Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

Geodézia I. (BSc)

5. előadás

Trigonometriai magasságmérés. Távolságok meghatározása: javítások, redukciók

A mai előadó:

Homolya András mestertanár

A magasságkülönbség meghatározása:

→ **szintezés**:

a két pont közelében előállítjuk egy szintfelület elemi darabkáit

→ (**hidrosztatikai** szintezés)

a szintfelület egy érintősíkját

→ (**optikai** szintezés),

majd meghatározzuk a pontok függőleges távolságát a felületelemektől vagy az érintősíktól

→ **trigonometriai magasságmérés:**

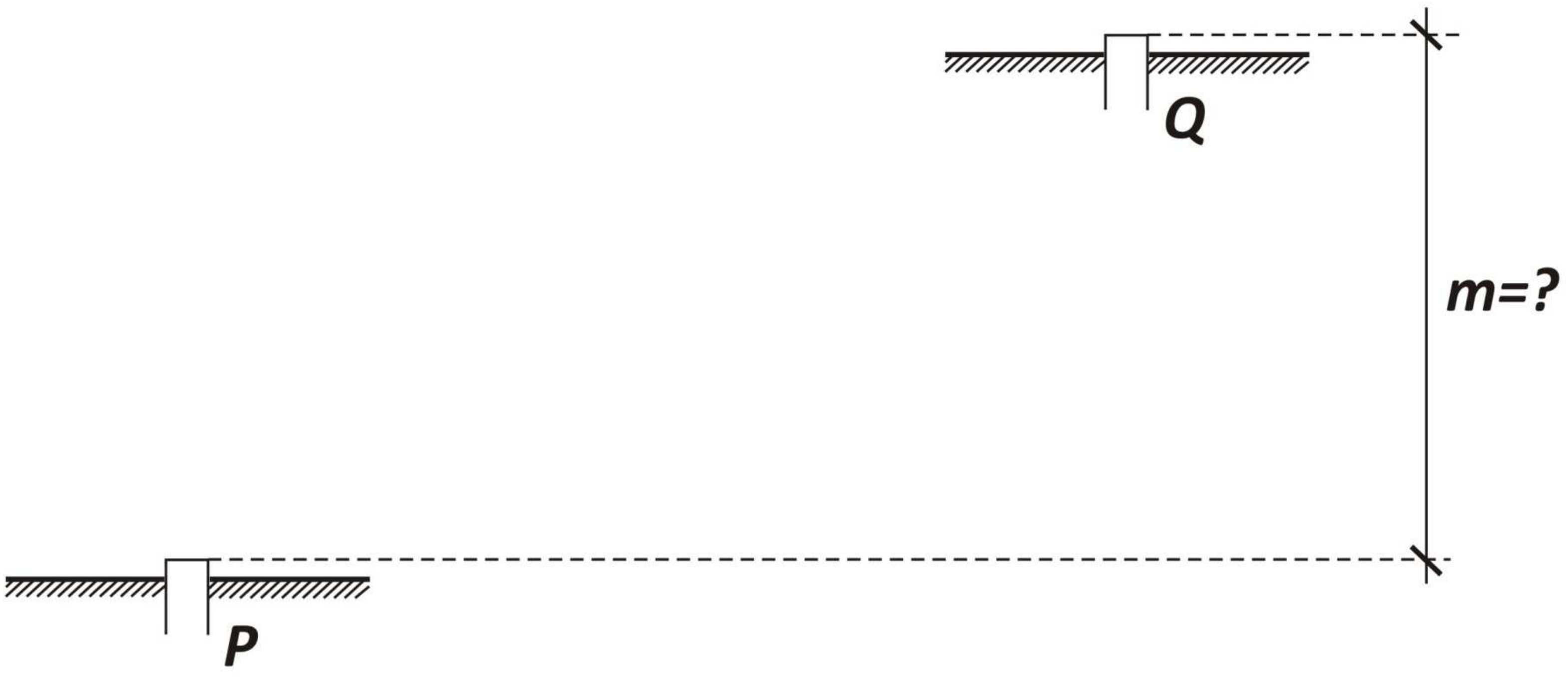
a magasságkülönbség a függőleges távolság

→ **a fizikai magasságmérés:**

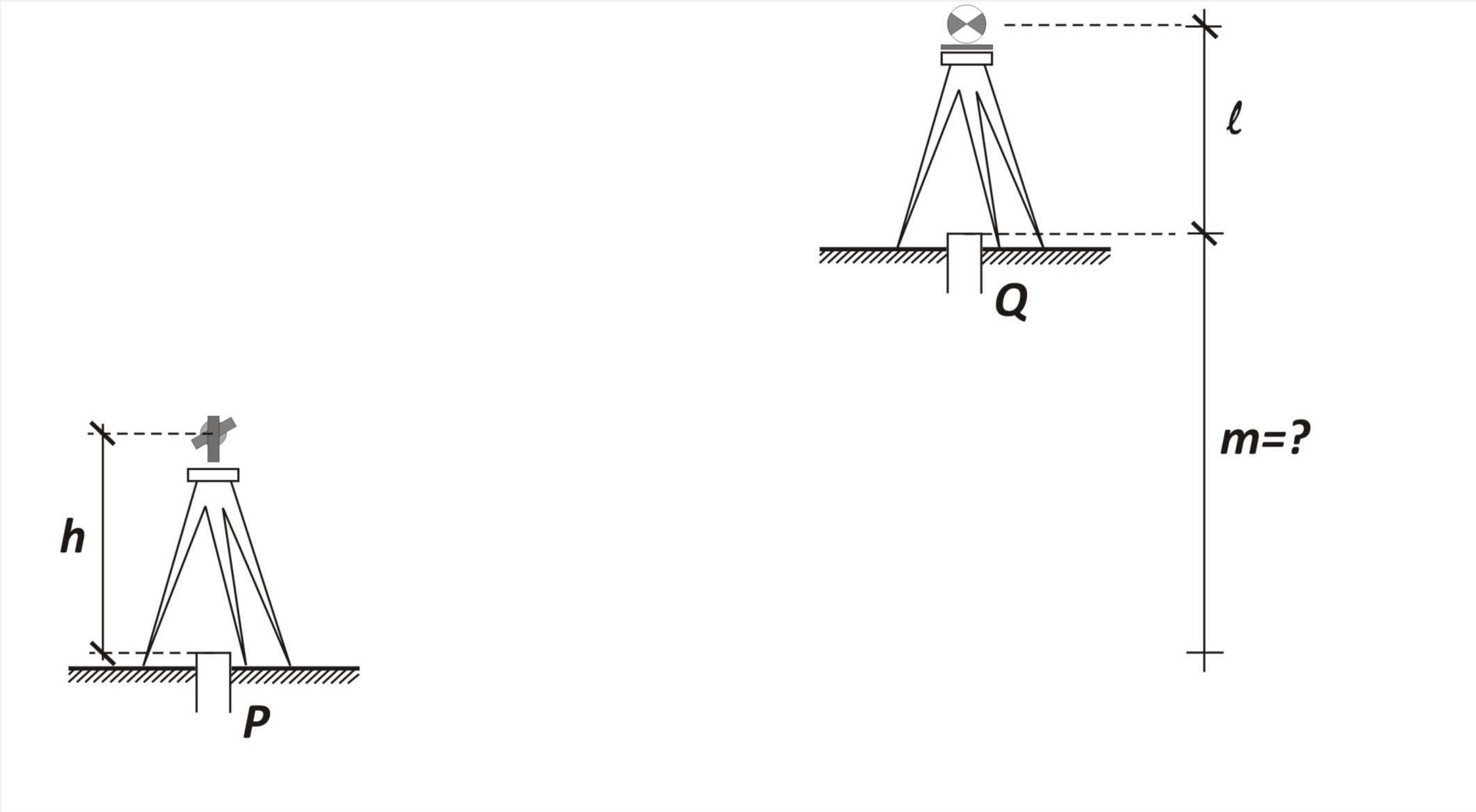
fizikai mennyiségeket mérünk, és a magasságkülönbséget fizikai összefüggések felhasználásával számítjuk ki

