfelületi ( $A, B$ ) pont távolsága, vagyis a két ponton átmenő gömbi főkör  $A$  és  $B$  közötti rövidebb ívének  $s_{AB}$  hossza, valamint ennek az ívnek az azimutja az  $A$  és  $B$  pontban ( $\alpha_{AB}, \alpha_{BA}$ ) a két pont gömbi földrajzi koordinátáiból a gömbháromszögtan összefüggéseiből számítható (2.5. ábra):

$$\cos \nu_{AB} = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta \lambda_{AB},$$

$$\text{ahol: } \Delta \lambda_{AB} = \lambda_B - \lambda_A.$$

Az  $A$  és  $B$  pontbeli azimutok szinusza:

$$\sin \alpha_{AB} = \frac{\sin \Delta \lambda_{AB} \cos \varphi_B}{\sin \nu_{AB}}, \quad (2.6)$$

$$\sin \alpha_{BA} = -\sin(360^\circ - \alpha_{BA}).$$

A gömbi ívhossz:

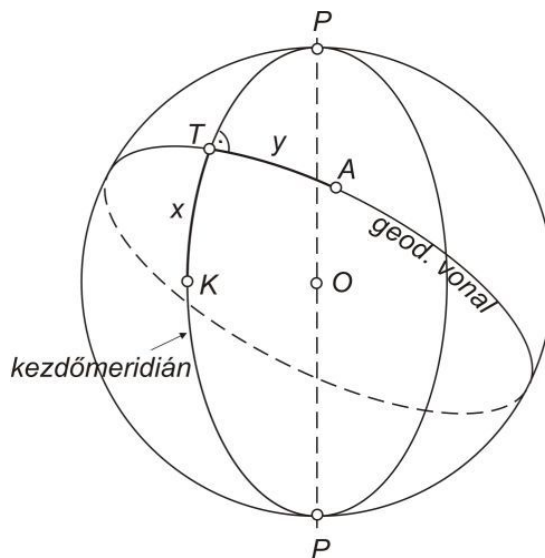
$$s_{AB} = \frac{R \nu_{AB}}{\rho}.$$

A kiszámított szinusz értékekből csak szemlélet alapján tudjuk eldönteni, hogy az azimutok melyik szögnyelven vannak. Egyértelművé akkor válik a feladat, ha (2.5)-ből a  $\cos \alpha$ -t is kiszámítjuk:

$$\cos \alpha_{AB} = \frac{\sin \varphi_B - \sin \varphi_A \cos \nu_{AB}}{\cos \varphi_A \sin \nu_{AB}}. \quad (2.7)$$

A (2.6) és (2.7) eredményei alapján az azimut előjele és abszolút értéke is meghatározható.

### Gömbfelületi derékszögű koordináta-rendszer



2.6. ábra. Soldner-féle gömbi koordináták

A gömbfelületi derékszögű (ortogonális) koordináta-rendszer kezdőpontja általában egy tetszőlegesen választott gömbi főkör (ortodróma)  $K$  pontja. A kérdéses  $A$  felületi pontból a kiválasztott gömbi főkörre merőlegesen gömbi főkört (ortodrómát) bocsátunk. A körök metszéspontja az  $A$  pont alapkörön levő  $T$  talppontja.

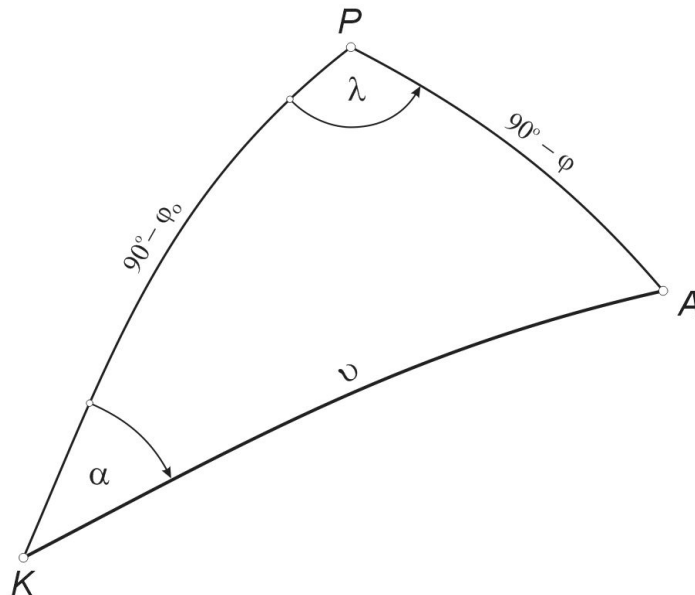
Ebben az esetben az  $A$  pont gömbfelületi derékszögű koordinátái:

$$x = \underline{KT} \text{ ívhossz}, \quad y = \underline{TA} \text{ ívhossz}.$$

Abszcisszatengelynek rendszerint meridiánt vesznek fel. Ilyen a *Soldner-féle* koordináta-rendszer (2.6. ábra). Poláris gömbháromszög alapján összefüggés írható fel a *Soldner-féle* és a földrajzi koordináták között.

### Gömbfelületi poláris koordináta-rendszer

Valamely  $A$  pont gömbfelületi poláris koordinátáit a pontot egy tetszőleges  $K$  kezdőponttal összekötő gömbi főkörön mért  $R \nu$  ívdarab hossza és az ívdarab  $K$  pontbeli  $\alpha$  azimutja határozza meg (2.7. ábra).  $\varphi$ -vel az  $A$  pont,  $\varphi_0$ -al a  $K$  pont földrajzi szélességét jelöltük. Az  $A$  pont  $K$ -ra vonatkozó földrajzi hosszúsága:  $\lambda$ .



2.7. ábra. Gömbi poláris koordináták összefüggése a földrajzi koordinátákkal

A poláris- és a földrajzi koordináták közötti összefüggéseket a  $KPA$  poláris gömbháromszögből a gömbháromszög oldal-koszinusz (1.2) és szinusz tételének (1.3) felhasználásával határozzuk meg.

Ha a poláris rendszerbeli koordináták adottak, akkor a földrajzi koordináták a következő képletekből számíthatók:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 \cos \nu + \cos \varphi_0 \sin \nu \cos \alpha,$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \nu \sin \alpha}{\cos \varphi}.$$

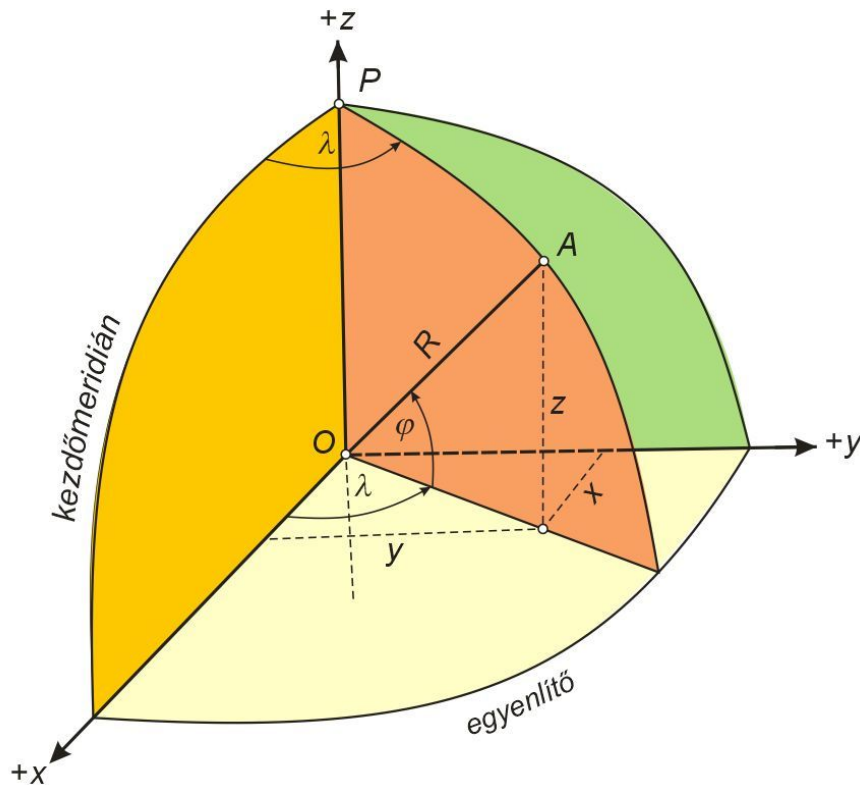
Ha pedig a földrajzi koordinátákat ismerjük, akkor szintén az (1.2) és az (1.3) alapján:

$$\cos \nu = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \lambda ,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{\sin \nu}$$

### Térbeli derékszögű koordináta-rendszer

A gömbhöz rendelt térbeli derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontját a gömb középpontjában jelöljük ki, z tengelyül a pólusokat összekötő átmérőjét, x tengelyül az egyenlítő és egy tetszőlegesen választott kezdőmeridián síkjának metszévonalát, y tengelyül pedig az egyenlítő síkjában fekvő – a gömb középpontján átmenő – és az x tengelyre merőleges átmérőt választjuk (2.8. ábra).



2.8. ábra. Gömbi térbeli derékszögű koordináta-rendszer

A gömbfelületi A pont térbeli derékszögű koordinátái (a gömb Gauss-féle paraméteres egyenlete) az ábráról leolvashatóan:

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda ,$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = R \sin \varphi .$$



A derékszögű koordinátákból a földrajzi koordinátákat az alábbi inverz képletekből számíthatjuk:

$$\sin \varphi = \frac{z}{R}, \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x}.$$

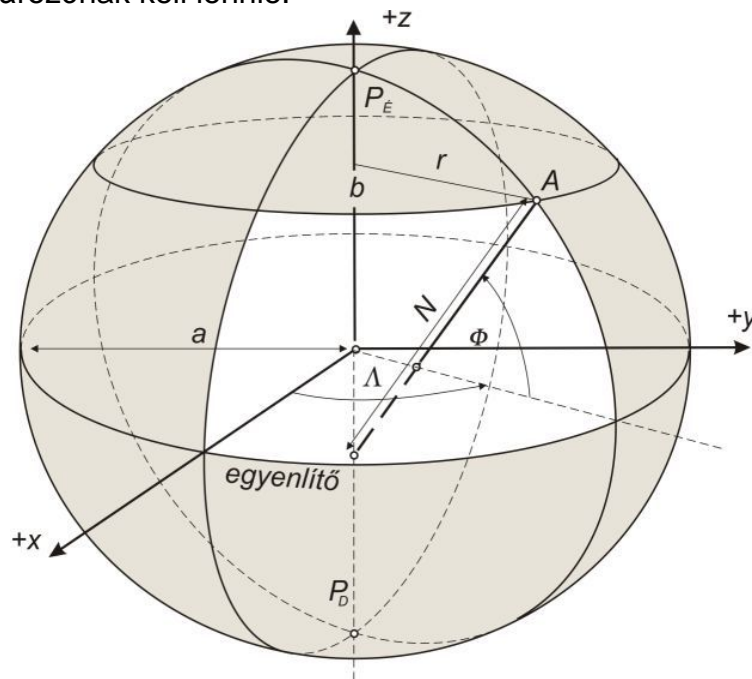
### 3. előadás

#### Forgási ellipszoid

#### Az ellipszoid mérete és alakja

Ha az ellipszist a kistengelye körül  $180^\circ$ -kal körbe forgatjuk, akkor az forgási ellipszoidot ír le. A továbbiakban, ha ellipszoidról beszélünk, mindig forgási ellipszoidra gondolunk (3.1. ábra).

Az ellipszoid meghatározásához két adat szükséges, amelyek egyikének méret meghatározónak kell lennie.



3.1. ábra. Forgási ellipszoid

Az ellipszoid méretére és alakjára az alábbi adatok jellemzők:

*fél nagytengely:  $a$ ,*

*fél kistengely:  $b$ ,*

*lapultság:*

$$f = \frac{a-b}{a},$$

*első numerikus excentricitás:*

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}},$$

*második numerikus excentricitás:*

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}},$$

E három utóbbi mennyiség között fennállnak az

$$\varepsilon'^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon'^2}{1 + \varepsilon'^2},$$

$$(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon'^2) = 1,$$

$$f = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = 2f - f^2$$

összefüggések.

Ellipszoidi számításokban gyakran előfordulnak a következő jelölések is:

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad \eta^2 = \varepsilon'^2 \cos^2 \Phi,$$

$$V = \sqrt{1 + \eta^2}.$$

### **Földrajzi fokhálózat és egyéb ellipszoidi fogalmak**

Az ellipszoidnak a Föld forgástengelyét képviselő kistengelye az ellipszoid felszínét az északi és a déli *pólusban* metszi. A forgástengelyre merőleges és az ellipszoid középpontján átmenő sík az *egyenlítő síkja*, amely a felszínből a kör alakú és *a* sugarú (*a* = fél nagytengely) *egyenlítő*t metszi ki. Az egyenlítővel párhuzamos síkok kör alakú metszetei a *paralelkörök* (szélességi körök, szélességi vonalak). A forgástengelyt tartalmazó és az egyenlítő síkjára merőleges síkok az ellipszis alakú *meridiánokat* (hosszúsági vonalakat) metszik ki (3.1. ábra).

Az ellipszoid felszínén levő pontok meghatározása ugyanolyan rendszerű koordinátákkal történik, mint amilyeneket a gömbnél megismertünk. Mivel a vetülettani összefüggésekben a gömbi és ellipszoidi koordináták vegyesen fordulnak elő, az ellipszoidi koordinátákat megkülönböztetésül a görög ábécé nagybetűivel jelöljük. A földrajzi szélesség ( $\Phi$ ), a földrajzi hosszúság ( $\lambda$ ) és az azimut definíciója megegyezik a gömbre adottakkal. A felületi pont normálisa azonban csak az egyenlítőn és a pólusokban megy át az ellipszoid középpontján (3.1. ábra). Valamely földrajzi hosszúság a megfelelő meridiánsík által kimetszett ellipszisnek csak pólustól pólusig terjedő fél ívét határozza meg, ezért a meridiánok értelmezéséhez figyelembe kell venni a gömbnél elmondottakat.

A földi pontok földrajzi meghatározásához *kezdőmeridiánul* általában a *greenwichi meridiánt* alkalmazzák. Nálunk korábban a *ferroi meridiántól*

mérték a földrajzi hosszúságot. (A fiktív ferroi meridiánt nyugatra, kerekén  $20^\circ$ -ra vették fel a *párizsi meridiántól*, ami mintegy  $17^\circ 40'$ -cel esik nyugatra a *greenwichi meridiántól*. A szakirodalomban ettől az értéktől több másodpercre eltérő adatokat is találunk.)

A *geodéziai vonalra (ortodrómára)* a gömbnél mondottak az ellipszoidra is érvényesek azzal az eltéréssel, hogy az egyenlítő sugara itt  $a$ -val egyenlő, tehát

$$r_{\max} = a \quad \text{és} \quad (\sin \alpha)_{\min} = \frac{k}{a} .$$

További különbség, hogy az ellipszoidon az ortodróma általában nem zárt görbe. Kivétel a kör alakú egyenlítő és az ellipszis alakú meridián. Ezzel a kérdéssel a *felsőgeodézia* részletesen foglalkozik.

A *loxodróma* fogalma mindenben azonos a gömbnél megismerttel.

Két pontot összekötő geodéziai vonalnak a két pontnál jelentkező *azimutjai* az ellipszoidon sem  $180^\circ$ -kal különböznek egymástól, hanem  $(180^\circ + \gamma)$ -val, ahol  $\gamma$  a két pont közötti *ellipszoidi meridiánkonvergencia*.

Az *ellipszoidi háromszöget* a csúcspontjait összekötő geodéziai vonalak alkotják, melynek szögösszege:

$$180^\circ + \varepsilon_{\text{ellipszoid}} ,$$

ahol  $\varepsilon$  az *ellipszoidi szögfelesleg*.

Az ellipszoid *meridiánjának görbületi sugara* csak a földrajzi szélesség függvénye:

$$M = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}} . \quad (3.1)$$

A meridián síkjára merőleges kelet-nyugati főirányban a metszési görbe sugara, amelyet harántgörbületi sugárnak nevezünk szintén csak a földrajzi szélességtől függ:

$$N = \frac{a}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \Phi)^{\frac{1}{2}}} . \quad (3.2)$$

A *közepessugarú gömb* sugara az  $M$  és az  $N$  mértani közepe:

$$R = \sqrt{MN} .$$

### **Felületi derékszögű koordináta rendszer**

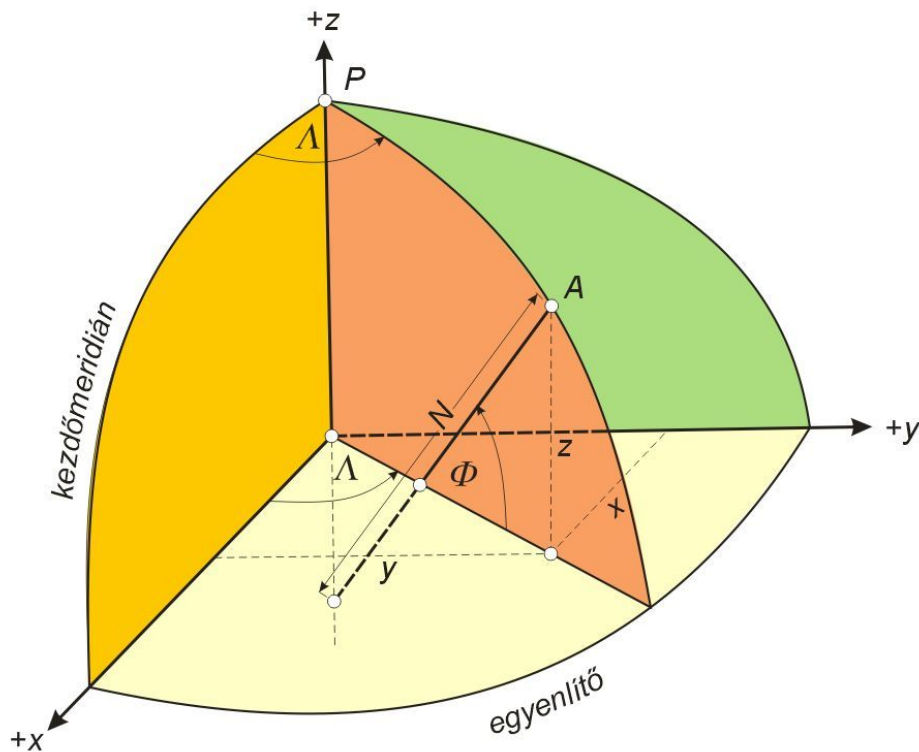
Az ellipszoidi *Soldner-féle koordináta-rendszer* csak annyiban különbözik a gömbtől, hogy a kérdéses  $A$  pontból a kezdőmeridiánra *merőlegesen ellipszoidi geodéziai vonalat* bocsátunk. A két vonal metszéspontja az  $A$  pont kezdőmeridiánon levő talppontja ( $T$ ). Az  $A$  pont *Soldner-féle* koordinátái:

$x$  = a kezdőmeridián  $K$  és  $T$  közötti ívdarabjának hossza,  
 $y$  = az  $A$  és  $T$  közötti geodéziai vonal darab hossza.

A földrajzi  $(\Phi, \Lambda)$  és a Soldner-féle  $(x, y)$  koordináták között átszámítások végezhetők.

### Térbeli derékszögű koordináta-rendszer

A térbeli derékszögű (ortogonális) koordináta-rendszer kezdőpontját az ellipszoid középpontjába helyezzük,  $z$  tengelyül az ellipszoid kistengelyét,  $x$  tengelyül pedig az egyenlítő és a kezdőmeridián síkjának metszévonalát választjuk. A középponton átmenő  $y$  tengelyt az egyenlítő síkjában az egyenlítőre merőlegesen vesszük fel (3.2. ábra).



3.2. ábra. Ellipszoidi derékszögű koordináta-rendszer

Valamely  $A$  felületi pont paraméteres egyenletei:

$$x = N \cos \Phi \cos \Lambda, \quad (3.3)$$

$$y = N \cos \Phi \sin \Lambda, \quad (3.4)$$

$$z = \frac{b^2}{a^2} N \sin \Phi = N(1 - \varepsilon^2) \sin \Phi. \quad (3.5)$$

Az  $x$  és az  $y$  egyenlete az ábráról közvetlenül leolvasható. A  $z$  (3.5) egyenletének hosszabb levezetése van.

A síkkoordináták ismeretében a földrajzi hosszúság egyszerűen számítható:

$$\tan \Lambda = \frac{y}{x}$$

A földrajzi szélesség inverz képletének levezetéséhez (3.3) és (3.4)-ből, majd a (3.5)-ből:

$$x^2 + y^2 = N^2 \cos^2 \Phi$$

$$\frac{a^4}{b^4} z^2 = N^2 \sin^2 \Phi$$

A két egyenlet összeadása után:

$$x^2 + y^2 + \frac{a^4}{b^4} z^2 = N^2.$$

Majd a (3.3) és (3.4) egyenletekből:

$$\cos \Phi = \frac{x}{N \cos \Lambda} \quad \text{vagy ellenőrzéssel} \quad \cos \Phi = \frac{y}{N \sin \Lambda}.$$

A  $\Phi$  (3.5)-ből is meghatározható:

$$\sin \Phi = \frac{a^2 z}{b^2 N}.$$

## 4. előadás

### A vetületek általános elmélete

#### A vetítés matematikai elve

Két – matematikailag meghatározott – felület paraméteres egyenletei legyenek a következők:

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v), \\ y &= f_2(u, v), && \text{I. felület} \\ z &= f_3(u, v). \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \xi &= g_1(U, V), \\ \eta &= g_2(U, V), && \text{II. felület} \\ \zeta &= g_3(U, V). \end{aligned}$$

Ha a két felület paraméteres egyenletei között fennáll az

$$U = F_1(u, v) \quad \text{és} \quad V = F_2(u, v) \tag{4.2}$$

függvénykapcsolat, akkor a két felület között olyan kapcsolat áll fenn, amely szerint az egyik felület minden pontjának van megfelelője a másik felületen. Ha ugyanis a (4.2) egyenleteket behelyettesítjük a (4.1) alatti II. jelzésű egyenletrendszerbe, akkor a

$$\begin{aligned} \xi &= G_1(u, v), \\ \eta &= G_2(u, v), && \text{II.} \\ \zeta &= G_3(u, v). \end{aligned} \tag{4.3}$$

paraméteres egyenletekhez jutunk.

A (4.3) egyenletek szerint az  $u$  és  $v$  paraméterek összetartozó értékei mindkét felületen egy-egy pontot határoznak meg. Ha az egyik paramétert állandónak tekintjük, a másikat pedig folyamatosan változtatjuk, akkor mindkét felületen egymásnak megfelelő görbét kapunk. Ha pl. a gömb paraméteres egyenleteiben a  $\lambda$ -t állandónak vesszük, és csak a  $\varphi$ -t változtatjuk, akkor meridiánt, ha pedig a  $\varphi$ -t vesszük állandónak, és a  $\lambda$ -t változtatjuk, akkor paralelkört jelölünk ki.

Ha az egyik felületet *alapfelületnek*, a másikat *képfelületnek* tekintjük, akkor a paraméterek között felállított matematikai összefüggések a vetület törvényszerűségét meghatározó *vetületi egyenletek*.

A paraméterek között végtelen sok matematikai összefüggés állítható fel, ezek mindegyike azonban nem alkalmas térképi ábrázolás céljából végzett vetítésre. A vetületi egyenletekkel (a paraméterek közötti összefüggésekkel) szemben az ábrázolás céljától függően a következő követelményeket támasztjuk:

1. az alapfelület és a képfelület minden egyes pontjának *egy és csakis egy* pont feleljen meg a másik felületen (egyértelműség követelménye);
2. a vetületi egyenletek *folytonos és differenciálható* függvények legyenek, és ezen kívül a *differenciálhányadosaik is folytonos függvények* legyenek (matematikai kezelhetőség követelménye);
3. a *vetületi torzulások* bizonyos megadott értéket ne lépjenek túl. A vetítés ugyanis mindig torzulásokkal jár, hiszen egy görbe felület nem préselhető egy másik görbe felületbe vagy síkba gyűrődés vagy szakadás nélkül.) A torzulásokra megadott határ különösen a geodéziai célokra szolgáló vetületeken erősen korlátozott.

## Vetületi torzulások

### A vetületek csoportosítása torzulások szerint

Amint az előzőkben láttuk a vetítés mindig torzulásokat eredményez. A torzulások érintik a szögeket (irányokat), hosszakat és a területeket. Ezek szerint a vetületeket a torzulások szempontjából három csoportba soroljuk:

1. az *általános torzulású vetületek* csoportjába, ahol a szögek, a hosszak és a területek is torzulnak;
2. a *szögtartó (szöghű, konform) vetületek* csoportjába, ahol ha a képfelületen az alapfelületi vonalak valódi képét állítjuk elő, a szögek változatlanok maradnak. (A vonalak valódi képét általában úgy kapnánk meg, ha az alapfelületi vonalakat pontonként, vagyis a pontsor minden egyes pontját külön-külön vetítenénk. A későbbiekben látni fogjuk, hogy minden vetületen vannak olyan vonalrendszerek, amelyek valódi képét, pontonkénti vetítés nélkül is elő tudjuk állítani.);
3. a *területtartó (területhű, ekvivalens) vetületek* csoportjába, amelyen a területek változatlanok maradnak, ha a képfelületen az alapfelületi vonalak valódi képét állítjuk elő.

Megjegyzés: Hossztartó vetület nem létezik, mert azon a szögek és a területek is változatlanok maradnának, tehát vetítésről sem beszélhetnénk.



Valamely elem (szög, hossz, terület) változatlansága a többi elem erősebb torzulását eredményezi.

### Torzulási modulusok

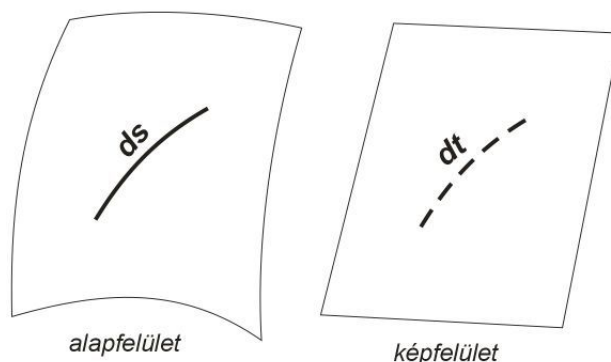
A vetületi torzulásokat modulusokkal jellemezzük:

1. a hossztorzulás jellemzője a *lineármódulus* ( $l$ );
2. az irány- (szög-) torzulásé az *iránymódulus* ( $i$ );
3. a területtorzulásé a *területi modulus* ( $\tau$ ).

A *lineármódulus* az alapfelület valamely pontjánál levő elemi hosszúságú vonaldarab  $ds$  hosszának és képfelületi megfelelője  $dt$  hosszának viszonya (4.1. ábra):

$$l = \frac{dt}{ds}. \quad (4.4)$$

(A számlálóban a képfelületi hossz áll.) A hossztorzulás általában pontonként és irányonként is változik, ezért a *lineármódulus általában a helytől és az iránytól is függ*.

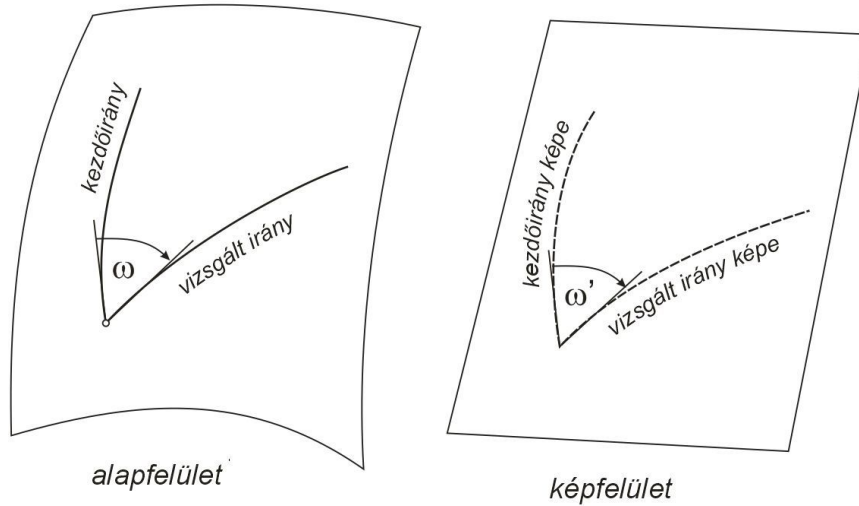


4.1. ábra. Elemi vonaldarab és képe

Ha valamely irány az alapfelületen egy kezdőiránnyal  $\omega$ , a képfelületen levő megfelelője a kezdőirány megfelelőjével  $\omega'$  szöget zár be, akkor az *iránymódulust* az

$$i = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega}, \quad (4.5)$$

hányados fejezi ki (4.2. ábra). (Itt is a képfelületi érték áll a számlálóban!) Ha kezdőiránynak azt az irányt választjuk, amelyben a vizsgált ponton a lineármódulus a legnagyobb (*első vetületi főirány*), akkor az iránymódulus egy-egy pontban állandó, de pontonként általában változó.



4.2. ábra. Az irányhajlás szemléltetése

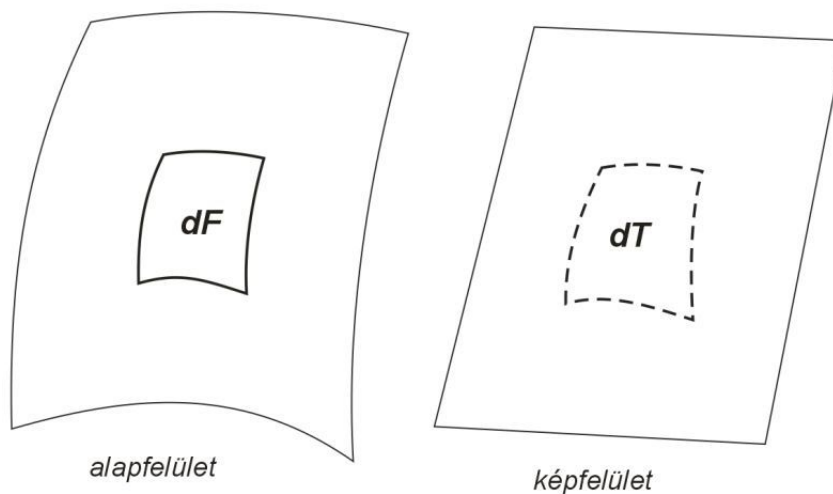
Az  $(\omega' - \omega)$  értéket  $\bar{\Delta}$ -sal jelöljük és *első irányredukciónak* nevezzük.

*Szögtartó vetítésnél, mivel a szögek nem változnak ( $\omega = \omega'$ ), az iránymodulus minden pontban az egységgel egyenlő. Ez csak akkor lehet igaz, ha az alapfelületi elemi nagyságú idom és annak képfelületi megfelelője hasonlóak, vagyis az oldalak arányosan torzulnak. Ebből következik, hogy szögtartó vetületen a lineármodulus értéke egy-egy pontban állandó, tehát csupán a helynek függvénye, de az iránynak nem.*

A területi modulus az elemi nagyságú alapfelületi  $dF$  terület és képfelületi  $dT$  megfelelőjének

$$\tau = \frac{dT}{dF} \quad (4.6)$$

hányadosa (4.3. ábra). (A képfelületi mennyiség itt is a számlálóban áll!)



4.3. ábra. Elemi nagyságú alapfelületi idom és képe

*Területtartó vetületen a területi modulus minden pontban az egységgel egyenlő, mert  $dF = dT$ . A lineármódulus általában irányonként változik, kell tehát, hogy egyes pontoknál általában hossznövekedés és hosszrövidülés is legyen, mert a hosszak és a szögek torzulása mellett a terület másképpen nem maradhatna változatlan.*

*A vetületeken általában egy pont vagy egy vonal, ahol nincsen semmilyen torzulás, tehát mindegyik modulus az egységgel egyenlő. Ettől a helytől távolodva a torzulások nőnek. A megengedett torzulás értékek határt szabnak a vetületi rendszer alkalmazási területének, mert a vetületi rendszer csak azon a területen belül használható, amelyen a torzulások a megengedett értéket nem lépik túl. Nagyobb terület ábrázolásánál több vetületi rendszerre vagy sülyesztett (redukált) képfelületre lehet szükség aszerint, hogy szabunk-e határt a vetületi torzulásokkal szemben, és ha igen, milyen mértékűt.*

### **A különböző célú vetületek és a térképi méretarány**

Az ábrázolás célja, illetve a torzulások megengedett mértéke szerint a továbbiakban megkülönböztetést teszünk *geodéziai, topográfiai és földrajzi (geográfiai) vetületek* között. A geodéziai vetületek szabatos geodéziai mérések alapján készülő *nagyméretarányú* (általában 1:500 – 1:10 000 méretarányig) térképezéshez szolgálnak. Ezek a térképeken az ábrázolás mérethelyesen történik. *Topográfiai vetületeken* értjük az 1:10 000 méretaránytól az 1: 200 000 méretarányig terjedő kisméretarányú térképezéshez szolgáló vetületeket. A topográfiai térképeken az ábrázolás részben mérethelyesen, részben jelkulcs segítségével történik. *Földrajzi vetületeken* értjük az előbbieknél kisebb méretarányú térképek vetületeit. Ezek már mindent jelkulcs szerint ábrázolnak.

*Az országos (geodéziai) felmérésekben* csaknem kizárólag szögtartó vetületeket használnak, azzal a megkötéssel, hogy a hossztorzulás sehol se haladjon meg egy még elviselhető értéket. Korábban ragaszkodtak a kilométerenként legfeljebb 10 cm-es hossztorzuláshoz. Abból a célból, hogy kevesebb (esetleg egyetlen) vetületi rendszert lehessen alkalmazni, újabban az 1:10 000 megengedett értékkel szemben 1: 5000-es határral is megelégszünk.

Korábban *területtartó vetületeket* is alkalmaztak geodéziai célokra. Ezek a vetületeken az idomok alakilag erősen torzulnak, ami geodéziai és topográfiai szempontból egyaránt kedvezőtlen, ezért olyan feladatokhoz alkalmasak, ahol a területek nagyság szerinti összehasonlítása fontosabb, mint az alakhűség; például földrajzi ábrázoláshoz.

Az előbbieken szóba került a *térképi méretarány* fogalma. A méretarányt, ha annak ellenkezőjét külön nem említjük, általában a térkép egészére adjuk meg (például azt mondjuk, hogy a térkép méretaránya 1:10 000). Ilyen értelemben a méretarány a térképi hosszak és a térkép vetületi rendszerében az azoknak megfelelő távolságok arányát jelenti, vagyis a

$$\text{méretarány} = \frac{\text{térképi hossz}}{\text{vetületi hossz}},$$

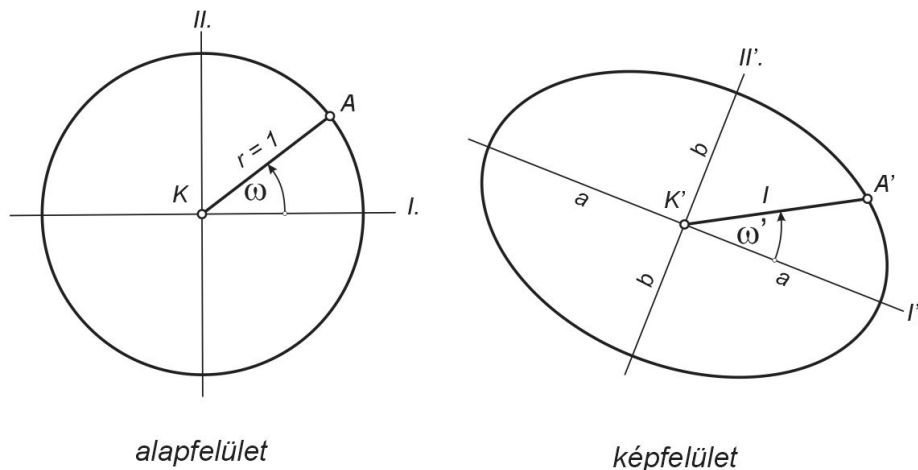
ellentétben a köztudatban és a szakirodalomban is gyakran mutatkozó tévedéssel, amely szerint a térképeken szokásosan alkalmazott méretarány-megjelölés a térképi hosszak és az azoknak megfelelő terepi távolságok, helyesebben ellipszoidi vagy gömbi távolságok arányát jelöli. Az ilyen téves értelmezés szerint a térképi méretarány pontról pontra változna. Kisebb mértékben változna azokban az esetekben, amikor a hossztorzulás maximumára szűk határt szabunk, mert akkor az alapfelületi és a vetületi hosszak közötti eltéréseket gyakorlatilag elhanyagolhatjuk (például a geodéziában használatos vetületeknél). Nagyobb mértékben változna a méretarány az olyan térképeken, amelyeken a hossztorzulásnak nem szabunk határt, mert a vetületi hosszak többszörösei is lehetnek az alapfelületi hosszaknak (például a földrajzi vetületeknél).

## A vetületi torzulások általános elmélete

### Tissot-féle torzulási ellipszis

*N. A. Tissot (1824-1895) francia matematikus szerint az alapfelület elemi nagyságú körének képe a képfelületen általában elemi nagyságú ellipszis lesz és a kör középpontjának a képe az ellipszis középpontja. Ezek szerint minden vetület helyettesíthető végtelen sok, elemi nagyságú felületelem derékszögű (ortogonális) vetületével úgy, hogy mindegyik ilyen derékszögű vetületnek más a méretaránya. Valamely véges idom vetületi képe tehát felületelemekből mozaikszerűen rakható össze.*

Ha az alapfelületi elemi nagyságú kör sugarát egységnyinek tekintjük ( $r = 1$ ), akkor a képfelületi ellipszis rádiuszvektorai adják a lineármódulusok értékét a megfelelő irányokban. A felvett elemi nagyságú kör képét *Tissot-féle torzulási ellipszisnek* vagy *Tissot-féle indikatrixnak* nevezzük. Ebből lehet leolvasni a vetületi torzulások törvényeit.