pl. **barométeres** magasságmérés

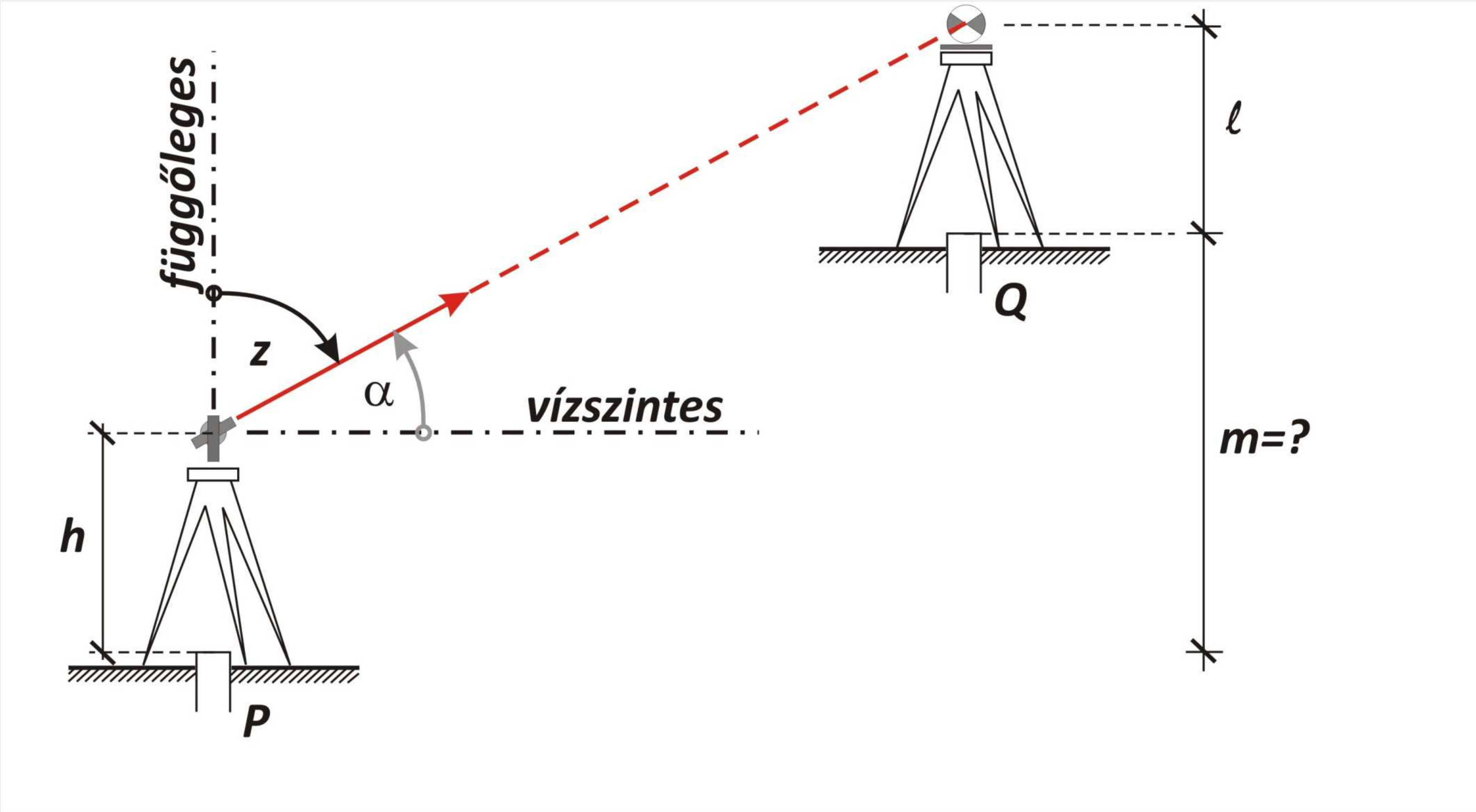
A trigonometriai magasságmérés alapelve



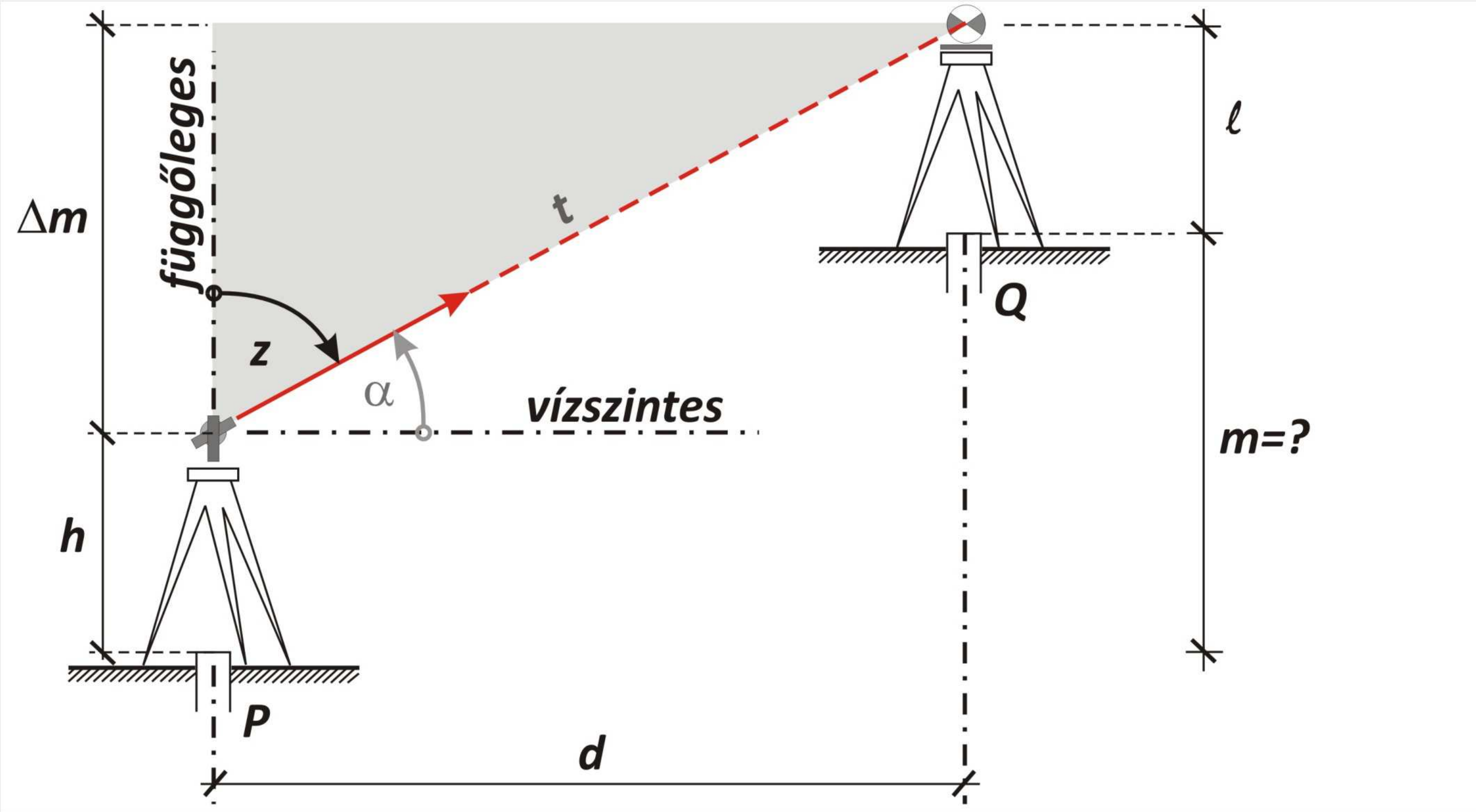
A trigonometriai magasságmérés alapelve



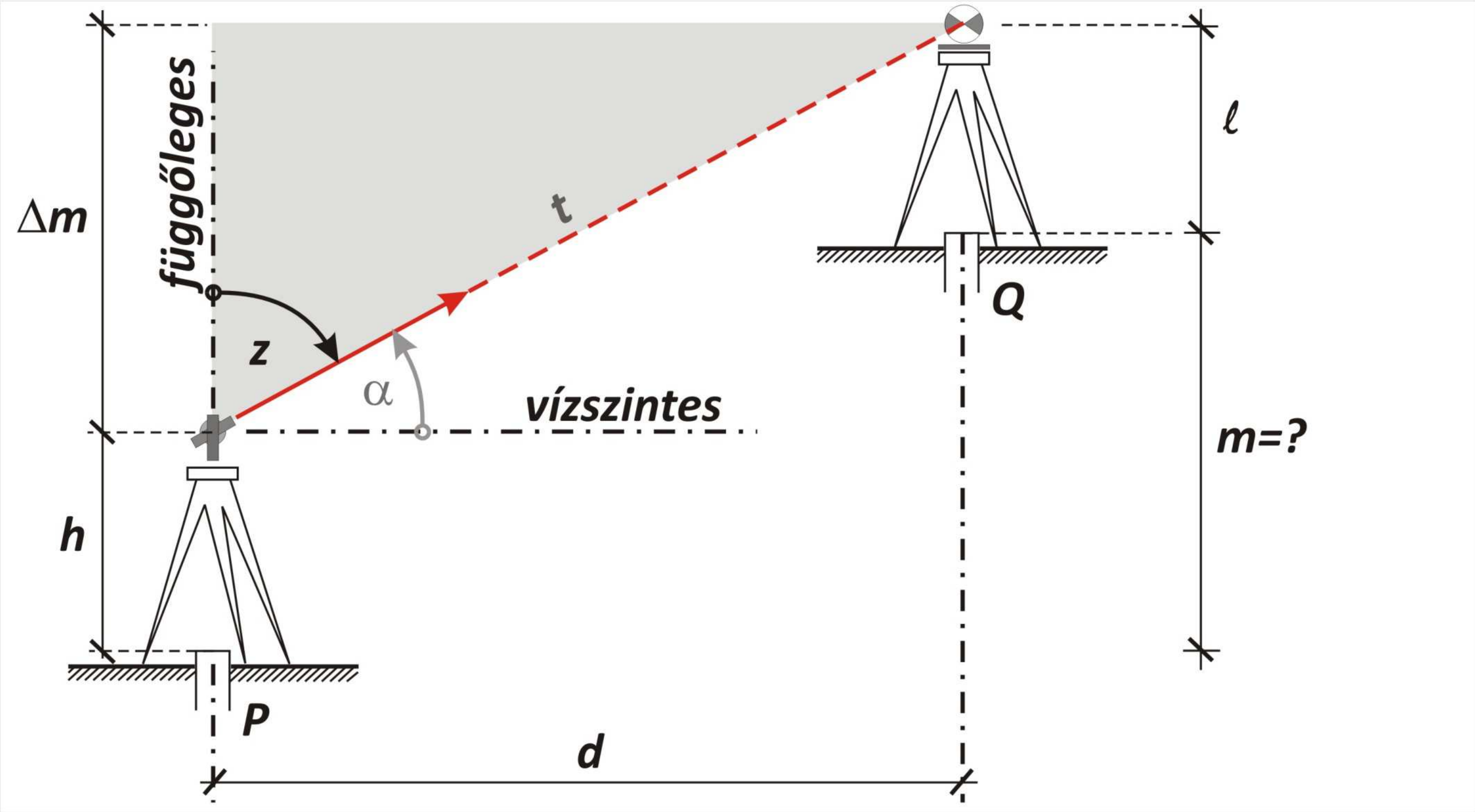
A trigonometriai magasságmérés alapelve



A trigonometriai magasságmérés alapelve

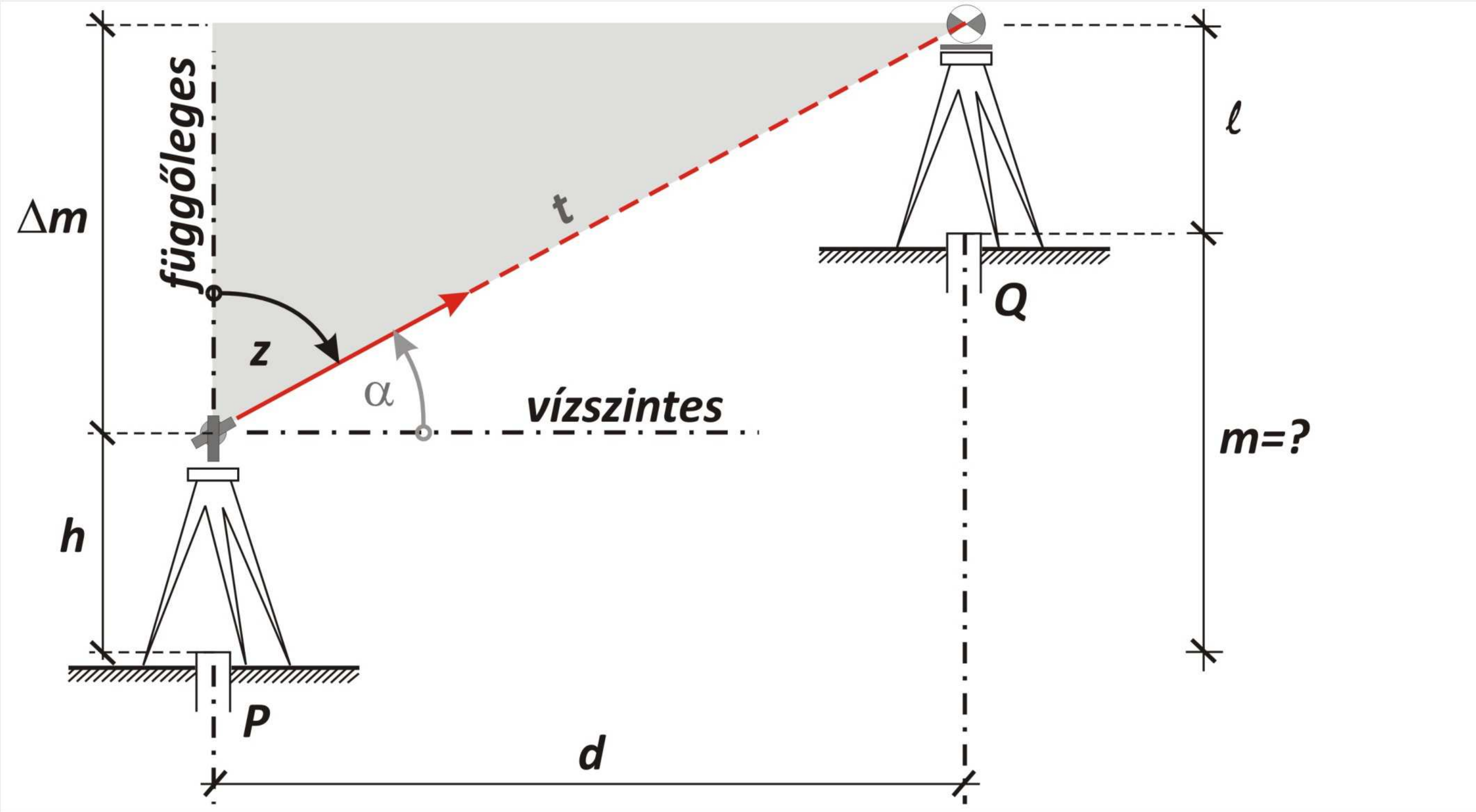


A trigonometriai magasságmérés alapelve



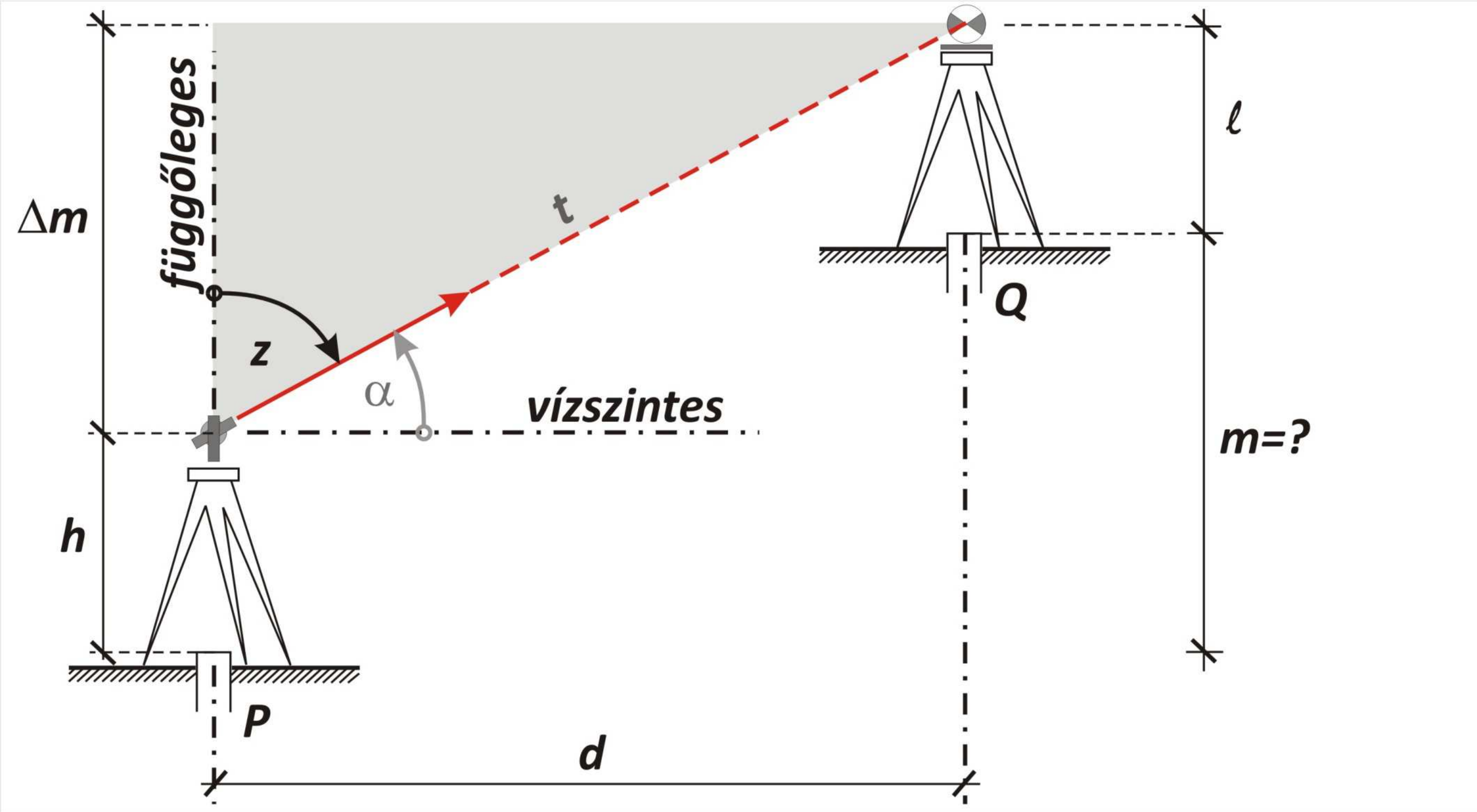
$$\Delta m = d \cot z$$

A trigonometriai magasságmérés alapelve



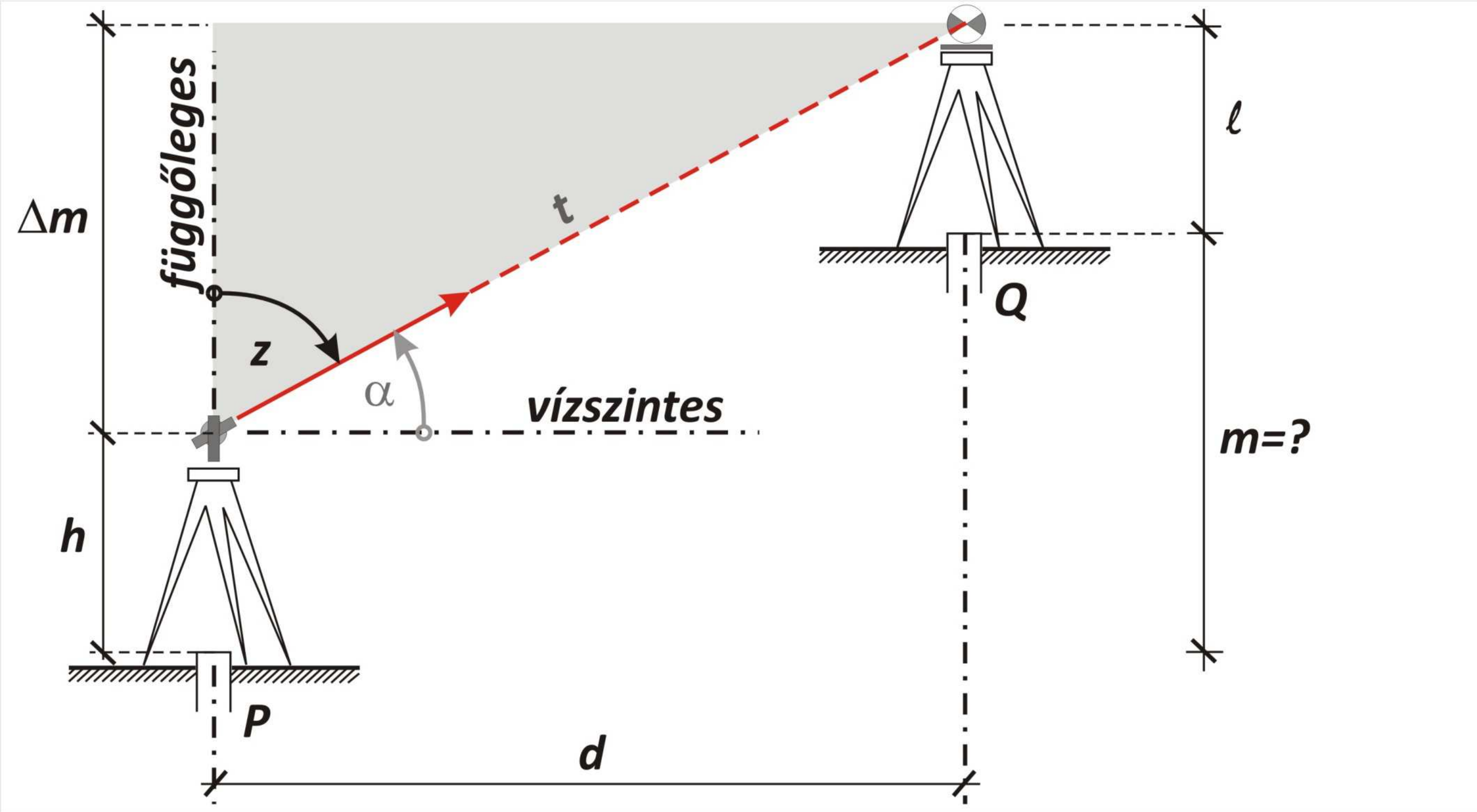
$$m = h + \Delta m - \ell = h - \ell + d \cot z$$

A trigonometriai magasságmérés alapelve



$$\Delta m = t\cos z$$

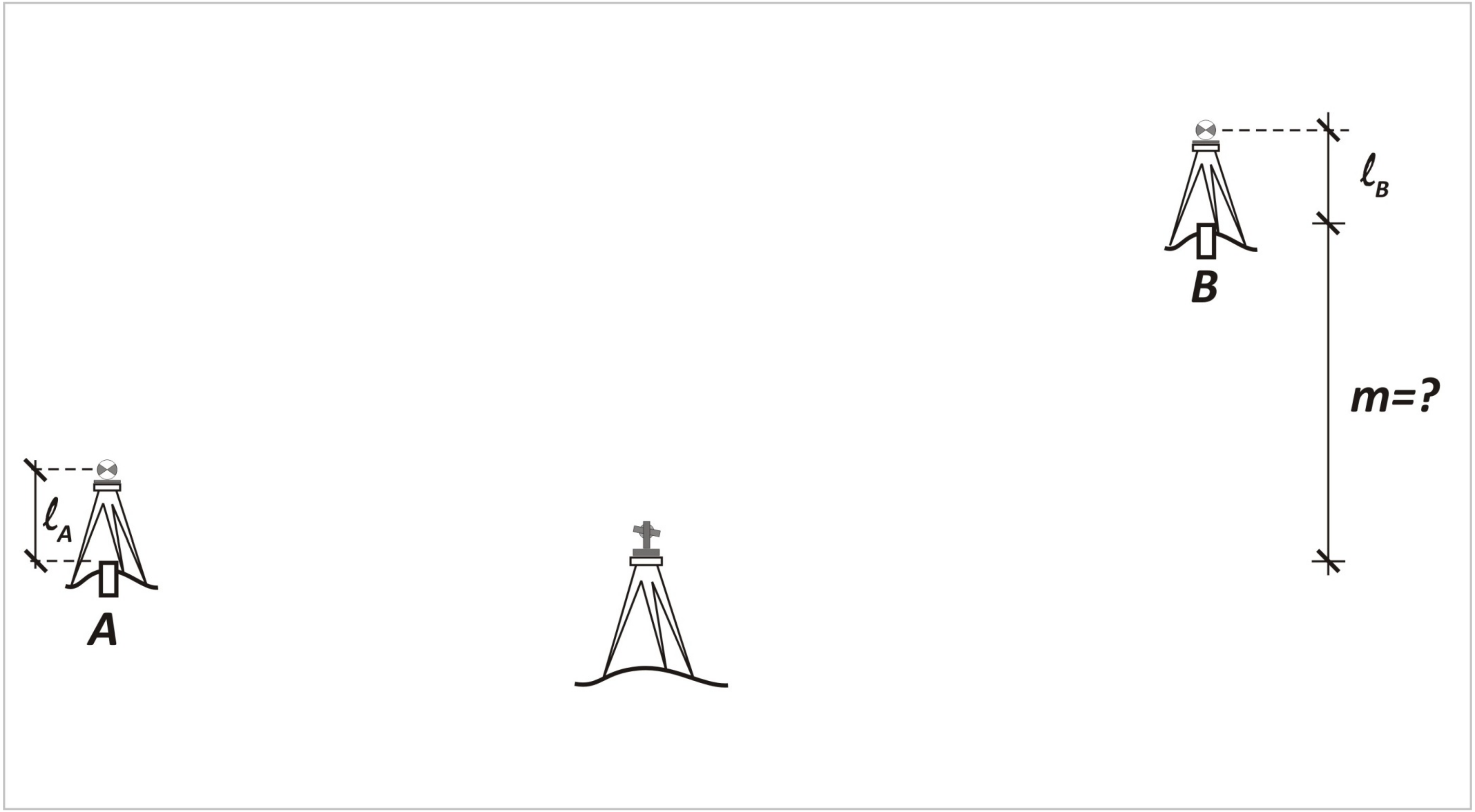
A trigonometriai magasságmérés alapelve



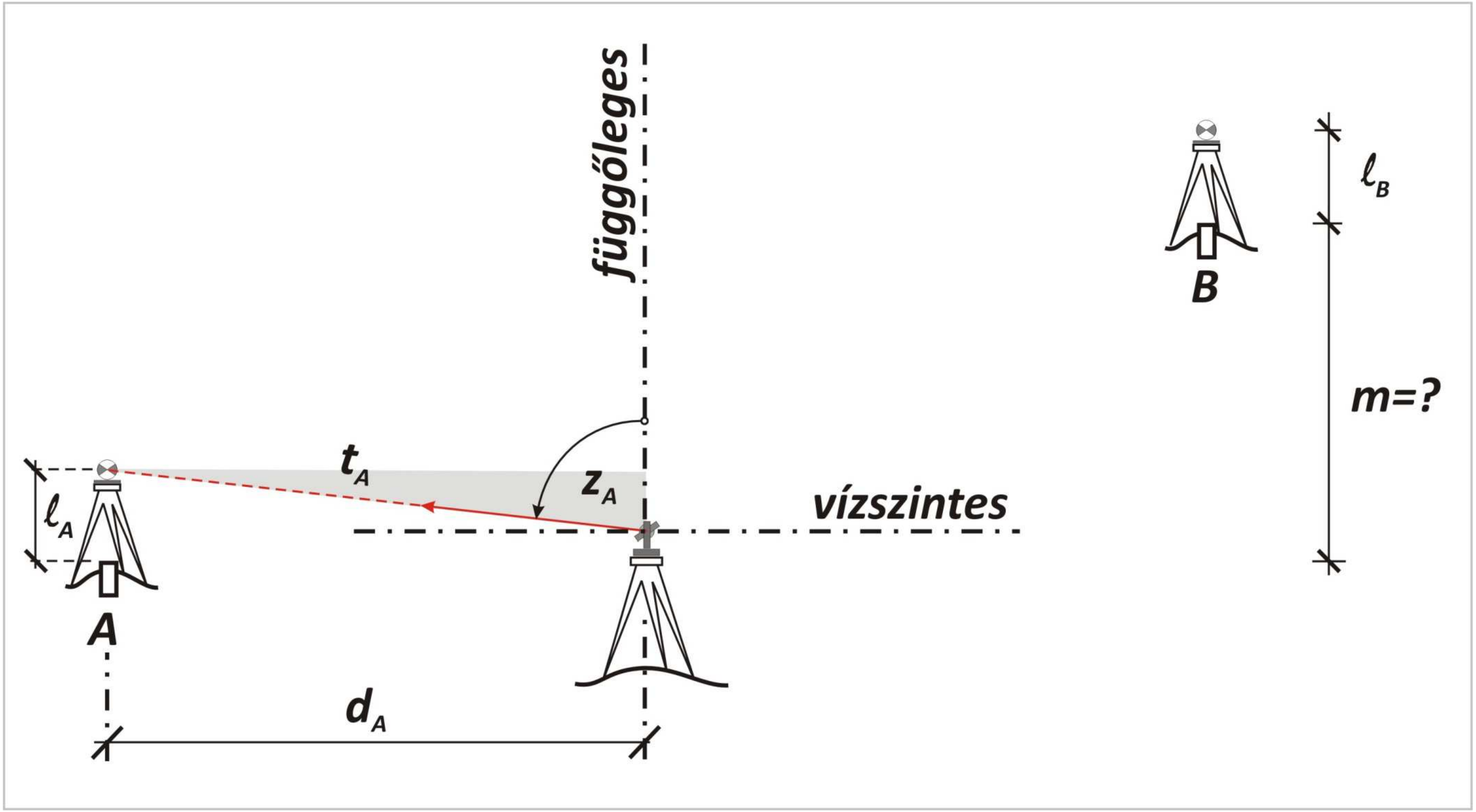
$$m = h + \Delta m - \ell = h - \ell + t \cos z$$