4.4. ábra. A lineármódulus függése az iránytól

Az első vetületi főiránynak megfelelő  $l_{\max}$  adja az ellipszis fél nagytengelyét, a másik vetületi főiránynak megfelelő  $l_{\min}$  pedig az ellipszis fél kistengelyét:

$$a = l_{\max}, \quad b = l_{\min}.$$

(A vetületi főirányokat az ábrán I és II-vel, illetve I' és II'-vel jelöltük.) *Első vetületi főiránynak* azt az alapfelületi irányt nevezzük, amelyben a lineármódulus értéke a legnagyobb (4.4. ábra). A második vetületi főirányban a lineármódulus a legkisebb értéket éri el.

*Bármely pontban van tehát két főirány (a vetületi főirányok), amelyek az alapfelületen és megfelelők a képfelületen is merőlegesen egymásra, és a szögtartó vetületek kivételével ez az iránypár az egyetlen, amely mind a két felületen merőleges egymásra.*

Az alapfelület különböző helyein felvett – azonos méretű – elemi nagyságú körök képe általában más és más alakú és méretű ellipszis lesz, és más és más lesz az ellipszis tengelyeinek elhelyezkedése a meridián képéhez viszonyítva. *A torzulási ellipszis, illetve annak hely szerinti változása tehát a vetület jellemzőjének tekinthető.*

## Torzulási viszonyok meghatározása a torzulási ellipszis alapján

### Irány-, hossz- és területtorzulás

Hosszabb levezetés után, ha kezdőiránynak a torzulási ellipszis nagytengelyét (az első vetületi főirányt) választjuk, akkor az *iránymódulus*:

$$j = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = \frac{b}{a} = \text{konstans.} \quad (4.7)$$

Valamely szögérték két irányérték különbségéből adódik, ennek megfelelően a *szögredukció* is két irányredukció különbségeként számítható. Ha az Sz szög két szára  $l_1$  és  $l_2$  irány, vagyis

$$Sz = l_2 - l_1,$$

akkor az *első szögredukció*:

$$\bar{\Delta}_{sz} = \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_1,$$

azaz a szög szárait alkotó irányok első irányredukcióinak különbsége.

Az alapfelületi elemi nagyságú kör képe a torzulási ellipszis. A *területi modulust* tehát az ellipszis és az alapfelületi kör területének hányadosa adja:

$$\tau = \frac{dT}{dF} = \frac{a b \pi}{\pi} = a b. \quad (4.8)$$

A területi modulus tehát a torzulási ellipszis féltengelyeinek szorzatával egyenlő.

### Torzulások meghatározása a torzulási ellipszis féltengelyeiből

A vetületi torzulások tárgyalásakor az eddigiekben feltételeztük, hogy a vetület általános torzulású. Szögtartó és területtartó vetületeken az eddigiekkel szemben egyszerűsítések lehetségesek.

Szögtartó vetületen az iránymodulus

$$i = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = \frac{b}{a} = 1, \quad (4.9)$$

tehát

$$a = b, \quad (4.10)$$

vagyis a torzulási ellipszis körré fajul. Így a vetületi főirányok helyzete határozatlanná válik (el is veszítik jelentőségüket) és a lineármodulus minden irányban azonos értékű lesz.

Szögtartó vetületen az első irányredukció, valamint az első szögredukció mindig zérus

$$\bar{\Delta} = \omega' - \omega = 0, \quad \bar{\Delta}_{sz} = \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_1 = 0, \quad \Theta = 0,$$

a lineármodulus minden irányban

$$l = a \quad (4.11)$$

( $\Theta$ -val a fokhálózat vetületi torzulását – a meridián és a paralelkör metszési szögének  $90^\circ$ -tól való eltérését – jelöltük.)

A területi modulus pedig

$$\tau = a^2. \quad (4.12)$$

Területtartó vetületen

$$\tau = a b = 1, \quad (4.13)$$

vagyis

$$a = \frac{1}{b}, \quad b = \frac{1}{a}. \quad (4.14)$$

Ha tehát valamely vetületről azt állapítjuk meg, hogy a két vetületi főirányban a lineármodulusok egymásnak reciprokjai, akkor a vetület területtartó.

Kimondhatjuk tehát, *ha valamely vetületen a két vetületi főirányhoz tartozó lineármódulus nem egyenlő egymással, de egymásnak nem is reciprokai, akkor a vetület általános torzulású.*

Későbbiekben a (4.10) egyenlőséget szögtartó, a (4.13), illetve a (4.14) egyenlőséget pedig területtartó vetületek vetületi egyenleteinek levezetésére fogjuk felhasználni.

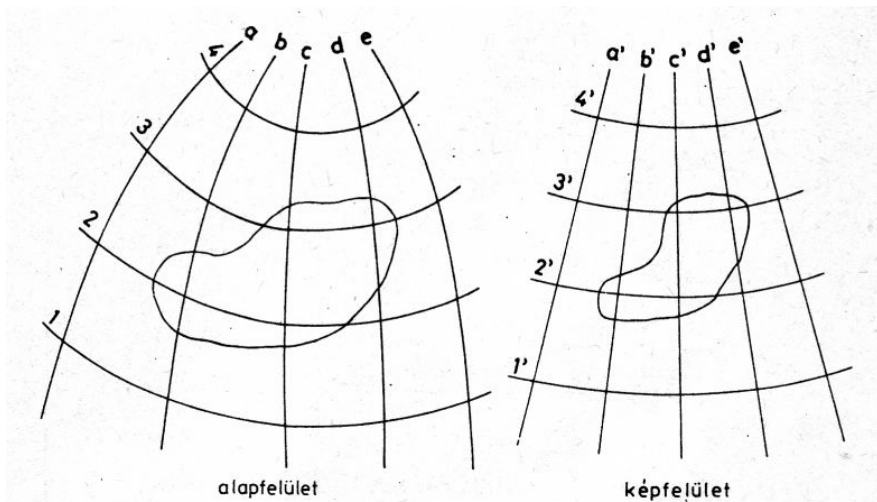
## 5. előadás

### Véges nagyságú idomok geodéziai ábrázolása

#### A geodéziai és a földrajzi ábrázolás különbözősége

Eddig elemi nagyságú idomok torzulásait vizsgáltuk. A következőkben, a geodéziai gyakorlatban szokásos nagyságú idomok vetítése során figyelembe veendő torzulásokkal foglalkozunk.

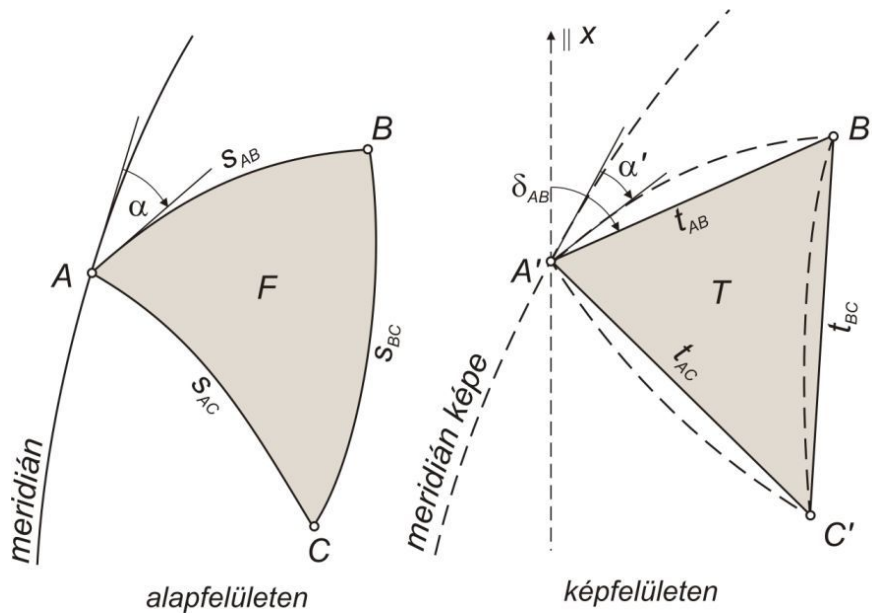
A geodéziai ábrázolás módja több tekintetben különbözik a földrajzi ábrázolás módjától. A földrajzi (geográfiai) ábrázolás a fokhálózat vetületi képéből, vagyis a méretaránytól függő sűrűségben felvett meridiánok és paralelkörök képei által alkotott vonalrendszerből indul ki. A terepvonalak képeit az előbbi vonalhálózaton belül lineáris interpolációval nyerik (5.1. ábra). Az ábrázolás kis méretarányából és a szerkesztés módjából következik, hogy a földrajzi térképek a vetületi torzulásokon kívül rajzilag is torzítottak, egyes térképi pontok nagy kiterjedésű területeket fednek le, és a térképről lemérhető térképelemek pontossága korlátozott.



5.1. ábra. A földrajzi ábrázolás

Ezzel szemben a geodéziai ábrázolás nem a fokhálózat vetületi képéből, hanem a vízszintes alapponthálózat (háromszögelés, sokszögelés) pontjaiból indul ki. Minthogy az alapponthálózat pontjainak helyzetét a vetületi koordináta-rendszerben általában nem grafikusán, hanem numerikusan határozzák meg, a geodéziai ábrázolás a vetületi irányokat, hosszakat és a velük meghatározott területi adatokat nagy pontossággal szolgáltatja. Egyes nézetek szerint a térkép elveszíti a jelentőségét, mert a numerikus felmérésnek a térkép csak tájékoztató segédeszköze, mivel a numerikus adatok pontosabban rögzítik a geodéziai elemeket, mint a rajz.

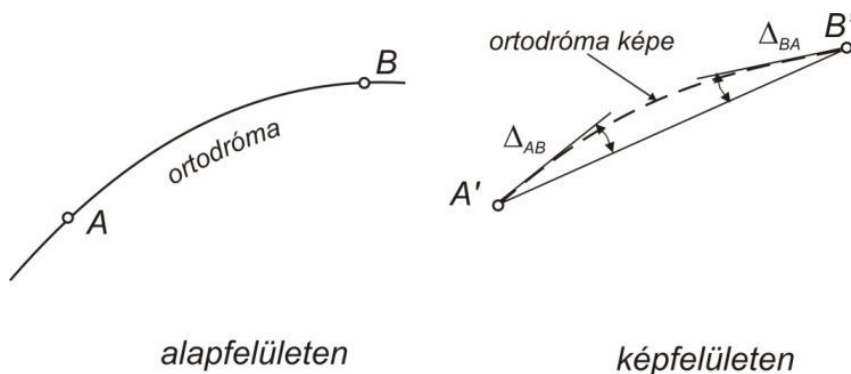




5.2. ábra. A geodéziai ábrázolás

Az alapfelületre vonatkozó mérési eredményekből a háromszögelési alappontok képfelületi koordinátáit úgy számítjuk ki, hogy számszerűen figyelembe vesszük a vetítésből adódó korrekciókat. A háromszögelési hálózat oldalai az alapfelületen geodéziai vonalak (ortodrómák) a vetületi síkon (képfelületen) pedig egyenesek. A térképen egyenesekkel kötjük össze a térképi idomok határvonalainak töréspontjait is. A gömbön, mint képfelületen a töréspontokat legnagyobb gombi körökkel kötjük össze. Az alapfelület legrövidebb vonalának valódi képe általában nem esik egybe a képfelületi legrövidebb vonallal. Mivel a geodéziai ábrázolásnál nagy pontosságra törekszünk számításba kell vennünk a két vonal különbözősége által okozott irány-, hossz- és területi eltéréseket (5.2. ábra).

### Második irányredukció



5.3. ábra. Második irányredukció

Az (5.3. ábra) bal oldali része mutatja az alapfelületen az  $A$  és  $B$  pontok közötti ortodróma ívét. A jobb oldali ábrarészen a szaggatott vonal az  $AB$  ortodróma pontonként vetített valódi képét mutatja a síkon. Ez a kép általában valamilyen görbe vonal. Az  $A'$  és  $B_2'$  pontképeket a síkon a képfelületi legrövidebb vonallal (egyenes) kötjük össze.

Azokat a szögeket, amelyeket az ortodróma valódi képéhez az  $A_1'$  és  $B'$  pontokban húzott érintők a képfelületi legrövidebb vonallal zárnak be, *második irányredukciónak* nevezzük. *Előjelét úgy értelmezzük, hogy az irányredukciót a valódi kép érintőjének irányértékével előjelhelyesen összevonva a képfelületi legrövidebb vonal irányértékét kapjuk.* Vagyis a második irányredukció akkor pozitív, ha a valódi kép érintőjét az óramutató járásával megegyezően tudjuk a képfelületi legrövidebb vonal irányába beforgatni. Ellentétes értelmű forgatásnál az előjel negatív. Az 5.3. ábrán a  $\Delta_{AB}$  előjele pozitív, a  $\Delta_{BA}$  előjele pedig negatív.

Az irányredukció előjelhelyes számítására szolgáló összefüggés különböző vetületeken más és más alakú. A képletekbe mindig a szakasz két végpontjának síkkoordinátáit ( $y, x$ ) kell behelyettesíteni. Az irányredukció előjelét szemlélet alapján úgy ellenőrizhetjük, hogy a pontokat koordinátáik (vagy közelítő koordinátáik) alapján a térképre felrakjuk, és a geodéziai vonal valódi képét a vetület fajtájától függően ábrázoljuk. Az előjel nem függ a képfelületi koordináta-rendszer tájékozásától.

*A második irányredukciót nem szabad összetéveszteni az első irányredukcióval.* Az első irányredukció ugyanis az alapfelületi legrövidebb vonal és annak a képfelületre pontonként vetített, valódi képe között ad kapcsolatot. Ezzel szemben a második irányredukció a képfelületre pontonként vetített valódi kép és a képfelületi legrövidebb vonal közötti vonatkozást mutatja, vagyis tisztán képfelületi mennyiség.

*A második irányredukciót élesen meg kell különböztetni az iránymodulustól is.* Míg az iránymodulus elemi hosszúságú vonaldarabra vonatkozik, addig a második irányredukció véges hosszúságú vonaldarabokhoz tartozik, és míg az iránymodulus az elemi kis vonaldarabnak az első vetületi főiránytól mért irányhajlását a valódi képnek az első főirány megfelelőjétől számított irányhajlásával hasonlítja össze (illetve tangensük viszonyát mutatja), addig a második irányredukció a véges hosszúságú vonaldarab valódi képe és a képfelületi legrövidebb vonal iránya közötti különbséget jelenti.

Általános torzulású és területtartó vetületen, tehát *minden vetületen, amely nem szögtartó, az irányokat, illetve a szögeket általában két redukcióval kell ellátni.* Az egyik az első irányredukció, vagyis a  $\bar{\Delta} = (\omega' - \omega)$  különbség, amely abból adódik, hogy a vonalnak pontonkénti valódi vetítésekor is áll elő szögtorzulás. A második pedig a második irányredukció, amely abból származik, hogy *a képfelületen az idomok sarokpontjait nem pontonkénti vetítéssel kapott vonalakkal, hanem a képfelületi legrövidebb vonalakkal kötjük össze.* Az előbbiekből magától értetődik, hogy szögtartó vetületeken a szögtartóság csupán a pontonkénti vetített valódi képekre vonatkozik.

Mivel a szögtartó vetületeken az első irányredukció mindig zérus, ezeknél csak második irányredukcióval kell számolnunk.

Egy szögérték két irányérték különbségeként adódik; ennek megfelelően a szögredukció is két irányredukció különbségeként számítható. Ha az Sz szög két szára  $l_1$  és  $l_2$  irány, vagyis

$$Sz = l_2 - l_1,$$

Akkor az első szögredukció:

$$\bar{\Delta}_{sz} = \bar{\Delta}_2 - \bar{\Delta}_1,$$

ugyanúgy a második szögredukció a

$$\Delta_{sz} = \Delta_2 - \Delta_1$$

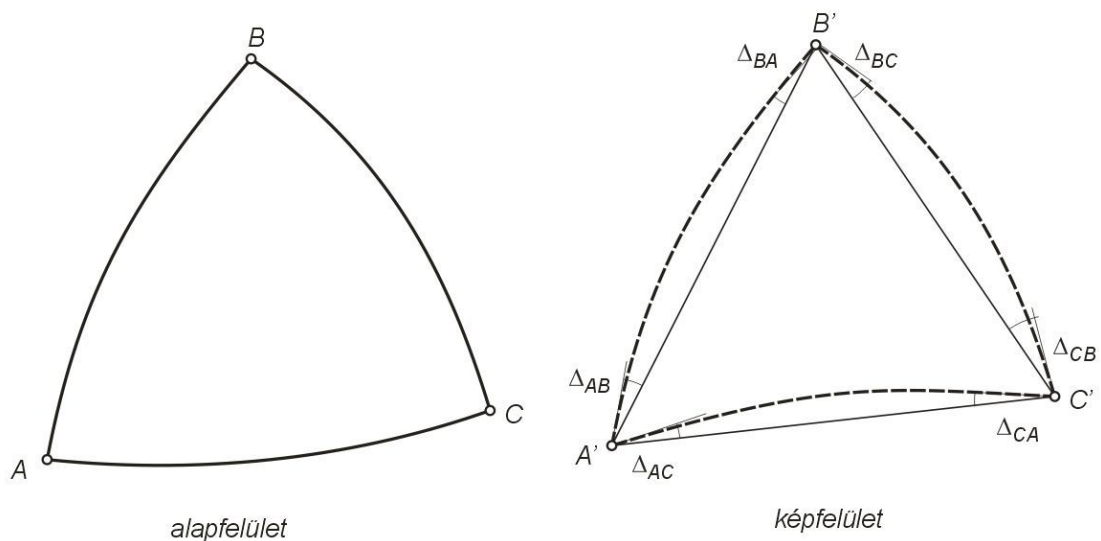
képletből adódik. A teljes szögtorzulás pedig

$$\bar{\Delta}_{sz} + \Delta_{sz};$$

szögtartó vetületen

$$\bar{\Delta}_{sz} = 0.$$

A továbbiakban, tekintve azt, hogy a geodéziai célokra alkalmazott vetületek szögtartók, ha röviden irányredukciót és szögredukciót említünk, mindig a második irányredukcióra, illetve a második szögredukcióra gondolunk.



5.4. ábra. Összefüggés a szögfelesleg és az irányredukciók között

Az irányredukció egyszerű kapcsolatban van az  $\varepsilon$  gömbi, illetve ellipszoidi szögfelesleggel. A gömbháromszög belső szögeinek összege:  $180^\circ + \varepsilon_{\text{gömb}}$ , a síkháromszögé  $180^\circ$ . Kell tehát, hogy a háromszög oldalainál levő összesen hat irányredukció a szögfelesleggel legyen egyenlő (5.4. ábra):

$$\sum |\Delta I| = \varepsilon_{\text{gömb}} \quad (5.1)$$

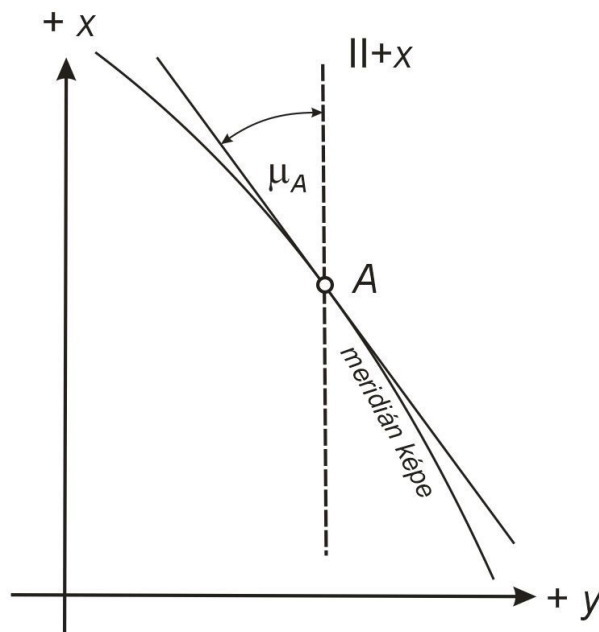
Ellipszoidról síkra vetítve az előbbihez hasonlóan:

$$\sum |\Delta I| = \varepsilon_{\text{ellipszoid}} \quad (5.2)$$

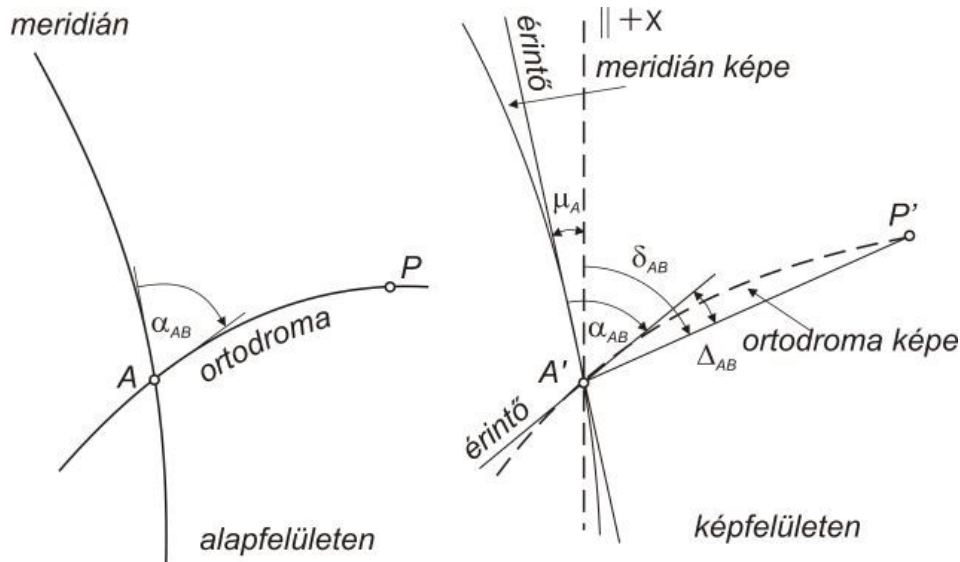
A továbbiakban a szögfelesleg és az irányredukció közötti egyszerű összefüggést fogjuk felhasználni az egyes szögtartó vetületeknél az irányredukciók meghatározására.

### Vetületi meridiánkonvergencia

Az alapfelületi meridián pontonként vetített képe általában görbe vonal. Valamely pontban értelmezett vetületi meridiánkonvergencián azt a hegyesszöget értjük, amelyet a meridián valódi képének a pontbeli érintője a vetületi kezdőmeridián egyenesként jelentkező képével (általában az  $x$  tengely) bezár. A vetületi meridiánkonvergenciát  $\mu$ -vel jelöljük, és akkor tekintjük pozitívnak, amikor a meridiánkép érintőjét az óramutató járásával egyezően tudjuk rövidebb úton a kezdőmeridián képével párhuzamos helyzetbe forgatni. Az 5.5. ábrán a  $\mu$  előjele pozitív.



5.5. ábra. A vetületi meridiánkonvergencia



5.6. ábra. Az azimut és az irányszög összefüggése

A vetületi meridiánkonvergencia ismeretére például akkor van szükségünk, amikor az alapfelület két pontján átmenő legrövidebb vonal azimutjából ki akarjuk számítani a két pont képfelületi megfelelőjét összekötő egyenes irányszögét, vagy ha a fordított műveletet kívánjuk elvégezni. A  $\mu$  számítására szolgáló összefüggések vetületi fajtánként különbözőek. A geodéziai vetületekre levezettek olyan összefüggéseket, amelyekbe a kérdéses pont alapfelületi ( $\Phi$  vagy  $\Lambda$ , illetve  $\varphi$  vagy  $\lambda$ ) és olyanokat is, amelyekbe a pont vetületi ( $y, x$ ) koordinátáit kell behelyettesíteni. Az előbbi képleteket akkor használjuk, amikor azimutból ( $\alpha$ ) akarunk irányszöget ( $\delta$ ) számítani, pl. giroteodolitos mérésnél. Az utóbbi képletekre akkor van szükségünk, amikor a síkkoordinátákat ismerjük és az azokból számított irányszögből akarunk azimutot meghatározni (pl. parabolaantennák tájékozásakor).

Az 5.6. ábra alapján szögtartó vetítést feltételezve:

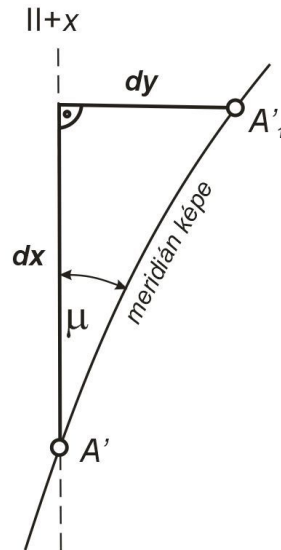
$$\delta_{AP} = \alpha_{AP} - \mu_A + \Delta_{AP}, \quad (5.3)$$

$$\alpha_{AP} = \delta_{AP} + \mu_A - \Delta_{AP}, \quad (5.4)$$

ahol  $\Delta_{AP}$  a második irányredukció az A pontban.

Ha a síkon a koordináta-rendszer x tengelyének pozitív ága dél felé mutat (délnyugati rendszer) akkor az előbbi egyenletek jobb oldalához  $180^\circ$ -ot hozzá kell adni.

Mozdítsuk el meridiánján az A pontot elemi  $ds$  távolságra az  $A_1$  pontba. A képfelületen az A pont az x tengellyel párhuzamos egyenessel a vetületi meridiánkonvergenciát, vagyis a  $\mu$  szöget bezáró pályán mozgott. Az  $A'$  és az  $A_1'$  ponthelyek síkkoordinátái közötti különbség, tekintettel arra, hogy csak a  $\varphi$  földrajzi koordináta változott (5.7. ábra):



5.7. ábra. A vetületi meridiánkonvergencia meghatározása

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Ezek szerint:

$$\tan \mu = -\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}. \quad (5.3)$$

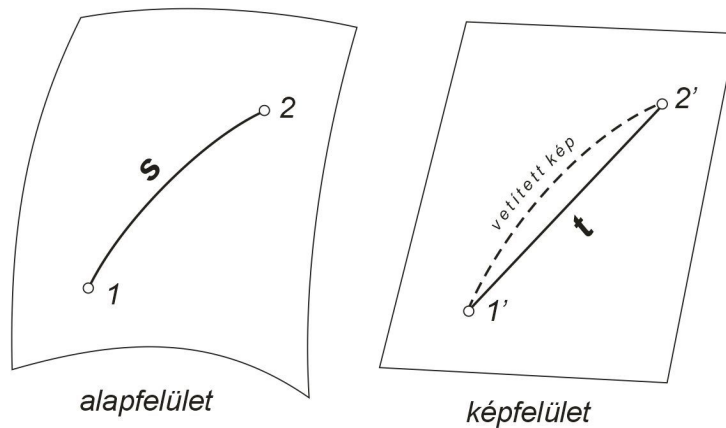
Utóbbi képletben az előjelet azért kellett megváltoztatni, hogy a meridiánkonvergencia előjele megállapodásunk szerint alakuljon.

### Hossztorzulási tényező

Az alapfelület két pontjának a képfelületre vetített képét összekötő legrövidebb vonal  $t$  hosszának és a két pontot az alapfelületen összekötő legrövidebb vonal  $s$  hosszának viszonyát *hossztorzulási tényezőnek* nevezzük, és  $m$ -mel jelöljük (5.8. ábra):

$$m = \frac{t}{s}. \quad (5.4)$$

A *hossztorzulási tényezőt élesen meg kell különböztetni a lineármódulustól*. A lineármódulus elemi kis távolságra, a hossztorzulási tényező viszont véges távolságra vonatkozik, és míg a lineármódulus az elemi vonaldarab és annak valódi képe között állapít meg arányt, addig a hossztorzulási tényező két véges távolságú alapfelületi pont, illetve képfelületi megfelelőik között húzott legrövidebb vonalak hosszának arányát fejezi ki.



5.8. ábra. Alap- és képfelületi legrövidebb vonal

A hossztorzulási tényező számítására szolgáló összefüggések a vetület fajtájától függően különbözőek. Általában a végpontok  $y, x$  síkkoordinátáit kell a képletekbe behelyettesíteni. A leggyakrabban előforduló geodéziai vetületekhez ezek az összefüggések rendelkezésre állnak.

A Föld méreteihez viszonyítva egy néhány km-es távolságot elemi hosszúnak lehet tekinteni, ezért általában 5 km távolságig:

$$m \approx l_k,$$

ahol  $l_k$  a vonaldarab közepéhez tartozó lineármódulus.  
15 km távolságig:

$$m \approx \frac{l_1 + l_2}{2},$$

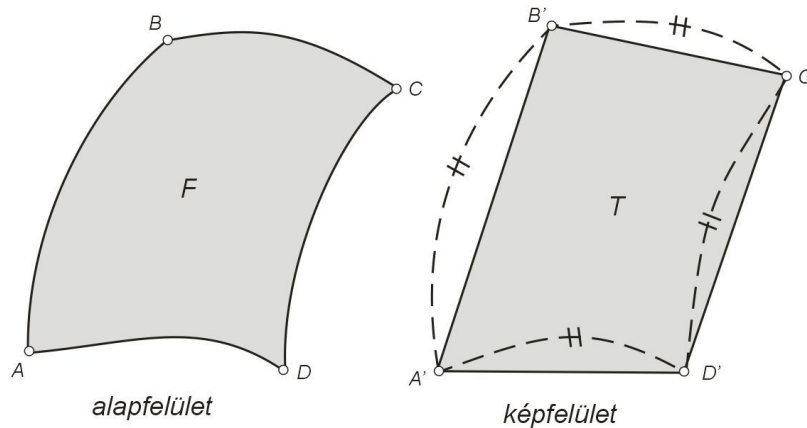
ahol  $l_1$  és  $l_2$  a vonaldarab végpontjaihoz tartozó lineármódulusok. Nagyobb távolságokra pedig, mintegy 100 km-ig:

$$m \approx \frac{1}{6}(l_1 + 4l_k + l_2).$$

### Területtorzulási tényező és területredukció

Valamely véges nagyságú alapfelületi idom (legrövidebb vonalak által határolt) képfelületi területének és alapfelületi területének (területének) arányát *területtorzulási tényezőnek*, a kép területének és az eredeti felületnek a különbségét pedig *területredukciónak* nevezzük. Ha az alapfelületi területet  $F$ -vel, a képi területet  $T$ -vel, a területtorzulási tényezőt  $f$ -vel, a területredukciót pedig  $\Delta T$ -vel jelöljük, akkor

$$f = \frac{T}{F} \quad \text{és} \quad \Delta T = T - F. \quad (5.5)$$



5.9. ábra. Alapfelületi idom képfelületi megfelelője

A területtorzulási tényezőt két okból élesen meg kell különböztetni a területi modulustól. A területi modulus az alapfelületi elemi nagyságú terület és annak valódi képfelületi területe között létesít kapcsolatot, a területtorzulási tényező viszont az alapfelületi véges nagyságú idom területe és az annak megfelelő képfelületi legrövidebb vonalakkal határolt idom területének viszonyát fejezi ki (5.9. ábra)

A geodéziai gyakorlatban legtöbbször előforduló kisebb idomokra nézve a területtorzulási tényező általában helyettesíthető a területi modulussal, mert kisebb környezetben:

$$f \approx \tau. \quad (5.6)$$

Így gyakorlatilag helyesen járunk el, ha a nagyobb területű idomot a pontossági követelményektől függően több részre osztjuk, és a területtorzulást idomrészenként számítjuk. Ha az egyes részek megfelelően kicsik, a területtorzulási tényezőt mindegyikre közel egyenlőnek vehetjük az ott érvényes területi modulussal.

A területtorzulási tényező konkrét képlete mindegyik vetületen más és más alakú. Mindig az elhatároló pontok síkkoordinátáit kell a képletekbe behelyettesíteni.

### Vetületi méretarány-tényező

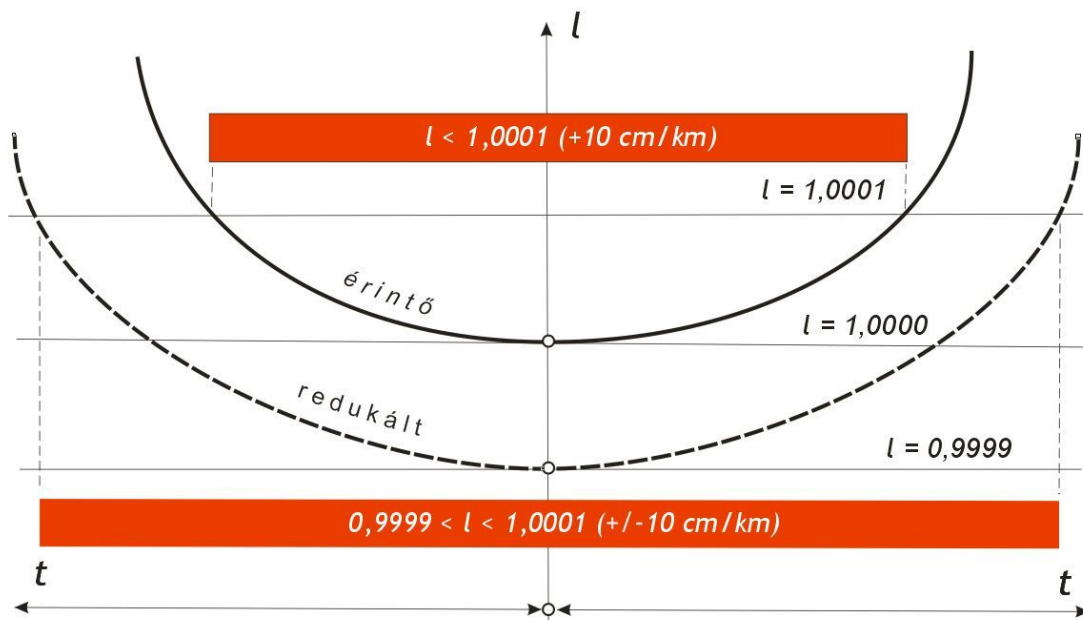
A geodéziai ábrázolással kapcsolatban meg kell még említenünk az ún. *vetületi méretarány-tényezőt* is. Vetítéseinknél feltételként szabjuk, hogy a torzulások bizonyos megadott értéket ne lépjenek túl. Ez elsősorban a hossztorzulásokra vonatkozik, és erre különösen a geodéziai vetületeken meglehetősen szűk a határ. A hossztorzulásnak ez a megkötöttsége azt eredményezi, hogy az egyes geodéziai vetületi rendszerek felhasználási területe erősen korlátozódik, mert valamely vetületi rendszer a kezdőpontjától (vagy kezdővonalától) csak olyan távolságig használható, ameddig a



lineármódulus nem nagyobb a megengedettnél. Minden vetületen van egy pont (kezdőpont), vagy egy vonal (kezdővonal), amelyen nincs hossztorzulás.

A vetületi rendszer felhasználhatósági területét úgy növelhetjük, hogy a vetület  $y$  és  $x$  vetületi egyenletét megszorozzuk egy olyan  $m_0$  számmal (a vetületi méretarány-tényezővel), amely az egységnél valamivel kisebb. Ez lényegileg azt jelenti, hogy a vetületi egyenletekkel meghatározott összes képfelületi koordinátát megszorozzuk  $m_0$ -al és így az ábrázolás méretarányát megváltoztatjuk, mégpedig a képfelületi hosszakat  $m_0$ -szorosukra rövidítjük.

A méretarány megváltoztatásának következménye az, hogy azon a helyen, ahol eredetileg nem volt hossztorzulás ( $l = 1$ ), a hosszak rövidülnek, és a hossztorzulástól mentes hely másik vonalon jelentkezik. Az  $m_0$  szám megválasztásánál arra kell vigyázni, nehogy a hossztorzulás most valahol ellenkező értelemben lépje túl a megengedett értéket (5.10. ábra).



5.10. ábra. Vetületi méretarány-tényező alkalmazása

Szögtartó vetületeken, amelyeken az  $m_0$  tényező bevezetése nélkül a vetületi hosszak – a torzulásmentes helytől eltekintve – mindig nagyobbak, mint az alapfelületi hosszak, az  $m_0$  tényező bevezetésével hosszrövidülések is fellépnek, és így a hossztorzulás egyes helyeken hossznövekedésben, máshol pedig hosszrövidülésben jelentkezik. A hossztorzulások előjelének ez a változása az  $m_0$  tényező bevezetése szempontjából hátránynak tekinthető. Ez volt az oka annak, hogy a korábbi geodéziai vetületeinknél nem éltek a felhasználhatósági terület ilyenfajta növelésének lehetőségével. A legutóbb (1975) bevezetett egységes országos vetületi rendszerünk (EOV) annak érdekében, hogy az ország területét egyetlen vetületi rendszerrel le lehessen fedni,  $m_0 = 0,99993$  vetületi méretarány-tényezőt alkalmazunk.

A képfelületi szögjellegű mennyiségek (irányredukció, irányszög, vetületi meridiánkonvergencia) az  $m_0$  tényezővel való szorzás után nem változnak meg, mert a méretarány-változás nincs hatással a szögekre.