Trigonometriai szintezés

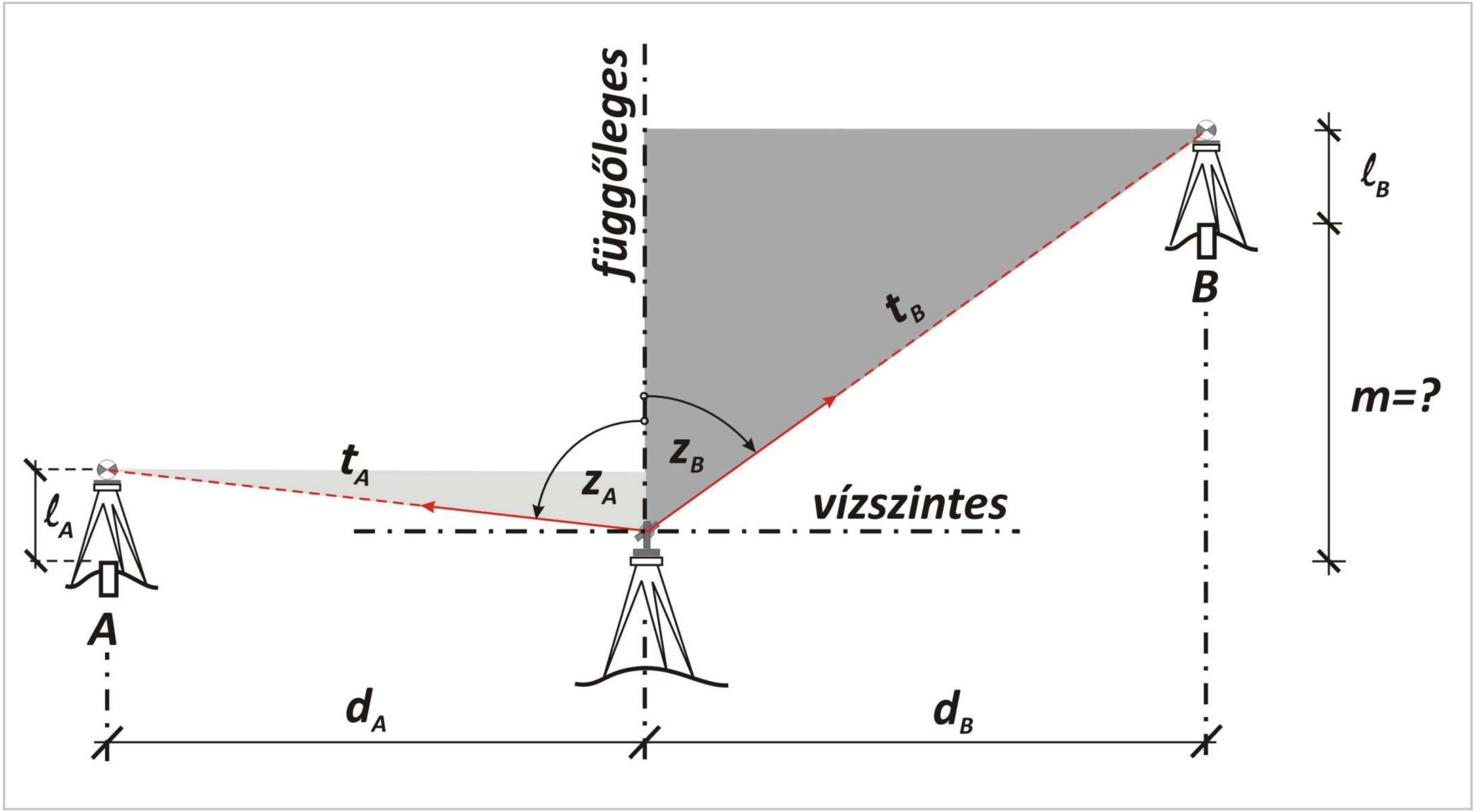
Trigonometriai szintezés



Trigonometriai szintezés



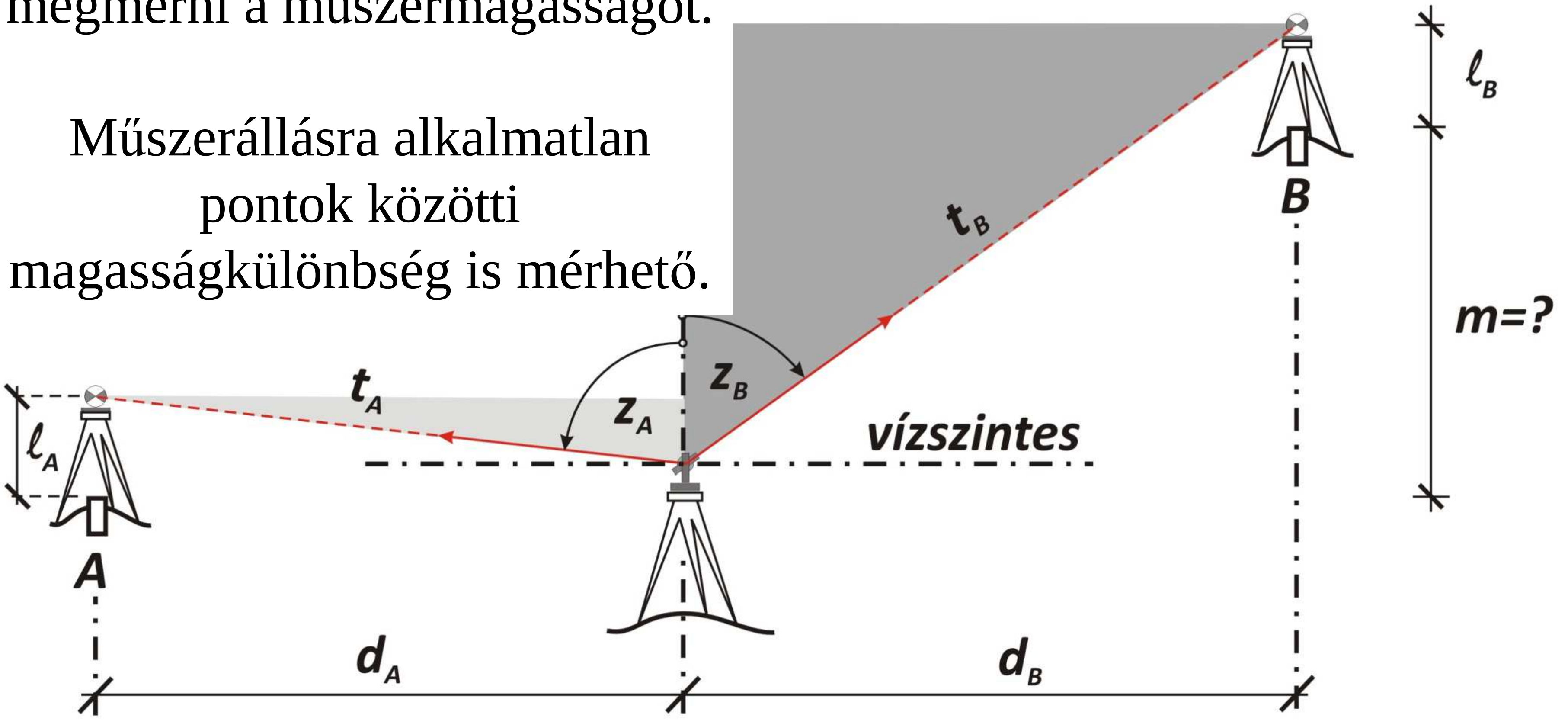
Trigonometriai szintezés



Trigonometriai szintezés

Előnye, hogy nem kell megmérni a műszermagasságot.

Műszerállásra alkalmatlan pontok közötti magasságkülönbség is mérhető.



$$m = \Delta m_{MB} - \Delta m_{MA} = \left(d_B \cot z_B - \ell_B\right) - \left(d_A \cot z_A - \ell_A\right) =$$

$$= \left(t_B \cos z_B - \ell_B\right) - \left(t_A \cos z_A - \ell_A\right)$$

A trigonometriai magasságmérés

Előnye az optikai szintezéssel szemben

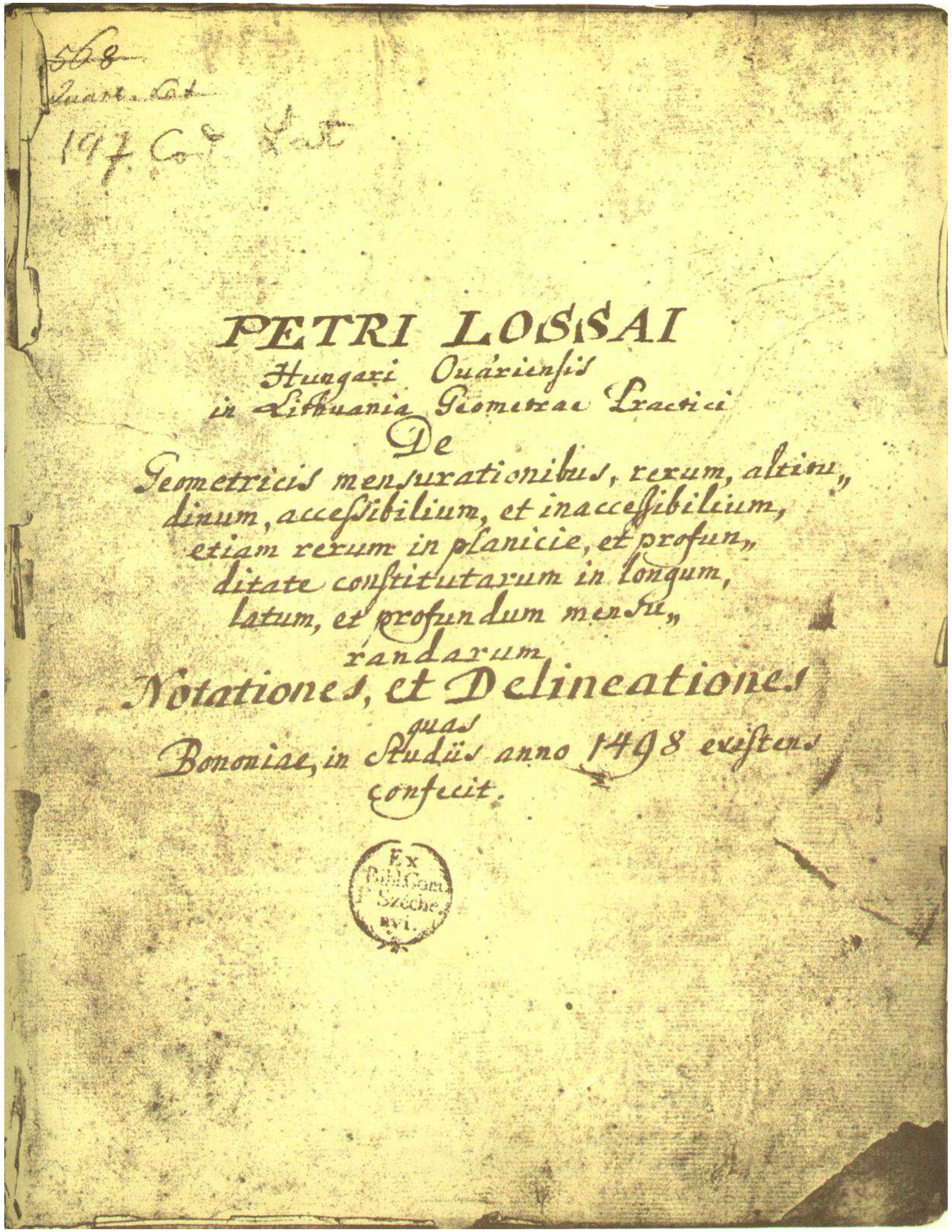
- rövid távon nagy magasságkülönbség is meghatározható;
- egymástól távoli pontok magasságkülönbsége is meghatározható egyetlen méréssel;
- megközelíthetetlen pontok magasságának meghatározására is alkalmas.

Hátránya az optikai szintezéssel szemben

- a meghatározott magasságkülönbség pontossága általában nem éri el a szintezéssel meghatározott magasságkülönbség pontosságát;
- a magasságkülönbség kiszámításához ismerni kell a pontok közötti a távolságot.

„Rei inaccessibilis in planitie perpendiculariter stantis altitudinem artificiose metiri”

A síkon, megközelíthetetlen helyen, függőlegesen álló tárgy magasságának szakszerű megmérése



PETRI LOSSAI
Hungari Ovariensis
in Lithuania Geometrae Practici
De
Geometricis mensurationibus, rerum, altitu-
dinum, accessibilium, et inaccessibilium,
etiam rerum in planicie, et profun-
ditate constitutarum in longum,
latum, et profundum mensu-
randarum
Notationes, et Delineationes
quas
Bononiae, in Studiis anno 1498 existens
confecit.

LOSSAI PÉTER

óvári magyar embernek,
a Litvániában működő földmérőnek,

a hozzáférhető és a hozzá nem férhető tárgyak
magasságának, valamint síkon és mélyben létesített,
mérendő hosszúságú, szélességű és mélységű
tárgyak geometriai úton végzett megméréséről szóló

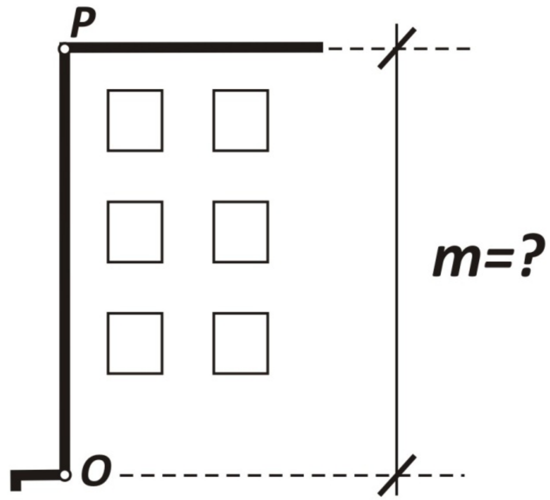
Jegyzetei és Ábrái

amelyeket
Bolognában tanulva az 1498. évben
készített

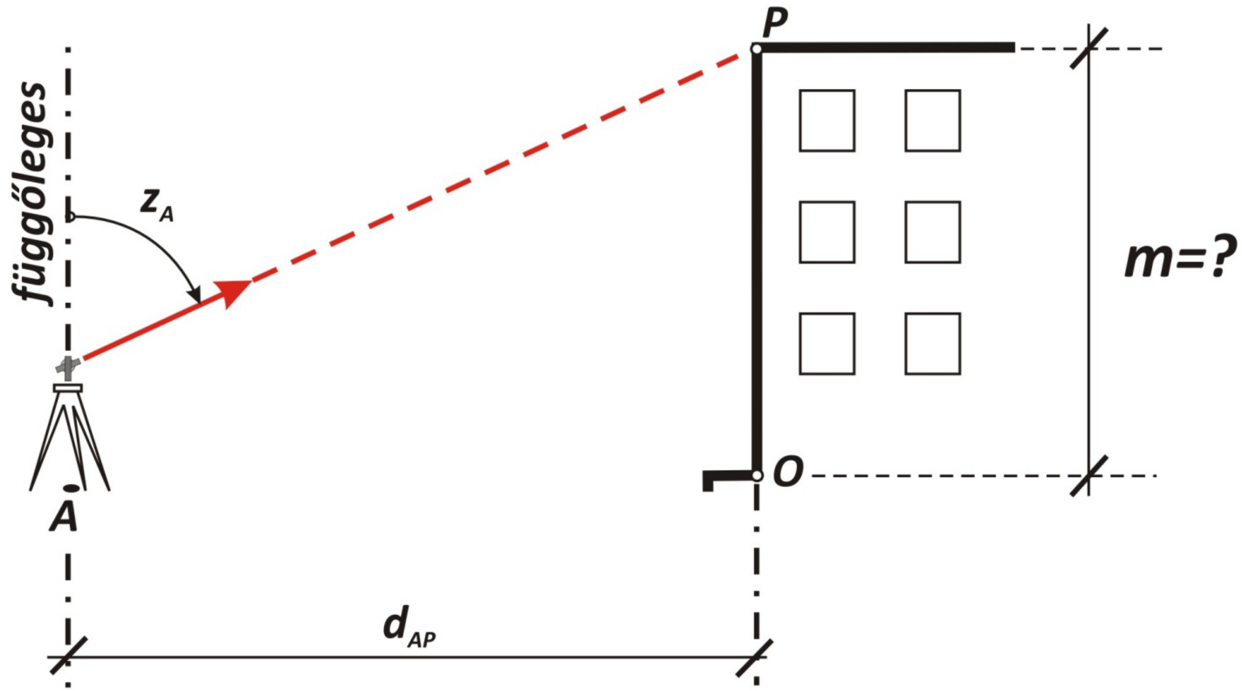
**A hasonmás kiadást összeállította:
Poronyi Zoltán - Fleck Alajos
PGTV 1985.**

Építmények magasságának meghatározása

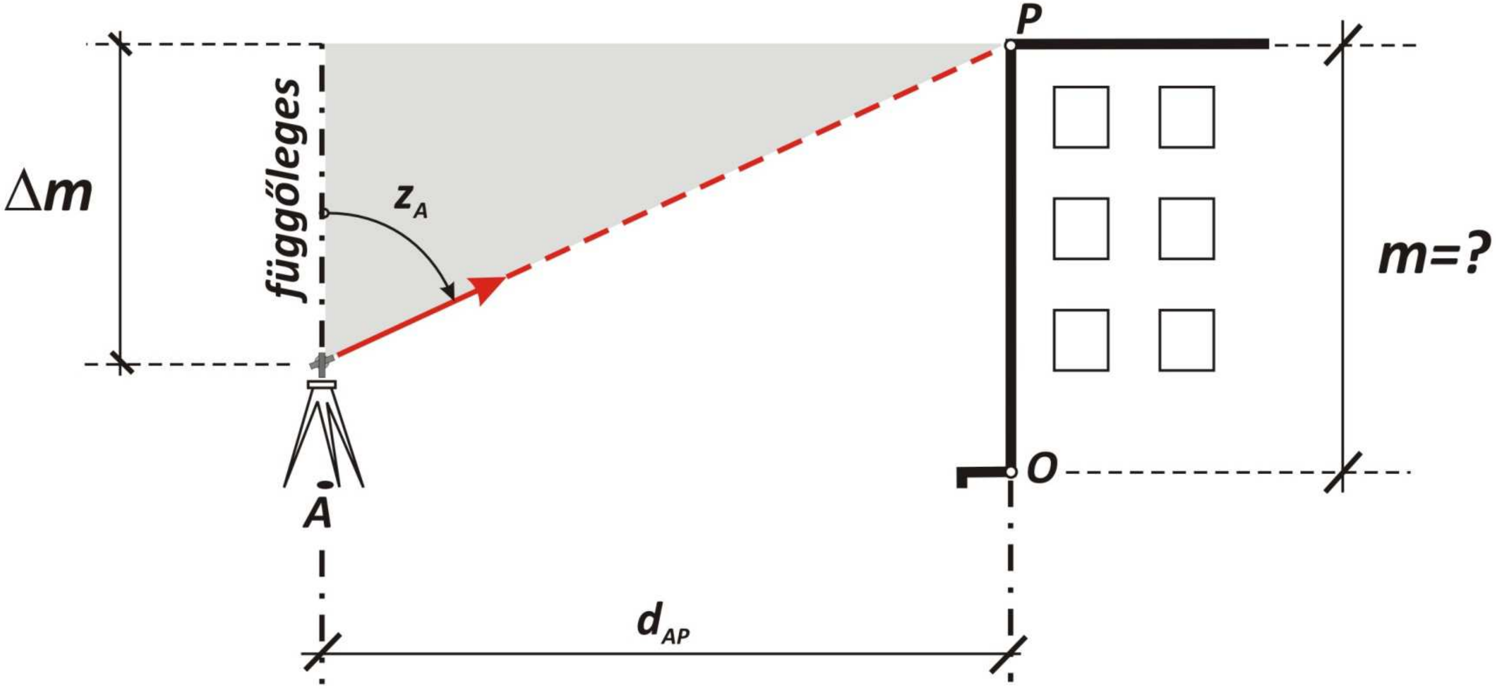
Építmények magasságának meghatározása



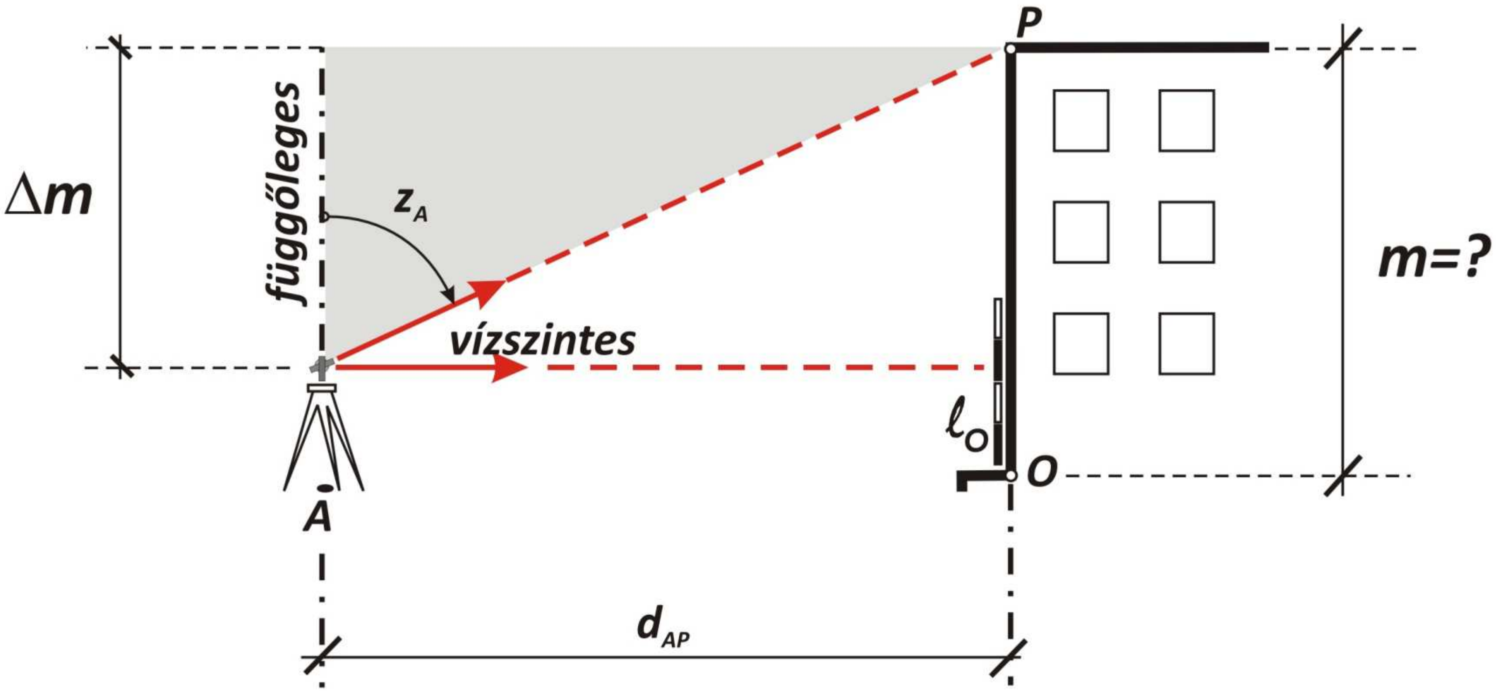
Építmények magasságának meghatározása



Építmények magasságának meghatározása



Építmények magasságának meghatározása



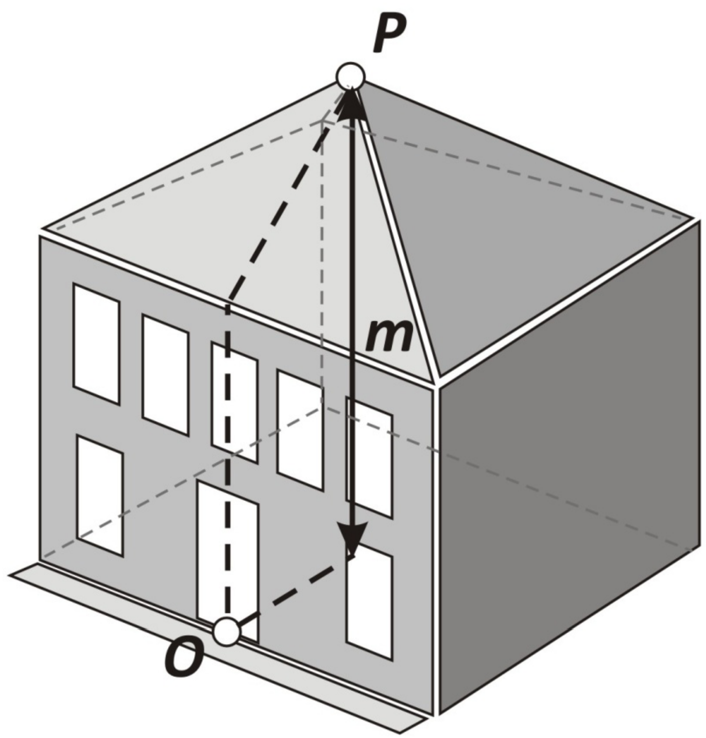
A d_{AP} távolság megmérhető, így:

$$\Delta m = d_{AP} \cot z_A$$

$$m = l_O + d_{AP} \cot z_A$$

Építmények magasságának meghatározása

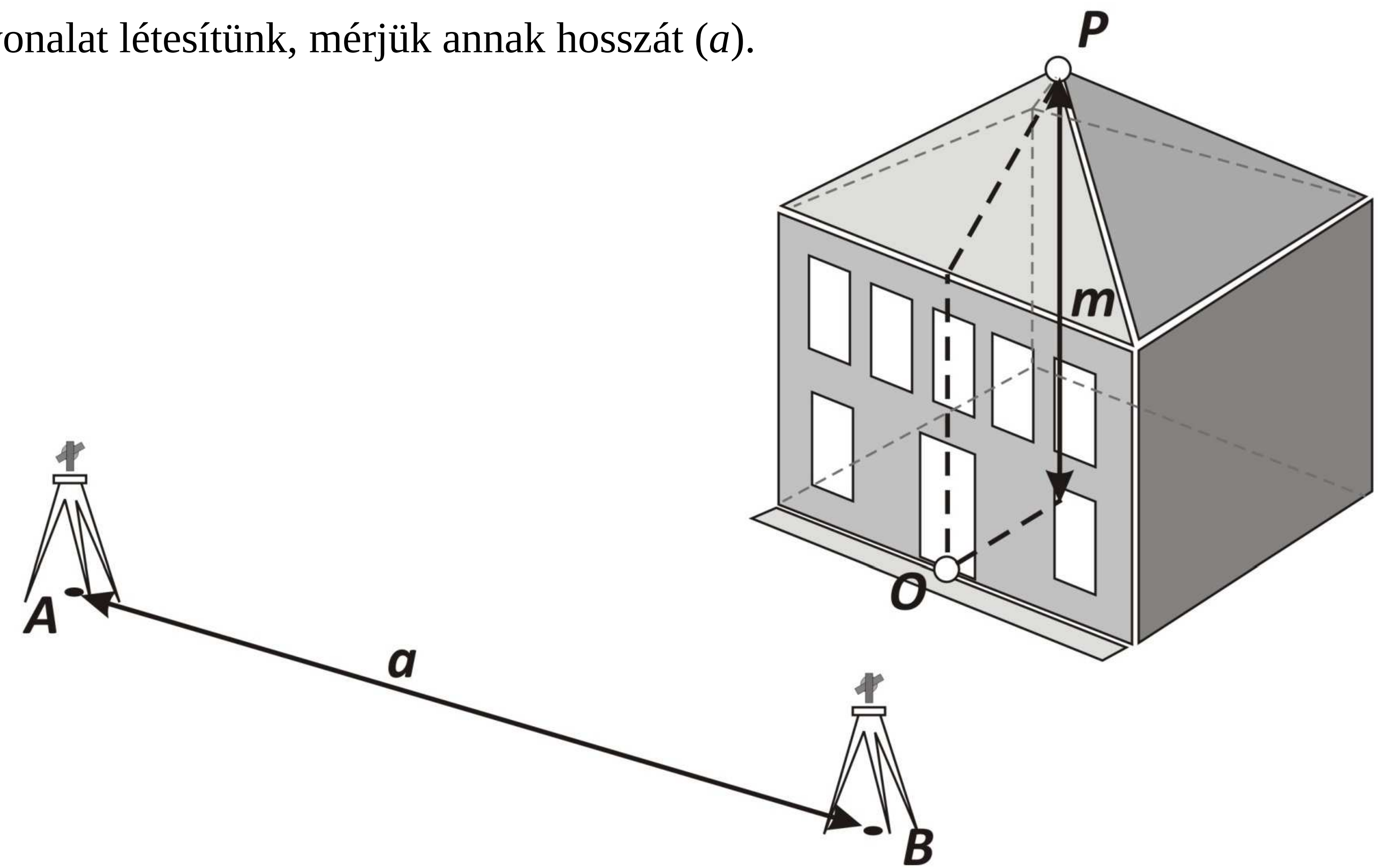
Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:



Építmények magasságának meghatározása

Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:

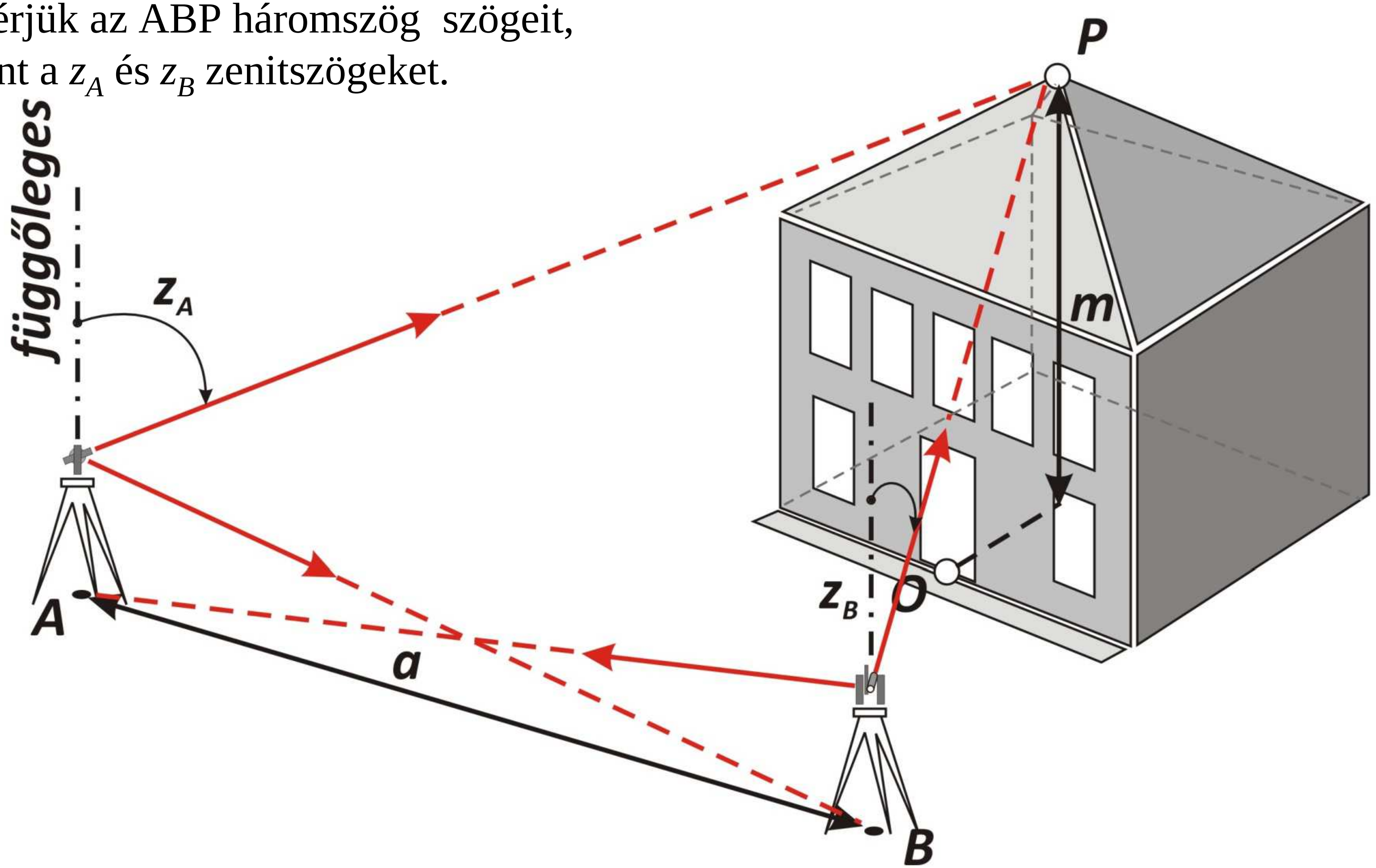
Alapvonalat létesítünk, mérjük annak hosszát (a).



Építmények magasságának meghatározása

Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:

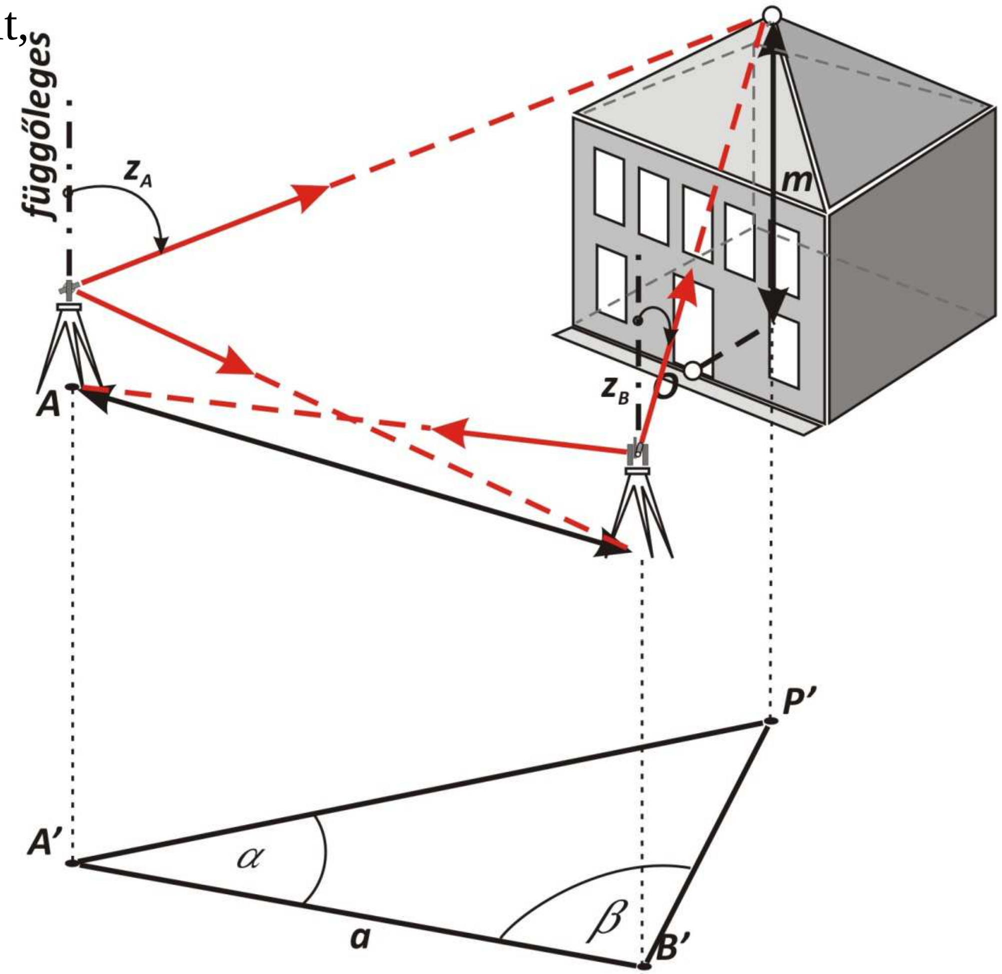
Megmérjük az ABP háromszög szögeit,
valamint a z_A és z_B zenitszögeket.



Építmények magasságának meghatározása

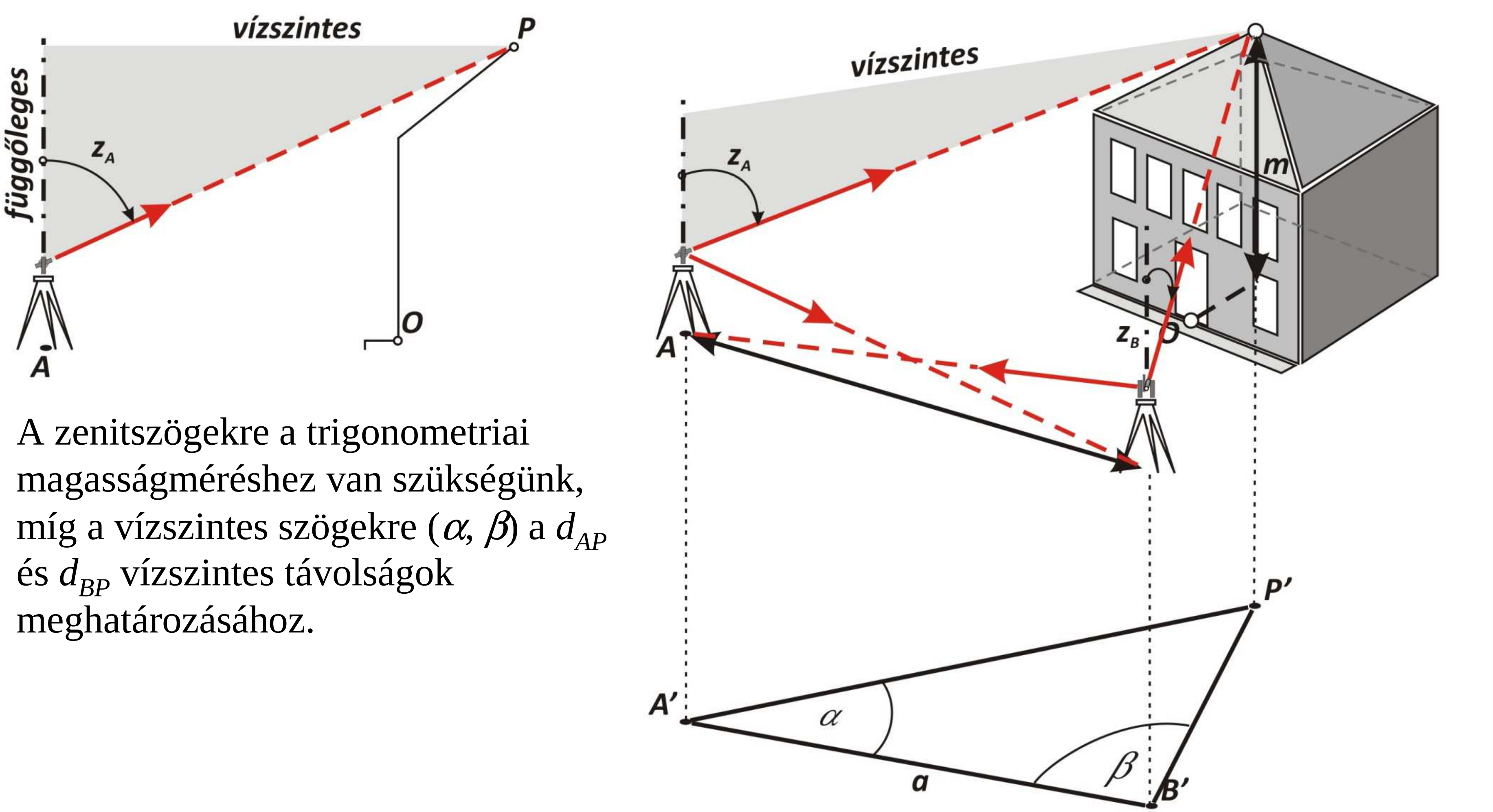
Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:

Megmérjük az ABP háromszög szögeit, valamint a z_A és z_B zenitszögeket.



Építmények magasságának meghatározása

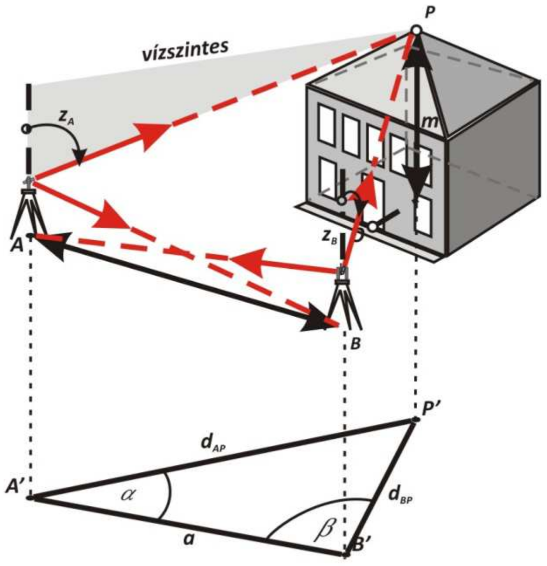
Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:

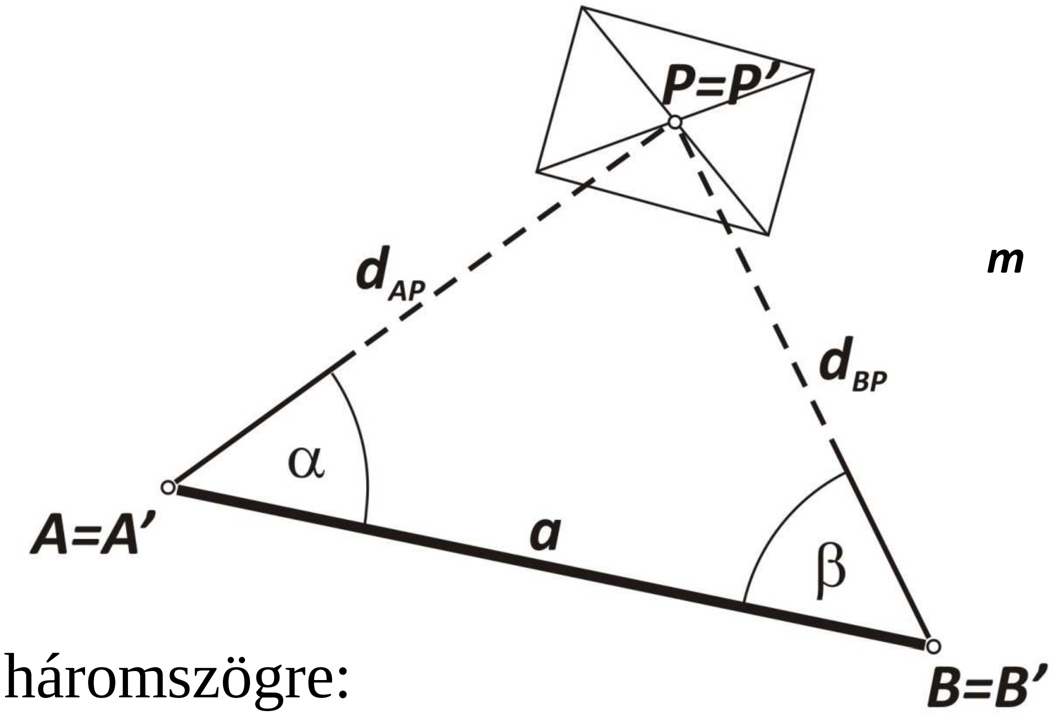


A zenitszögekre a trigonometriai magasságméréshez van szükségünk, míg a vízszintes szögekre (α, β) a d_{AP} és d_{BP} vízszintes távolságok meghatározásához.