## Vetítési módok

Az alapfelületről a képfelületre vetítést háromféle módon hajthatjuk végre:

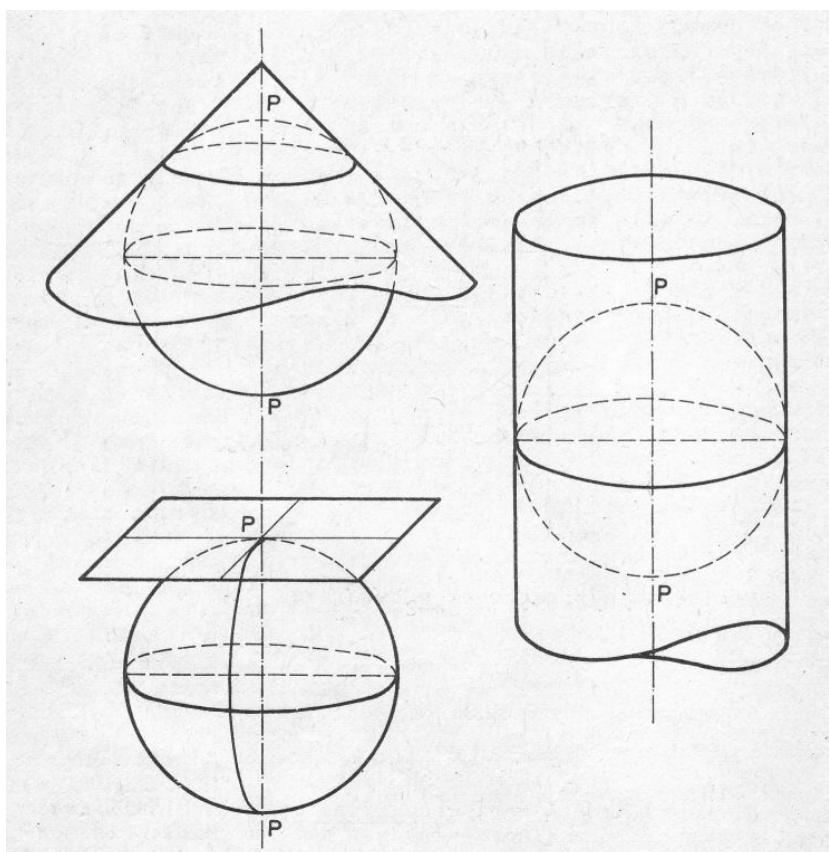
1. Az alapfelületen koordinátákkal meghatározott pontok képfelületi megfelelőinek koordinátáit kiszámítjuk a két felület között felállított vetületi egyenletek segítségével. Ezt az eljárást *koordináta-módszernek* nevezzük. A vetítésnek ez a módja jelentős számítási munkával jár, és éppen ezért korábban, amikor a vetületi számításokat logaritmussal vagy mechanikus számológépekkel végezték csak a felsőrendű háromszögelési pontok képfelületi koordinátáit számították így. Napjainkban számítógépekkel az alapfelületen koordinátákkal adott összes pont vetítését koordináta-módszerrel végezhetjük.
2. A másik mód az ún. *redukciós módszer*. A módszer alkalmazásának alapfeltétele az, hogy a képfelületen legyenek olyan pontjaink, amelyeknek a koordinátáit már korábban koordináta- vagy redukciós módszerrel kiszámították. A módszer lényege szerint az alapfelületen a pontokat legrövidebb vonalakkal összekötjük, és ezt a hálózatot úgy visszük át a képfelületre és illesztjük be a már korábban átszámított pontok közé, hogy a sarokpontok valódi képei a képfelületnek megfelelő legrövidebb vonalakkal legyenek összekötve. Az átvitelhez ki kell számítani az irányredukciókat (nem szögtartó vetületen mind az első, mind a második irányredukciókat) és – a gyakorlatban rendszerint ugyan nem minden hálózati oldalra – a hossztorzulási tényezőket, majd ezekkel az alapfelületi irányokat, illetve szögeket, valamint távolságokat meg kell változtatni. *A módszer alkalmazásakor szem előtt kell tartani, hogy a képfelületen előállított hálózat nem valódi képe az alapfelületen levő hálózatnak*, mert a két felületen húzott legrövidebb vonalak egymásnak általában nem vetületi megfelelői, *csupán a képfelületen előállított hálózat sarokpontjai valódi képei az alapfelületi hálózat sarokpontjainak*. Az az előbbi megjegyzésünk, hogy a hossztorzulási tényezőket a gyakorlatban nem minden távolsághoz kell kiszámítani, arra vonatkozik, hogy többnyire a háromszögelési hálózatokat vetítjük ilyen módon, és ezekben a síkon két pontból egy harmadik pontot legtöbbször nem a szögek és a távolságok, hanem csak a szögek segítségével határozzuk meg. Ha így haladunk pontról pontra, elméletileg elég egyetlen távolságnak a síkra való redukálása, vagyis egy távolság hossztorzulási tényezőjének a kiszámítása. Ezzel szemben az irányredukciókat minden irányhoz ki kell számítani.
3. A harmadik mód, hogy az alapfelületen egymást jól metsző görbeseregnek – például egyes kerek foktávolságú meridiánok és paralelkörök rendszerének – megfelelőit a vetületi egyenletek vagy

részben a redukciós módszer segítségével, egyes esetekben rajzi szerkesztéssel a képfelületen előállítjuk, és ezek között interpoláljuk az egyes idomok képét (5.1. ábra). Ezt nevezzük a görbeseregek módszerének.

Az első két módszer a geodéziai ábrázolás módszere, a harmadik főként a földrajzi térképek szerkesztésénél kerül alkalmazásra.

### A vetületek csoportosítása fontosabb szempontok szerint

- a) Megkülönböztetünk *geometriai úton* is előállítható vetületeket (amelyek természetesen matematikailag is megoldhatók) és *csak matematikai úton* előállítható vetületeket.
- b) A geometriailag is előállítható vetületeket megkülönböztetjük aszerint, *hogyan van-e vetítési központ vagy nincs*. A vetítési központ lehet állandó (fix), de lehet mozgó is, amikor a központ meghatározott vonalon, meghatározott szabály szerint mozog.

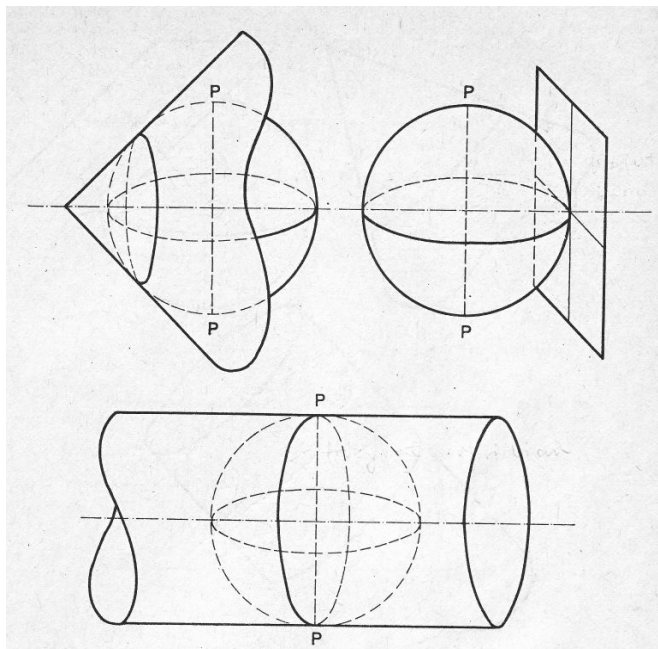


5.11. ábra. Normális elhelyezésű érintő síkvetületek (a gömb kúp-, henger- és azimutális vetületei)

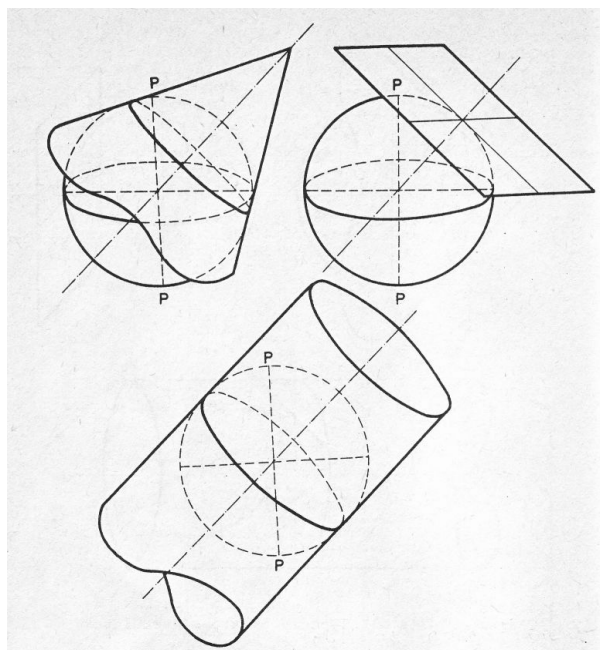
- c) Az alapfelület lehet *ellipszoid* vagy *gömb*, a képfelület pedig *gömb* vagy *sík*, illetve síkba fejthető felület, nevezetesen *kúp-* vagy *hengerfelület*. A képfelület szerint tehát beszélhetünk *gömbi vetületről* vagy

síkvetületről, az utóbbiba beleértve azt is, amikor a vetítés síkba fejthető felületre történik.

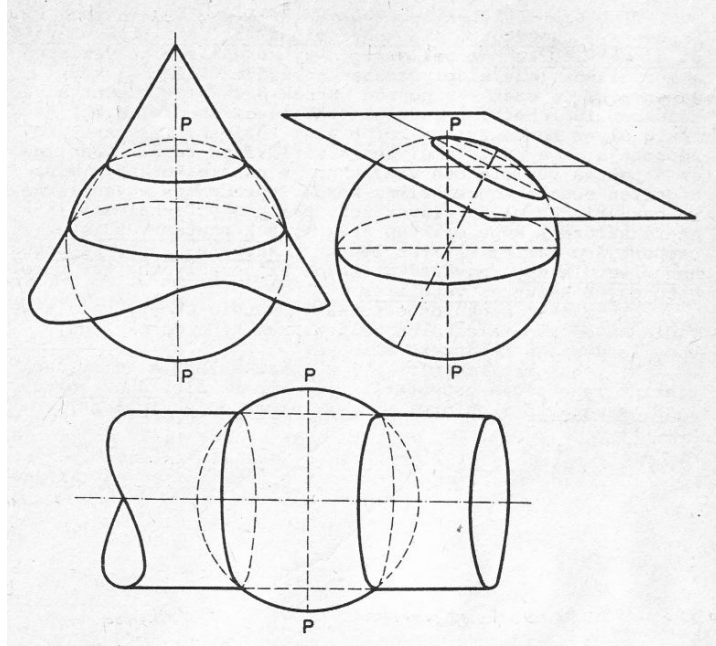
A síkvetületeket három fő csoportba soroljuk: a *kúpvetületek*, az *azimutális* (tulajdonképpen vagy közvetlen sík) *vetületek* és *hengervetületek* csoportjába.



5.12. ábra. Transzverzális (egyenlítői) elhelyezésű érintő síkvetületek



5.13. ábra. Ferdetengelyű érintő síkvetületek



5.14. ábra. Metsző elhelyezésű síkvetületek (normális elhelyezésű metsző kúpvetület, transzverzális elhelyezésű metsző hengervetület, ferde elhelyezésű metsző azimutális vetület)

- d) A kúp, a henger és a sík elhelyezése szerint a vetület lehet *normális* (poláris), ha a képfelületet adó idom tengelye a pólusokat összekötő egyenessel, tehát a Földet helyettesítő ellipszoid kistengelyével, illetve a gömb azon átmérőjével esik egybe, amely a Föld forgástengelyének megfelelője (5.11. ábra); lehet *egyenlítői* (transzverzális, ekvatoriális), ha az idom tengelye az egyenlítő síkjában fekszik, és átmegy az alapfelület középpontján (5.12. ábra), és lehet *ferdetengelyű* (horizontális), ha a tengely helyzete a két előbbi esettől eltérően tetszőleges (5.13. ábra). A sík tengelyén a vetületi kezdőpontban a síkra állított normálist értjük. A képfelület szerint tehát beszélhetünk *gömbi vetületről* vagy *síkvetületről*, az utóbbiba beleértve azt is, ha a vetítés síkba fejthető felületre történik.
- e) Megkülönböztetést ad az a körülmény is, hogy a képfelület *érinti* vagy *metszi* az alapfelületet, vagy esetleg az alapfelülettel nem is érintkezik, hanem azon kívül helyezkedik el (5.14. ábra). A metsző elhelyezésű vetületekkel kapcsolatban meg kell jegyeznünk azt, hogy az alap- és képfelületek közös vonala (a metszési vonal) a síkba fejthető felület kiterítése után csak a perspektív vetületeknél marad a helyén, a nem perspektív vetületeken eredeti helyzetéhez viszonyítva általában önmagával párhuzamosan eltolódik. A metsző elhelyezésű vetület megnevezést ennek értelmében csak perspektív vetületekkel kapcsolatosan használhatnánk, a szakirodalomban viszont a nem perspektív vetületek süllyesztett változatát is metszőként említik. Megkülönböztetés végett az ilyen változatot redukált (süllyesztett) vetületnek fogjuk nevezni.

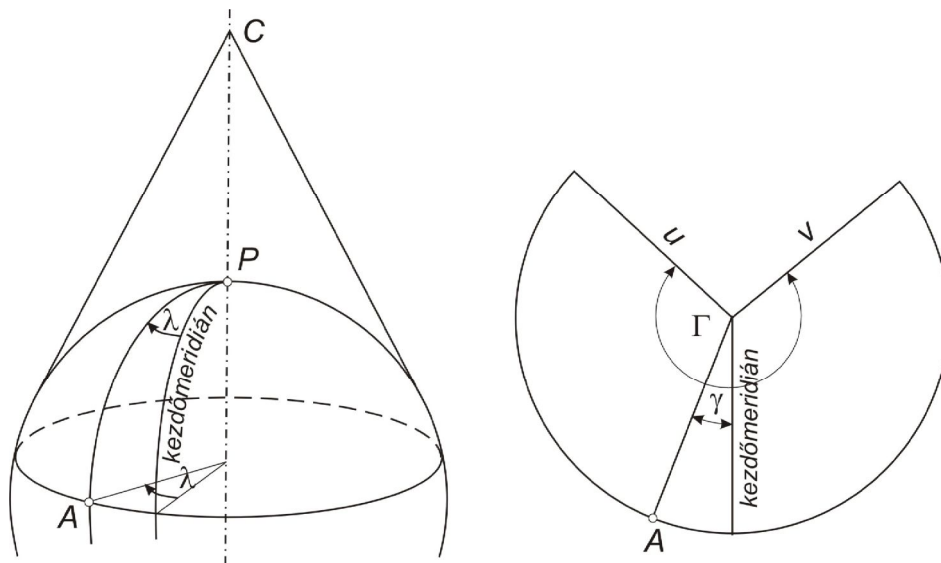
- f) A síkvetületek lehetnek ún. *valós (valódi)*, és lehetnek ún. *képzetes (módosított, ál, konvencionális)* vetületek. A *valódi síkvetületeket* az jellemzi, hogy normális elhelyezésben a meridiánok (más elhelyezésben a segédmeridiánok) képei egyenesek, és ezek egy pontba futnak össze (ez a pont a végtelenben is lehet), a paralelkörök (segédparalelkörök) képe pedig olyan koncentrikus körök vagy körívek, melyeknek középpontja az a pont, amelyben a meridiánok találkoznak. Ha ez a pont a végtelenben van, akkor a paralelkör képek, mint végtelen sugarú koncentrikus körök, párhuzamos egyenesekké válnak. Minden olyan síkvetület, amelyen a fokhálózat (segédfokhálózat) képe másképp alakul, a *képzetes vetületek* csoportjába tartozik. Ezek lehetnek *képzetes kúp-, képzetes hengervetületek*, vagy pedig ezekbe az *osztályokba nem sorolható egyéb képzetes vetületek*.
- g) További megkülönböztetése a vetületeknek, hogy a meridiánok és a paralelkörök hálózatának képe derékszögű, vagy ferdeszögű rendszert alkot-e.
- h) Végül megismételve a torzulások szerint lehetséges csoportosítást, vannak *általános torzulású, szögtartó (konform) és területtartó (ekvivalens) vetületek*.

## 6. előadás

### A gömb valós síkvetületei

#### A kúpvetület, mint a valós síkvetületek alapja

A normális elhelyezésű valódi (valós) kúpvetület úgy keletkezik, hogy az egyenes körkúp palástját valamiképpen, pl. érintőn úgy helyezzük el az alapfelülethez, hogy a kúp tengelye az alapfelületnek a Föld forgástengelyét képviselő átmérőjével, vagyis tengelyével essen egybe, majd a vetítést valamilyen törvény szerint úgy végezzük el, hogy a *meridiánok pontonként vetített valódi képei a kúp alkotóival essenek egybe, és a paralelkörök pontonként vetített, valódi képei a kúppaláston a tengelyre merőleges síkú köröket rajzoljanak ki*. Ezután, ha a kúppalástot valamelyik alkotója mentén képzeletben felvágjuk, és kiterítjük a síkba, akkor a *paralelkörök képei a kúp csúcsa körül húzott koncentrikus körívakként (de nem teljes körökként) alakulnak, a meridiánok képei pedig a csúcspont képébe összefutó sugársort alkotnak* (6.1. ábra).



6.1. ábra. Gömbfelületi pont képe normális elhelyezésű kúpvetületen

Az alapfelületen az  $A$  pont meridiánja a kezdőmeridiánnal zárjon be  $\gamma$  szöget, és a képfelületen az  $A$  pont meridiánjának képe a kezdőmeridián képével  $\gamma$  szöget. Normális elhelyezésű valódi kúpvetületen

$$\gamma = n \lambda, \quad (6.1)$$

ahol  $n$  arányszám. A  $\gamma$  szöget *sugárhajlásnak* nevezzük.

A (6.1. ábra) jobb oldali részén az  $u$  és  $v$  egyenesek által bezárt  $\Gamma$  nyílásszög eszerint  $\lambda = 360^\circ$ -nak felel meg, vagyis

$$\Gamma = n \cdot 360^\circ . \quad (6.2)$$

A  $\Gamma$  mindig kisebb  $360^\circ$ -nál, ezért kúpvetületen

$$0 < n < 1 . \quad (6.3)$$

Ha a normális elhelyezésű kúp csúcsát a végtelenbe visszük, akkor henger keletkezik, amelynek palástja az alapfelületet az egyenlítő mentén érinti. A meridiánképek most a henger alkotóival esnek egybe, a hengert tehát valamelyik alkotója mentén felvágva és kiterítve a síkba, párhuzamos egyeneseket alkotnak. Az egyenlítő és a paralelkörök képei pedig a meridiánképekre merőleges, végtelen sugarú koncentrikus körivékké, vagyis egymással párhuzamos és a meridiánok képére merőleges egyenes darabokká válnak.

Mivel valamennyi meridiánkép párhuzamos a kezdőmeridián képével, a hengervetületen

$$n = 0, \quad \gamma = 0. \quad (6.4)$$

*Ha a kúp csúcsát annyira lehozzuk, hogy a kúp alkotói egy síkba terüljenek ki, akkor a tulajdonképpeni (közvetlen) síkvetületek, vagyis az azimutális vetületek keletkeznek.*

*A paralelkörök kepei a vetületi kezdőpont (a kúp képzeletbeli csúcsa) körül húzott teljes koncentrikus körökké alakulnak, a meridiánok képei pedig a vetületi kezdőponton átmenő sugársort alkotnak oly módon, hogy a sugarak egymás között ugyanakkora szögeket zárnak be, mint amekkorát megfelelőik az alapfelületen. Tehát az azimutális vetületen*

$$n = 1, \quad \gamma = \lambda . \quad (6.5)$$

Az elmondottakból megállapítható, hogy a valódi henger- és azimutális vetületek a valós kúpvetületek határesetei. Ez a megállapítás a képfelületek metsző (redukált) elhelyezésében is érvényes.

*Nem normális elhelyezésben az előbbieken a fokhálózati vonalakra mondottak a segédfokhálózat vonalaira érvényesek. Az előbbieken alapján tehát a valós síkvetületekre vonatkozóan az  $n$  arányszám a következőképpen alakul:*

azimutális vetületeken	$n = 1,$	
kúpvetületeken	$0 < n < 1,$	(6.6)
hengervetületeken	$n = 0.$	

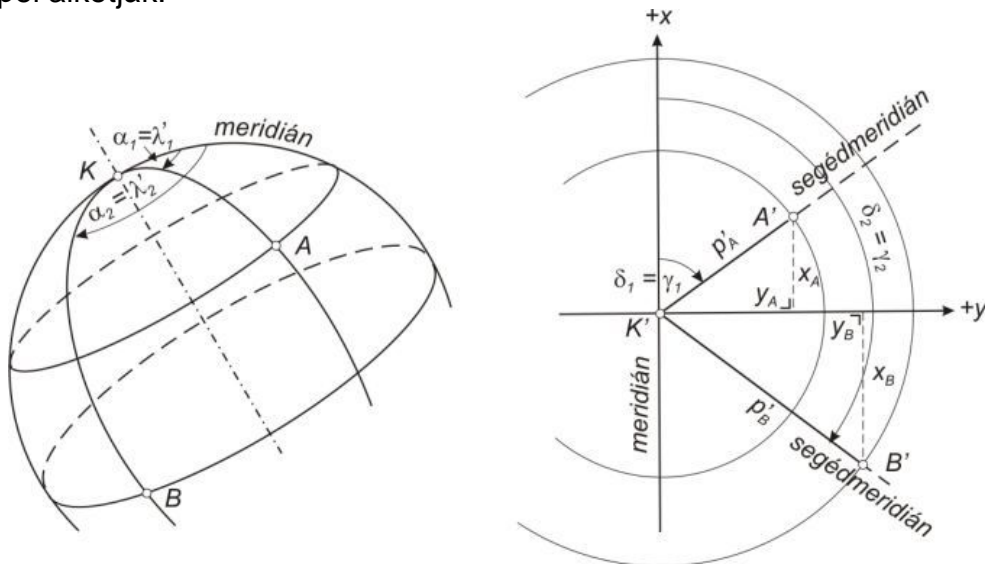


## A gömb azimutális vetületei

### Az azimutális vetületek általános tulajdonságai

A síkvetület akkor azimutális, ha az alapfelületül választott gömb egyik pontján átmenő legnagyobb gömbi körök pontonként vetített valódi képei a pont képfelületi megfelelőjén átmenő sugársort alkotnak, az általuk bezárt szögek ugyanakkorák, mint amekkorákat a gömbi ponton átmenő legnagyobb gömbi körök zárnak be egymással ezen a ponton. Továbbá, ha a gömbi ponthoz tartozó átmérőre merőleges síkok által a gömbfelületből kimetszett körök pontonként vetített valódi képei a gömbi pont képfelületi megfelelője körül húzott koncentrikus körökként alakulnak. Az említett gömbi pontot tekintjük vetületi kezdőpontnak.

Az előbbi meghatározás alapján kimondhatjuk, hogy azimutális vetületen a kezdőponton átmenő sugársort, ha a vetületi kezdőpont a pólus, a meridiánoknak, általános esetben a segédmeridiánoknak, a koncentrikus köröket pedig a paralelköröknek, illetve a segédparalelköröknek a valódi képei alkotják.



6.2. ábra. Ferdetengelyű azimutális vetület

A 6.2 ábra a gömbfelületi  $A$ ,  $B$  pontokat, és azok képét mutatja ferdetengelyű azimutális vetületen. A paralelkörök (segédparalelkörök) képét adó koncentrikus körök  $p$  sugara a paralelköröknek megfelelő földrajzi szélességtől, illetve pólustávolságtól (a segédparalelkörre vonatkozóan a segéd földrajzi szélességtől, illetve a segédpólustávolságtól) függ. (A  $p$  sugárhosszt a pólustávolság függvényében célszerűbb megadni.) Normális elhelyezésű vetületen a sugárhossz:

$$p = R f(\beta), \quad (6.7)$$

más elhelyezésben pedig a  $p'$  sugárhossz:

$$\rho' = R f(\beta'),$$

A sugárhosszt megadó függvényt *sugárfüggvénynek* is nevezik.

Valamely gömbi pont képezetét a képfelületi síkon a sugárhajlás és a  $\rho$ , illetve  $\rho'$  sugárhossz egyértelműen meghatározza. Az azimutális vetületeken

$$\gamma = \lambda, \quad \text{illetve} \quad \gamma = \lambda'. \quad (6.8)$$

A sugárfüggvény minden azimutális vetületre más és más. *A különböző azimutális vetületeket a sugárfüggvények különböztetik meg egymástól.*

Ha a vetületi kezdőpont nem a pólus, a vetítendő ponton átmenő segédmeridián  $\lambda'$  segéd földrajzi hosszúsága egyenlő a segédmeridián azimutjával. Továbbá, mivel a segédmeridiánok képei a vetületi kezdőpontban ugyanakkora szögeket zárnak be egymással, mint megfelelőik a gömbön a  $\delta$  irányszög a síkon ugyanakkora, mint az azimut a gömbön (vagy attól  $180^\circ$ -kal különbözik, ha az  $x$  tengely pozitív ága délnek mutat), vagyis:

$$\delta = \alpha \quad (\text{esetleg } \alpha + 180^\circ).$$

A derékszögű síkkoordináták ezek alapján:

$$x = \rho' \cos \delta, \quad y = \rho' \sin \delta.$$

Ha a vetület normális elhelyezésű, és a vetületi kezdőpont az északi pólus, akkor

$$\delta = 360^\circ - \lambda.$$

Megismételve azokat a jellemzőket, amelyeket már megismertünk, és ezeket újabakkal kiegészítve, a *valamennyi azimutális vetületre érvényes jellemzők* a következők:

1. A kezdőponton átmenő legnagyobb gömbi körök pontonként vetített valódi képei olyan sugársort alkotnak, amelynek sugarai ugyanakkora szögeket zárnak be egymással, mint amekkorákat a megfelelő legnagyobb gömbi körök a gömbön. Ez a tulajdonság adja az azimutális elnevezést (az azimutálisságot).

2. Az előbbi megállapításból következik, hogy *a kezdőponton átmenő legnagyobb gömbi köröknek sem első, sem második irányredukciójuk nincsen.*

3. A kezdőponthoz tartozó átmérőre merőleges síkok által a gömbfelületből kimetszett körök pontonként vetített valódi képei a síkon a sugársor metszéspontja körül húzott koncentrikus körök. Eszerint tehát a

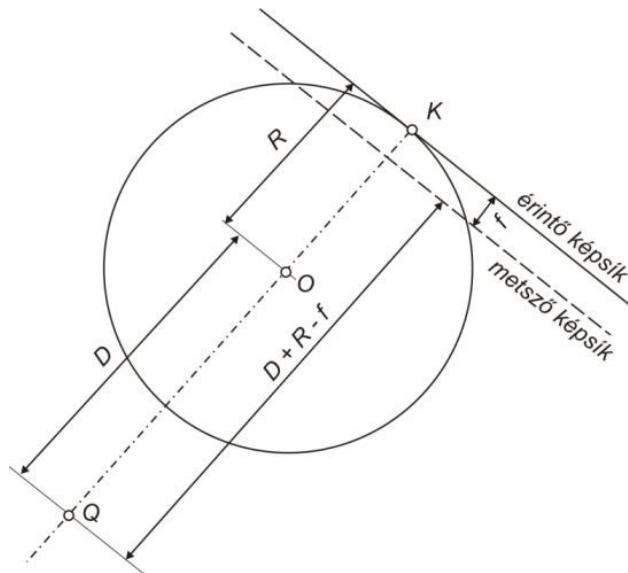
gömbön a kezdőponttól egyenlő távolságra levő (azonos zenittávolságú) pontok képei is egyenlő távolságra fekszenek a sugársor metszéspontjától. Ezt a tulajdonságot *zenitálisságnak* nevezzük.

4. Mivel a kezdőponton átmenő gömbi körök és a kezdőponthoz tartozó átmérőre merőleges síkmetszetek a gömbön és képeik a síkon mindig merőlegesek egymásra, ezek az irányok a *vetületi főirányok*. Normális elhelyezésben tehát a vetületi főirányok a meridián és a paralelkör, más elhelyezésben pedig a segédmeridián és a segédparalelkör iránya.

5. A kezdőponttól egyenlő távolságra levő pontokban a torzulások is egyenlők. Normális elhelyezésben tehát a paralelkörök, más elhelyezésben pedig a segédparalelkörök az *egyenlő torzulású* vonalak.

### A perspektív síkvetületek általános jellemzése és vetületi egyenleteik

Az azimutális vetületek csoportjába tartoznak a perspektív síkvetületek is. A perspektív vetítés úgy történik, hogy a gömbfelület egy pontján (a vetületi kezdőponton) és a gömb középpontján átmenő vetítési fősugárnak egy tetszőleges  $Q$  pontját vetítési központnak vesszük fel, és a fősugárra merőlegesen, tetszőleges helyen egy síkot állítunk. Ez a sík a *képfelület*, melyen a fősugár dőléspontja a *vetületi kezdőpont*. Ha a vetítési fősugár a pólusokat összekötő egyenessel esik egybe, *normális vetületről* beszélünk, ha az egyenlítő síkjában fekszik *egyenlítői* (transzverzális) *vetületről* van szó, ha pedig más helyzetben van, akkor a vetület *ferdetengelyű*. A gömbfelületen levő pontokat a  $Q$  pontból *perspektív* vetítéssel visszük át a képfelületre.



6.3. ábra. Perspektív vetítés gömbről síkra (A vetítési centrum elhelyezkedése)

A képfelületi síkot a gömbhöz *érintően* helyezzük el a  $K$  vetületi kezdőpontban. A  $Q$  vetítési központ a gömb középpontjától  $D$  távolságra van. Hosszabb levezetés után a *ferdetengelyű érintő perspektív vetületek* általános vetületi egyenletei:

$$x = (D + R) \frac{R (\sin \beta_0 \cos \beta - \cos \beta_0 \sin \beta \cos \lambda)}{D + R (\cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda)},$$

$$y = (D + R) \frac{R \sin \beta \sin \lambda}{D + R (\cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda)}.$$

A képletekben  $\beta_0$  a kezdőpont ( $K$ ) pont pólustávolsága,  $\beta$  és  $\lambda$  annak a pontnak a pólustávolsága és földrajzi hosszúsága, amelynek a síkkoordinátáit számítani kívánjuk.  $\beta_0 = 0$  helyettesítéssel a normális,  $\beta_0 = 90^\circ$  helyettesítéssel pedig az egyenlítői érintő perspektív síkvetület vetületi egyenletét kapjuk. Az előbbi egyenletek mindkét esetben egyszerűsödnek.

Ha a képfelületi síkot nem érintően, hanem *metszően* helyezük el a gömbhöz, akkor az érintő elhelyezéshez képest csupán méretarány-változás következik be. Ilyenkor az előbbi vetületi egyenletek jobb oldalát az

$$m_0 = \frac{D + R - f}{D + R} = 1 - \frac{f}{D + R}$$

arányszámmal (vetületi-méretarány tényező) szorozni kell, ahol  $f$  jelöli a sík távolságát a gömbön változatlanul megmaradó  $K$  kezdőponttól.

A  $D$  érték különböző megválasztásával 0-tól  $\infty$ -ig számos perspektív azimutális vetületet ismerünk. *A perspektív azimutális vetületek között területtartó vetület nincsen, és szögtartó vetület is csak egy van, a sztereografikus, amelyen  $D = R$ . Különleges perspektív azimutális még a gnomonikus ( $D = 0$ ), és az ortografikus ( $D = \infty$ ) vetület.*

*Valamennyi perspektív azimutális vetület általános tulajdonságai:*

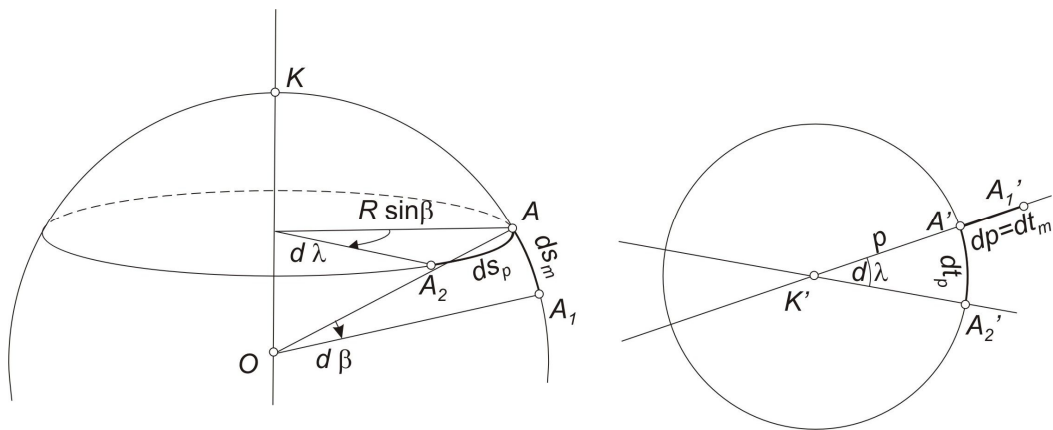
1. Az azimutális vetületekre a korábban felsorolt tulajdonságok. Ezeket kivül
2. Minden olyan gömbi körívnek a valódi képe egyenes, amelynek síkja átmegy a  $Q$  vetítési központon.
3. Minden esetben kell lennie egy olyan meridiánnak, amelynek valódi képe egyenes, mert ha a pólusokat összekötő átmérőn és a vetítési központon keresztül síkot fektetünk, az a gömbből meridiánt metsz ki.
4. Általánosságban a gömbi körök képe kúpszelet: ellipszis (esetleg ennek speciális esetei: kör vagy egyenes), hiperbola vagy parabola.

## 7. előadás

## Lineármódulus a vetületi főirányokban és a területi modulus az azimutális vetületeken

Mivel az azimutális vetületeken *normális elhelyezésben a meridiánok és a paralelkörök, más elhelyezésben pedig a segédmeridiánok és a segédparalelkörök* kielégítik azt a feltételt, hogy merőlegesek egymásra az alapfelületen, és képük merőleges egymásra a képfelületen, ezek az irányok a *vetületi főirányok*.

*Normális elhelyezésben* tehát a *lineármódulust* a meridián és a paralelkör irányában kell meghatározni. A 7.1. ábrán az *A* pontot meridián irányban



7.1. ábra. Fokhálózati vonalak ívdarabjai és képük azimutális vetületen

$$AA_1 = R d\beta ,$$

paralelkör irányban

$$AA_2 = R \sin \beta d\lambda$$

elemi távolságra mozdítottuk el. A meridián irányú elmozdulásnak a képen  $dp$ , a paralelkör irányú elmozdulásnak pedig  $p d\lambda$  elemi elmozdulás felel meg. Ennek megfelelően:

$$l_m = \frac{\text{meridiánkép elemi ívdarabja}}{\text{meridián elemi ívdarabja}} = \frac{dp}{R d\beta} , \quad (7.1)$$

$$l_p = \frac{\text{paralelkör képe elemi ívdarabja}}{\text{paralelkör elemi ívdarabja}} = \frac{p d\lambda}{R \sin \beta d\lambda} = \frac{p}{R \sin \beta} . \quad (7.2)$$

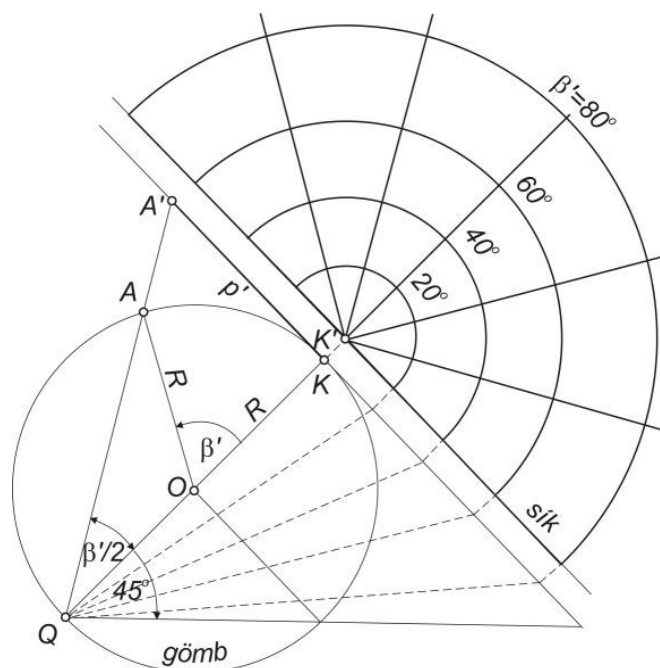
A kettő közül a nagyobbik a torzulási ellipszis a fél nagytengelye, a kisebbik a *b* fél kistengelye.

Ferde elhelyezésben a vetületi főirányok a segédmeridiánok és a segédparalelekörök, ezért a  $\beta$ ,  $\gamma$  és  $\rho$  helyett  $\beta'$ -t,  $\gamma'$ -t és  $\rho'$ -t kell írni a képletekbe.

## Sztereografikus vetület

### Vetületi egyenletek és torzulási modulusok

A gömbnek igen gyakran alkalmazott perspektív azimutális vetülete a *sztereografikus vetület*. A sík és a gömb érintési pontja a  $K$  vetületi kezdőpont. A  $Q$  vetítési központ a kezdőponthoz tartozó átmérő másik végpontja, tehát  $D = R$ .



7.2. ábra. Sztereografikus fókálózatú kép szerkesztése

A (7.2. ábra) ferdetengelyű sztereografikus vetületet ábrázol. Alsó része a vetítés módját, felső része pedig a segédfókálózatú vonalak képezését mutatja. Szemlélet alapján megállapítható, hogy a vetület perspektív és azimutális, tehát megfelel azoknak a jellemzőknek, amelyeket a perspektív vetületekre felsoroltunk.

A ferdetengelyű sztereografikus vetület sugárfüggvénye az ábráról, a  $QKA'$  háromszögből:

$$\rho' = 2R \tan \frac{\beta'}{2}. \quad (7.3)$$

Alkalmazzuk  $\rho'$ -re a vetületi főirányok lineármódulusainak előbb levezetett összefüggéseit (7.1), (7.2):

$$I_{sm} = \frac{dp'}{R d\beta'} = 2 \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta'}{2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta'}{2}}, \quad (7.4)$$

$$I_{sp} = \frac{p'}{R \sin \beta'} = \frac{2 R \tan \frac{\beta'}{2}}{R \sin \beta'} = \frac{2 \tan \frac{\beta'}{2}}{2 \sin \frac{\beta'}{2} \cos \frac{\beta'}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta'}{2}} \quad (7.5)$$

A lineármódulus – mint látható – az azimutális vetületekre megállapított vetületi főirányokban egyenlő, tehát *a sztereografikus vetület szögtartó és a torzulási ellipszis (Tissot-féle indikatrix) körré fajul* ( $a = b$ ).

*A lineármódulus az elmondottak alapján valamely pontban minden irányban:*

$$I = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta'}{2}}, \quad (7.6)$$

és a területi modulus:

$$\tau = I^2 = \frac{1}{\cos^4 \frac{\beta'}{2}}. \quad (7.7)$$

A torzulási modulusok képletéből megállapítható, hogy *a sztereografikus vetületen, ha a sík a gömböt érinti, a kezdőpontban semmilyen torzulás sincsen* (ez minden azimutális vetületen így van), továbbá *a hossztorzulás és így a területtorzulás is, a kezdőponttól távolodva nő*, de a kezdőpont körül rajzolt egy-egy körön állandó. *A hossztorzulás mindig hossznövekedésben jelentkezik*, mert a lineármódulus a kezdőpontot kivéve, mindig nagyobb egynél.

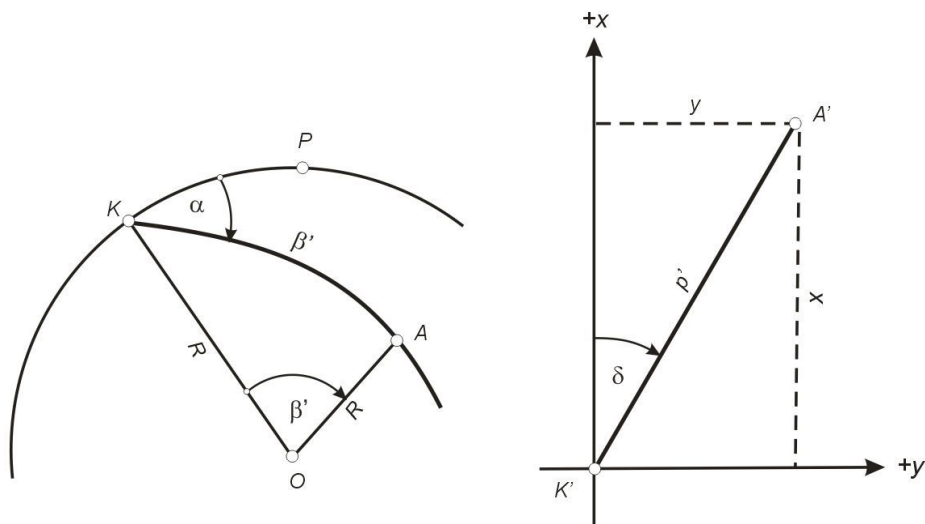
*A derékszögű koordináták a síkon az*

$$x = p' \cos \delta = 2 R \tan \frac{\beta'}{2} \cos \delta \quad (7.8)$$

és

$$y = p' \sin \delta = 2 R \tan \frac{\beta'}{2} \sin \delta \quad (7.9)$$

képletekből számíthatók (7.3. ábra). A irányszög egyenlő az azimuttal (vagy ha az  $x$  tengely pozitív ága délre mutat, akkor  $\delta = \alpha + 180^\circ$ ).



7. 3. ábra. Poláris koordináták a gömbön és a sztereografikus vetületen

A sugárfüggvényt az előzőekben a perspektivitás alapján (szemléletből) vezettük le. A sugárfüggvényt levezethetjük úgy is, hogy az azimutális vetületeken a vetületi főirányokra levezetett lineármódulusokat egymással egyenlővé tesszük:

$$\frac{dp'}{R d\beta'} = \frac{p'}{R \sin \beta'}$$

Rendezve az egyenlőséget:

$$\frac{dp'}{p'} = \frac{d\beta'}{\sin \beta'}$$

Mindkét oldalon az integrálást elvégezve:

$$\ln p' = \ln \tan \frac{\beta'}{2} + \ln c,$$

ahol  $\ln c$  az integrálási állandó. Áttérve a numerusokra:

$$p' = c \tan \frac{\beta'}{2}.$$

A  $c$ -t abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy  $\beta' = 0^\circ$  helyen (a kezdőpontban) a lineármódulus az egységgel egyenlő. A segédmeridián irányú lineármódulus képletébe helyettesítsük be a sugárfüggvény differenciálját:



$$l = \frac{dp'}{R d\beta'} = \frac{\frac{1}{2} c \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta'}{2}} d\beta'}{R d\beta'},$$

$\beta_0 = 0^\circ$  helyen ennek 1-gyel kell egyenlőnek lenni:

$$l_0 = \frac{c}{2R} = 1 \quad \text{és ebből} \quad c = 2R,$$

tehát a *ferdetengelyű érintő sztereografikus vetület sugárfüggvénye*:

$$p' = 2R \tan \frac{\beta'}{2}.$$

A sztereografikus vetület számára a perspektív síkvetületek általános vetületi egyenleteiből is származtathatók vetületi egyenletek, amelyek ferdetengelyű elhelyezés esetén is közvetlen kapcsolatot adnak a valódi földrajzi koordináták és a síkkoordináták között. Ha az egyenletekben  $D = R$  helyettesítést elvégezzük, akkor a ferdetengelyű érintő sztereografikus vetület számára a következő vetületi egyenleteket kapjuk:

$$x = 2R \frac{\sin \beta_0 \cos \beta - \cos \beta_0 \sin \beta \cos \lambda}{1 + \cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda},$$

$$y = 2R \frac{R \sin \beta \sin \lambda}{1 + \cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda}.$$

*Normális elhelyezésben* ( $\beta_0 = 0^\circ$ ):

$$x = -2R \frac{\sin \beta \cos \lambda}{1 + \cos \beta}, \quad y = 2R \frac{\sin \beta \sin \lambda}{1 + \cos \beta}.$$

*Egyenlítői elhelyezésben* ( $\beta_0 = 90^\circ$ ):

$$x = 2R \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta \cos \lambda}, \quad y = 2R \frac{\sin \beta \sin \lambda}{1 + \sin \beta \cos \lambda}.$$

Az előbbieken megadott vetületi egyenletek *északkeleti tájékozású* síkkoordináta-rendszerre vonatkoznak. Ha az  $x$  tengely pozitív ága délnek mutat (a magyarországi tájékozás szerint), akkor az (5.32) egyenletek jobb oldalát -1-gyel kell szorozni:

$$x = -2 R \frac{\sin \beta_0 \cos \beta - \cos \beta_0 \sin \beta \cos \lambda}{1 + \cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda}, \quad (7.10)$$

$$y = -2 R \frac{R \sin \beta \sin \lambda}{1 + \cos \beta_0 \cos \beta + \sin \beta_0 \sin \beta \cos \lambda}. \quad (7.11)$$

A sztereografikus síkkoordinátákból pl. az alábbi módon számíthatunk valódi gömbi földrajzi koordinátákat.

Először  $x$ ,  $y$ -ből számítjuk a kérdéses (A) pont és a vetületi kezdőpont távolságát (7.3. ábra):

$$\rho' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

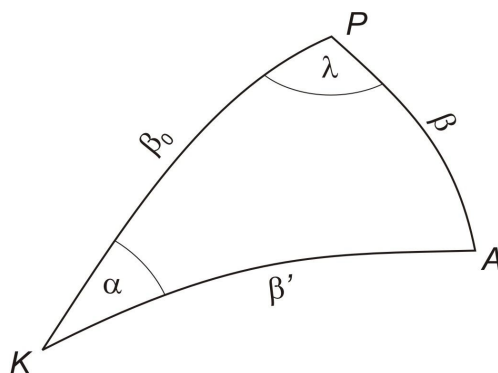
$\beta'$  a sugárfüggvény képletéből kifejezve:

$$\beta' = 2 \arctan \frac{\rho'}{2R}.$$

$$\alpha = \delta = \arctan \frac{y}{x},$$

vagy délnyugati tájékozás esetén:

$$\alpha = \delta \pm 180^\circ.$$



7. 4. ábra. Poláris gömbháromszög

A pont valódi pólustávolsága és földrajzi hosszúsága a 7.4. ábra szerinti poláris gömbháromszögből kifejezhető (a gömbháromszög oldal-koszinusz és szinusz tételének felhasználásával):

$$\cos \beta = \cos \beta_0 \cos \beta' + \sin \beta_0 \sin \beta' \cos \alpha ,$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \alpha \sin \beta'}{\sin \beta}$$

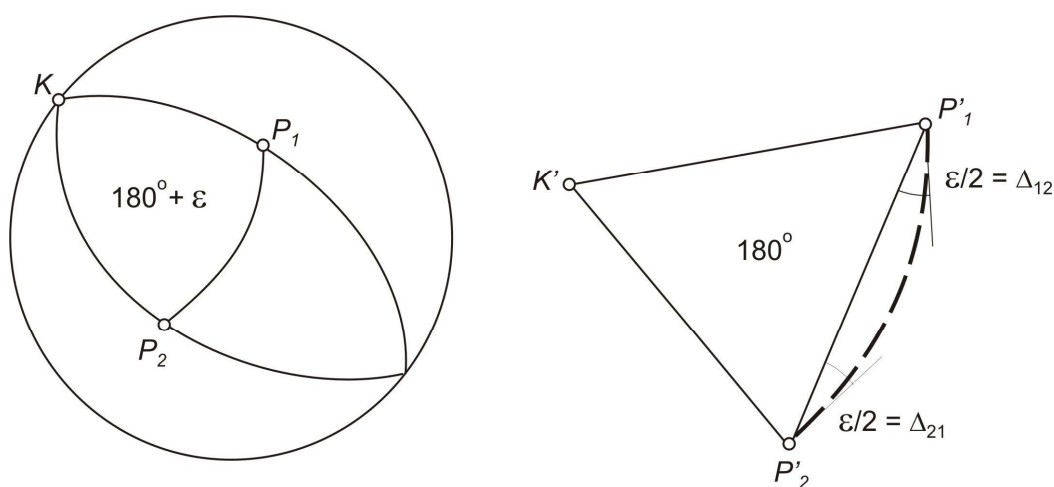
ahonnan a szögértékeket visszakeresve kapjuk  $\varphi = (90^\circ - \beta)$ -t és  $\lambda$ -t.

## 8. előadás

### Az irányredukció és a vetületi meridiánkonvergencia

Sztereografikus vetületen a vetületi síkon levő bármely egyenes olyan gömbi körnek a képe, amelynek síkja átmegy a  $Q$  vetítési központon. Ha az egyenes a  $K$  vetületi kezdőponton megy át, akkor legnagyobb gömbi körnek, más esetben pedig gömbi kis körnek a képe. Sztereografikus vetületen *minden gömbi kör pontonként vetített, valódi képe szintén kör*, nemcsak a legnagyobb gömbi köröké, hanem a gömbi kis köröké is.

*A legnagyobb gömbi körök kör alakú valódi képe mindig homorú oldalát mutatja a  $K$  vetületi kezdőpont felé.*



8.1. ábra. Gömbháromszög és képe sztereografikus vetületen. (Vetületi kezdőpont az egyik csúcspont.)

Ha a 8.1. ábra jobb oldali részén a  $P_1'$  és  $P_2'$  pontképet a  $K$  kezdőponttal egyenes vonalakkal összekötjük, akkor ezek a vonalak a  $P_1$   $K$ , illetve  $P_2$   $K$  legnagyobb gömbi körök pontonként vetített, valódi képét ábrázolják; ezek a legnagyobb gömbi körök ugyanis a vetületi kezdőponton mennek át, képük tehát egyenesként jelentkezik. A  $P_1$  és  $P_2$  pontot a gömbön összekötő legnagyobb gömbi kör képe szintén kör, melynek  $P_1'$   $P_2'$  szakasz a húrja, tehát az ábrán  $\Delta_{12}$ -vel és  $\Delta_{21}$ -gyel jelölt szögek (a második irányredukciók) egyenlők.

Mivel a  $P_1$   $P_2$   $K$  gömbháromszög szögösszege  $180^\circ$ -nál nagyobb, és a pontonkénti vetítéskor szögtartó vetületen a szögek nem változnak, kell, hogy a  $\Delta$  szögek a  $K$   $P_1'$   $P_2'$  háromszögön kívül helyezkedjenek el. Ezt a körülményt használjuk fel azimutális vetületeken az irányredukció meghatározására.

A  $K$   $P_1'$   $P_2'$  háromszög szögfeleslege tehát csupán a  $P_1'$   $P_2'$  oldal két irányredukciójára oszlik el. Mivel a „ $P_1'$   $P_2'$  egyenes szakasz a pontonként

vetített legnagyobb gömbi kör kör alakú képének húrja, a két irányredukció nagyságra egyenlő, előjelre pedig ellenkező:

$$\Delta_{12} = -\Delta_{21} \quad \text{és} \quad |\Delta_{12}| + |\Delta_{21}| = \varepsilon \quad (8.1).$$

ahol  $\varepsilon$  annak a gömbháromszögnek a szögfeleslege, melynek csúcspontjai a vizsgált oldal két végpontja és a vetületi kezdőpont

A gömbi szögfelesleg az

$$\varepsilon'' = \frac{F}{R^2} \rho''$$

képletből számítható (1.1). Mivel a vetület alkalmazásában a gömbháromszög  $F$  területe a gömbsugar négyzetéhez képest kicsi, a gömbi terület és a megfelelő síkbeli terület különbségét általában elhanyagolhatjuk, és  $F$ -nek a síkháromszög területét vehetjük. Ez pedig a

$$T = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}$$

képlettel határozható meg. Ezt a gömbi szögfelesleg képletébe behelyettesítve, továbbá figyelembe véve, hogy a két irányredukció abszolút értéke egymással egyenlő, és a kettő összege megegyezik a szögfelesleggel, az irányredukciók minden gyakorlati munkánál felhasználható képlete:

$$\Delta_{12} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{4 R^2} \rho'', \quad \Delta_{21} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{4 R^2} \rho''. \quad (8.2)$$

Ha valamely oldal két végpontjában ki akarjuk számítani az irányredukciókat, tetszés szerint az egyik végpontot  $P_1$ -gyel, a másikat  $P_2$ -vel jelöljük. Ha a képletekbe az indexeknek megfelelően helyettesítjük be a koordinátákat, a  $\Delta_{12}$  a  $P_1$ , a  $\Delta_{21}$  a  $P_2$  pontban adja előjelhelyesen az irányredukciót. Az előjelet azonban szemlélet alapján is megállapíthatjuk. Az ábrán vázolt helyzetben  $\Delta_{12}$  előjele pozitív, mert a pontonként vetített kép (körív) érintőjének irányszöge kisebb, mint a  $P_1$  és  $P_2$  pontot összekötő képfelületi legrövidebb vonalé. A  $P_2$  pontban ellentétes a helyzet, tehát a  $\Delta_{21}$  negatív előjelű.

A vetületi meridiánkonvergenciát számíthatjuk pl. Szádeczky-Kardoss Gyula képletének segítségével, melyet a vetületi meridiánkonvergencia általános képletéből kiindulva vezetett le:

$$\sin \mu = \frac{D - 2 C x}{\sqrt{(B - C p^2 + D x^2)^2 + (A y)^2}},$$

ahol

$$A = 4 R, \quad B = 4 R^2 \cos \varphi_0, \quad C = \cos \varphi_0,$$

$$D = 4 R \sin \varphi_0, \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Sztereografikus vetületen a meridiánkonvergencia előjele megegyezik a  $\lambda$  előjelével és - délnyugati tájékozású koordináta-rendszer esetén - ellentétes az  $y$  koordináta előjelével

### A hossztorzulási tényező meghatározása

A *hossztorzulási tényező* képletét a lineármódulus általános képletéből vezethetjük le (7.6):

$$l = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta'}{2}} = 1 + \tan^2 \frac{\beta'}{2}.$$

A sugárfüggvény

$$\rho' = 2 R \tan \frac{\beta'}{2},$$

amelyből

$$\frac{\rho'^2}{4 R^2} \tan^2 \frac{\beta'}{2}.$$

A síkkoordinátákból

$$\rho'^2 = x^2 + y^2,$$

amit az előbbi egyenletbe behelyettesítve:

$$\tan^2 \frac{\beta'}{2} = \frac{x^2 + y^2}{4 R^2},$$

és így a síkkoordinátákból számított lineármódulus minden irányban

$$l = 1 + \frac{x^2 + y^2}{4 R^2}. \quad (8.3)$$

A levezetést a továbbiakban mellőzve a hossztorzulási tényező:

$$m = \frac{t}{s} = 1 + U - 0,8 U^2, \quad (8.4)$$

ahol

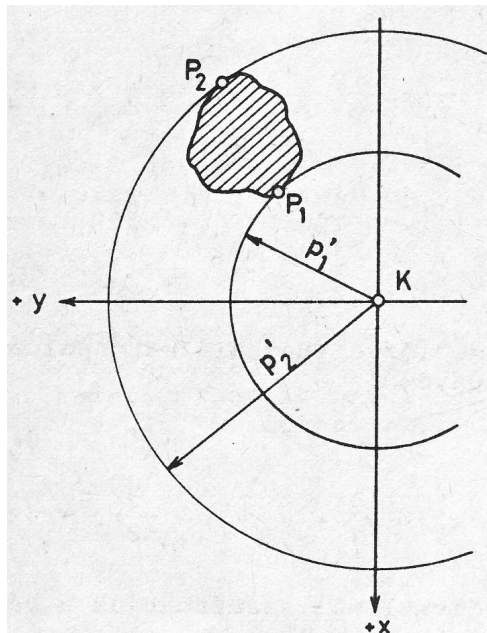
$$U = \frac{1}{12} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2).$$

### A területtorzulási tényező meghatározása

A területtorzulási tényező képlete hosszabb levezetés után:

$$f = \frac{T}{F} = 1 + \frac{p_1'^2 + p_2'^2}{4 R^2} + \frac{p_1' p_2'}{16 R^4}, \quad (8.5)$$

ahol  $p_1'$  a  $P_1$  és  $p_2'$  a  $P_2$  pont sugártávolsága. A  $P_1$  pont a kérdéses idom határvonalának a vetületi kezdőponthoz legközelebbi, a  $P_2$  pedig a legtávolabbi pontja (8.2. ábra).



8.2. ábra. A területtorzulási tényező levezetése

Sztereografikus vetületen a kezdőponttól kiinduló sugár (meridián, segédmeridián) irányában kiterjedtebb idomot a kezdőpont körül húzott koncentrikus körökkel kell körgyűrűkre osztani, és a területtorzulási tényezőt az egyes körgyűrűkre külön-külön kell számítani.

Kis környezetben a *területtorzulási tényező* gyakorlati célokból helyettesíthető a *területi modulussal*:

$$f \approx \tau.$$

## A sztereografikus vetület magyarországi alkalmazása

Magyarország közepes földrajzi szélességében ( $\varphi \approx 47^\circ$ ,  $\beta \approx 43^\circ$ ) a normális elhelyezésű érintő sztereografikus vetületen

$$a = b = l = \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} = 1,155, \quad \tau = a^2 = 1,334.$$

Az  $l$  és  $\tau$  számértékéből látható, hogy a normális elhelyezésben a vetület nem alkalmas Magyarország geodéziai célú ábrázolására, mert egy 10 kilométeres ívhossznak mintegy 11,6 kilométeres síkhossz felel meg, és egy 100 km<sup>2</sup>-es gömbfelület darabot mintegy 133 km<sup>2</sup> területű síkidom ábrázol. Éppen ezért a sztereografikus vetületet geodéziai célra ferde elhelyezésben használják úgy, hogy a vetületi kezdőpontot az ábrázolandó terület közepe táján helyezik el.

Az érintő sztereografikus vetület hossztorzulása a vetületi kezdőponttól 127 km-re éri el az 1/10 000 értéket, ami kilométerenként 10 cm-es hossznövekedést jelent. Ha tehát ezt az értéket jelölnénk meg a geodéziai ábrázoláshoz még megengedhető legnagyobb hossztorzulásnak, akkor az érintő sztereografikus vetület csak a vetületi kezdőpont körül rajzolt 127 km sugarú körön belül használhatnánk. Metsző elhelyezésnél az ábrázolható kör alakú terület sugara 180 km, ha nem lépjük túl az 1/10 000 értékű hossztorzulást ilyenkor viszont hossznövekedés és hosszrövidülés is jelentkezik.

A magyarországi bevezetés idején (1860 körül) metsző elhelyezésre nem is gondoltak és a geodézia ábrázolással szemben sem támasztottak túlzott követeléseket, ezért csak két rendszert vezettek be. A korabeli Magyarország területén egyébként 7-8 sztereografikus vetületi rendszerre lett volna szükség.

Magyarországon két ferdetengelyű érintő sztereografikus rendszer van, illetve volt (8.3. ábra):

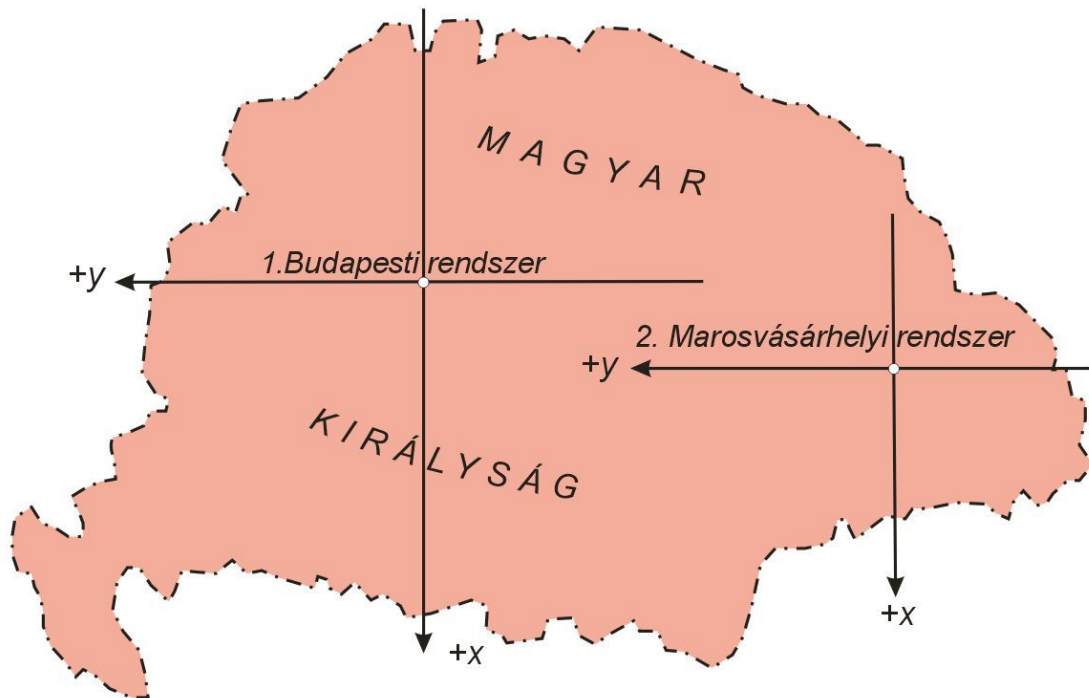
1. *Budapesti rendszer.* Kezdőpontja a *Gellért-hegy* felsőrendű háromszögelési pont gömbi megfelelője;
2. *Marosvásárhelyi rendszer.* Kezdőpontja a *Kesztej-hegy* felsőrendű háromszögelési pont gömbi megfelelője.

A szakirodalomban tévedésből egy harmadik sztereografikus rendszert is említenek, az *ivanicsit* (Ivanić), amelyik tulajdonképpen vetületnélküli rendszer maradt.

A síkkoordináta-rendszer  $x$  tengelye mindkét rendszerben a kezdőpont meridiánjának (a kezdőmeridiánnak) egyenesként jelentkező képe, az  $x$  tengely pozitív ága dél felé mutat. Az  $y$  tengelyek mindkét rendszerben a



kezdőpontban a kezdőmeridiánra merőleges legnagyobb gömbi körök (segédegyenlítő) szintén egyenesként jelentkező képei, az  $y$  tengelyek pozitív ága nyugat felé mutat.



8.3. ábra. A magyarországi sztereografikus vetületi rendszerek

A marosvásárhelyi rendszert a Királyhágón túli területek, a budapesti rendszert az előbbieket kivételével az első világháború előtti Magyarországon használták, ahol a hossztorzulás a Budapesttől távolabbi részekben erősen meghaladta az  $1/10\,000$  értéket, sőt elérte az  $1/1000$  értéket is.

A magyarországi sztereografikus vetületi síkok az

$$R = 6\,378\,512,966 \text{ m}$$

sugarú ún. régi magyarországi Gauss-gömböt (alapfelület) érintik, mely a Bessel-féle ellipszoid simulógömbje. A számunkra legfontosabb budapesti rendszer vetületi kezdőpontjának (Gellért-hegy nevű háromszögelési) gömbi földrajzi koordinátái:

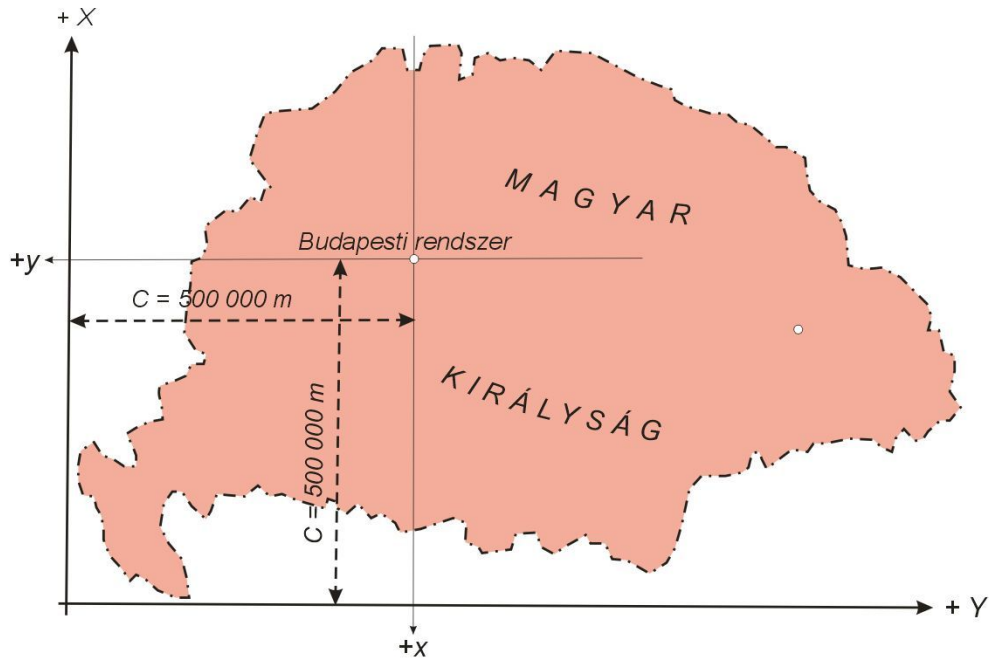
$$\varphi_0 = 47^\circ 26' 21,1372'', \quad \lambda_0 = 0^\circ 0' 0,0000''.$$

A jobb oldali érték azt jelenti, hogy a földrajzi hosszúságokat a gellérthegyi meridiántól számítjuk. A kezdőmeridiántól keletre levő pontok földrajzi hosszúsága pozitív, a nyugatra levő pontoké negatív, azaz ellentétes az  $y$  koordináta előjelével.

A nagyméretarányú (kataszteri) felmérésekben a sztereografikus  $y, x$  síkkoordinátákat használták. Topográfiai célokra 1935-ben vezették be az ún. *katonai sztereografikus koordinátákat*. A budapesti katonai rendszernél az  $y, x$  országos koordinátákat  $C = 500\,000$  m-ből (8.4. ábra), a marosvásárhelyi katonai rendszernél  $C = 600\,000$  m-ből kivonva nyerték a  $Y, X$  katonai sztereografikus koordinátákat:

$$Y = C - y,$$

$$X = C - x.$$



8.4. ábra. A budapesti katonai sztereografikus koordináta-rendszer

Vetületi hosszt, irányszöget és területet az eltolás nélküli (vetületi) koordinátákból egyaránt számíthatunk, de egyéb vetületi számításokhoz mindig át kell térni az  $y, x$  vetületi koordinátákra.

A teljesség kedvéért említést kell tenni a *budapesti városi sztereografikus rendszeréről (BÖV)*. Az 1930-as években Budapest városmérése céljára nagy pontosságú háromszögelési hálózatot fejlesztettek ki. A városi hálózat több pontja része az országos háromszögelési hálózatnak is. A *régi magyarországi Gauss-gömbön* kifejlesztett városi háromszögelési hálózatot sztereografikus vetítéssel vitték át a vetületi síkra.

Az alapfelületet és vetületi kezdőpontot tekintve a budapesti városi sztereografikus rendszer megegyezik a budapesti országos sztereografikus rendszerrel, különbség csak az ábrázolt háromszögelési hálózatok pontosságában és tájékozásában van.

A háromszögelési hálózatok különbözősége miatt csak *azonos* pontok alapján lehet az országos sztereografikus és a budapesti önálló városi rendszer között

átszámításokat végezni, a koordináta-módszer nem alkalmazható. Azonos pontoknak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek síkkoordinátáit mindkét vetületi rendszerben ismerjük.

## 9. előadás

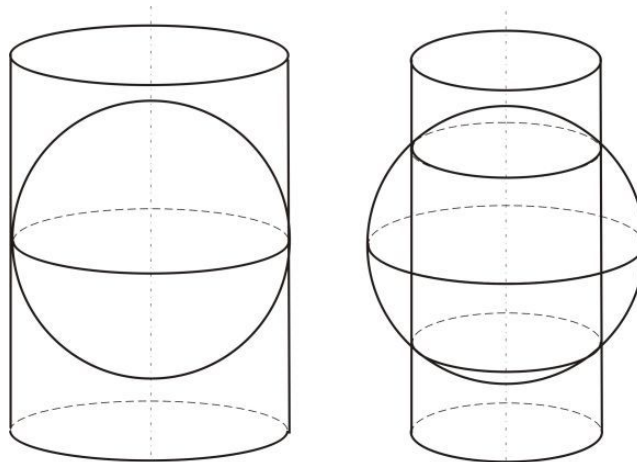
### A gömb valós hengervetületei

#### A valós hengervetületek általános tulajdonságai

A hengervetületek (cilindrikus vetületek) jellemzője, hogy normális elhelyezésben az egyenlítő és a paralelkörök képei párhuzamos egyenesek. A valós hengervetületnek jellemzője még, hogy normális elhelyezésben a meridiánképek a henger alkotóival esnek egybe, tehát a hengerpalást síkba fejtése után a meridiánképek egymással párhuzamos és az egyenlítő képére merőleges egyenesek. A normálistól eltérő (transzverzális vagy ferdetengelyű) elhelyezésben mindezek a segédfokhálózati vonalakra vonatkoznak. A továbbiakban, ha röviden hengervetületet említünk, mindig valós hengervetületre gondolunk.

Hengervetület keletkezhet úgy, hogy az egyenes körhenger palástját érintő vagy metsző helyzetben helyezzük a gömbhöz (a 9.1. ábra) és a pontokat a gömbről perspektív módon vetítjük a henger palástjára, azután a palástot egy alkotója mentén felvágva kiterítjük a síkba.

Gyakoribb azonban, hogy a hengervetület nem perspektív módon, hanem kizárólag matematikai úton felállított vetületi törvények szerint keletkezik. Ilyenkor e henger csak szimbólumnak tekinthető, mert a vetületi egyenleteket közvetlenül a gömb és a sík között állítjuk fel.



9.1. ábra. Normális elhelyezésű érintő és metsző hengervetület

Vizsgáljuk először azt a helyzetet, amikor a hengerpalást normális elhelyezésben érinti a gömböt (9.1 ábra bal oldali része). (Normális elhelyezésben a henger tengelye egybeesik a gömbnek a Föld forgástengelyét helyettesítő átmérőjével.) Minthogy az egyenlítő most a gömb és a henger közös vonala, az egyenlítő egyenesként jelentkező képén nincs hossztorzulás.

A képfelületen (a síkon) az egyenlítő képét vesszük fel a koordináta-rendszer  $y$  tengelyének. Kiválasztva az egyenlítőn egy kezdőpontot (az egyenlítő és egy meridián metszéspontja) ennek képe a síkkoordináta-rendszer  $x$  tengelye. A paralelkörök képei az  $y$  tengellyel párhuzamos egyenesek. Ezeknek egymástól mért távolsága függ a vetítés módjától, illetve törvényszerűségétől. Mivel az egyenlítőn torzulás nincsen (tehát az  $y$  tengelyen sincs), a meridiánképek az  $y$  tengelyt egymástól ugyanolyan távolságban metszik, mint a megfelelő meridiánok az egyenlítőt a gömbön (9.2. ábra).

Ha a hengerpalást normális elhelyezésben metszi a gömböt, akkor a metszévonal az egyenlítőre szimmetrikusan fekvő két paralelkör (9.1. ábra jobb oldali része). Ezek földrajzi szélessége nagyságra egyenlő, előjelre különböző; sugaruk egyenlő. Ha a metszési paralelkörök földrajzi szélességének abszolút értékét  $\varphi_m$ -mel, a gömb sugarát pedig  $R$ -rel jelöljük, akkor sugaruk (9.3. ábra):

$$r_m = R \cos \varphi_m.$$

Miután a hengernek és a gömbnek közös vonalai a metszési paralelkörök, ezek a torzulásmentes vonalak, és ennek megfelelően a meridiánképek távolsága egymástól ugyanakkora, mint amilyen távolságokon a megfelelő meridiánok a metszési paralelköröket metszik. A meridiánképek tehát az érintő helyzethez képest közelebb kerülnek egymáshoz, vagyis sűrűsödnek. Az egyenlítő már nem torzulásmentes, hanem rövidül, mégpedig a lineármódulus éppen az egyenlítőn éri el a legkisebb értékét. A vetületi kezdőpont és a koordináta-rendszer tengelyinek felvétele az érintő elhelyezésű hengervetületnél megismert módon történik.

Szögtartó hengervetületre vonatkozóan az érintő helyzetnek metszővel (redukálttal) történő felcserélése azonos eredményre vezet, mint a vetületi méretarányának a megváltoztatása. Az  $m_0$  vetületi méretarány-tényező a metszési paralelkörnek az egyenlítőtől való távolságától függ:

$$m_0 = \cos \varphi_m. \quad (9.1)$$

Szögtartó hengervetületen ugyanaz az eredmény adódik akkor is, ha nem a hengert állítjuk metsző helyzetbe, hanem a gömböt képzeljük megkisebbítve úgy, hogy sugara

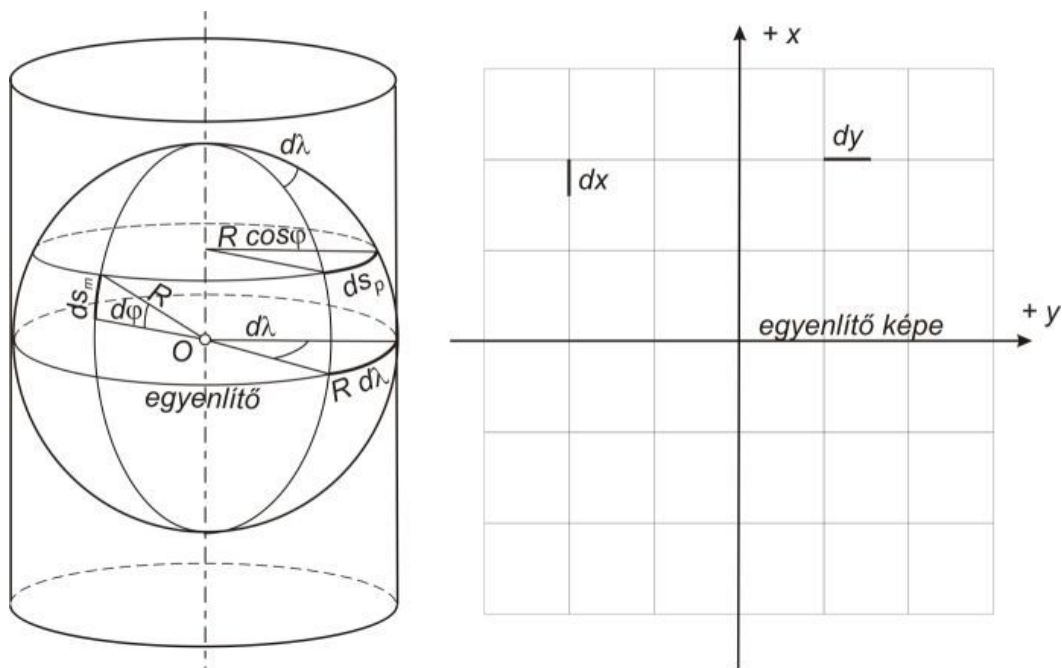
$$R' = R \cos \varphi_m$$

legyen, és ezt a kisebb gömböt érintve helyezzük el a szintén kisebb átmérőjű hengert.

A normális elhelyezéstől eltérő minden más helyzetben mindaz, amit a valódi fokhálózati vonalról mondtunk, a segéd fokhálózati vonalakra vonatkozik.

## Lineármódulus a vetületi főirányokban és a területi modulus

Normális elhelyezésű hengervetületen, minthogy a meridiánok és a paralelkörök a gömbön, valamint képeik a henger palástján, illetve a síkon merőlegesek egymásra, a vetületi főirányok: a meridián és a paralelkör iránya. A lineármódulusok kifejezését az érintő helyzethez az 9.2. ábra alapján vezetjük le. A síkkoordináta-rendszer  $y$  tengelye az egyenlítő képe, az  $x$  tengely pedig a kezdőponton átmenő meridiánnak a képe. (Ez utóbbinak pozitív ágát dél vagy észak felé választjuk. Az  $y$  tengely pozitív ágát ez után úgy kell felvenni, hogy abba az  $x$  tengely pozitív ágát az óramutató járásával azonos irányban lehessen  $90^\circ$ -os fordulással beforgatni. Az 9.2. ábrán az  $x$  tengely pozitív ágát északra vettük fel.)



9.2. ábra. Fokhálózati vonalak elemi ívdarabjai és képük érintő hengervetületen

Az egyenlítő hossztartóságából, valamint abból, hogy a meridiánképek az egyenlítő képére merőleges egyenesek, következik, hogy valamennyi paralelkör képe ugyanolyan hosszú, mint az egyenlítő, és valamely pont  $y$  koordinátája – attól függetlenül, hogy a pont melyik paralelkörön van – lineárisan arányos a földrajzi hosszúsággal:

$$y = R \lambda \quad \text{és} \quad dy = R d\lambda = dt_p. \quad (9.2)$$

Valamely  $\varphi$  földrajzi szélességű paralelkör elemi ívdarabjának hossza a gömbön:

$$ds_p = R \cos \varphi d\lambda.$$

Az ívdarab képének hossza:

$$dt_p = R d\lambda.$$

A paralelkör irányú lineármódulus tehát:

$$I_p = \frac{dt_p}{ds_p} = \frac{R d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{1}{\cos \varphi}. \quad (9.3)$$

A meridián elemi ívdarabjának hossza:

$$ds_m = R d\varphi.$$

Az ívdarab képének hossza:

$$dt_m = dx.$$

A meridián irányú lineármódulus tehát:

$$I_m = \frac{dt_m}{ds_m} = \frac{dx}{R d\varphi}. \quad (9.4)$$

A területi modulus:

$$\tau = I_m I_p = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{dx}{d\varphi}. \quad (9.5)$$

Redukált (metsző) helyzetben (9.3. ábra) a két metszési paralelkör hossztartó, tehát valamennyi paralelkörnek, és éppen úgy az egyenlítőnek a képe is ugyanolyan hosszú, mint a metszési paralelköröké. Ennek megfelelően – a pont helyzetétől függetlenül –  $y$  koordinátája:

$$y = R \cos \varphi_m \lambda \quad \text{és} \quad dy = R \cos \varphi_m d\lambda,$$

és így a paralelkör irányú lineármódulus:

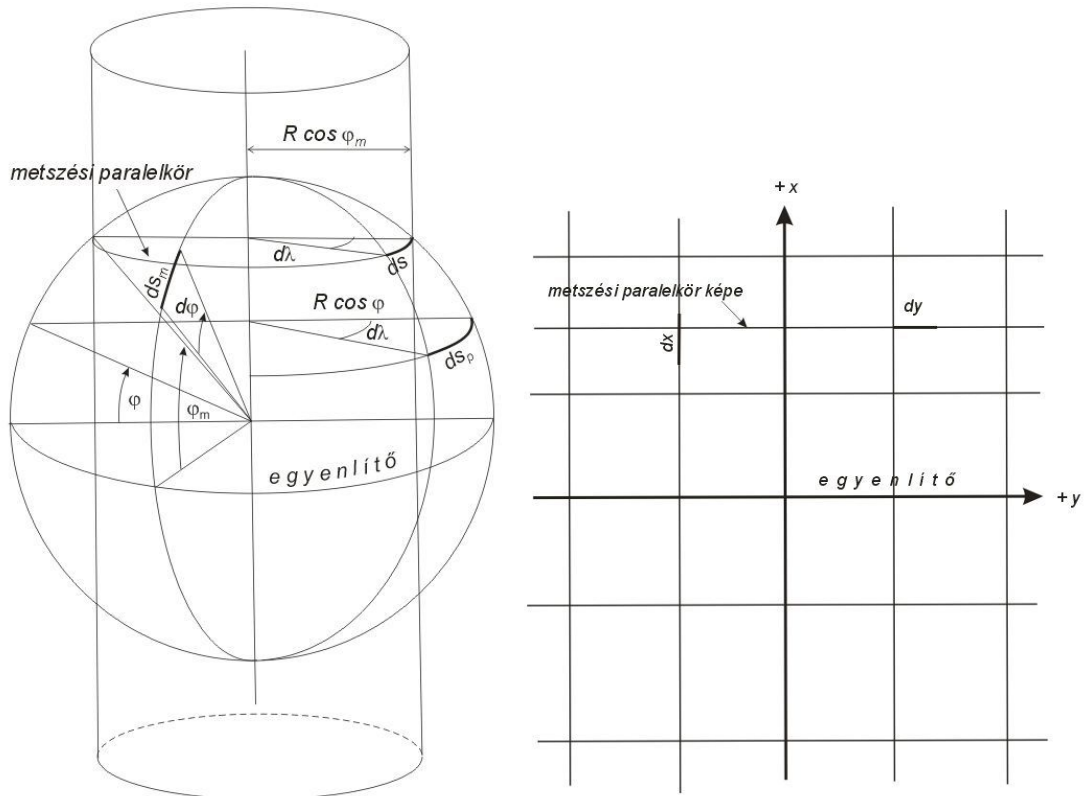
$$I_p = \frac{dt_p}{ds_p} = \frac{R \cos \varphi_m d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\cos \varphi_m}{\cos \varphi} = \frac{m_0}{\cos \varphi}. \quad (9.6)$$

A meridián irányú lineármódulus természetesen most is:

$$I_m = \frac{dt_m}{ds_m} = \frac{dx}{R d\varphi}. \quad (9.7)$$

A területi modulus:

$$\tau = I_m I_p = \frac{\cos \varphi_m}{R} \frac{dx}{\cos \varphi d\varphi} = \frac{m_0}{R} \frac{dx}{\cos \varphi d\varphi}. \quad (9.10)$$



9.3. ábra. Gömbi fokhálózati vonalak elemi ívdarabjai és képük redukált hengervetületen

A normálistól eltérő minden helyzetben a valódi  $\varphi$  és  $\varphi_m$  földrajzi szélességek helyett a segéd földrajzi szélességek ( $\varphi'$ ,  $\varphi'_m$ ) kerülnek a képletekbe.

### Normális elhelyezésű érintő szögtartó hengervetület

#### Vetületi egyenletek

A szögtartó hengervetület vetületi egyenletei levezetésének legegyszerűbb módja az, ha a Tissot-féle torzulási ellipszis féltengelyeinek a szögtartó vetületekre vonatkozó  $a = b$  egyenlőségéből indulunk ki:

$$\frac{dx}{R d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

átrendezés

$$dx = R \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

és a két oldal integrálása után:



$$x = R \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + c.$$

A  $c$  integrálási állandó abból a feltételből, hogy  $\varphi = 0^\circ$ -nál (az egyenlítőnél)  $x = 0$ , tehát:

$$0 = R \ln \tan 45^\circ + c,$$

amiből  $c$  is egyenlő zérussal. Az  $y$  egyenletét már korábban felírtuk. A vetületi egyenletek tehát:

$$x = R \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right), \quad y = R \lambda. \quad (9.11)$$

A lineármódulus minden irányban és a területi modulus:

$$l = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \tau = l^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}. \quad (9.12)$$

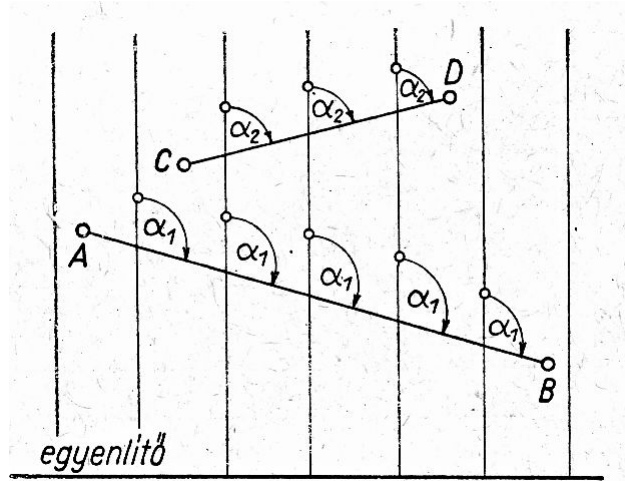
A vetületen a torzulásmentes egyenlítőt nem tekintve, a hossztorzulás mindenhol hossznövekedésben, és ennek megfelelően a területtorzulás területnövekedésben jelentkezik. A lineármódulus  $\varphi = 90^\circ$ -nál ( $\varphi' = 90^\circ$ -nál) végtelenné válik, ami megfelel annak, hogy a pólus képe olyan hosszú egyenes szakasz lenne, mint az egyenlítő.

Mivel a normális elhelyezésű szögtartó hengervetületet geodéziai célokra csak az egyenlítő közelében alkalmazható, vetületi redukcióit külön nem vezetjük le. Ezeket a redukciókat és modulusokat szükség esetén megkapjuk, ha a ferdetengelyű szögtartó hengervetületekre levezetett általános összefüggésekbe a segéd földrajzi koordináták helyébe a valódi földrajzi koordinátákat, az  $m_0$  helyébe pedig 1-et helyettesítünk be.

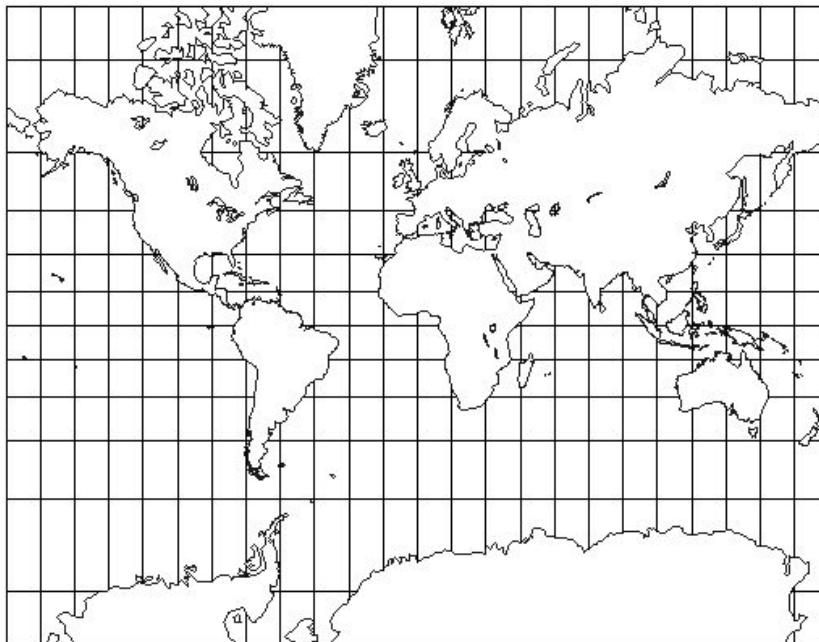
Normális elhelyezésű valódi hengervetületen a vetületi meridiánkonvergencia mindenhol zérus, mert a meridiánok valódi képe párhuzamos egyenes a kezdőmeridián  $x$  tengelyül felvett egyenesként jelentkező képével.

### A normális elhelyezésű szögtartó hengervetület földrajzi használata

A szögtartó hengervetületet *Mercator* (1512-1594) alkalmazta először tengerészeti célokra. A normális elhelyezésű szögtartó hengervetületet első alkalmazója után Mercator vetületnek is nevezik. A vetület nagy előnye a tengeri hajózásban és a repülésben jelentkezik, ugyanis két térképi pontot egyenessel összekötve a loxodróma képét kapjuk (9.4. ábra). Normális elhelyezésben ugyanis a meridiánképek egymással párhuzamos egyenesek, és mivel a vetület szögtartó, a loxodróma képének mindegyik meridiánképet ugyanolyan szög alatt kell metszenie.



9.4. ábra. Loxodrómák képe normális elhelyezésű szögtartó hengervetületen



9.5. ábra. Normális elhelyezésű szögtartó hengervetület

A normális elhelyezésű szögtartó hengervetület fokhálózati képét a 9.5. ábra mutatja. Az ábrán az is látható, hogy a vetület geodézia célra csak az egyenlítő menti területek ábrázolására alkalmas, de a földrajzban is legfeljebb a  $60^\circ$  szélességig használható. A paralelkörök képei a pólus felé egyre távolabb kerülnek egymástól. A pólus már nem ábrázolható, mert képe a végtelenbe távolodik.

### Ferdetengelyű szögtartó hengervetület Vetületi egyenletek

Ferdetengelyű érintő elhelyezésben a henger a gömböt nem az egyenlítő, hanem egy attól eltérő legnagyobb gömbi kör (segédegyenlítő) mentén érinti.

Ferdetengelyű redukált elhelyezésben a henger és a gömb közös vonalai a segédegénylítőre szimmetrikusan elhelyezkedő torzulásmentes segédparalelkörök. Ha a segédegénylítőre vonatkozó segéd földrajzi koordinátákkal számolunk, akkor a normális elhelyezésű hengervetületekre adott egyenletek  $\varphi$  helyett  $\varphi'$  és  $\lambda$  helyett  $\lambda'$  értelmezéssel változatlanul használhatók. A valódi és a segéd földrajzi koordináták közötti kapcsolatot az 1. előadás anyagában adtuk meg.

Korábban már említettük, hogy szögtartó hengervetületekre nézve a henger redukált elhelyezése az érintő elhelyezéshez viszonyítva csupán méretarány-változást eredményez, de új fokhálózati kép nem keletkezik. A méretarány-változás tényezője:

$$m_0 = \cos \varphi'_m,$$

ahol  $\varphi'_m$  a metszési paralelkörök segéd földrajzi szélessége. A vetületi egyenletek tehát:

$$y = R m_0 \lambda', \quad x = R m_0 \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right). \quad (9.13)$$

Ha a síkkoordináták adottak, akkor az előbbi egyenletekből:

$$\varphi' = 2 \arctan \exp \left( \frac{x}{R m_0} \right) - 90^\circ, \quad \lambda' = \frac{y}{R m_0} \rho. \quad (9.14)$$

Magyarországon érintő és redukált ferdetengelyű szögtartó hengervetületeket is alkalmazunk geodéziai célokra. A fenti és a következő szakaszok összefüggései a magyarországi hengervetületekre egységesen használhatók, számítás közben csak arra kell ügyelni, hogy a megfelelő vetület alapfelületének  $R$  sugarát helyettesítsük be a képletekbe, és érintő elhelyezésnél  $m_0 = 1$ .

### Lineármódulus és hossztorzulási tényező

Az érintő elhelyezésre vonatkozó lineármódulus képletét ferdetengelyű redukált elhelyezésnek megfelelően átalakítva (9.6):

$$l = \frac{m_0}{\cos \varphi'} \quad (9.15)$$

minden irányban. Az érintő elhelyezésre vonatkozó lineármódulust azért kellett  $m_0$ -al szorozni, mert a képfelületi hosszak  $m_0$ -szorosukra változnak a redukált vetületen.

Az előbbi képletből következik, hogy a lineármódulus a legkisebb értékét  $\varphi' = 0^\circ$ -nál veszi fel. Érintő helyzetben ( $m_0 = 1$ ) ez egyenlő, tehát a segédegyenlítőn kívül mindig hossznövekedés lép fel, mégpedig a segédpólusok felé haladva, mind nagyobb mértékben. Redukált helyzetben a metszési segédparalelkörökön egységnyi a lineármódulus, közöttük hosszcsökkenés jelentkezik, mégpedig legerősebb mértékben a segédegyenlítőn, míg a metszésektől a segédpólusokig folytonosan növekvő hossznagyobbodás mutatkozik.

A lineármódulus  $\varphi' = 90^\circ$ -nál végtelenné válik, ami megfelel annak, hogy a segédpólus képe egy egyenes szakasz, mégpedig éppen olyan hosszú, mint a segédegyenlítő, illetve redukált esetben a metszési segédparalelkör. Az a körülmény, hogy a pontnak a képe véges nagyságú egyenes szakasz, megfelel a végtelen torzulásnak. A segédpólus képe egyébként nem ábrázolható, mert a végtelenbe kerül.

A lineármódulus síkkoordinátákból is meghatározható:

$$l = m_0 + e x^2 + g x^4. \quad (9.16)$$

Az  $e$  és  $g$  jelentése ugyanaz, mint a későbbiekben a hossztorzulási tényező képleténél. A lineármódulus csak az  $x$  koordinátától ( $\varphi'$ -től) függ, és  $x = 0^\circ$ -nál (a segédegyenlítőn) egyenlő  $m_0$ -lal.

A lineármódulus képletéből egyszerűen meghatározható annak a területsávnak a szélessége, amelyen belül a szögtartó hengervetület olyankor alkalmazható, amikor nem engedünk meg 1/10 000-nél nagyobb hossztorzulást.

A szögtartó érintő hengervetület lineármódulusa az  $y$  tengelytől 90 km távolságra éri el az 1,0001-et, így az érintési kör által egyenlő szélességű két fél sávra osztott 180 km széles sávon belül alkalmazható a vetület. Redukált szögtartó hengervetület a segédegyenlítő által egyenlő szélességű két fél sávra osztott 256 km széles sávon belül alkalmazható az előbbi feltétellel (Ha nem engednénk meg kilométerenként 10 cm-nél nagyobb hossztorzulást.).

A hossztorzulási tényező képletét a lineármóduluséból vezethetjük le.  
A hossztorzulási tényező:

$$m = \frac{t}{s} = m_0 + e x_k^2 + f \Delta x^2 + g x_k^4, \quad (9.17)$$

ahol

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \Delta x = x_2 - x_1,$$

$x_1$  és  $x_2$  a véges hosszúságú vonaldarab végpontjainak koordinátái és

$$e = \frac{1}{2 R^2 m_0}, \quad f = \frac{1}{24 R^2 m_0}, \quad g = \frac{1}{24 R^4 m_0^3}.$$

### Területi modulus és területtorzulási tényező

A ferdetengelyű szögtartó hengervetület területi modulusa a segéd földrajzi szélességből számítva:

$$\tau = l^2 = \frac{m_0^2}{\cos^2 \varphi'} \quad (9.18)$$

A képletből látható, hogy érintő elhelyezés esetén ( $m_0 = 1$ ) a segédegyenlítőn ( $\varphi' = 0^0$ ) kívül mindenhol területnövekedés lép fel, redukált elhelyezésnél pedig a metszési segédparalelkörök között területcsökkenésben a segédparalelköröktől a segédpólusok felé területnövekedésben jelentkezik a területtorzulás.

A területi modulust általában a következő összefüggésből számítják:

$$\tau = m_0^2 + d x^2 + h x^4, \quad (9.19)$$

ahol

$$d = \frac{1}{R^2} \quad \text{és} \quad h = \frac{1}{3 R^4 m_0^2}.$$

A **területtorzulási tényező** levezetését mellőzzük. Ha a terület  $y$  tengelyhez legközelebb eső határpontjának  $x$  koordinátáját  $x_1$ -gyel, a legtávolabb eső pontjának  $x$  koordinátáját  $x_2$ -vel jelöljük, akkor a területtorzulási tényező képlete:

$$f = \frac{T}{F} = m_0^2 + \frac{d(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)}{3}. \quad (9.20)$$

Ha  $x_2 - x_1$  kicsi, és a megkívánt számítási élesség megengedi, akkor  $x_1$  egyenlőnek vehető  $x_2$ -vel, és

$$f \approx m_0^2 + d x_s^2 \approx \tau,$$

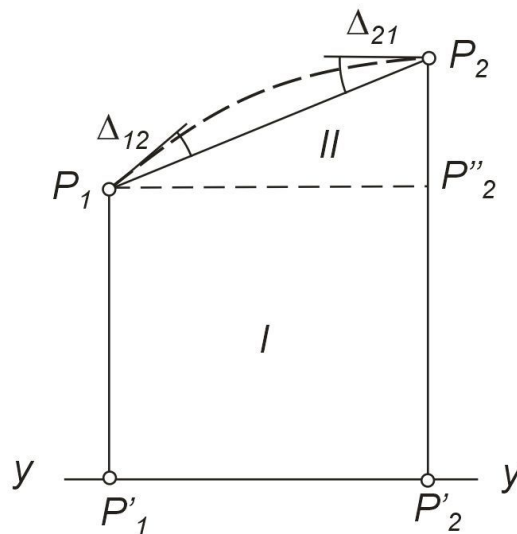
vagyis a területtorzulási tényező a területi modulussal helyettesíthető.  $x_s$  a terület súlypontjának  $x$  koordinátája.

Ha az idom az  $x$  tengellyel párhuzamos irányban kiterjedtebb, akkor az idomot az  $y$  tengellyel párhuzamosan területsávokra (lamellákra) kell osztani, és a területtorzulási tényezőt területsávonként kell számítani.

## Irányredukció

Szögtartó hengervetületen is a gömbi szögfölöslegből határozzuk meg az irányredukciókat. Miután a ferde elhelyezésű hengervetületeken a segédmeridiánok valódi képei az  $y$  tengelyre merőleges egyenesek, az  $y$  tengelyre merőleges irányban irányredukció nincsen. Ha tehát egy tetszőleges irányú  $P_1 P_2$  vonaldarab két pontjából merőlegest bocsátunk az  $y$  tengelyre (9.6. ábra), akkor az így keletkezett idom gömbi szögfeleslege csupán a  $P_1 P_2$  vonaldarab két irányredukciójára oszlik el:

$$\varepsilon_{P_1 P_2 P_2' P_1'} = |\Delta_{12}| + |\Delta_{21}|.$$



9.6. ábra. Irányredukciók szögtartó hengervetületen

Ha a  $P_1 P_2$  irány párhuzamos volna az  $y$  tengellyel, akkor a két irányredukció abszolút értéke egyenlő, előjelük pedig különböző lenne. Általános helyzetű irányban a két irányredukció nagysága hosszú irányokra is megfelelő pontossággal:

$$|\Delta_{12}| = \frac{1}{2} \varepsilon_I + \frac{1}{3} \varepsilon_{II},$$

$$|\Delta_{21}| = \frac{1}{2} \varepsilon_I + \frac{2}{3} \varepsilon_{II},$$

ahol  $\varepsilon_I$  a  $P_1 P_2'' P_2' P_1'$  téglalap gömbi megfelelőjének szögfeleslege. (A  $P_1 P_2'$  egyenest a  $P_1$  pontból az  $y$  tengellyel párhuzamosan húztuk.) Az  $\varepsilon_{II}$  pedig a  $P_1 P_2 P_2''$  háromszög gömbi megfelelőjének szögfeleslege.

Az irányredukciók képlete, amely 100 km-es távolságig biztosítja a 0,001"-es pontosságot:

$$\Delta_{12}'' = a x_k \Delta y - b \Delta x \Delta y - c x_k^3 \Delta y, \quad (9.21)$$

$$\Delta_{21}'' = -a x_k \Delta y - b \Delta x \Delta y + c x_k^3 \Delta y,$$

ahol

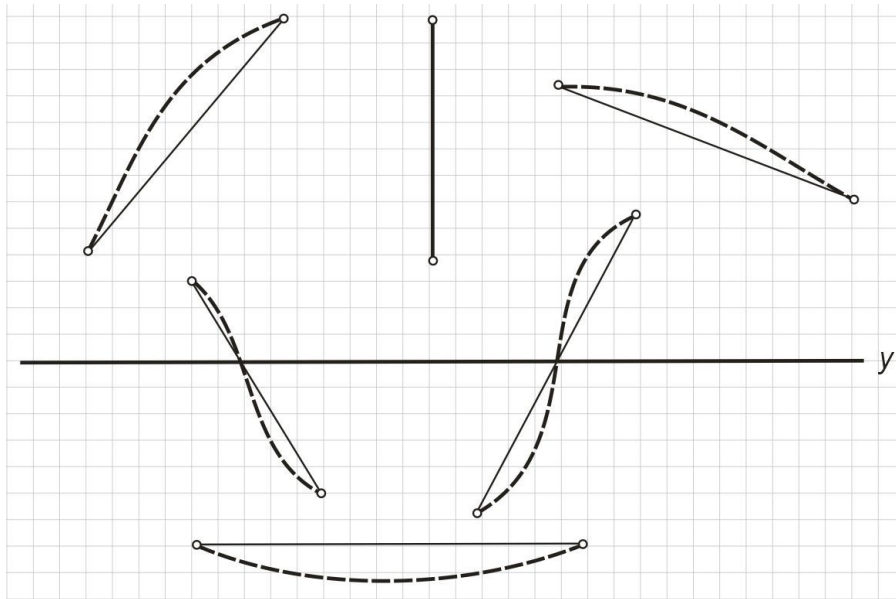
$$a = \frac{\rho''}{2 R^2 m_0^2}, \quad b = \frac{\rho''}{12 R^2 m_0^2}, \quad c = \frac{\rho''}{6 R^4 m_0^4},$$

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Ha a koordináta-különbségeket úgy képezzük, hogy a 2-es indexű koordinátákból vonjuk ki az 1-es indexűt, vagyis

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{és} \quad \Delta y = y_2 - y_1,$$

akkor a  $\Delta_{12}$  képlete a  $P_1$ , a  $\Delta_{21}$  képlete a  $P_2$  pontban előjelhelyesen, másodperc egységben adja az irányredukciót.



9.6. ábra. Ortodróma ívek vetített képekének alakulása szögtartó hengervetületen

Az irányredukció előjele szemléletből is megállapítható, mivel hengervetületen a legnagyobb gömbi körök valódi képe mindig homorú oldalát mutatja az  $y$  tengely felé. Így az  $y$  tengelyt nem metsző vonaldarabokhoz a két irányredukció mindig ellenkező előjelű. Általános esetben a vonal két végpontján az irányredukció abszolút értéke abban a pontban nagyobb, amelyik távolabb van az  $y$  tengelytől. Az  $x$  tengellyel párhuzamos vonalaknak irányredukciójuk nincsen, az  $y$  tengellyel párhuzamos vonalak végpontjain az irányredukciók abszolút értéke egyenlő, előjelük ellentétes.

A segédegyenlítő metsző legnagyobb metsző legnagyobb gömbi körívek valódi képének az  $y$  tengelynél inflexiójuk van, és így rájuk nézve előfordulhat, hogy a két irányredukció egyező előjelű (9.6. ábra).

A közölt egyenletek mindig előjelhelyesen adják az eredményt.

### Vetületi meridiánkonvergencia

A normális elhelyezésű hengervetülettel ellentétben a ferdetengelyű hengervetületen már jelentkezik a vetületi meridiánkonvergencia. Itt ugyanis a segédmeridiánok képei az  $x$  tengellyel párhuzamos egyenesek, míg a valódi meridiánok képe valamilyen görbe vonal.

A meridiánkonvergenciát általában a síkkoordinátákból számítjuk. Az alábbi összefüggések közül választhatunk:

$$\tan \mu = \frac{\cosh \frac{x}{R m_0} \sin \frac{y}{R m_0}}{\cot \varphi_0 - \sinh \frac{x}{R m_0} \cos \frac{y}{R m_0}}, \quad (9.22)$$

vagy pedig

$$\begin{aligned} \mu'' = & i y + j x y - k y^3 + n x^2 y - p(x y^3 - x^3 y) - \\ & - r \left( x^2 y^3 - \frac{x^4 y}{2} - \frac{y^5}{10} \right). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Az együtthatók:

$$i = \frac{\rho''}{R m_0} \tan \varphi_0, \quad j = \frac{\rho''}{R^2 m_0^2} \tan^2 \varphi_0,$$

$$k = \frac{\rho''}{6 R^3 m_0^3} \tan \varphi_0 (1 + 2 \tan^2 \varphi_0), \quad n = 3 k,$$

$$p = \frac{\rho''}{3 R^4 m_0^4} \tan^2 \varphi_0 (2 + 3 \tan^2 \varphi_0),$$

$$r = \frac{\rho''}{12 R^5 m_0^5} \tan \varphi_0 (1 + 20 \tan^2 \varphi_0 + 24 \tan^4 \varphi_0).$$



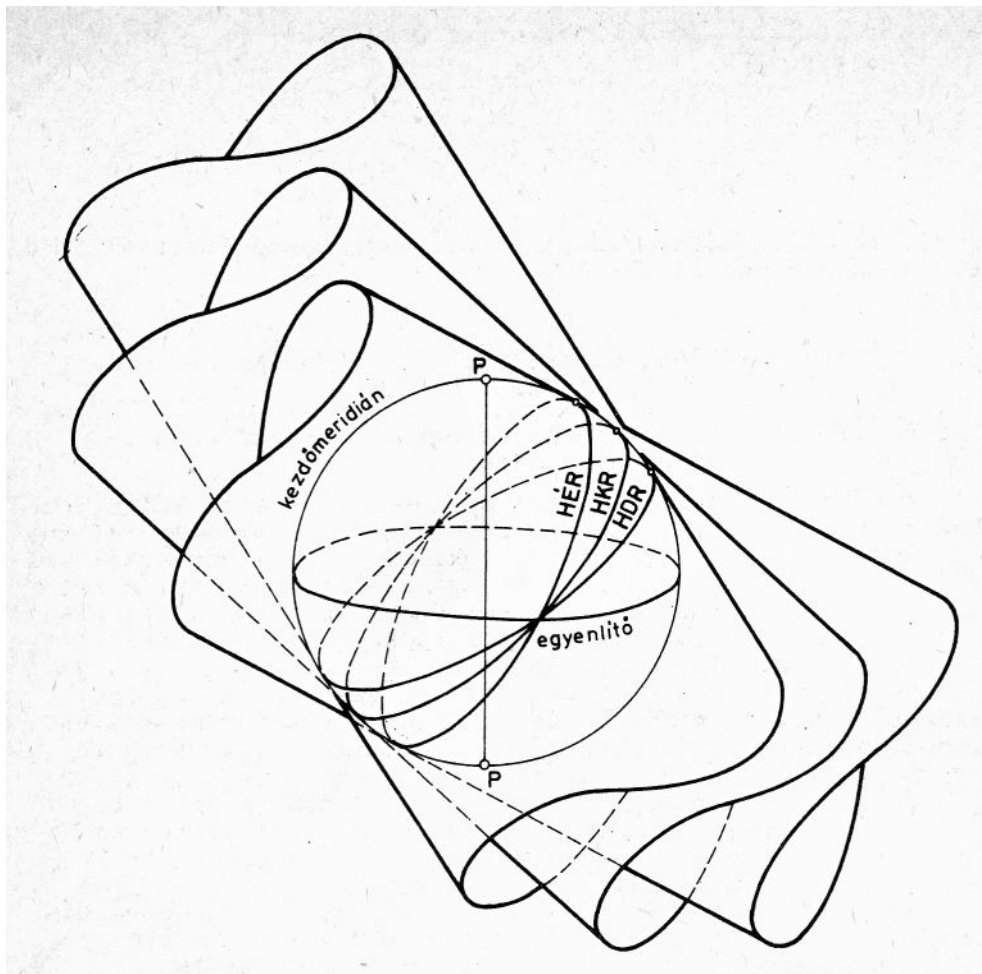
## 10. előadás

### A ferdetengelyű szög tartó hengervetület magyarországi alkalmazása

### A ferdetengelyű érintő szög tartó hengervetület alkalmazása

A részletes felmérésekkel szemben támasztott szigorúbb követelményeket az ország egész területére a sztereografikus vetületi rendszer nem elégítette ki, mert a kezdőponttól számított 127 km sugarú körön a hossztorzulás már eléri a kritikus 1/10 000 mértéket. Az első világháború előtti Magyarországon a budapesti rendszert a kezdőponttól 420 km-ig alkalmazni kellett (1/1000)!

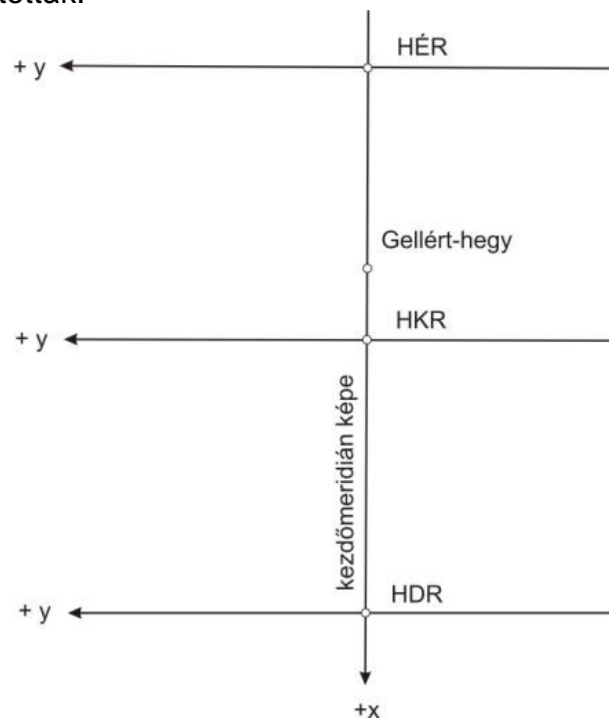
Az előbbiek miatt az alapfelület és a háromszögelési hálózat megtartása mellett három ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszert vezettek be azzal a megkötéssel, hogy a Gellért-hegy ponttól számított 127 km sugarú körön belül a sztereografikus vetület továbbra is érvényben marad. A hengervetület bevezetésekor nem engedtek meg 1/10 000-nél nagyobb hossztorzulást, ezért kellett több vetületi rendszert alkalmazni. A hengervetület bevezetése Fasching Antal (1879-1931) nevéhez fűződik.



10.1. ábra. A ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszerek

Magyarországot három ferdetengelyű érintő szögtartó hengervetület fedi. Az *északi rendszer* (HÉR) a  $47^{\circ} 55'$  földrajzi szélességtől északra eső területekhez, a *középső rendszer* (HKR) a  $46^{\circ} 22'$  és a  $47^{\circ} 55'$  földrajzi szélességekkel határolt sávhoz, a *déli rendszer* (HDR) pedig a  $46^{\circ} 22'$  földrajzi szélességtől délre eső területekhez tartozik.

Mindhárom képzeletbeli henger a Gellért-hegy felsőrendű háromszögelési pont meridiánjára merőleges legnagyobb gömbi kör (segédegyenlítő) mentén érinti az  $R = 6\,378\,512,966$  m sugarú régi magyarországi Gauss-gömböt (10.1. ábra). A gellérthegyi meridián egyenesként jelentkező képe adja a hengervetületi rendszerek közös  $x$  tengelyét, a vetületi kezdőpontokon átmenő, a kezdőmeridiánra merőleges segédegyenlítők képei pedig az  $y$  tengelyeket (10.2. ábra). A koordináta-rendszerek délnyugati tájékozásúak. Az ábra szematikus, mert a síkkoordináta rendszerek valójában más-más síkban vannak. A rendszerek csatlakozása mentén, illetve egy bizonyos szélességű sávban a háromszögelési pontok koordinátáit a két csatlakozó sávon is kiszámították.



10.2. ábra. Az érintő hengervetületi rendszerek koordináta-rendszerei

A kezdőpont gömbi földrajzi szélessége:

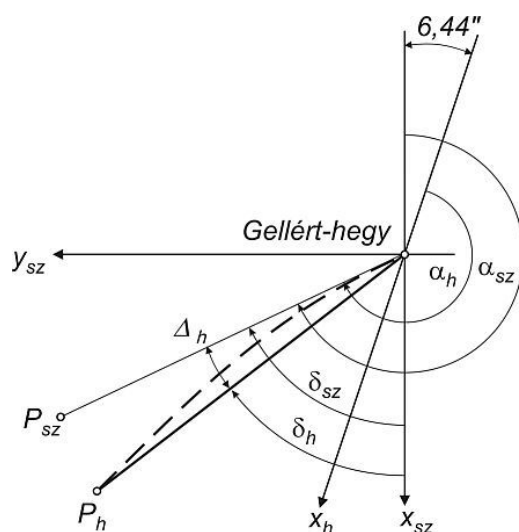
az <i>északi</i> rendszerben (HÉR)	$\varphi_0 = 48^{\circ} 46' 02,0000''$ ,
a <i>középső</i> rendszerben (HKR)	$\varphi_0 = 47^{\circ} 06' 0,0000''$ ,
a <i>déli</i> rendszerben (HDR)	$\varphi_0 = 45^{\circ} 31' 59,0000''$ .

Külön ki kell emelni, hogy a Gellért-hegy pont egyik hengervetületi rendszernek sem kezdőpontja (a Gellért-hegy pont gömbi földrajzi szélessége  $47^{\circ} 26' 21,1372''$ ), és kapcsolata a hengervetületi rendszerekkel csak annyi, hogy meridiánja a hengervetületi rendszerek kezdőmeridiánja.

Az érintő hengervetületek bevezetésekor (1908) a Gellért-hegy pont alapfelületi koordinátáit újra meghatározták, és a háromszögelési hálózat tájékozását is megváltoztatták úgy, hogy a Gellért-hegy pontból kiinduló egyik háromszögoldal azimutját  $6,44''$ -cel csökkentették. A hengervetületi rendszerekre az így elforgatott hálózatot vetítették, viszont a régi sztereografikus koordinátákat változatlanul hagyták, mert a nagyméretarányú felmérések addigra nagyrészt sztereografikus vetületben elkészültek. Ebből következik, hogy amikor egy pont budapesti sztereografikus és a hengervetületi koordinátáiból kiszámítjuk az alapfelületi koordinátákat, egymástól különböző értékeket kapunk.

A 10.3. ábrán  $P_h$  -val és  $P_{sz}$  -szel jelöltük egy  $P$  pont sztereografikus és hengervetületi képét. Szaggatott vonallal a Gellért-hegy pontot a  $P$  ponttal összekötő szakasz hengervetületi képét jelöltük, a folytonos vonalak sztereografikus vetületi képek. Ez utóbbiak – a hengervetületi rendszerek közös  $x$  tengelyét is beleértve – egyenesek, mert azimutális vetület kezdőpontján átmenő gömbi geodéziai vonalak képei. A közöttük levő szögek ugyanakkorák, mint a gömbi megfelelőik. A sztereografikus és a hengervetületi koordinátákból számítható azimutok különbsége (tájékozási különbség) csak a Gellért-hegy pontban  $6,44''$ , máshol ezzel közel egyenlő, egy-egy pontban állandó érték:

$$\gamma = \alpha_{sz} - \alpha_h = 6,44'' \quad (10.1)$$



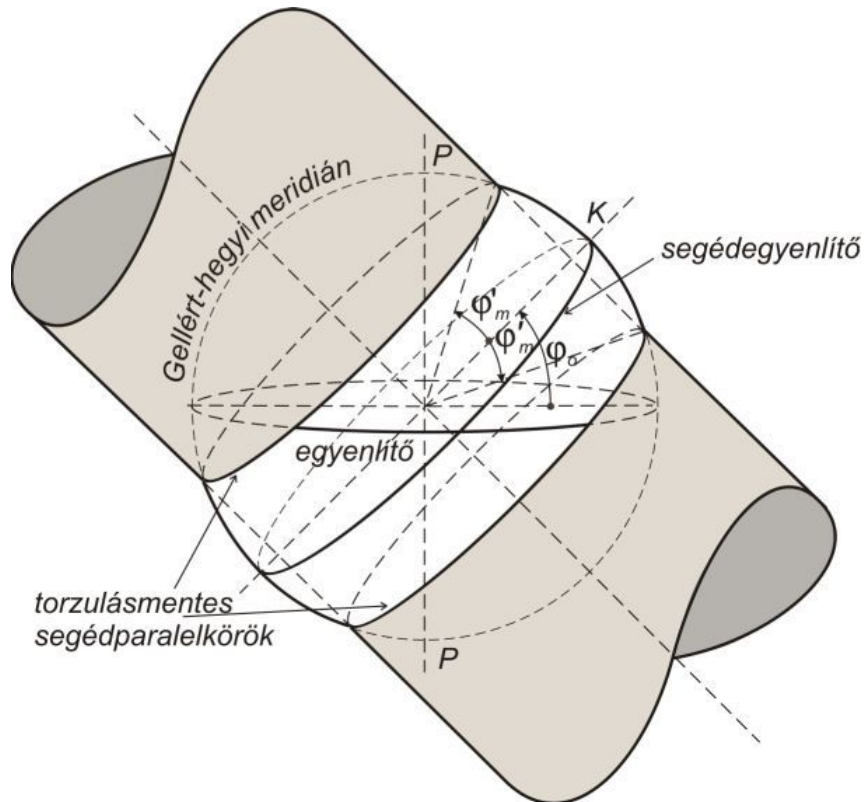
10.3. ábra. A sztereografikus és a hengervetületi rendszerek tájékozási különbsége

A vetületi számításokhoz a ferdetengelyű szögtartó hengervetület általános összefüggéseit használhatjuk, ha  $R$  helyébe a régi magyarországi Gauss-gömb sugarát,  $\varphi_0$  helyébe a megfelelő hengervetületi rendszer kezdőpontjának gömbi földrajzi szélességét, és az  $m_0$  helyébe 1-et helyettesítünk.

Ferdetengelyű érintő hengervetületben csak nagyméretarányú (kataszteri térképek) készültek.

### Ferdetengelyű redukált szögtartó hengervetület (EOV)

Az 1975-ben bevezetett új vetületi rendszerünk alapfelülete az IUGG1967 ellipszoid simulógömbje (új magyarországi Gauss-gömb), melynek sugara:  $R = 6\,379\,743,001$  m. A gömbről egyetlen ferdetengelyű redukált szögtartó hengervetülettel vetítünk a síkra. Ezt a vetületet Egységes országos vetületi rendszernek nevezzük (EOV). Azért vezettek be redukált vetületet, hogy az ország egész területét egyetlen vetületi síkon lehessen ábrázolni (10.4. ábra).



10.4. ábra. Ferdetengelyű redukált hengervetület

A hagyományoknak megfelelően itt is gellérthegyi a kezdőmeridián. A vetületi kezdőpont a kezdőmeridián

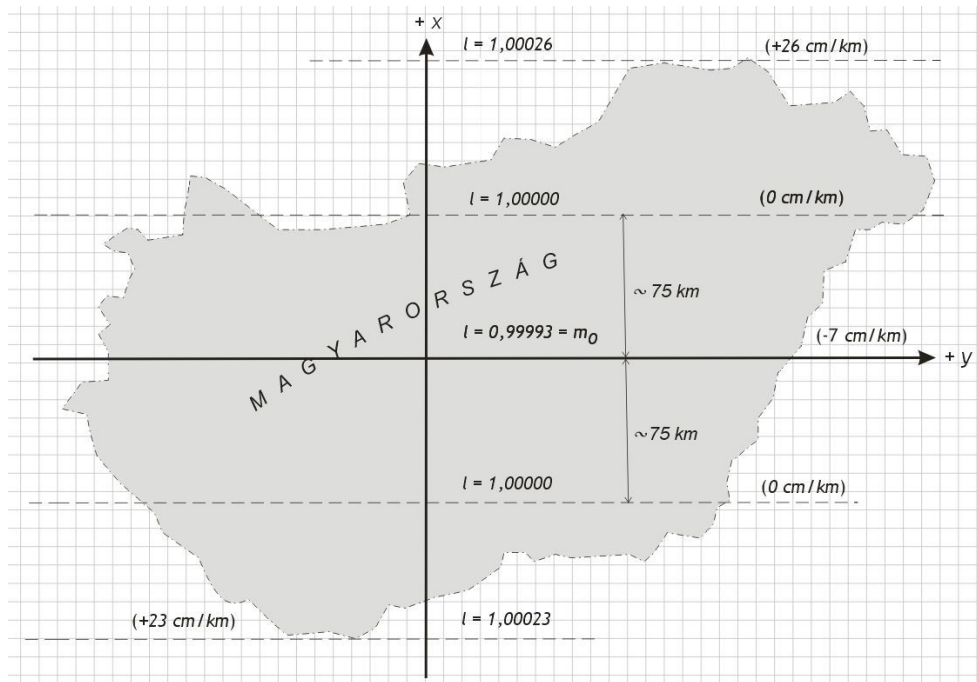
$$\varphi_0 = 47^\circ 06' 0,0000''$$

gömbi földrajzi szélességgel jellemzett helyén van. (Ez a kezdőpont a terepen nem azonos a HKR kezdőpontjával, mert a számszerűen megegyező földrajzi szélesség itt másik ellipszoidhoz simuló másik Gauss-gömbre vonatkozik. A két kezdőpont távolsága mintegy 346 m.)

A redukálás miatt a segédegyenlítőre szimmetrikusan elhelyezkedő két segédparalelkör torzulásmentes, ezek segédföldrajzi szélességének koszinusza egyenlő a vetületi méretarány-tényezővel:

$$m_0 = \cos \varphi'_m = 0,99993.$$

A torzulásmentes segéd paralelkörök között hosszrövidülés jelentkezik, amelynek maximuma a segédegyenlítőn:  $-7 \text{ cm/km}$  (mivel  $l_{\min} = m_0 = 0,99993$ ), ami a segédegyenlítőn  $7 \text{ cm/km}$ -es hosszcsökkenést jelent. A hossztartó segéd paralelkörök és az ország északi, illetve déli határa között hossznövekedés lép fel, amelynek maximuma az országhatár legészakibb pontján  $+26 \text{ cm/km}$  ( $l = 1,00026$ ), a legdélibb pontján pedig  $+23 \text{ cm/km}$  ( $l = 1,00023$ ) (Látható, hogy a több vetületi rendszer elkerülése érdekében engedményt tettek a hossztorzulás korábban megengedett szélső értéke tekintetében.)



10.5. ábra. Az EOV hossztorzulási viszonyai

A síkkoordináta-rendszer  $x$  tengelye a kezdőmeridián egyenesként jelentkező képe, az  $y$  tengely pedig a segédegyenlítő egyenesként jelentkező képe. A negatív előjelű koordináták elkerülése végett, a vetítés végrehajtása után – a koordináta-tengelyek párhuzamos eltolásával – egy segéd koordináta rendszert vesznek fel (10.5. ábra). A vetületi  $(y, x)$  koordináták és a segéd rendszerben értelmezett  $(Y, X)$  síkkoordináták közötti kapcsolat:

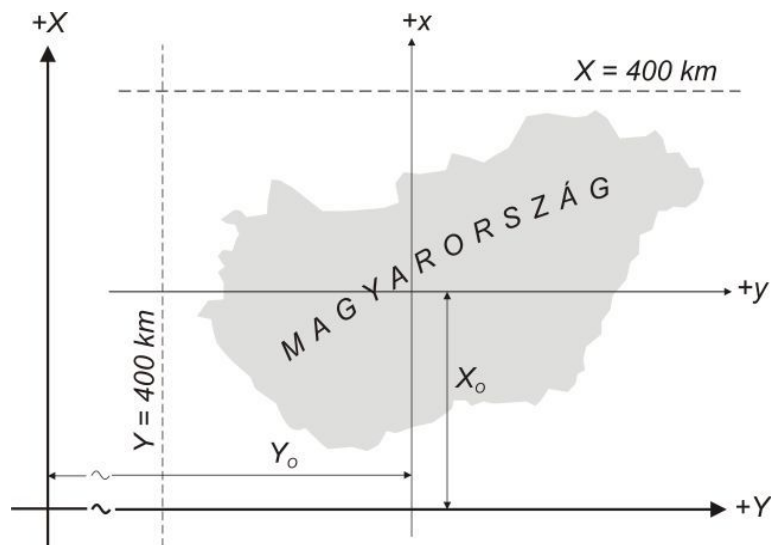
$$Y = y + Y_0, \tag{10.2}$$

$$X = x + X_0,$$

ahol  $Y_0 = 650\,000 \text{ m}$ ,  $X_0 = 200\,000 \text{ m}$ .

A 10.6. ábra szerint az ország egész területén

$$X < 400\,000 \text{ m} < Y. \tag{10.3}$$



10.6. ábra. A síkkoordináta-rendszer kezdőpontjának eltolása EOV-n

Tehát az eltolt koordináta abszolút értékéből könnyen eldönthető, hogy  $Y$  vagy  $X$  koordinátáról van szó. Természetesen mindenféle vetületi számítás a vetületi  $(y, x)$  koordinátákkal végezhető. (Kivétel az irányszög-, távolság- és területszámítás, amely vetületi és eltolt koordinátákkal egyaránt végrehajtható.) A vetületi számításokhoz a ferdetengelyű szögtartó hengervetület általános összefüggéseit használjuk, az EOV megfelelő állandóinak behelyettesítésével.

EOV vetületű térképek az Egységes országos térképrendszer (EOTR) szelvényrendszerében készülnek.

## 11. előadás

### Az ellipszoid vetületei

#### Vetítés ellipszoidról a gömbre

#### A vetítés általános szempontjai

Ha forgási ellipszoiddal helyettesítjük a Földet, de a felszínét gömbön (földgömbön) kívánjuk ábrázolni, akkor az ellipszoidon elképzelt alakzatokat az ellipszoidról gömbre kell vetíteni. Ugyancsak gömbre kell vetíteni akkor is, amikor a Földet ellipszoiddal helyettesítjük, de a síkon olyan ábrázolási módot alkalmazunk, amelynek vetületi egyenletei a sík és a gömb között közvetítenek. Ilyenkor először az ellipszoid felszínéről a gömb felszínére, majd arról a síkra vetítünk.

Az ellipszoidról a gömbre történő vetítésnek csak akkor van gyakorlati értelme, ha feltételnek kikötjük, hogy az ellipszoid paralelköreinek a gömbön is paralelkörök, illetve meridiánok feleljenek meg, továbbá, hogy az ellipszoid paralelköreinek gömbi képén az ellipszoid meridiánjainak képe által határolt ívdarabok arányosak legyenek a megfelelő ellipszoidi ívdarabokkal, vagyis a gömbön a meridiánképek a megfelelő meridiánok földrajzi hosszúságkülönbségével arányos hosszúsági ívdarabokra osszák a paralelkörök képét.

Tekintettel arra, hogy az ellipszoidról a gömbre történő vetítés során, mind az alapfelületen, mind pedig a képfelületen földrajzi koordinátákkal számolunk, az ellipszoidra és a gömbre vonatkozó földrajzi koordináták megkülönböztetése végett az ellipszoid földrajzi koordinátáit görög nagybetűvel jelöljük:

$$\varphi = f(\Phi). \quad (11.1)$$

Azt a követelményt pedig, hogy a gömbi paralelköröket a gömbi meridiánok ugyanolyan arányban osszák, mint a paralelköröket a megfelelő meridiánok az ellipszoidon, a

$$\lambda = n \Delta \Lambda \quad (11.2)$$

feltétellel fejezhetjük ki, amelyben az  $n$  egy arányszám és

$$\Delta \Lambda = \Lambda - \Lambda_0, \quad (11.3)$$

ahol  $\Lambda_0$  a kezdőmeridián ellipszoidi földrajzi hosszúsága.

A földgömbön való ábrázoláshoz, és általában a gömbre történő földrajzi célú vetítéskor megköveteljük, hogy az ellipszoid egyenlítőjének a képfelületi gömbön is egyenlítő feleljen meg, vagyis

$$\Phi = 0^\circ \text{-hoz } \varphi = 0^\circ \quad (11.4)$$

tartozzon. Megköveteljük továbbá azt is, hogy az ellipszoid teljes felületét ábrázolhassuk a gömbön, és ennek megfelelően a gömbi paralelkörök teljes képei legyenek az ellipszoid paralelköreinek. Ebben az esetben a  $\lambda = n\Delta\Lambda$ -ben kifejezett feltétel csak akkor teljesülhet, ha

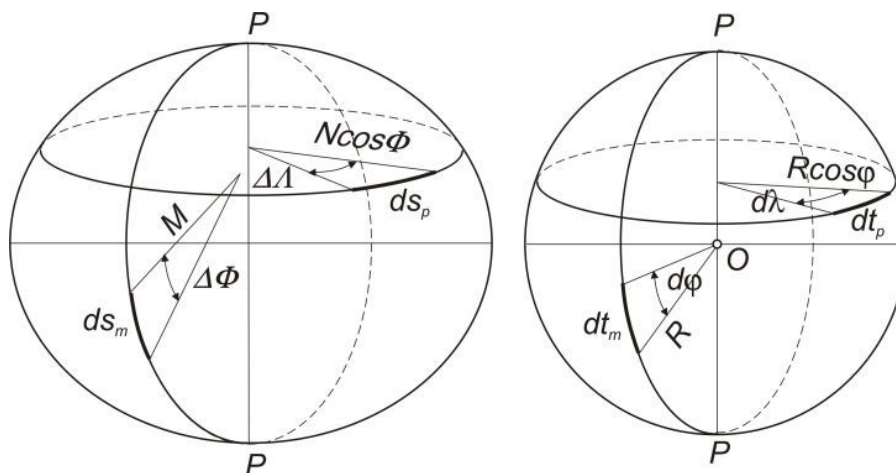
$$n = 1. \quad (11.5)$$

A geodéziai ábrázolás ettől eltérően csak kisebb területre terjed ki, és ilyenkor azt sem követeljük meg, hogy az ellipszoid egyenlítőjének képe a gömb egyenlítője legyen, sem pedig azt, hogy a gömbi paralelkörök az ellipszoid paralelköreinek egészét ábrázolják. A geodéziai ábrázolásban tehát sem a egyik feltételt sem kötjük ki.

A továbbiakban csak a számunkra fontosabb geodéziai célú vetítésekkel foglalkozunk részletesen.

### Lineármódulusok a vetületi főirányokban

Mivel a fokhálózati vonalak úgy az ellipszoidon, mint a gömbön derékszögű vonalrendszert alkotnak, a vetületi főirányok: a meridián és a paralelkör iránya. A (11.1. ábra) alapján a meridián irányú lineármódulus:



11.1. ábra. Fokhálózati vonalak elemi ívdarabjai ellipszoidon és képük gömbön

$$I_m = \frac{dt_m}{ds_m} = \frac{R d\varphi}{M d\Phi}, \quad (11.5)$$

ahol  $R$  a gömb sugara,  $M$  pedig az ellipszoid meridián irányú görbületi sugara a vizsgált pontban. A paralelkör irányú lineármódulus pedig:

$$I_p = \frac{dt_p}{ds_p} = \frac{R \cos \varphi d\lambda}{N \cos \Phi d\Lambda},$$



ahol  $N$  az ellipszoid harántgörbületi sugara a vizsgált pontban. Mivel

$$d\lambda = n d\Lambda$$

a paralelkör irányú lineármódulus képletének végleges alakja:

$$I_p = n \frac{R \cos \varphi d\lambda}{N \cos \Phi d\Lambda}. \quad (11.6)$$

A paralelkörök az azonos torzulású vonalak.

## A Gauss-féle igen kis hossztorzulású szögtartó gömbi vetület

### A vetületi egyenletek

Ha a vetület szögtartó, akkor a meridián (11.5) és a paralelkör irányú lineármódulusoknak (11.6) egymással egyenlőnek kell lenniük:

$$\frac{R d\varphi}{M d\Phi} = n \frac{R \cos \varphi}{N \cos \Phi}.$$

Az egyenletet rendezve:

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} = n \frac{M}{N} \frac{d\Phi}{\cos \Phi}, \text{ majd behelyettesítve } M \text{ (3.1) és } N \text{ (3.2) alatti kifejezéseit}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \Phi}.$$

Tehát

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} = n \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \Phi} \frac{d\Phi}{\cos \Phi}.$$

A bal oldalt  $\varphi$ , a jobb oldalt  $\Phi$  szerint integrálva:

$$\ln \tan \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = n \ln \left[ \tan \left( 45^\circ + \frac{\Phi}{2} \right) \left( \frac{1 - \varepsilon \sin \Phi}{1 + \varepsilon \sin \Phi} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] + \ln k,$$

ahol  $k$  integrálási állandó,  $\varepsilon$  pedig az ellipszoid első numerikus excentricitása. A numerusokra áttérve az ellipszoid szögtartó gömbi vetületének a földrajzi szélességre vonatkozó egyenletét kapjuk:

$$\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = k \tan^n\left(45^\circ + \frac{\Phi}{2}\right) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin \Phi}{1 + \varepsilon \sin \Phi}\right)^{\frac{n\varepsilon}{2}}. \quad (11.7)$$

A földrajzi hosszúságra vonatkozó vetületi egyenlet pedig

$$\lambda = n\Delta\Lambda. \quad (11.8)$$

A  $k$ -t és  $n$ -et az ellipszoid és a gömb kölcsönös helyzetéből lehet meghatározni.

### A vetület követelményei és állandóinak meghatározása

A Gauss-féle igen kis hossztorzulású gömbi vetülettel szemben támasztott követelmények a következők:

1. Már ismert feltétel: a vetület szögtartó legyen.
2. Már szintén ismert feltétel: az ellipszoid paralelköreinek és meridiánjainak képe a gömbön is paralelkör, illetve meridián legyen, és a gömbi paralelköröknek a meridiánokkal határolt ívdarabjai arányosak legyenek az ellipszoid megfelelő paralelköreinek a megfelelő meridiánokkal határolt ívdarabjaival.
3. Valamely egyszer és mindenkorra megválasztott paralelkör, a normálpalelkör torzulásmentes legyen.
4. A lineármódulus bármely pontban az egységtől legfeljebb csak harmadrendű kis mennyiséggel különbözzön. (Ez azt jelenti, hogy a lineármódulus függvényét a normálpalelkörnél sorbafejtve, a sornak azok tagjai, amelyek az első, illetve a második differenciálhányadosot tartalmazzák, zérusok legyenek. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha maguk ezek a differenciálhányadosok is egyenlő zérussal.)

Az 1. és 2. követelményt a (11.7) és (11.8) vetületi egyenletekkel már kielégítettük. A 3. és 4. követelményt ad módot arra, hogy az  $n$  és a  $k$  állandót, valamint a gömb sugarát meghatározzuk.

A 4. feltételből kiindulva a következő három egyenlőséghez jutunk (a normálpalelkörre vonatkozó adatokat  $n$  indexszel jelölve):

$$n \sin \varphi_n = \sin \Phi_n, \quad (11.9)$$

$$V_n \tan \varphi_n = \tan \Phi_n, \quad (11.10)$$

$$R = \sqrt{M_n N_n}. \quad (11.11)$$

Az egyenletekben  $R$  a gömb sugara,  $M_n$  és  $N_n$  az ellipszoid meridián irányú és harántgörbületi sugara a normálparalelkörnél,  $V_n$  pedig az ismert ellipszoidi segédmenyiség a normálparalelkörre vonatkoztatva:

$$V_n = \sqrt{1 + \varepsilon'^2 \cos \Phi_n},$$

ahol  $\varepsilon'$  az ellipszoid második numerikus excentricitása.

Az ellipszoidi és a gömbi normálparalelkör összetartozó értékei a (11.10)-ből határozhatók meg. Ha a normálparalelkör földrajzi szélességét az ellipszoidon választjuk meg, akkor a megfelelő gömbi szélesség közvetlenül számítható. Ha azonban a megválasztás a gömbön történik, akkor az ellipszoidra vonatkozó földrajzi szélességet csak fokozatos közelítéssel számíthatjuk.

A normálparalelkör összetartozó  $\Phi_n$  és  $\varphi_n$  földrajzi szélessége ismeretében (11.9)-ből meghatározható az  $n$  állandó értéke, a (11.11)-ből pedig az ellipszoid normálparalelköréhez tartozó közepes sugarú gömb sugara. Végül a  $k$  állandót a földrajzi szélességre vonatkozó (11.7) vetületi egyenletből számítjuk úgy, hogy a  $\Phi_n$  és a  $\varphi_n$  összetartozó értékpárt, valamint a már meghatározott  $n$  állandót helyettesítjük. Így az egyenletből a  $k$ , mint egyetlen ismeretlen egyértelműen meghatározható.

Mivel a vetület összefüggéseit *K. F. Gauss* vezette le, a (11.11) képlettel meghatározott sugarú gömböt a szakirodalom Gauss-gömbnek is nevezi.

### Lineármódulus és hossztorzulási tényező

Lineármódulus az ellipszoid szögtartó gömbi vetületén:

$$l = 1 - \frac{n R \cos \varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \Phi}}{a \cos \Phi},$$

ahol az  $n$  index a normálparalelkörre utal, továbbá  $R$  a gömb sugara és  $a$  az ellipszoid fél-nagytengelyének hossza.

A hossztorzulási tényezőt a lineármódulusból számíthatjuk:

$$m = \frac{S}{s} = \frac{1}{6} (l_1 + 4 l_k + l_2).$$

$S$  a geodéziai vonaldarab hossza az ellipszoidon,  $s$  a gömbre vetített legnagyobb gömbi körív hossza,  $l_1$  és  $l_2$  a lineármódulus a vonaldarab két végpontján,  $l_k$  pedig a vonaldarab közepén.

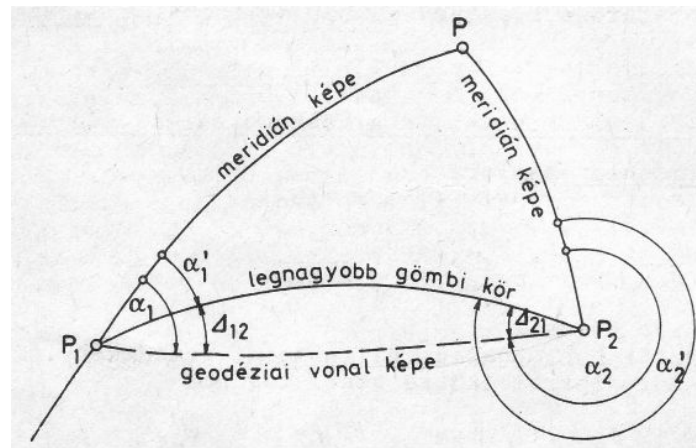
## Azimutredukció

Ha az ellipszoid két felületi pontjának gömbi képe között meghúzzuk a legnagyobb gömbi körívet, az általában nem azonos az ellipszoid geodéziai vonaldarabjának pontonként vetített valódi képével (11.2. ábra). Mivel a vetítés szögtartó módon történik, az  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  szögek megegyeznek az ellipszoidi azimutokkal, míg az  $\alpha'_1$  és  $\alpha'_2$  szögek a gömbi azimutok. A megfelelő szögek különbségei az ún. azimutredukciók:

$$\Delta_{12} = \alpha'_1 - \alpha_1,$$

$$\Delta_{21} = \alpha'_2 - \alpha_2,$$

melyeknek fogalma lényegében hasonló a gömb vagy az ellipszoid síkvetületei második irányredukciójának fogalmához. Az azimutredukció előjelét úgy értelmezzük, hogy a redukciót előjelhelyesen hozzáadva az ellipszoidi azimuthoz, a gömbi azimutot kapjuk.



11.2. ábra. Az azimutredukció értelmezése

Az azimutredukció a meridián irányában zérus, és amikor az irány mindkét végpontja ugyanazon a paralelkörön van, akkor maximális. A 19. századi kettős vetítésnél az azimutredukció szélső esetben 50 km-es hosszánál is csak 0,007" volt, az új kettős vetítésnél pedig még ennél is kisebb, így hazánkban még az elsőrendű háromszögelési hálózatban sem vették soha figyelembe. Gyakorlatilag az ellipszoidi azimutokat gömbi azimutoknak tekintjük.

## A kettős vetítés elve és alkalmazása a magyar geodéziában

A geodéziai ábrázolásban általában ellipszoid az alapfelület. A vetítés az ellipszoidról síkra, illetve síkba fejthető felületre történhet közvetlenül, vagy közvetve is úgy, hogy az ellipszoidról először gömbre vetítünk szögtartó módon, majd a gömbről térünk át a síkra, illetve a síkba fejthető felületre, tehát kettős vetítést végzünk.

Kiseb területű országban, az ellipszoid és az ország közepe táján az ellipszoidhoz számított simulógömb felszíne csak olyan kis mértékben tér el egymástól, hogy a felsőgeodéziai mérések nagy része is megengedi az ellipszoid felületének gömbbel való helyettesítését. Ez a körülmény különösen akkor jelentett nagy munkamegtakarítást, amikor a számításokat logaritmussal, később mechanikus számológéppel végezték. A gömb és a sík közötti matematikai összefüggések ugyanis jóval egyszerűbbek, mint az ellipszoid és a sík közötti egyszerű vetítéskor. Ma már nem jelent nehézséget az ellipszoidról a síkra történő közvetlen átszámítás sem.

A kettős vetítés elvét a Gauss-féle igen kis hossztorzulású szögtartó gömbi vetület felhasználásával világviszonylatban Magyarországon alkalmazták először (1857). A háromszögelésben a mért irányértékeket ellipszoidinak tekintették, de a gömbre való áttéréskor azimutredukciót nem alkalmaztak. Még a történelmi Magyarország észak-déli kiterjedésében sem volt szükséges azimutredukciót számítani, mert értéke 50 kilométeres hosszon is szélső esetben csak 0,008" volt, ami csupán  $\pm 2$  mm lineáris ingadozásnak felel meg. A lineármódulus eltérése az egységtől pedig mintegy 1/4 millió volt. Magyarország mai területén ezek az értékek lényegesen kisebbek.

A korábbi magyarországi gömbi vetület alapfelülete a Bessel ellipszoid. A képfelületet az ún. régi magyarországi Gauss-gömb szolgáltatja. Ez utóbbi normálpáralelkörének földrajzi szélességét választották meg kerek értékűnek:

$$\varphi_n = 46^\circ 30' 0,000 00''.$$

Ehhez a Bessel ellipszoidon a

$$\Phi_n = 46^\circ 32' 43,410 41''$$

földrajzi szélesség tartozik.

A régi magyarországi gömbi vetület állandói:

$$R = 6\,378\,512,966 \text{ m},$$

$$k = 1,003\,016\,135\,133, \quad n = 1,000\,751\,489\,594.$$

A régi Gauss-gömből a síkra 1908-ig sztereografikus vetülettel tértek át, azóta pedig emellett még három ferdetengelyű érintő szögtartó hengervetületet is használnak.

Az új magyarországi gömbi vetület alapfelülete az IUGG1967 ellipszoid. A képfelületet az ún. új magyarországi Gauss-gömb adja. Az ellipszoid normálpáralelkörének földrajzi szélességét választották meg kerek értékűnek:

$$\Phi_n = 47^\circ 10' 0,000 00''.$$

Ehhez az új gömbön a

$$\varphi_n = 47^\circ 07' 20,057 80''$$

földrajzi szélesség tartozik.

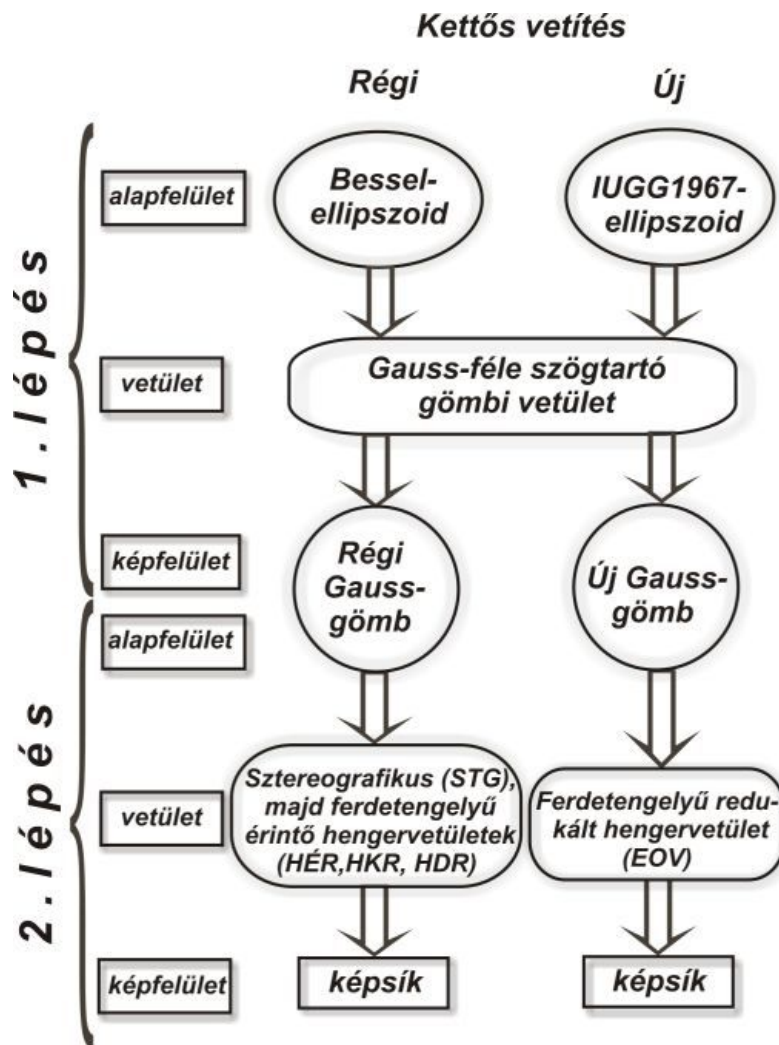
Az új magyarországi gömbi vetület állandói:

$$R = 6\,379\,743,001 \text{ m,}$$

$$k = 1,003\,110\,0083, \quad n = 1,000\,719\,7049.$$

Az új Gauss-gömből a síkra egyetlen ferdetengelyű redukált szögtartó hengervetülettel térünk át.

A földrajzi hosszúságot – a régi és az új gömbön egyaránt – a gellérthegyi meridián gömbi megfelelőjétől számítjuk.



11.3. ábra. A magyarországi kettős vetítések

### Földrajzi koordináták átszámítása az ellipszoid és a gömb között

A Gauss-féle igen kis hossztorzulású szögtartó gömbi vetület vetületi egyenletei a következők:

$$\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = k \tan^n\left(45^\circ + \frac{\Phi}{2}\right) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin \Phi}{1 + \varepsilon \sin \Phi}\right)^{\frac{n\varepsilon}{2}}, \quad (11.12)$$

$$\lambda = n\Delta A. \quad (11.13)$$

A vetület állandóinak és az ellipszoidi földrajzi szélességnek az ismeretében a gömbi földrajzi szélesség (11.12)-ből egyszerűen számítható. A fordított művelet csak fokozatos közelítéssel végezhető el, mert  $\Phi$  és a  $\sin \Phi$  is szerepel a képletben.

Korábban, amikor a számításokat logaritmussal, vagy szögfüggvénytáblázattal és mechanikus számológéppel végezték, a (11.12) vetületi egyenlet megoldása meglehetősen nehézkes volt. Az átszámítások megkönnyítésére a Bessel ellipszoidról a régi magyarországi Gauss-gömbre történő átszámításhoz Marek János (1834-1900) és Hoffmann Ferenc (1828-1900) készítettek táblázatot. A táblázat a  $\varphi$  gömbi földrajzi szélesség minden kerek 10"-ére megadja a  $\Phi - \varphi$  különbséget. Az adatok között interpolálni kellett.

Mivel a (11.12) megoldása számítógéppel nem jelent nehézséget, az IUGG1967 és az új magyarországi Gauss-gömb közötti földrajzi szélesség átszámítás céljára táblázatot nem készítettek.

A gömbi szélességből ellipszoidi szélesség számításához (11.12)-ből:

$$\Phi = 2 \arctan \left[ \frac{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{k \left(\frac{1 - \varepsilon \sin \Phi}{1 + \varepsilon \sin \Phi}\right)^{\frac{n\varepsilon}{2}}} \right]^{\frac{1}{n}} - 90^\circ.$$

Először helyettesítsük az adott  $\varphi$  gömbi szélességet a nevező ellipszoidi  $\Phi$  szélességének helyébe. Ezután mindig az egyre jobban közelítő  $\Phi$ -t helyettesítjük az egyenlet jobb oldalába. A fokozatos közelítést akkor hagyjuk abba, amikor a kapott  $\Phi$  érték az előzőtől a megkívánt számítási élességet figyelembe véve már nem különbözik.

## Az ellipszoid és a gömb közötti vetítést megkívánó feladatok

Az ellipszoidról a gömbre vagy a gömbről az ellipszoidra való – geodéziai célból végzett – átszámításra általában a következő feladatok során lehet szükség:

1. Ha az országos elsőrendű háromszögelési hálózat kiegyenlítése az ellipszoidon történik, és kiszámítjuk azon a pontok ellipszoidi koordinátáit  $(\Phi, \lambda)$ , akkor az elsőrendű háromszögelési hálózat pontjait a további geodéziai munkálatok céljaira – abban az esetben, ha ezekben a munkálatokban gömb alapfelülethez tartozó síkvetületet alkalmazunk -, a gömbre, majd a síkra kell vetíteni.
2. Ha az országos elsőrendű háromszögelési hálózat kiegyenlítése a gömbön vagy az egyik olyan síkvetületen történik, amelynek alapfelülete gömb, akkor vissza kell térnünk az ellipszoidra, hogy a függővonal elhajlások megállapítása céljából az ellipszoidi koordinátákat összehasonlíthassuk a földrajzi helymeghatározás adataival.
3. Ha egymástól nagyon távol levő pontok összekötő irányát kell a terepen kijelölnünk olyan háromszögelési hálózat alapján, amelynek síkvetületi rendszere gömb alapfelülethez tartozik, és a pontok koordinátái csak az ellipszoidon adóttak.

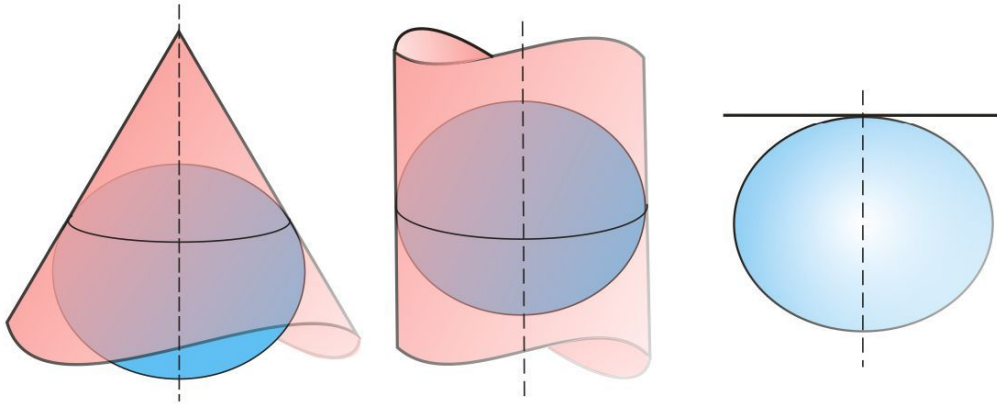
## Az ellipszoid valós síkvetületei

A hengervetületekről a gömb hengervetületeinek tárgyalása során általánosságban mondtunk az ellipszoid hengervetületeire is vonatkoznak, de itt gyakorlati érteleme csak a normális és az egyenlítői hengervetületnek van. Az utóbb említett elhelyezés mellett is általában csak a szögtartó hengervetület két változatát használják geodéziai célra: az érintő *Gauss–Krüger-vetületet* és a redukált *UTM-vetületet* (11.5. ábra).

Az ellipszoid valós hengervetületei is lehetnek szögtartók, területtartók és olyanok, amelyekben a meridiánok hossztartók. A henger elhelyezhető érintő és redukált helyzetben, és teljesíthetők mindazok a feltételek, amelyeket a gömb valós hengervetületeivel kapcsolatban tárgyaltunk. Így például kiköthető, hogy az ábrázolandó terület határparalelkörein egyenlő legyen a hossztorzulás. A kívánalmak lényegében ugyanúgy teljesíthetők matematikailag, mint a gömb hengervetületeire, de természetesen az ellipszoid bonyolultabb matematikai viszonyainak megfelelően bonyolultabb matematikai levezetésekkel és képletekkel.

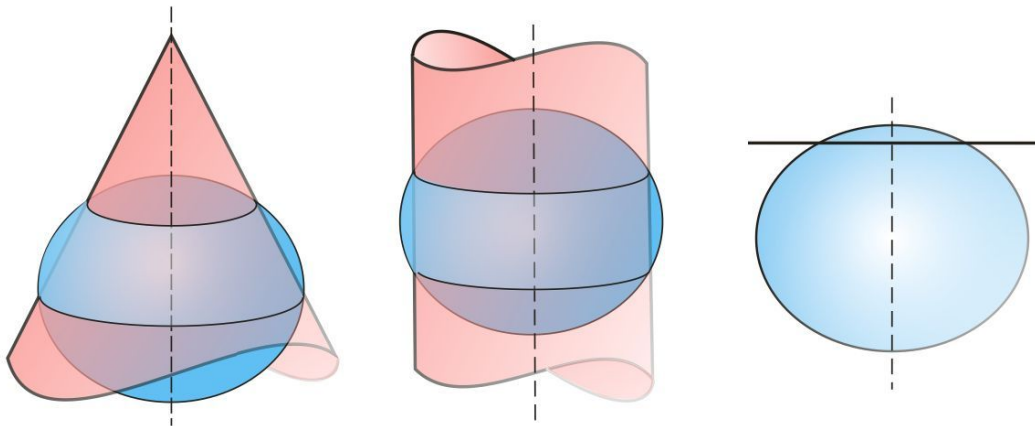
Hengerre a vetítés az ellipszoidról is történhet perspektív módon, de ezeket a vetületeket a gyakorlatban csak ritkán használják.





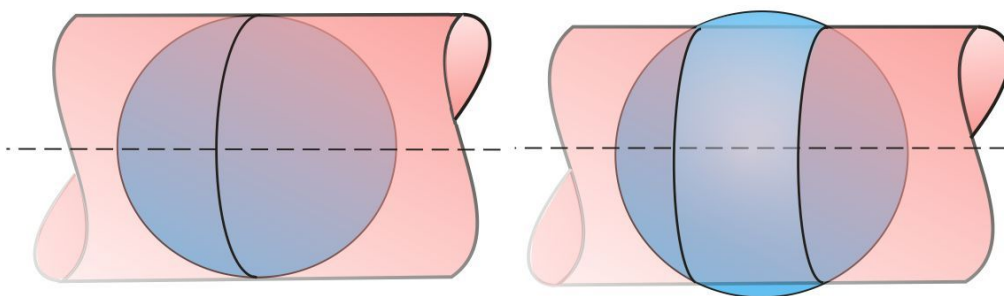
11.3. ábra. Az ellipszoid normális elhelyezésű érintő kúp-, henger- és azimutális vetülete

A kúpvetületről a gömb valós kúpvetületeinek tárgyalása során általánosságban mondottak az ellipszoid kúpvetületeire is érvényesek, de itt gyakorlati érteleme csupán a normális elhelyezésű kúpvetületnek van. Ennek redukált szögtartó változatát alkalmazzák geodéziai célokra (11.4. ábra). Egyébként mindaz, amit az előbbieken az ellipszoid hengervetületeire megjegyeztünk, értelemszerűen az ellipszoid kúpvetületeire is vonatkozik.



11.4. ábra. Az ellipszoid normális elhelyezésű redukált (metsző) kúp-, henger- és azimutális vetülete

Megemlítjük még, hogy az ellipszoidnak közvetlen síkvetületei is vannak, így pl. azimutális vetülete is van. Az UTM-vetület helyett a pólusok körüli területek ábrázolására normális elhelyezésű redukált szögtartó azimutális vetületet alkalmaznak (UPS-vetület) (11.4. ábra)



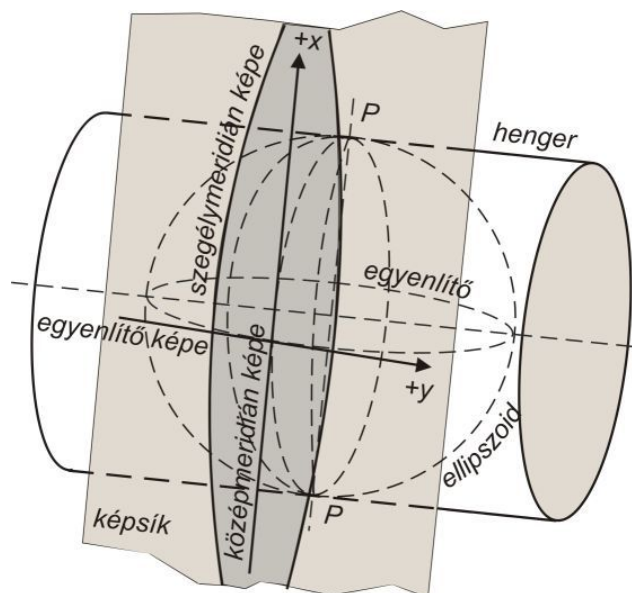
11.5. ábra. Az ellipszoid egyenlítői elhelyezésű érintő és redukált hengervetülete

## 12. előadás

### Gauss–Krüger-vetület

#### A vetület elvei és vetületi sorai

A Gauss–Krüger-féle ábrázolási mód (vetület) a Gauss-féle szögtartó síkvetület elveit alkalmazza az ellipszoidra, mint alapfelületre. A Gauss–Krüger-vetületen az  $x$  koordináta megegyezik az ellipszoid Soldner-féle koordináta-rendszerének  $x$  koordinátájával, az  $y$  pedig a Soldner-féle koordinátához képest úgy változik, hogy a vetület szögtartó legyen. Végeredményben tehát a Gauss–Krüger-vetület nem más, mint az ellipszoid egyenlítői elhelyezésű érintő szögtartó hengervetülete.



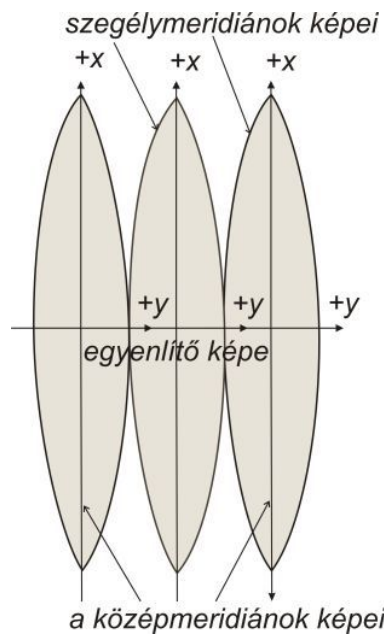
12.1. ábra. Gauss–Krüger-vetület keletkezése

A Gauss–Krüger-vetület úgy keletkezik, hogy az ellipszoidhoz olyan hengert rendelünk, amelynek az egyenlítő síkjában fekvő tengelye átmegy az ellipszoid középpontján (transzverzális elhelyezés) és a képzeletbeli hengernek a tengelyére merőleges síkmetszete olyan ellipszis, amely teljesen, tehát alakra és méretre is megegyezik az ellipszoid meridián-ellipszisével (12.1. ábra). Ebben az esetben a henger és az ellipszoid közös vonala az érintési meridián a torzulásmentes vonal, tehát az  $m_0$  vetületi méretarány-tényező az egységgel egyenlő.

Miután a hossz- és területtorzulás az előbbi meridiántól távolodva nő, a torzulásokra az ábrázolás kívánalmi szerint megszabott határnak megfelelően egy vetületi rendszer az érintési meridiántól csak egy bizonyos földrajzi hosszúságkülönbségig használható. Az 12.1. ábrán feltüntetett két ún. szegélymeridián a vetületi rendszer – illetve, ahogy ennél a vetületnél nevezik – vetületi sáv határait jelöli ki. Az egyes vetületi sávokhoz tartozó

képzeltbeli hengerek palástja természetesen mindig az illető sáv középmeridiánja mentén érinti az ellipszoidot (12.2. ábra).

Az érintési vonal képe az  $x$  tengely, pozitív ága észak felé mutat, és ennek megfelelően az  $y$  tengely (az egyenlítő képe) pozitív ága kelet felé irányul. A síkkoordináta-rendszer kezdőpontját általában alkalmasan megválasztott  $X_0$  és  $Y_0$  értékkel úgy tolják el, hogy egy adott területen minden koordináta pozitív előjelű legyen, és ne kelljen túl nagy abszolút értékű síkkoordinátákkal számolni.



12.2. ábra. Gauss–Krüger-vetületi sávok

A vetületi sorok a szögtartóság alapegyenletéből vezethetők le. Az alábbiakban a vetület általános – redukált elhelyezés esetén is érvényes – összefüggéseit mellékeljük.

Az eltoló Gauss–Krüger síkkoordináták az

$$X = X_0 + m_0 x = X_0 + B_0 + A_2 \Delta\lambda^2 + A_4 \Delta\lambda^4 + \dots, \quad (12.1)$$

$$Y = Y_0 + m_0 y = Y_0 + A_1 \Delta\lambda + A_3 \Delta\lambda^3 + A_5 \Delta\lambda^5 + \dots,$$

sorokból számíthatók. A sorok együtthatói közül pl. az  $A_5$  jelentése:

$$A_5 = \frac{N m_0}{120 \rho^5} \cos^5 \phi (5 - 18 \tan^2 \phi + \tan^4 \phi).$$

$B$  a meridiánív hosszát jelenti az egyenlítőtől számítva a ponton átmenő  $\phi$  földrajzi szélességű paralelkörig,  $\Delta\lambda$ -val a pont középmeridiánra vonatkozó földrajzi hosszúságát,  $\rho$ -val az analitikus szögegységet jelöltük.

$$\Delta \Lambda = \Lambda - \Lambda_K, \quad (12.2)$$

ahol  $\Lambda_K$  a sáv középmeridiánjának földrajzi hosszúsága. Az  $\eta$  ellipszoidi segédmennyiség.

Síkkoordinátákból a földrajzi koordináták számítása:

$$x = X - X_0,$$

$$y = Y - Y_0,$$

$$\Phi = \Phi_T + B_2 y^2 + B_4 y^4 + \dots,$$

$$\Delta \Lambda = B_1 y + B_3 y^3 + B_5 y^5 + \dots,$$

$$\Lambda = \Lambda_K + \Delta \Lambda.$$

Pl. a  $B_5$  jelentése:

$$B_5 = \frac{\rho}{120 N_T^5 m_0^5 \cos \Phi_T} (5 + 28 \tan^2 \Phi_T + 24 \tan^4 \Phi_T).$$

$\Phi_T$  a kérdéses pontból a középmeridiánra merőleges geodéziai vonal középmeridiánon levő talppontjának földrajzi szélessége.

A  $B$  és az  $A_1 \dots A_5$ , valamint  $B_1 \dots B_5$  értékek az ellipszoid méreteitől és a pont földrajzi szélességétől függő állandók. Az állandókat a földrajzi szélesség kerek értékeire, pl. annak minden percére, a  $\Phi_T$  értéket pedig az  $x$  koordináta kerek értékeire, pl. kilométerenként táblázatba foglalhatjuk, és a közbeeső együttthatókat a táblázati értékek között interpoláljuk. (A  $B_1 \dots B_5$  értékeket  $\Phi_T$ -hez, a többieket  $\Phi$ -hez kell interpolálni.)

A magyarországi számításokhoz használható táblázatok a Hazay–Tárczy-Hornoch: *A Gauss–Krüger koordináták számítása* című műben megtalálhatók. A táblázatokat Hayford- és Kraszovszkij-ellipszoid alapfelület esetére is elkészítették. Az  $m_0$  vetületi méretarány-tényező azért szerepel az összefüggésben, hogy azok redukált egyenlítői elhelyezésű hengervetületre is érvényesek legyenek. A Gauss–Krüger-vetületen az  $m_0$  természetesen az egységgel egyenlő.

Számítógépi programok készítésére alkalmasabb összefüggések találhatóak *A vetületnélküli rendszerektől az UTM-ig* című vetületi összefoglalóban: <http://www.agt.bme.hu/varga/Osszes/Dok3uj.htm>.

### A vetületi meridiánkonvergencia és a lineármódulus sorai

A vetületi meridiánkonvergencia éppúgy, mint a lineármódulus, mind a földrajzi-, mind a vetületi síkkoordinátákból (nem az eltolt  $X$ ,  $Y$ -ból) számítható. A vetületi meridiánkonvergencia sora:

$$\mu = C_1 \Delta \lambda + C_3 \Delta \lambda^3 + C_5 \Delta \lambda^5 = K_1 y + K_3 y^3 + K_5 y^5,$$

Ahol  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_5$  együtthatók a földrajzi szélességtől,  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $K_5$  pedig a  $\Phi_T$ -től függenek.

A képletből  $\mu$ -t előjelhelyesen kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a földrajzi szélesség is előjeles mennyiség (az egyenlítőől északra pozitív, délre negatív). A kapott előjel szemlélet alapján is könnyen ellenőrizhető, mert a vetületi meridiánkonvergencia előjele az északi féltekén a középmeridiántól keletre (a keleti fél sávban) mindig pozitív, a nyugati fél sávban pedig mindig negatív, azaz megegyezik a vetületi (eltolás nélküli)  $y$  koordináta előjével. A déli féltekén ezzel ellentétes az előjelek alakulása.

A lineármódulus sorai pedig:

$$l = m_0 + H_2 \Delta \lambda^2 + H_4 \Delta \lambda^4 = m_0 + T_2 y^2 + T_4 y^4, \quad (12.3)$$

Ahol  $H_2$  és  $H_4$  a földrajzi szélességtől függenek és

$$T_2 = \frac{1}{2 R_k^2 m_0}, \quad T_4 = \frac{1}{24 R_k^4 m_0^3}.$$

$R_k$  a kérdéses pont földrajzi szélességéhez tartozó közepes sugarú gömb sugarát jelenti. A  $C$ ,  $H$ ,  $K$  és  $T$  együtthatók is táblázatba foglalhatók. A  $C$  és  $H$  együtthatókat a  $\Phi$ ,  $K$  és  $T$  együtthatókat pedig a  $\Phi_T$  értékhez kell interpolálni. Természetesen készíthetők a végeredményeket közvetlenül adó számítógépi programok is.

### Hossztorzulási tényező és irányredukció

A hossztorzulási tényező képlete:

$$m = m_0 + e y_k^2 + f \Delta y^2 + g y_k^4,$$

ahol

$$e = \frac{1}{2 R_k^2 m_0}, \quad f = \frac{1}{24 R_k^2 m_0}, \quad g = \frac{1}{24 R_k^4 m_0^3}.$$

$$y_k = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad (12.4)$$

$R_k$  a vonaldarab közepéhez tartozó simulógömb sugara,  $y_1$  és  $y_2$  pedig a vonaldarab két végpontjának koordinátái.

Az irányredukciók képlete:

$$\Delta_{12}'' = -a y_k \Delta x + b \Delta x \Delta y + c y_k^3 \Delta x - d y_k^2 \Delta y,$$

$$\Delta_{21}'' = a y_k \Delta x + b \Delta x \Delta y - c y_k^3 \Delta x + d y_k^2 \Delta y,$$

ahol a (12.4) alatt megadott értékeken kívül

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

és

$$a = \frac{\rho''}{2 R_k^2 m_0^2}, \quad b = \frac{\rho''}{12 R_k^2 m_0^2}, \quad c = \frac{\rho''}{6 R_k^4 m_0^4},$$

$$d = \frac{\rho''}{R_k^3 m_0^3} \tan \Phi_k \eta_k^2.$$

### A Gauss–Krüger-vetület sávbeosztása

A lineármódulus (12.3) képletéből látható, hogy a hossztorzulás lényegében a középmeridián képeivel azonos  $x$  tengelytől számított távolság négyzetével arányosan nő. A sor harmadik tagjának elhagyása és  $m_0 = 1$  behelyettesítése után a Gauss–Krüger-vetület alkalmazási határát az

$$l_{\max} \approx 1 + T_2 y_{\max}^2 = 1 + \frac{1}{2R^2} y_{\max}^2$$

összefüggés határozza meg, melyben  $l_{\max}$  a megengedett legnagyobb lineármódulus. Ebből:

$$y_{\max} = R \sqrt{2(l_{\max} - 1)}.$$

Ha km-enként 1/10 000 mértékű hossznövekedést engedünk meg, akkor  $(l_{\max} - 1) = 0,0001$  és

$$y_{\max} = R \sqrt{0,0002} = 0,0141R.$$

$R$  helyébe Magyarország közepes földrajzi szélességéhez tartozó simulógömb sugarát helyettesítve:

$$y_{\max} \approx 90 \text{ km},$$

ami az előbbi földrajzi szélességen

$$\Delta A_{\max} \approx 1,2^\circ$$

középmeridiánra vonatkozó hosszúságnak felel meg. Magyarországon tehát a középmeridiánhoz szimmetrikusan elhelyezkedő  $2 \times 1,2^\circ = 2,4^\circ$  szélességű sáv szegélymeridiánjain éri el a hossztorzulás az 1/10 000 értéket.

Nagyméretarányú térképezés céljára  $2^\circ$ -os vagy  $3^\circ$ -os sávbeosztást alkalmaznak. Magyarországon a  $2^\circ$ -os sáv szélein a lineármódulus:

$$l = 1,00008,$$

a  $3^\circ$ -os sáv szélein pedig:

$$l = 1,00018.$$

Topográfiai térképek szerkesztéséhez a nemzetközi beosztás  $6^\circ$ -os sáv szélességet állapít meg. A  $6^\circ$ -os sávok szélein

$$l = 1,00068.$$

Magyarországon a Gauss–Krüger-vetületet csak  $6^\circ$ -os sáv szélességgel alkalmazzák.

Az előbbiekből kitűnik, hogy a Gauss–Krüger-vetületen csak kelet-nyugati irányban korlátozott kiterjedésű terület ábrázolható egybefüggően. A sávbeosztás – legyen az  $S$  sáv szélesség akár  $2^\circ$  vagy  $3^\circ$ , akár  $6^\circ$  – az ellipszoidot egymással  $S$  nagyságú szöget bezáró meridiánokkal határolt kétszögekre, vetületi sávokra osztja. Ezeket a meridiánokat szegélymeridiánoknak nevezzük. Minden egyes vetületi sávhoz a síkon egy-egy koordináta-rendszer tartozik. A kétszög középmeridiánjának egyenesként jelentkező képe a vetületi sáv koordináta-rendszerének  $x$  tengelye. Ennek pozitív ága észak felé mutat. Az egyenlítő képe a középmeridián képére merőleges egyenes: ez az  $y$  tengely, amely észak-keleti tájékozású koordináta-rendszerben kelet felé irányul.

A koordináta-rendszereket az kapcsolja egybe, hogy az  $y$  tengelyek egy egyenesbe esnek. A koordináta rendszer kezdőpontja a középmeridián és az egyenlítő metszéspontjának képe. A szomszédos sávok szegélymeridiánjai az egyenlítőnél érintik egymást (12.2. ábra).

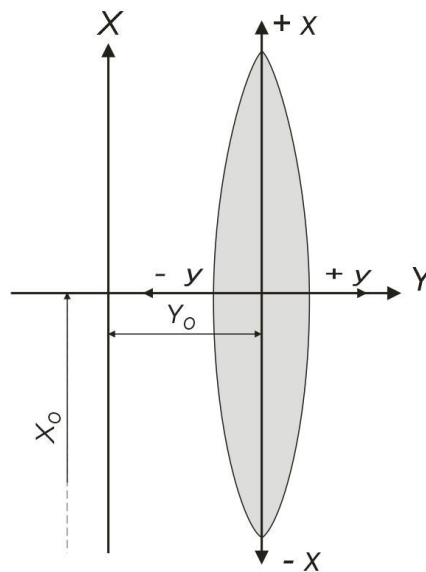
A nemzetközi  $6^\circ$ -os sávrendszer kialakításához átvették az 1 : 1 000 000 méretarányú világtérkép meridián irányú beosztását. Az ellipszoid felületét az áttelnes meridiántól kezdve 60 darab  $6^\circ$ -os sávra osztották, és ezeket a



sávokat kelet felé haladva arab számokkal (zónaszám) jelölték. Így a greenwichi meridián a 30. sávot zárja. Magyarország, amelynek területe nyugat-keleti irányban  $16^\circ$  földrajzi hosszúságtól a  $23^\circ$  földrajzi hosszúságig terjed a 33. és 34. sávba esik. Ezeknek a sávoknak a középmeridiánja a  $15^\circ$  és  $21^\circ$  földrajzi hosszúságú meridián, a szegélymeridiánok földrajzi hosszúsága pedig  $12^\circ$  és  $18^\circ$ , illetve  $18^\circ$  és  $24^\circ$ .

A nagyméretarányú térképezésre szolgáló  $2^\circ$ -os, illetve  $3^\circ$ -os sávrendszert célszerű úgy kialakítani, hogy a  $6^\circ$  sávok középmeridiánjai egyúttal keskenyebb sávok középmeridiánjai is legyenek. Így Magyarország számára, noha nyugat-keleti kiterjedése csak  $7^\circ$ , négy  $3^\circ$ -os sávra ( $15^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $21^\circ$ ,  $24^\circ$  földrajzi hosszúságú középmeridiánokkal), illetve ugyancsak négy  $2^\circ$ -os sávra ( $17^\circ$ ,  $19^\circ$ ,  $21^\circ$  és  $23^\circ$  földrajzi hosszúságú középmeridiánokkal) lett volna szükség.

A Gauss–Krüger ábrázolási módot a Föld országainak többsége bevezette és alkalmazza geodéziai és topográfiai munkálataihoz. Gauss–Krüger-vetületet vezetett be katonai célokra a volt Varsói Szerződés tagállamaival együtt Magyarország is. Az összekapcsolt és közösen kiegyenlített háromszögelési hálózatot a *Kraszovszkij ellipszoidon*, mint alapfelületen helyezték el.



12.3. ábra. Segéd koordináta-rendszer Gauss–Krüger-vetületen

A negatív előjelű síkkoordináták kiküszöbölésére az  $y$  vetületi koordinátákhoz mindegyik sávban (12.3. ábra)

$Y_0 = 500\,000$  m-t adtak hozzá:

$$Y = y + Y_0.$$

Az  $x$  koordináta mindig pozitív, ezért nem kell eltolást alkalmazni:

$$X = x + X_0.$$

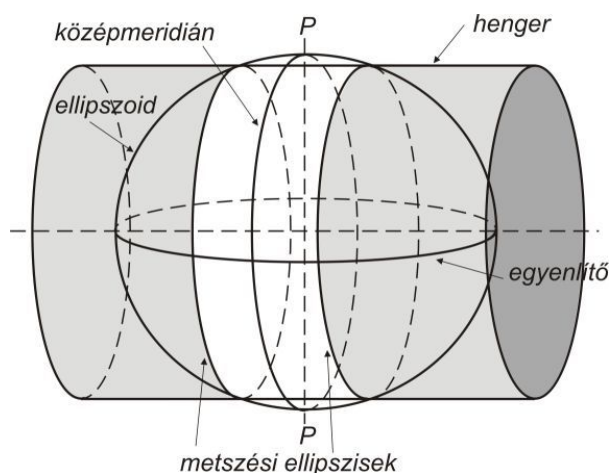
Az  $X_0$  zérus is lehet.

A vetületi egyenletekből nem tűnik ki, hogy egy kérdéses pont melyik  $6^\circ$ -os sávban van, hiszen  $Y_0 = 500\,000$  m mindegyik sávban, ezért a zónaszám második számjegyét (a 33. sávban 3-at, a 34. sávban 4-et) a  $Y$  koordináta elé írják.

### Universal Transverse Mercator (UTM) vetület

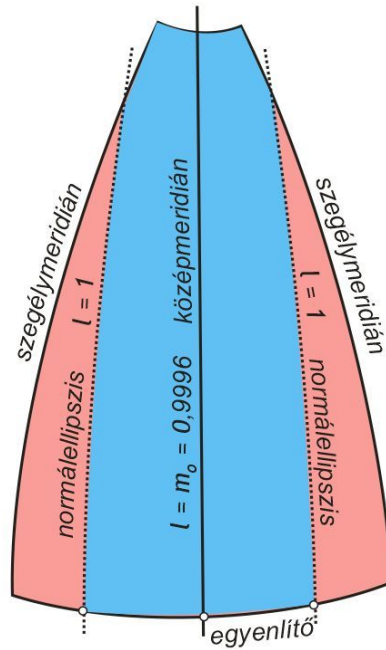
A vetület egyenlítői elhelyezésű (transzverzális) univerzális hengervetület angol nyelvű elnevezésének (Universal Transverse Mercator projection) kezdőbetűiből kapta a nevét. Ezt a vetületfajtát – különböző alapfelületekhez – a világ számos országában alkalmazzák topográfiai célokra.

A képfelület egyenlítői elhelyezésű hengerpalást sorozat. Mindegyik hengerpalást az adott sáv középmeridiánjára szimmetrikusan elhelyezkedő két normálellipszis mentén metszi az ellipszoidot (12.4. ábra). E két ellipszis torzulásmentes; a közöttük levő területen a hosszak rövidülnek, a normálellipszisek és a szegélymeridiánok közötti területen pedig növekednek (12.5. ábra).



12.4. ábra. Az ellipszoid egyenlítői elhelyezésű redukált hengervetülete (UTM vetület)

Az UTM vetület tehát az előbb felsorolt ellipszoidokhoz alkalmazott redukált Gauss–Krüger-vetület. Ennek értelmében vetületi összefüggései megegyeznek a Gauss–Krüger-vetület általános (redukált elhelyezésre is érvényes) egyenleteivel, csak más betűjelzéseket használnak. A sáv középmeridiánjának képe pl. a  $\Delta N$ , az egyenlítő képe pedig a  $\Delta E$  tengely.



12.5. ábra. UTM vetületi sáv torzulási viszonyai

A vetületi méretarány-tényező:

$$m_0 = \cos \Delta\lambda_n = 0,9996,$$

ahol  $\Delta\lambda_n$  a normálellipszis és az egyenlítő metszéspontjának a középméridiántól mért földrajzi hosszúsága. UTM számítások esetén ezt az  $m_0$  számot kell a Gauss–Krüger–vetület megismert összefüggéseibe behelyettesíteni. A vetületi sorok együttthatói az alapfelületet adó ellipszoidhoz készített táblázatokból interpolálhatók. A vetületi számítások megkönnyítésére számítógépi programokat is készítettek. Programok készítésére alkalmas összefüggések találhatók a *A vetületnélküli rendszerektől az UTM-ig* című vetületi összefoglalóban:

<http://www.agt.bme.hu/varga/Osszes/Dok3uj.htm>. Vegyük figyelembe, hogy a földrajzi koordináták is előjeles mennyiségek (a  $\Phi$  az egyenlítőtől északra, a  $\Delta$  Greenwich-től keletre pozitív).

A negatív előjelű síkkoordináták kiküszöbölésére az UTM vetületnél is segéd koordináta-rendszert alkalmaznak (12.6. ábra). Észak-dél irányban  $FN$  (False Northing), kelet-nyugati irányban  $FE$  (False Easting) az eltolás jelölése:

$$N = \Delta N + FN,$$

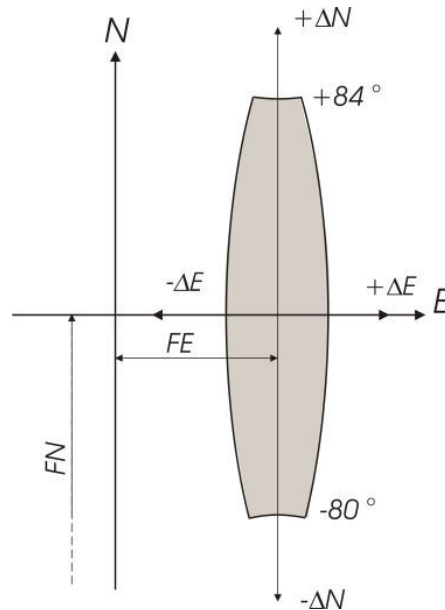
$$E = \Delta E + FE,$$

ahol

$FN = 0,000$  m az északi féltekén,

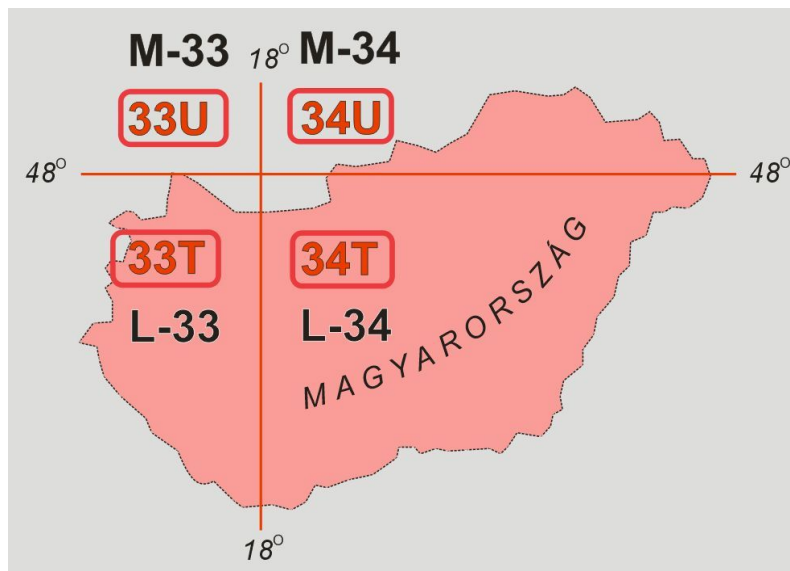
$FN = 10\,000\,000$  m a déli féltekén,

$FE = 500\,000$  m mindegyik sávban.



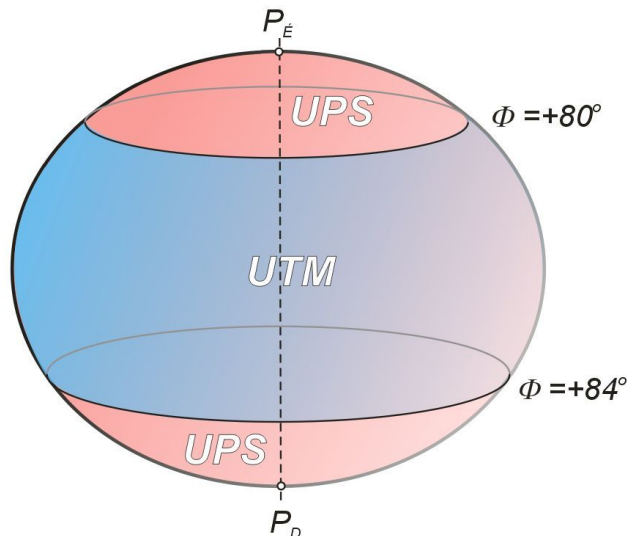
12.6. ábra. Segéd koordináta-rendszer UTM vetületen

Az eddigiek alapján egy adott pont  $(N, E)$  bármelyik vetületi sávban lehetne, ezért a pontot tartalmazó  $6^\circ \times 8^\circ$  kiterjedésű ellipszoidi azonosítóját az  $E$  koordináta elé írják (Magyarország területén 33T, 33U, 34T, 34U) (12.7. ábra).



12.7. ábra. A  $6^\circ \times 8^\circ$  kiterjedésű ellipszoidi négyszögek azonosítása (Az UTM azonosítók pirossal szerepelnek.)

Az UTM vetületet a földrajzi szélesség  $-80^\circ < \phi < +84^\circ$  tartományában alkalmazzák, a pólusok körüli területek ábrázolására az ellipszoid két normális elhelyezésű redukált sztereografikus vetülete (UPS, Universal Polar Stereographic) szolgál (12.8. ábra).



12.8. ábra. Az UTM és az UPS felhasználási területei

Az UTM vetület a  $6^\circ$ -os sávszélesség miatt csak topográfiai célokra alkalmas, hiszen a sáv középmeridiánján végig 40 cm-rel rövidülnek a hosszak kilométerenként ( $l = m_0 = 0,9996$ ). Nagyméretarányú felmérésre  $6^\circ$ -os sávszélességet alkalmaznak, pl.  $m_0 = 0,9999$  vetületi méretarány-tényezővel. A  $3^\circ$ -os sávokat itt is úgy alakítják ki, hogy közülük minél több essen egybe a  $6^\circ$ -os sávok középmeridiánjaival. Ilyenkor a sávok között nem kell vetületi átszámítást végezni, mert közös a síkkoordináta-rendszerük.

Az UTM vetület alapfelülete Németországban pl. a Hayford ellipszoid, Nagy Britanniában az Airy ellipszoid, az Amerikai Egyesült Államokban és a kelet európai új NATO tagállamokban – így Magyarországon is – a WGS84 ellipszoid. A sávbeosztás megegyezik a Gauss–Krüger-vetületnél megismerttel, az ellipszoid teljes felületének ábrázolásra itt is 60 db  $6^\circ$ -os sávra van szükség.

Magyarországon az UTM vetület kilométer hálózati vonalait (koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyenesek) a korábbi Gauss–Krüger szelvényekre valamilyen eltérő színnel rányomatják. Az új felmérésű UTM lapok is a Gauss–Krüger szelvényezésnek megfelelően készülnek.

### Az ellipszoid egyenlítői elhelyezésű hengervetületeinek jelentősége

Az ellipszoid egyenlítői elhelyezésű hengervetületei (Gauss–Krüger, UTM) a Föld teljes felszínének ábrázolásához viszonylag kevés koordináta-rendszert igényelnek (60 db  $6^\circ$ -os sáv és két sztereografikus vetület). A sávok egymással egybevágóak, azaz csak egyetlen sávra kellett a vetületi számításokhoz szükséges táblázatokat elkészíteni, mert azok valamennyinél használhatók. A táblázatok elkészítését az is megkönnyítette, hogy a sávok egyenlítővel határolt két fele szimmetrikus egymással, és ugyancsak szimmetrikusak a középmeridiánnal határolt fél sávok is. Ennek megfelelően a

táblázat adatait csak egy negyed sávra kellett kiszámítani, a többi negyedre az adatok abszolút értéke ugyanaz, csupán egyes adatok előjele különbözik. További előnye a vetületeknek, hogy a sávok csatlakoztatása egyszerű, mert az azonos szélességű sávok szegélymeridiánjain a hossztorzulás egyformán alakul.

Míg az egyéb geodéziai vetületek elhelyezésük következtében csupán helyi rendszereknek tekinthetők, addig az ellipszoid egyenlítői elhelyezésű hengervetületei nemzetközi jellegűek. A Gauss–Krüger (UTM) ábrázolási módot a világ országainak többsége bevezette és alkalmazza geodéziai és topográfiai munkálataihoz.

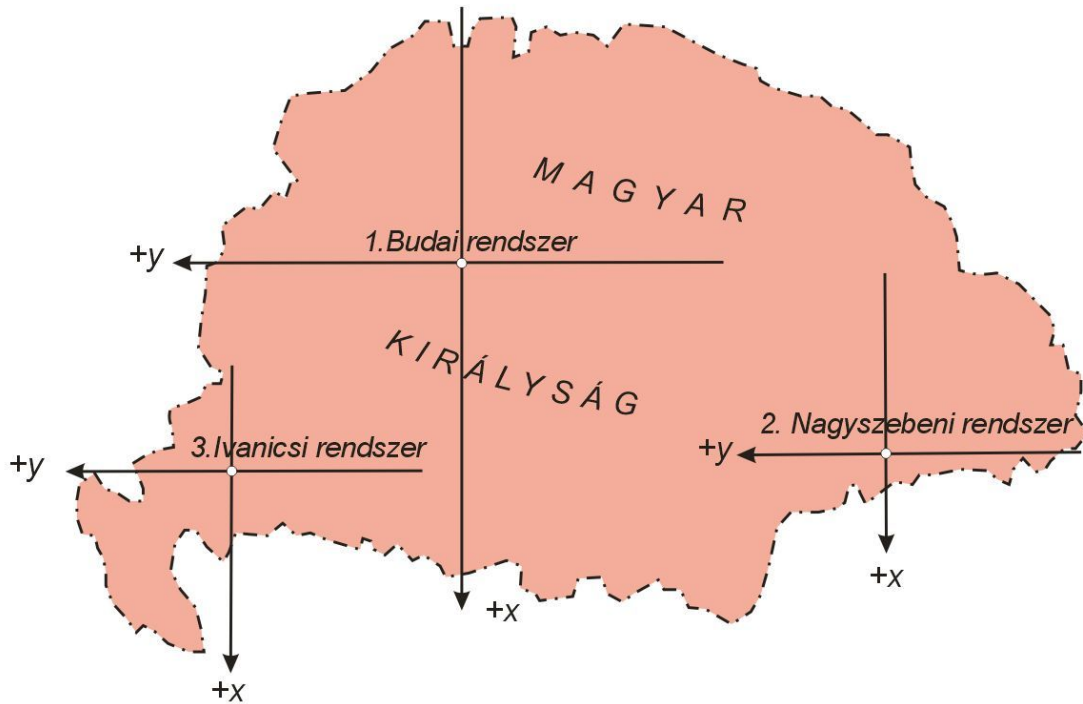
### **Vetületnélküli rendszerek**

Magyarország egyes területrészeiről, ahol a 19. század közepe óta részletes felmérést még nem végeztek, még egy évtizede is a korábbi időkből származó olyan nagyméretarányú (1 : 2880) térképeink voltak, amelyek közvetlenül az ellipszoidi adatokból, síkra vetítés nélkül készültek (1982-ben az ország területének 3%-án). Ebben az ún. vetületnélküli rendszerben az alapfelületi hosszakat és a szögeket redukciók nélkül vitték át a síkra. Az alakzatoknak ilyen módon való csatlakoztatása természetesen képletekkel ki nem fejezhető torzulásokkal jár. Az ábrázolás kis környezetben megközelítőleg területtartó.

Magyarországon három vetületnélküli rendszer volt (12.9. ábra):

1. Budai rendszer. Kezdőpontja a Gellért-hegy felsőrendű háromszögelési pont.
2. Nagyszebeni rendszer. Kezdőpontja a Vízaknai-hegy felsőrendű háromszögelési pont.
3. Ivanicsi rendszer. Kezdőpontja az Ivanics (Ivanić) felsőrendű háromszögelési pont.

A síkkoordináta-rendszer  $x$  tengelyének pozitív ága mindhárom rendszerben a kezdőpont meridiánjának déli ága felé mutat, az  $y$  tengely a kezdőpontban az  $x$  tengelyre merőleges egyenes, pozitív ága nyugat felé irányul.



12.9. ábra. A magyarországi vetületnélküli rendszerek

A kezdőpontok egybeesése és a koordináta-tengelyek hasonló tájékozása miatt a budapesti sztereografikus és a budapesti vetületnélküli koordináták általában csak néhány méterrel különböznek egymástól, ezért könnyen össze lehetett őket téveszteni.

## 13. előadás

### Vetületi átszámítások

Magyarországon a geodéziai alapok többszöri (általában indokolt) megváltoztatása az alkalmazott vetületi rendszerek sokféleségét eredményezte. Geodéziai célokra két sztereografikus vetületi rendszert alkalmaztak (Budapesti és marosvásárhelyi) a ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszerekből is három rendszerre volt szükség (HÉR, HKR, HDR). A nemzetközi sávbeosztásnak megfelelően a Gauss–Krüger és az UTM (Universal Transverse Mercator) vetület  $6^\circ$ -os sávjából is kettő fedi le az ország területét, tehát egyfajta vetületnek is több rendszere van.

Előbbiekén kívül a terület egészén az Egységes országos vetületi rendszer (EOV) is bevezetésre került. A magyarországi sztereografikus és a ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszerek közös alapfelülete a Bessel-ellipszoidhoz simuló régi Gauss-gömb, az EOV alapfelülete az IUGG67 ellipszoidhoz simuló új Gauss-gömb, a Gauss–Krüger-vetület alapfelülete nálunk a Kraszovszkij-féle ellipszoid. A GPS-technika elterjedésével az utóbbi időkben WGS-84 ellipszoidi vagy térbeli geocentrikus koordinátákat is kapunk eredményül. A nemzetközi kapcsolatokban egyre gyakrabban UTM-vetületet kell használnunk.

A képet tovább árnyalja, hogy a fenti rendszereken kívül előfordulnak még katonai sztereografikus koordináták, Budapest területén városi sztereografikus koordináták (BÖV) is.

Amikor egy bizonyos területen egyidejűleg többfajta vetületi rendszert alkalmazunk, az egyes rendszerek átfedési területein gyakran felmerül az átszámítás szükségessége. Hasonló a helyzet, amikor valamelyik vetületi rendszernek több sávja van (Pl. a Gauss–Krüger vagy az UTM-vetületnek), mert ilyenkor a sávok csatlakozása környékén kell gyakran koordinátákat átszámítani.

Általánosságban; amikor térképünk vetületi rendszere más, mint a rendelkezésre álló alappontoké, akkor méréseink eredményét át kell transzformálnunk a térkép vetületi rendszerébe, hogy azon ábrázolni tudjuk. Zárt matematikai összefüggésekkel történő szabatos átszámításra csak az azonos alapfelületekhez tartozó vetületi rendszerek esetében van lehetőség, de csak akkor, ha a két vetületi rendszerben ugyanazon háromszögelési hálózatnak, ugyanabból a kiegyenlítésből származó pontjait ábrázoljuk. Ha ugyanis az egyik vetületről olyan pont koordinátáit számítunk át a másikra, amely más háromszögelési hálózathoz tartozik, akkor az átszámított koordináták nem illeszkednek megfelelően a kérdéses vetületi síkon ábrázolt háromszögelési hálózat pontjai közé, tekintetbe véve a két hálózat különböző elhelyezéséből, tájékozásából, külön alapvonal-rendszeréből és egymástól teljesen független szögméréseiből adódó különbségeket. A háromszögelési hálózatnak újabb mérésekkel történő finomítása vagy új kiegyenlítése



következtében ugyanis megváltoznak az alappontok alapfelületi és így vetületi síkkoordinátái is. Hasonló következményekkel jár az alapfelület állandóinak megváltoztatása, még akkor is, ha a háromszögelési hálózatot egyébként nem változtatjuk meg. A hálózat tájékozásának megváltoztatása nem akadály a szabatos átszámításnak.

Minden olyan esetben, amikor az előbbi feltételek közül bármelyik is nem teljesül, az átszámítás csak korlátozott pontossággal, a mindkét rendszerben ismert koordinátájú ún. *azonos pontok* (közös pontok, illesztő pontok) felhasználásával végezhető. Ilyenkor a kiválasztott azonos pontoktól függően kis mértékben mindig más koordinátákat kapunk.

### **Átszámítás koordináta-módszerrel**

#### **Átszámítás a budapesti sztereografikus rendszer és a ferdetengelyű érintő szög tartó hengervetületi rendszerek között**

A budapesti sztereografikus- és a három ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszerünk alapfelülete és háromszögelési hálózata azonos, tehát a közöttük végezhető vetületi átszámításokra a *koordináta-módszer* alkalmazható. Ezzel szemben jelentkezik egy olyan különleges körülmény, amit figyelembe kell venni. A ferdetengelyű érintő hengervetületek bevezetésekor (1908) az elsőrendű háromszögelési hálózatot újból tájékozták úgy, hogy a hálózat kiinduló oldalának azimutját  $6,44''$ -cel csökkentették.

Ennek következtében valamennyi hálózati pont földrajzi koordinátái mind a gömbön, mind az ellipszoidon kismértékben megváltoztak. A hengervetületi rendszerekre azután az így elforgatott hálózatot vetítették, de ugyanakkor a sztereografikus rendszerekben a síkkoordinátákat változatlanul hagyták, ellenkező esetben az addig elkészült nagyméretarányú térképek és a felméréshez felhasznált alappontok közötti összhang megszakadt volna.

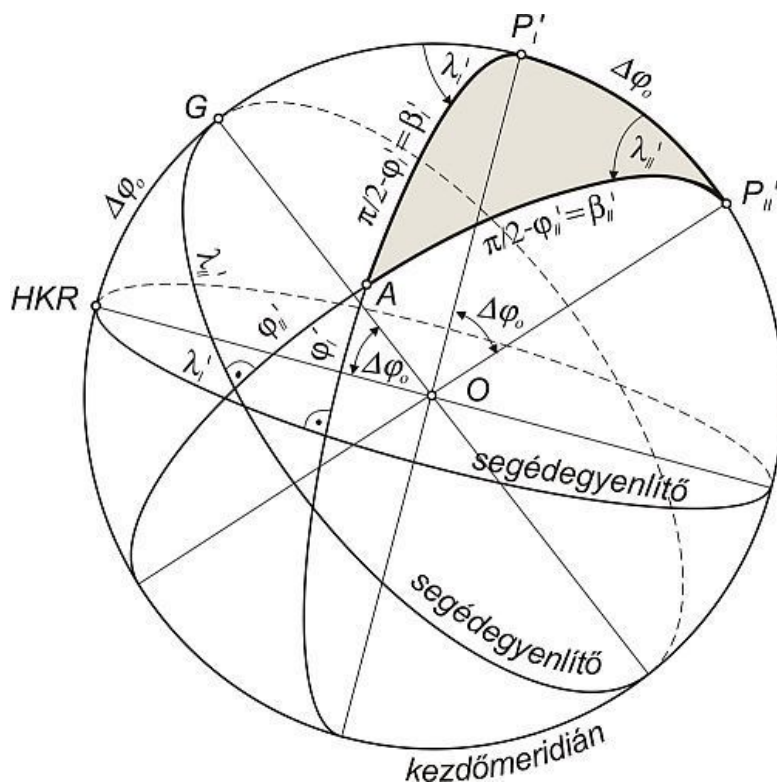
Ebből következik, hogy ha ugyanannak a pontnak pl. a budapesti sztereografikus koordinátákból számítjuk ki a földrajzi koordinátáit, kissé eltérő értékeket kapunk, mint akkor, ha a pont hengervetületi koordinátáiból számítjuk ki azokat.

A tájékozás különbségét és az abból adódó eltéréseket a legegyszerűbben úgy vehetjük figyelembe, hogy a hálózat elfordulása helyett úgy képzeljük el, mintha a *Gellért-hegy elsőrendű ponton átmenő meridián fordult volna el  $6,44''$ -cel*. Az egymáshoz viszonyítva elfordult meridiánok és a Gellért-hegy pontot egy  $P$  ponttal összekötő egyenes szakasz képének sematikus rajzát a (10.3. ábra) mutatta.

Az előbbieket miatt; ha budapesti sztereografikus vetületi rendszerben adott koordinátákból számítunk földrajzi helymeghatározókat, vagy a budapesti rendszerből térünk át valamelyik ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszerre, akkor a sztereografikus irányszögből  $6,44''$ -et le kell vonni. Ha viszont a hengervetületen adott koordinátákat számítjuk át a sztereografikus

vetület budapesti rendszerére, vagy a földrajzi koordinátákból számítunk a budapesti rendszeren síkkoordinátákat, akkor a sztereografikus irányszöghöz 6,44"-et hozzá kell adni.

A 13.1. ábrán az A pont hengervetületi  $\varphi'_I, \lambda'_I$  segéd földrajzi koordinátái és a Gellért-hegy ponton átmenő segédegyenlítőre, valamint a  $P_{II}, P'_{II}$  átmérőre vonatkozó  $\varphi'_{II}, \lambda'_{II}$  segéd földrajzi koordinátái között az A  $P_I, P_{II}$  poláris gömbháromszög felhasználásával számíthatunk át.



13.1. ábra. Átszámítása budapesti sztereografikus és az egyik ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszer között

Számítsunk először ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszerből (pl. HKR) budapesti sztereografikus vetületi rendszerbe:

$$\varphi'_I = 2 \arctan e^{\left(\frac{x_I}{R}\right)} - 90^\circ,$$

$$\lambda'_I = \frac{y_I}{R} \rho^\circ,$$

$$\sin \varphi'_{II} = \sin \varphi'_I \cos \Delta\varphi_0 + \cos \varphi'_I \sin \Delta\varphi_0 \cos \lambda'_I,$$

$$\sin \lambda'_{II} = \frac{\cos \varphi'_I \sin \lambda'_I}{\cos \varphi'_{II}}.$$

A  $\varphi'_{II}, \lambda'_{II}$  segéd földrajzi koordinátákból a Gellért-hegy ponton átmenő segédegyenlítőre vonatkozóan koordinátákat számítunk a transzverzális sztereografikus vetület összefüggéseivel:

$$(y_{II}) = 2 R \frac{\cos \varphi'_{II} \sin \lambda'_{II}}{1 + \cos \varphi'_{II} \cos \lambda'_{II}},$$

$$(x_{II}) = 2 R \frac{\sin \varphi'_{II}}{1 + \cos \varphi'_{II} \cos \lambda'_{II}}.$$

Eddig még a két vetületi rendszer közötti tájékozási különbséget nem vettük figyelembe, ezért:

$$y_{II} = (y_{II}) \cos 6,44'' + (x_{II}) \sin 6,44'',$$

$$x_{II} = - (y_{II}) \sin 6,44'' + (x_{II}) \cos 6,44''.$$

A  $\Delta\varphi_0$  a vetületi rendszerek kezdőpontja  $\varphi_0$  földrajzi szélességének különbsége.

Budapesti sztereografikus vetületi rendszerbe számításnál:

HÉR-ből	$\Delta\varphi_0 = -1^\circ 13' 40,8628''$ ,
HKR-ből	$\Delta\varphi_0 = + 20' 21,1372''$ ,
HDR-ből	$\Delta\varphi_0 = +1^\circ 54' 22,1372''$ .

### Átszámítás budapesti sztereografikus vetületi rendszerből ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszerbe

Először számítjuk az átszámítandó pont  $\beta'_I$  segéd pólustávolságát és a vetületi kezdőpontról az átszámítandó pontra menő irány  $\delta_I$  irányszögét:

$$\beta'_I = 2 \arctg \frac{\sqrt{y_I^2 + x_I^2}}{2 R}$$

$$\delta_I = \arctg \frac{y_I}{x_I}.$$

A sztereografikus irányszögből számítható az új tájékozásnak megfelelő azimut:

$$\alpha_{II} = \delta_I - 6,44'' + 180^\circ,$$

majd a hengervetületre vonatkozó segéd földrajzi koordináták.

$$\sin \varphi'_{II} = \cos \beta'_I \sin \Delta\varphi_0 + \sin \beta'_I \cos \Delta\varphi_0 \cos \alpha_{II},$$

$$\sin \lambda'_{II} = \frac{\sin \beta'_I \sin \alpha_{II}}{\cos \varphi'_{II}}.$$

A hengervetület vetületi egyenleteivel:

$$y_{II} = -R \frac{\lambda'_{II}}{\rho^0},$$

$$x_{II} = -R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi'_{II}}{2} \right).$$

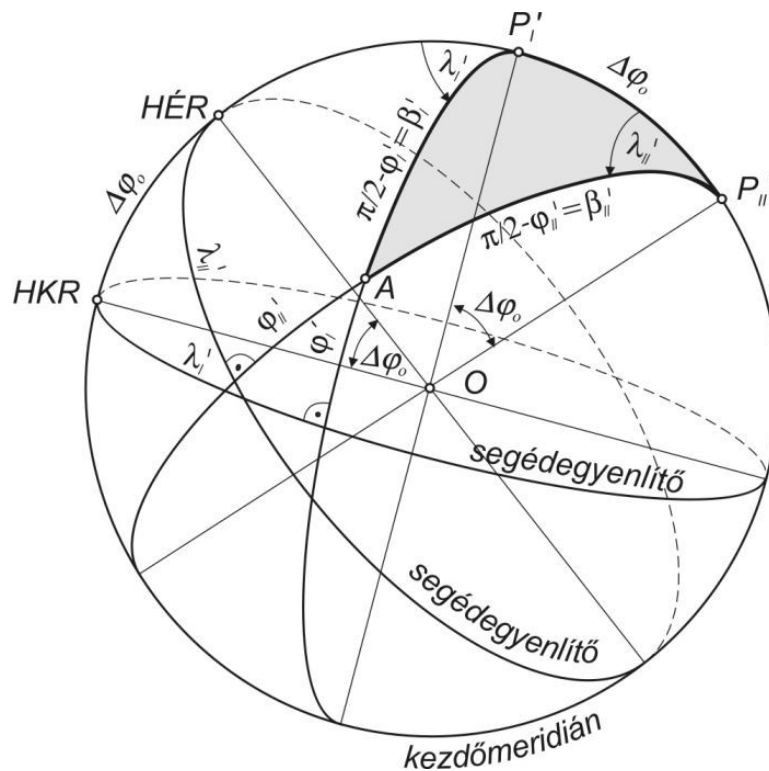
Budapesti sztereografikus vetületi rendszerből számítva:

HÉR-be  $\Delta\varphi_0 = +1^\circ 13' 40,8628''$ ,

HKR-be  $\Delta\varphi_0 = - 20' 21,1372''$ ,

HDR-be  $\Delta\varphi_0 = -1^\circ 54' 22,1372''$ .

### Átszámítás ferdetengelyű érintő hengervetületek között



13.2. ábra. Átszámítás ferdetengelyű érintő hengervetületi rendszerek között

Az  $A P_I P_{II}$  poláris gömbháromszög felhasználásával két hengervetületi rendszer viszonylatában közvetlenül a segéd földrajzi koordináták között számíthatunk át. Így itt sincs szükség a valódi gömbi földrajzi koordináták kiszámítására (13.2. ábra).

A  $\Delta\varphi_0$  a két vetületi kezdőpont földrajzi szélességének különbségét jelenti:

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_{0II} - \varphi_{0I}.$$

Az átszámítás a következő lépésekben történik:

1. az I. rendszer (pl. HKR) síkkoordinátáiból segéd földrajzi koordináták számítása:

$$\varphi'_I = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x_I}{R}} - 90^\circ,$$

$$\lambda'_I = \frac{y_I}{R} \rho^\circ.$$

2. Átszámítás a II. rendszer (pl. HÉR) segéd földrajzi koordináta-rendszerébe:

$$\sin \varphi'_{II} = \sin \varphi'_I \cos \Delta\varphi_0 + \cos \varphi'_I \sin \Delta\varphi_0 \cos \lambda'_I,$$

$$\sin \lambda'_{II} = \frac{\cos \varphi'_I \sin \lambda'_I}{\cos \varphi'_{II}}.$$

3. Síkkoordináták számítása a II. rendszerben:

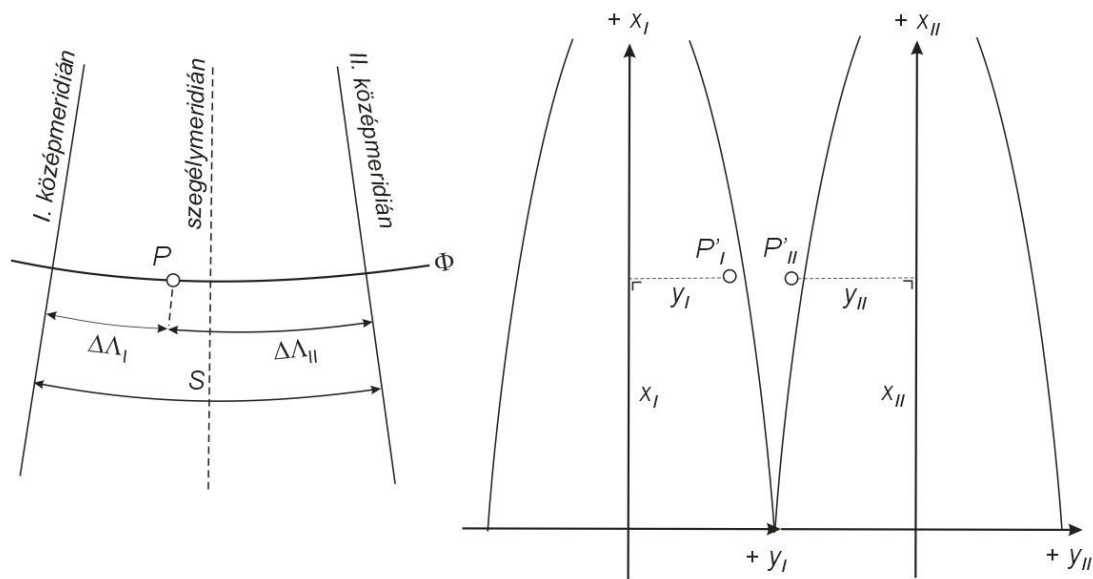
$$y_{II} = R \frac{\lambda'_{II}}{\rho^\circ},$$

$$x_{II} = R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi'_{II}}{2} \right).$$

HÉR-ből HKR-be	$\Delta\varphi_0 = -1^\circ 34' 2''$ ,
HKR-ből HÉR-be	$\Delta\varphi_0 = +1^\circ 34' 2''$ ,
HKR-ből HDR-be	$\Delta\varphi_0 = -1^\circ 34' 1''$ ,
HDR-ből HKR-be	$\Delta\varphi_0 = +1^\circ 34' 1''$ .

### Átszámítás Gauss–Krüger és UTM (Universal Transverse Mercator) vetületi sávok között

A feladat a gyakorlatban úgy jelentkezik, hogy valamelyik sáv szélének közelében levő pont koordinátáit kell átszámítani a szomszédos sáv koordináta-rendszerébe (13.3. ábra). Először a megfelelő sorokkal a pont I. sávbeli síkkoordinátáiból számítjuk a közös alapfelületre vonatkozó földrajzi koordinátáit Gauss–Krüger-vetületnél a Kraszovszkij ellipszoid, UTM vetületnél a WGS84 ellipszoid az alapfelület.



13.3. ábra. Átszámítás Gauss–Krüger (UTM) vetületi sávok között

$$\Phi = \Phi_T + B_2 y_I^2 + B_4 y_I^4 + \dots,$$

$$\Delta\Lambda_I = B_1 y_I + B_3 y_I^3 + B_5 y_I^5 + \dots,$$

majd azokból a II. sávon a síkkoordinátákat.

$$x = B + A_2 \Delta\Lambda_{II}^2 + A_4 \Delta\Lambda_{II}^4 + \dots,$$

$$y = A_1 \Delta\Lambda_{II} + A_3 \Delta\Lambda_{II}^3 + A_5 \Delta\Lambda_{II}^5 + \dots,$$

$$|\Delta\Lambda_{II}| = S - |\Delta\Lambda_I|,$$

$$\text{sign } \Delta\Lambda_{II} \neq \text{sign } \Delta\Lambda_I,$$

## 14. előadás

### Átszámítás azonos pontok felhasználásával

Amikor a két vetületi rendszer alapfelülete azonos, csak a háromszögelési hálózatok különböznek, az átszámítást úgy végezhetnénk, hogy az I. vetületen a háromszögelési hálózat oldalai által bezárt szögekből a szögredukciók segítségével kiszámítjuk a közös alapfelületre vonatkozó szöveget, és ezeket mérési eredményeknek tekintjük. Kiindulva ezután az olyan alappontokból, amelyek mindkét háromszögelési hálózatnak pontjai (azonos pontok), az átszámítandó pontok II. rendszerbeli koordinátáit a mérési eredményeknek tekintett és a II. rendszerbeli szögredukciókkal javított szögértékek alapján, kiegyenlítéssel kell meghatározni. Ha megfelelő sűrűségben vannak azonos pontjaink, akkor további pontokat *Papp-féle módszerrel*, *Helmert-féle síkbeli transzformációval* vagy általános polinomokkal számíthatunk át.

Két ilyen eltérő háromszögelési hálózat között az átszámítás nem tekinthető csupán vetületi átszámításnak, mert a tárgyalt eljárás nemcsak a vetületi átszámítást, hanem a két háromszögelési hálózat egymásba illesztését is megoldja, mégpedig annál pontosabban, minél pontosabbak az egyes hálózatok.

Az alapfelületek és a háromszögelési hálózatok különbözősége miatt az előbbi elveket kell követni az EOV és a korábbi vetületi rendszereink (budapesti sztereografikus, ferdetengelyű érintő hengervetületek) közötti átszámítások során. Az EOV és a korábbi vetületi rendszereink háromszögelési hálózatai között ui. csak az ad kapcsolatot, hogy a háromszögelési alappontok egy része a terepen is meglévő azonos pont. Ilyen pontok hiányában az átszámítást nem is lehetne megoldani.

Hasonló okokból ugyanezen elvek szerint végezhetjük az átszámítást a Gauss–Krüger vagy az UTM vetületi sávok és a polgári gyakorlatban alkalmazott vetületi rendszerek (budapesti sztereografikus, ferdetengelyű érintő hengervetületek, EOV) között.

A budapesti önálló városi rendszer (BÖV) és a budapesti sztereografikus vetületi rendszer alapfelülete, vetülete, vetületi kezdőpontja, koordináta-tengelyeinek tájékozása azonos, az ábrázolt háromszögelési hálózatok viszont különböznek, ezért közöttük is csak azonos pontok felhasználásával lehet az átszámítást elvégezni.

Azonos pontok felhasználásával akkor is elvégezhető az átszámítás, amikor az alapfelületek és a háromszögelési hálózatok is azonosak, vagyis teljesülnek a koordináta-módszer alkalmazásának feltételei. Ilyenkor természetesen – az egyértelmű eredményt szolgáltató – koordináta-módszerrel végezzük a számítást.

### Síkbeli hasonlósági (Helmert-féle) transzformáció kiegyenlítéssel

Kettőnél több közös pont esetén a két rendszert nem lehet egymásra illeszteni úgy, hogy minden közös pont egyidejűleg fedje egymást. Ekkor azt a megoldást választjuk, hogy a két hálózat illesztésénél a pontok maradék ellentmondásainak négyzetösszege a legkisebb legyen.

Maradék ellentmondás alatt a közös pontok II. rendszerbeli koordinátái és a közös pontok I. rendszerből átranzformált koordinátái közötti eltéréseket értjük.

Ebben az esetben az  $a$ ,  $b$  együtthatókat a legkisebb négyzetek módszerével az alábbi számítás eredményeként kapjuk meg. (A levezetés részleteit mellőzzük.)

1. Mindkét rendszerben számítjuk a súlyponti koordinátákat:

$$y_{SP I} = \frac{\sum y_{i I}}{n}, \quad x_{SP I} = \frac{\sum x_{i I}}{n},$$

$$Y_{SP II} = \frac{\sum Y_{i II}}{n}, \quad X_{SP II} = \frac{\sum X_{i II}}{n},$$

ahol  $n$  a közös pontok száma.

A két koordináta-rendszer egymásnak megfelelő közös kezdőpontja mindkét rendszerben a súlypont lesz. Toljuk el a koordináta-tengelyeket a súlypontba.

2. Képezzük a súlypontra vonatkozó koordinátákat mindkét rendszerben. A súlypontra vonatkozó koordináták az I. rendszerben:

$$y'_{1 I} = y_{1 I} - y_{SP I} \quad x'_{1 I} = x_{1 I} - x_{SP I}$$

...

$$y'_{i I} = y_{i I} - y_{SP I} \quad x'_{i I} = x_{i I} - x_{SP I}$$

...

$$y'_{n I} = y_{n I} - y_{SP I} \quad x'_{n I} = x_{n I} - x_{SP I}$$

A súlypontra vonatkozó koordináták a II. rendszerben:

$$Y'_{1 II} = Y_{1 II} - Y_{SP II} \quad X'_{1 II} = X_{1 II} - X_{SP II}$$

...

$$Y'_{i II} = Y_{i II} - Y_{SP II} \quad X'_{i II} = X_{i II} - X_{SP II}$$

...



$$Y'_{nII} = Y_{nII} - Y_{SPII} \quad X'_{nII} = X_{nII} - X_{SPII}$$

3. A torzulási együtthatók:

$$a = \frac{\sum y'_{iI} Y'_{iII} + \sum x'_{iI} X'_{iII}}{\sum y'^2_{iI} + \sum x'^2_{iI}},$$

$$b = \frac{\sum x'_{iI} Y'_{iII} - \sum y'_{iI} X'_{iII}}{\sum y'^2_{iI} + \sum x'^2_{iI}}.$$

4. A transzformációs egyenletek felírása:

$$Y_{PII} = Y_{SPII} + a(y_{PI} - y_{SPI}) + b(x_{PI} - x_{SPI}),$$

$$X_{PII} = X_{SPII} + a(x_{PI} - x_{SPI}) - b(y_{PI} - y_{SPI}).$$

5. A közös pontok transzformáció utáni maradék ellentmondásainak vetületeit ( $dY_i, dX_i$ ) úgy számítjuk, hogy a közös pontok I. rendszerben ismert koordinátáit a 4. pont egyenleteivel átszámítjuk a II. rendszerbe, és képezzük minden közös pontra az eredeti és a \*-gal jelölt átszámított koordináták különbségét:

$$dY_i = Y_{iII} - Y_{iII}^*, \quad dX_i = X_{iII} - X_{iII}^*.$$

A maradék ellentmondások összegének 0-t kell adnia:

$$\sum dY_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum dX_i = 0.$$

6. A pontok illeszkedésének megbízhatóságát a

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum dY_i^2 + \sum dX_i^2}{f}}$$

középhibával jellemezhetjük, ahol  $f = 2n - 4$ .

### Átszámítás általános polinomokkal

Polinomokkal végezhetjük az átszámítást, amikor nagyobb munkaterületen (több száz  $\text{km}^2$ -en) csak azonos pontok állnak rendelkezésre. Ehhez számítási (transzformálási) egységeket alakítunk ki, és azokon belül azonos pontokat választunk ki. A szükséges azonos pontok száma attól függ, hogy

- hányadfokú polinomot akarunk felírni,

- a feladatot csak megoldani akarjuk, vagy pedig kiegyenlítéssel (főleg adatok segítségével) akarjuk számítani a polinomok együtthatóit.

A feladat egyértelmű (kiegyenlítés nélküli) megoldásához a szükséges azonos pontok száma:

$$p = 1 + n \frac{n+3}{2},$$

ahol  $n$  = fokszám.

$n$	$p$ (azonos pontok száma)
2	6
3	10
4	15
5	21

Az azonos pontok mindkét rendszerbeli koordinátáiból súlyponti koordinátákat számítunk, hogy kisebb abszolút értékű adatokkal számolva pontosabb eredményt kapjunk. Az I. rendszer  $x_I, y_I$  koordinátái és a II. rendszer  $x_{II}, y_{II}$  koordinátái közötti kapcsolat ötödfokú polinommal a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} x_{II} = & A_0 + A_1 x_I + A_2 y_I + A_3 x_I^2 + A_4 x_I y_I + A_5 y_I^2 + A_6 x_I^3 + \\ & A_7 x_I^2 y_I + A_8 x_I y_I^2 + A_9 y_I^3 + A_{10} x_I^4 + A_{11} x_I^3 y_I + A_{12} x_I^2 y_I^2 + \\ & A_{13} x_I y_I^3 + A_{14} y_I^4 + A_{15} x_I^5 + A_{16} x_I^4 y_I + A_{17} x_I^3 y_I^2 + A_{18} x_I^2 y_I^3 + \\ & A_{19} x_I y_I^4 + A_{20} y_I^5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{II} = & B_0 + B_1 x_I + B_2 y_I + B_3 x_I^2 + B_4 x_I y_I + B_5 y_I^2 + B_6 x_I^3 + \\ & B_7 x_I^2 y_I + B_8 x_I y_I^2 + B_9 y_I^3 + B_{10} x_I^4 + B_{11} x_I^3 y_I + B_{12} x_I^2 y_I^2 + \\ & B_{13} x_I y_I^3 + B_{14} y_I^4 + B_{15} x_I^5 + B_{16} x_I^4 y_I + B_{17} x_I^3 y_I^2 + B_{18} x_I^2 y_I^3 + \\ & B_{19} x_I y_I^4 + B_{20} y_I^5. \end{aligned}$$

Az  $A_0 - A_{20}$  és  $B_0 - B_{20}$  (összesen 42 együttható) az azonos pontok alapján kiegyenlítéssel határozható meg. Ötödfokú polinom együtthatóinak meghatározásához 21 azonos pont szükséges. Mivel az  $x$  és az  $y$  egyenletében egyaránt 21 ismeretlen van, azok egyértelműen meghatározhatók. Ilyenkor, ha ellenőrzésképpen olyan azonos pont koordinátáit számítjuk át, amelyet bevontunk az együtthatók meghatározásába, a pont II. rendszerbeli adott koordinátáit kell kapni.

Amikor a szükségesnél több azonos pontot vonunk be az együtthatók meghatározásába, akkor kiegyenlítésre nyílik lehetőség. Ilyenkor a felhasznált azonos pontok koordinátáinak átszámítása alkalmával nem kapjuk pontosan a II. rendszerbeli adott koordinátákat, hanem ún. *maradék ellentmondások* jelentkeznek. Amennyiben ezek az érvényes utasításban előírt mértéket

túllépik, a transzformálási egység területét vagy a polinom fokszámát meg kell változtatni.

A transzformáláshoz az utasítások általában nem engedélyezik az ötödfokúnál magasabb fokú polinomok alkalmazását. A magas fokszámú függvények ugyanis – főként extrapoláció esetén – az eredményt meghamisíthatják.

Legyen feladatunk 30 azonos pontból kiegyenlítéssel meghatározni az ötödfokú polinom  $x$  és  $y$  egyenletének  $21 \times 2 = 42$  db együtthatóját. Az azonos pontok súlyponti koordinátáit az egyenletekbe behelyettesítve  $x$ -re és  $y$ -ra is 30 db egyenletet írhatunk fel:

$$a_{1,0} A_0 + a_{1,1} A_1 + \dots + a_{1,20} A_{20} = b_1,$$

$$a_{2,0} A_0 + a_{2,1} A_1 + \dots + a_{2,20} A_{20} = b_2,$$

...

$$a_{30,0} A_0 + a_{30,1} A_1 + \dots + a_{30,20} A_{20} = b_{30},$$

$$a_{1,0} B_0 + a_{1,1} B_1 + \dots + a_{1,20} B_{20} = c_1,$$

$$a_{2,0} B_0 + a_{2,1} B_1 + \dots + a_{2,20} B_{20} = c_2,$$

...

$$a_{30,0} B_0 + a_{30,1} B_1 + \dots + a_{30,20} B_{20} = c_{30},$$

ahol  $A_0 - A_{20}$ ,  $B_0 - B_{20}$  a meghatározandó ismeretlenek,  
 $b_i$ -k a megfelelő  $x_{ii}$  értékek,  
 $c_i$ -k a megfelelő  $y_{ii}$  értékek.

Az  $x$  és az  $y$  egyenletek együtthatóiból képzett mátrix mindkét esetben azonos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,20} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \dots & a_{2,20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{30,0} & a_{30,1} & \dots & a_{30,20} \end{bmatrix}.$$

A megfelelő  $x_{ii}$  és  $y_{ii}$  értékekből képzett oszlopvektorok:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{30} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{30} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad \mathbf{n}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad \mathbf{n}_y = \mathbf{A}^T \mathbf{c}$$

és végül a polinomok meghatározott együtthatói:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}_x, \quad \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}_y.$$

Az adott munkaterületen a továbbiakban az így meghatározott együtthatókkal számíthatunk át a két kérdéses vetületi rendszer között. Ellenőrzésül olyan azonos pontok koordinátáit is érdemes átszámítani, amelyeket nem vontunk be a kiegyenlítésbe. Ha ilyenkor a megengedettnél nagyobb maradék ellentmondások jelentkeznek, a transzformálási terület határát vagy a polinom fokszámát meg kellene változtatni. Végül a súlyponti koordinátákról vissza kell térni az országos koordinátákra.

### Átszámítás vegyes módszerrel

A gyakorlatban a transzformációs összefüggéseket közvetlenül az azonos pontoknak a két vetületi rendszerben adott síkkoordinátái között írják fel. Ilyen módon az egyes vetületi rendszerek tulajdonságait nem veszik figyelembe, hiszen az összefüggések alakja a vetületek milyenségétől függetlenül mindig azonos.

Az átszámítás biztonságát úgy növelhetjük, hogy azt két lépésre bontjuk. Az első lépésben a vetületi-, a másodikban a háromszögelési hálózatok különbségéből adódó torzulásokat küszöböljük ki oly módon, hogy először a koordináta-módszerhez hasonló eljárással közelítő síkkoordinátákat számítunk a második vetületi síkon, majd ezután alkalmazunk olyan transzformációkat, amelyeket a gyakorlatban használnak.

A transzformációs együtthatók meghatározásához az azonos pontok második vetületi közelítő és a második vetületi adott koordinátákat használjuk fel. Az átszámítás második lépésében már alacsonyabb fokú sorokkal küszöbölhetjük ki a hálózati torzulás által okozott ellentmondásokat, mintha az egész számítást egy lépésben, polinomokkal végeznénk.

Példa. Átszámítás EOVBől budapesti sztereografikus vetületi rendszerbe.

Mind az EOV, mind a budapesti sztereografikus rendszer vetületi kezdőpontja a Gellért-hegy meridiánján van, az alapfelület viszont a két esetben más. Az ábrázolt két háromszögelési hálózat különböző pontosságú és kismértékben tájékozásuk is különböző.

A második vetületi (sztereografikus) közelítő koordináták számításában nem követünk el hibát, ha feltételezzük, hogy mindkét vetületnek ugyanaz az alapfelülete (pl. az új Gauss-gömb). A gömbök csak a sugarukban különböznek egymástól. Ez a különbség a vetületi síkon csak méretarány-különbséget eredményez, amit a második lépésben a hálózatok különbségével együtt ki lehet küszöbölni. A Gellért-hegy pont földrajzi koordinátáit mindkét gömbön ismerjük.

A számítás első lépésében az azonos és az átszámítandó pontok EOV síkkoordinátáiból segéd földrajzi koordinátákat számítunk az új Gauss-gömbön, azokból pedig síkkoordinátákat számítunk egy olyan sztereografikus vetületen, amelynek kezdőpontja a Gellért-hegy pont. Ez szigorúan véve nem azonos a budapesti sztereografikus vetülettel, mert vetületi síkja nem pontosan párhuzamos annak síkjával. Az alapfelületek és a háromszögelési hálózatok különbözősége miatt más a méretaránya és tájékozási különbség is fellép.

A kapott előzetes koordináták már csak az utóbbi okok miatt különböznek az azonos pontok budapesti sztereografikus koordinátáitól, de mentesek az EOV vetületi torzításaitól. A tájékozási különbséget egy átlagos értékkel figyelembe lehet venni, hogy az ellentmondások még kisebbek legyenek, de ennek az eredmény szempontjából nincs jelentősége.

Az azonos pontok második vetületi közelítő és adott koordinátái közötti kapcsolatot Helmert-féle síkbeli transzformációval vagy polinomokkal teremthetjük meg. Természetesen ugyanazokkal az együtthatókkal számíthatjuk át az átszámítandó (nem azonos) pontokat is.