Építmények magasságának meghatározása

Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:



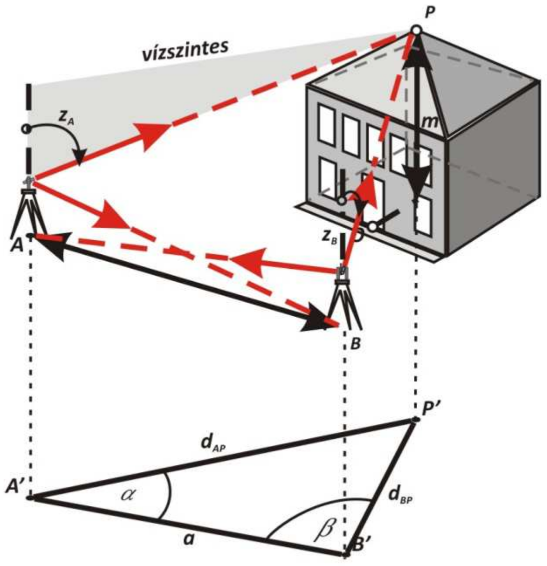


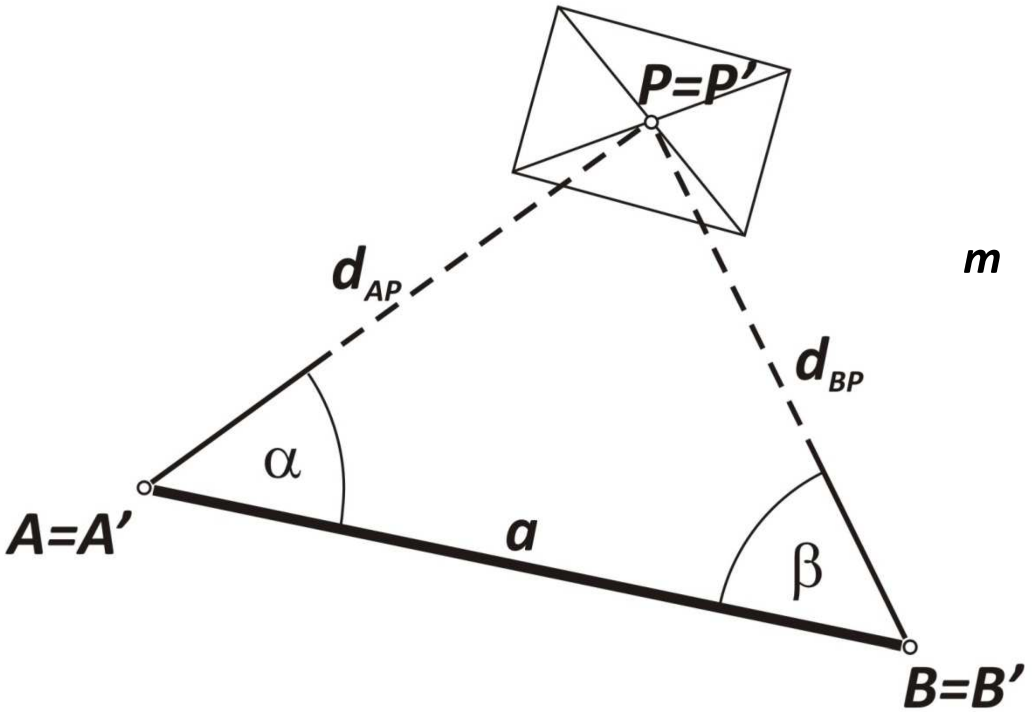
Írjuk fel a szinusz-tételt a háromszögre:

$$\frac{d_{AP}}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(180-\alpha-\beta)} \Rightarrow d_{AP} = a\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Építmények magasságának meghatározása

Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:



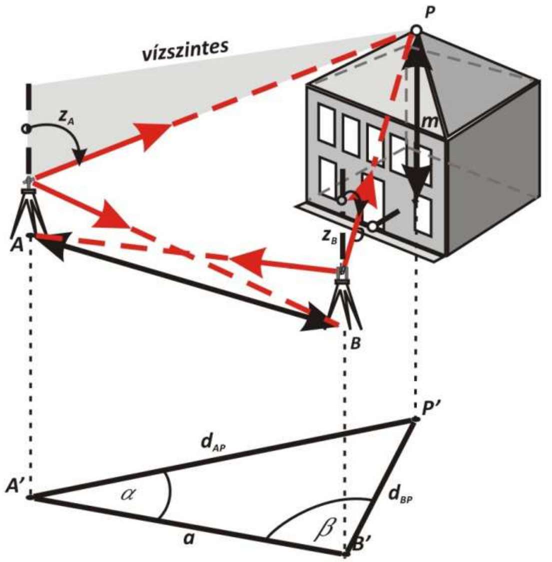


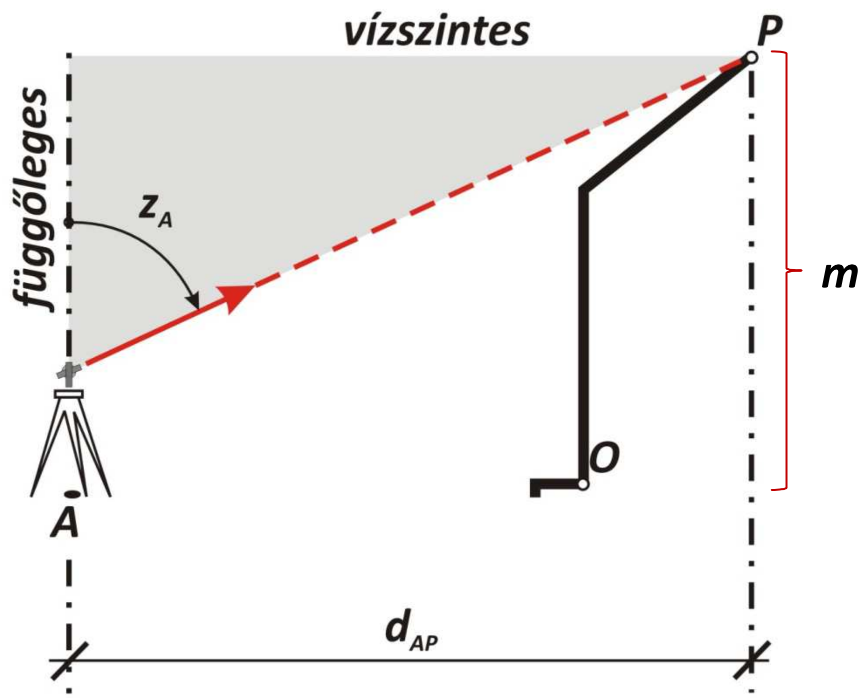
Ugyanez a d_{BP} távolságra:

$$\frac{d_{BP}}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180-\alpha-\beta)} \Rightarrow d_{BP} = a\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Építmények magasságának meghatározása

Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:



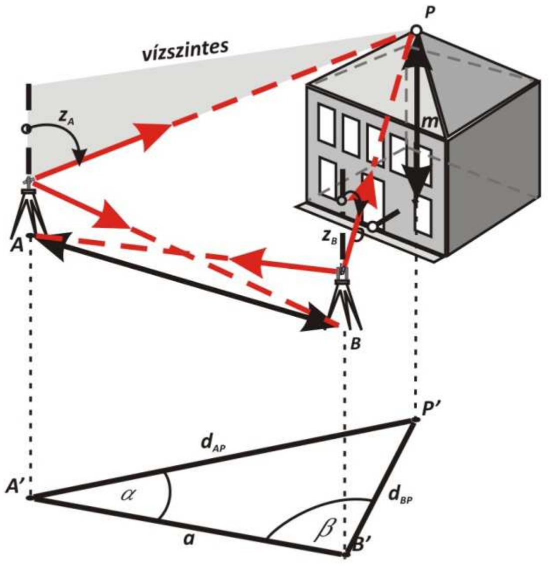


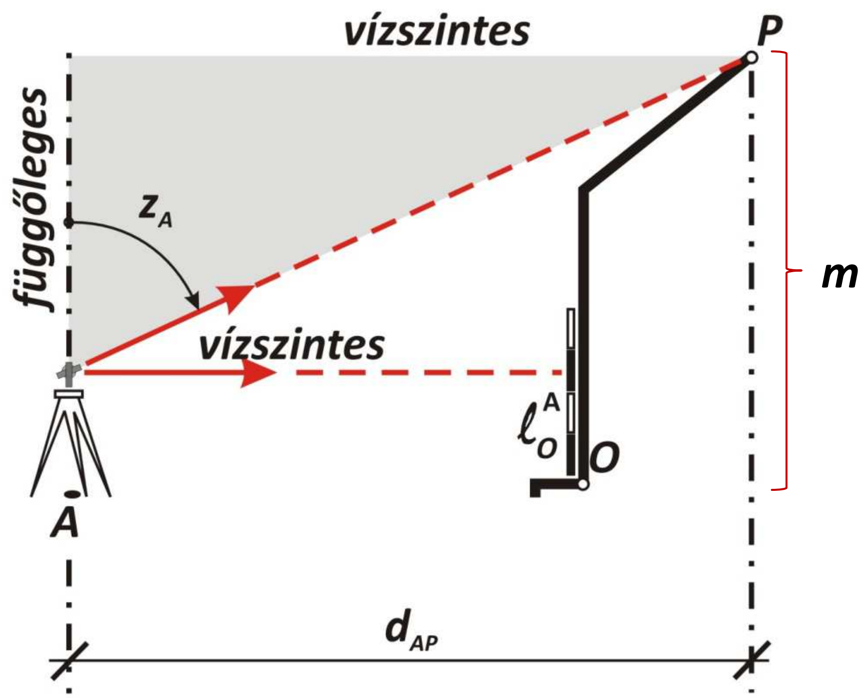
Határozzuk meg az *m* magasságot!

Ehhez még ismernünk kellene a műszer fekvőtengelyének és az *O* pontnak a magasságkülönbségét!

Építmények magasságának meghatározása

Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:



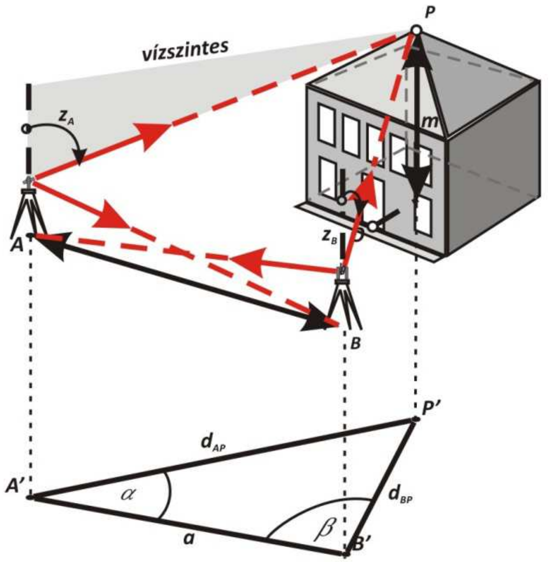


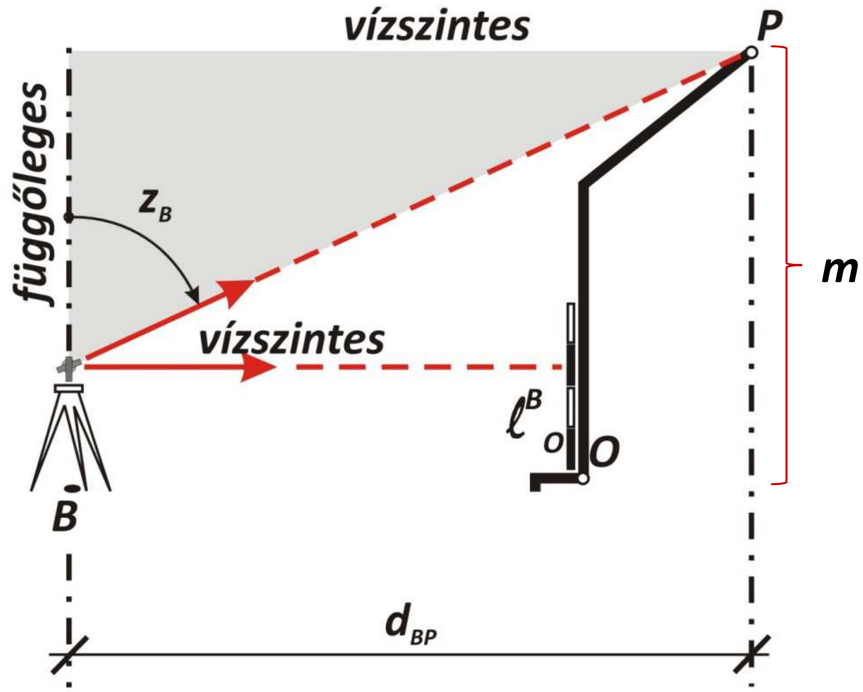
Az A pont méréseit felhasználva:

$$(m)_A = l_0^A + d_{AP} \cot z_A$$

Építmények magasságának meghatározása

Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:



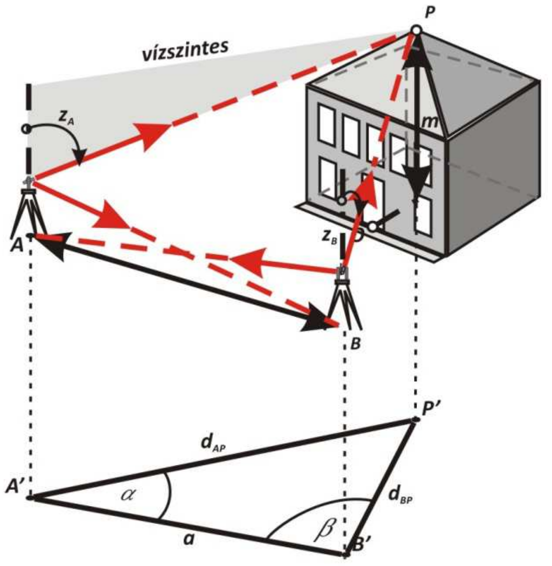


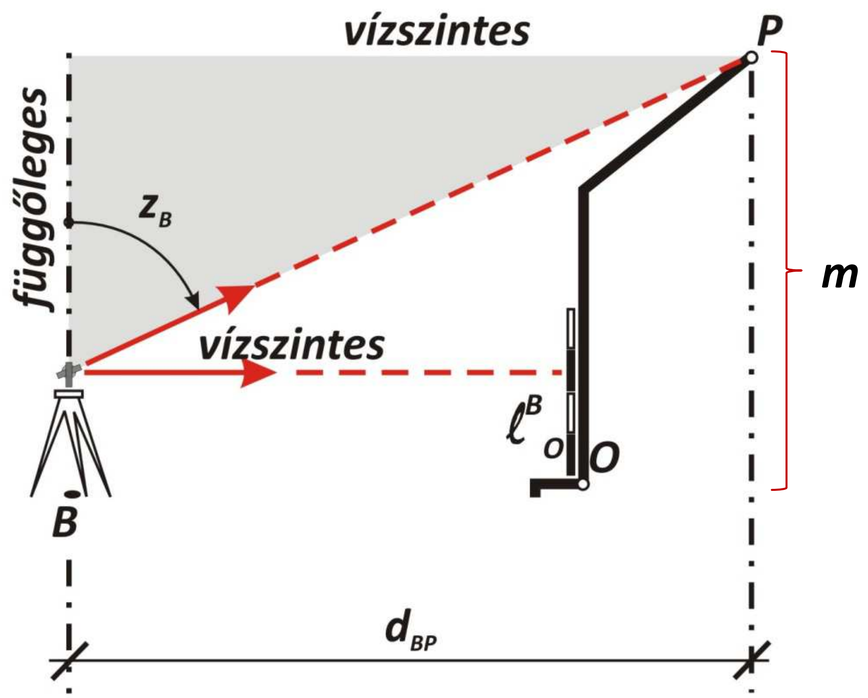
Míg a *B* pont méréseiből:

$$(m)_B = l_O^B + d_{BP} \cot z_B$$

Építmények magasságának meghatározása

Ha a d_{AP} távolság nem mérhető:



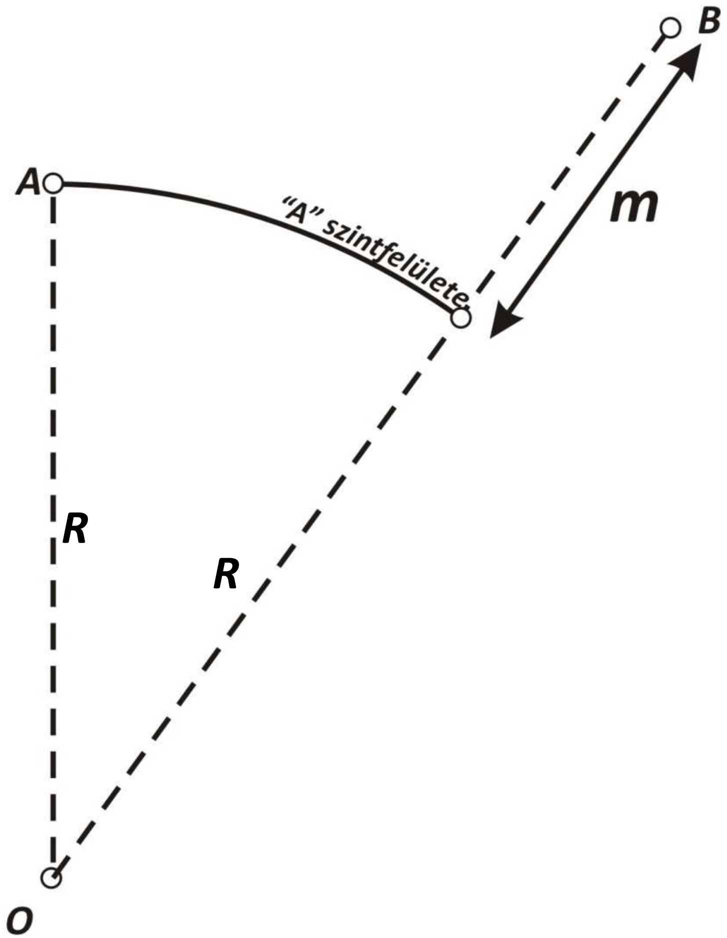


A meghatározott építménymagasság:

$$m = \frac{(m)_A + (m)_B}{2}$$

Trigonometriai magasságmérés

Magasságmérés végrehajtása nagy távolságokra



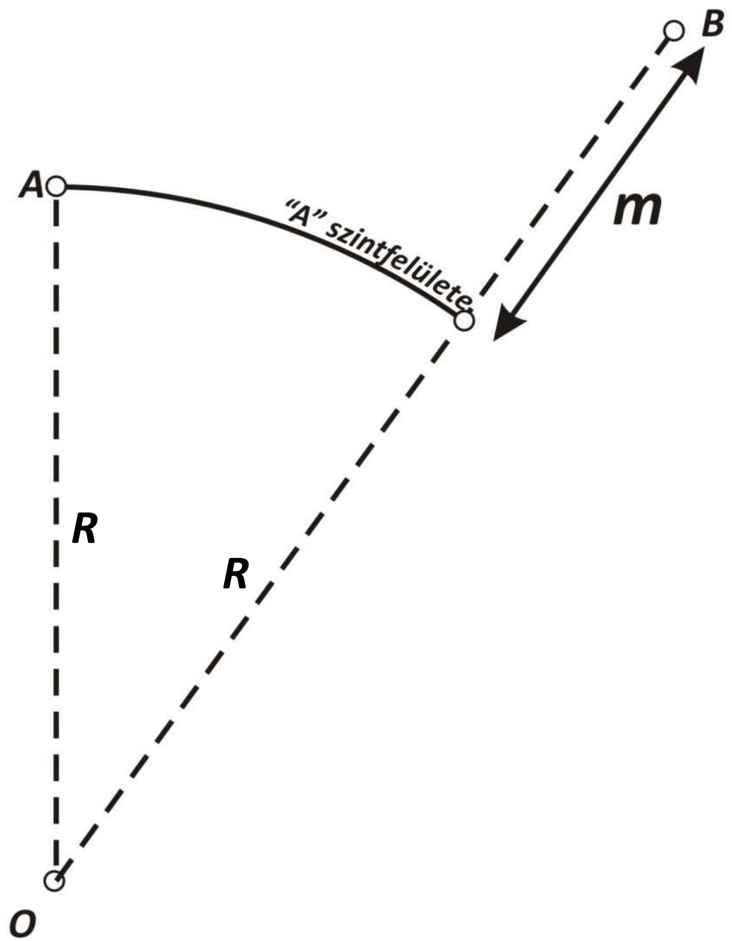
Hogyan végezhetünk nagy távolságokra trigonometriai magasságmérést?

Ekkor már nem tekinthetünk el:
- a földgörbület hatásától
- a refrakció jelenségétől

Nézzük meg, hogyan hatnak ezek a jelenségek a trigonometriai magasságmérés technológiájára!

Trigonometriai magasságmérés

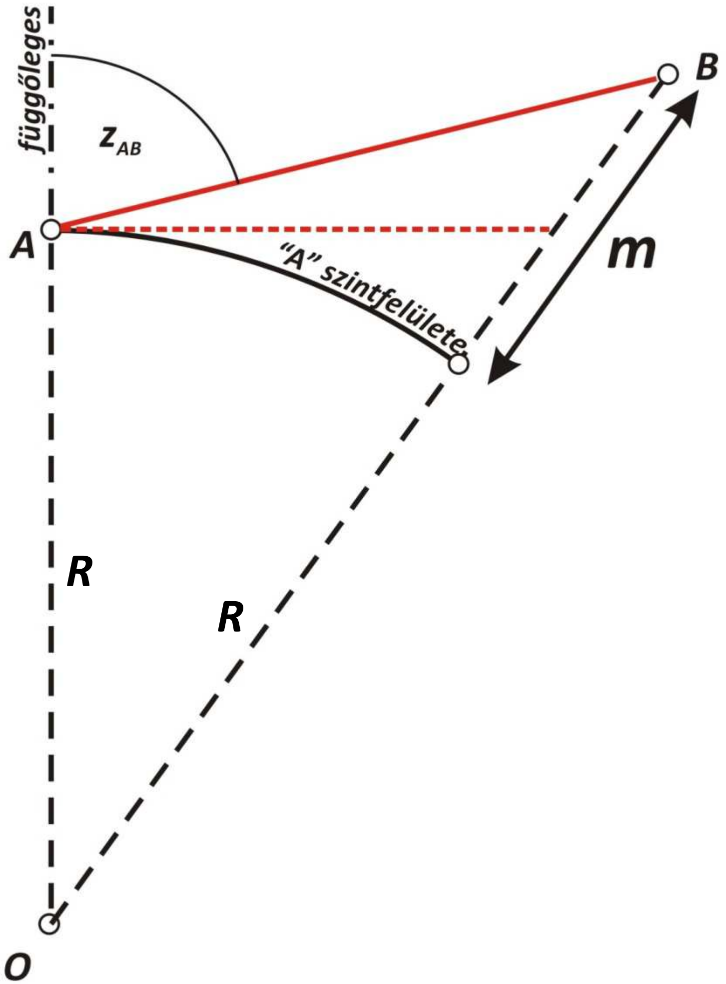
Magasságmérés végrehajtása nagy távolságokra



Határozzuk meg az *A* és *B* pontok magasságkülönbségét!

Trigonometriai magasságmérés

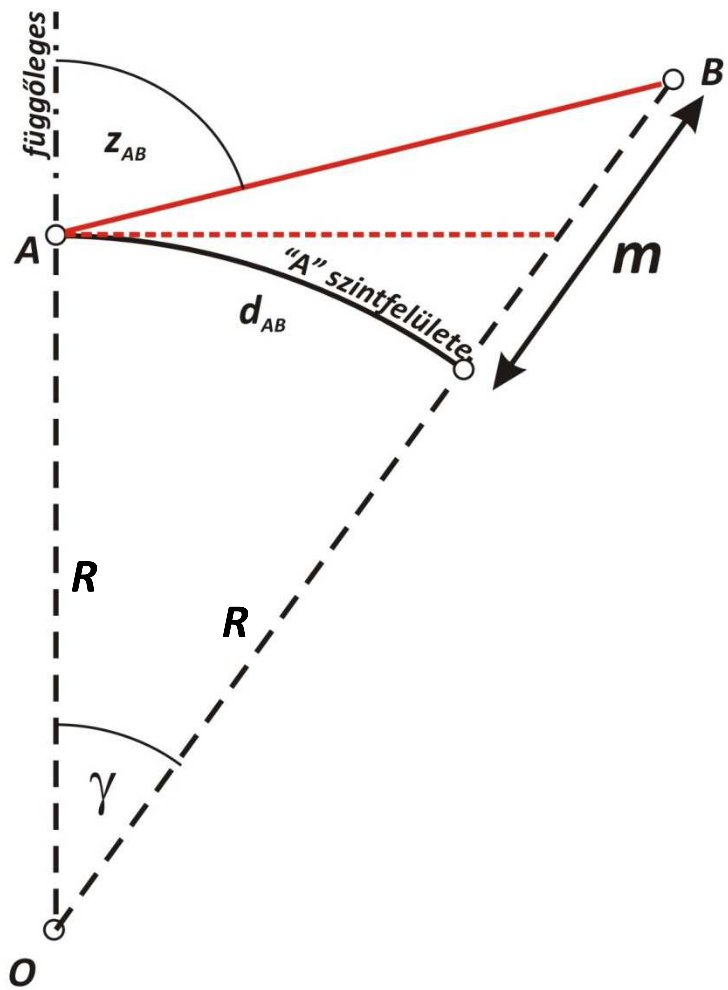
A földgörbület hatása



Álljunk pontra a teodolittal az *A* ponton, majd mérjük meg a z_{AB} zenitszöget!

Trigonometriai magasságmérés

A földgörbület hatása

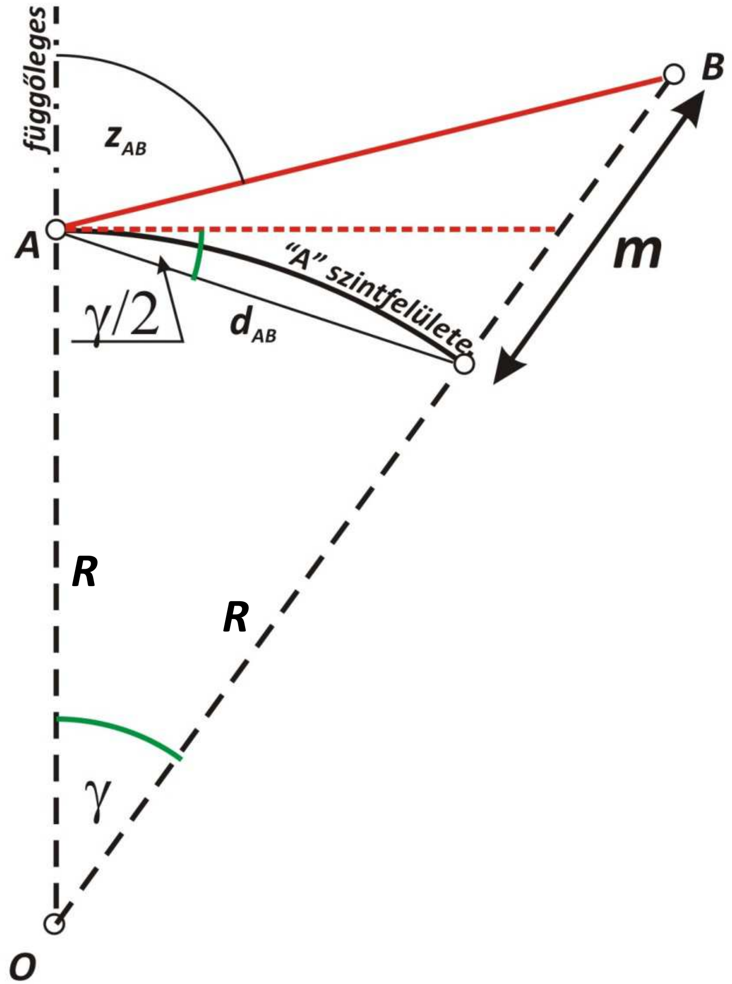


Ha ismerjük a d_{AB} vízszintes távolságot, akkor a γ középponti szög számítható:

$$\gamma = \frac{d_{AB}}{R}$$

Trigonometriai magasságmérés

A földgörbület hatása

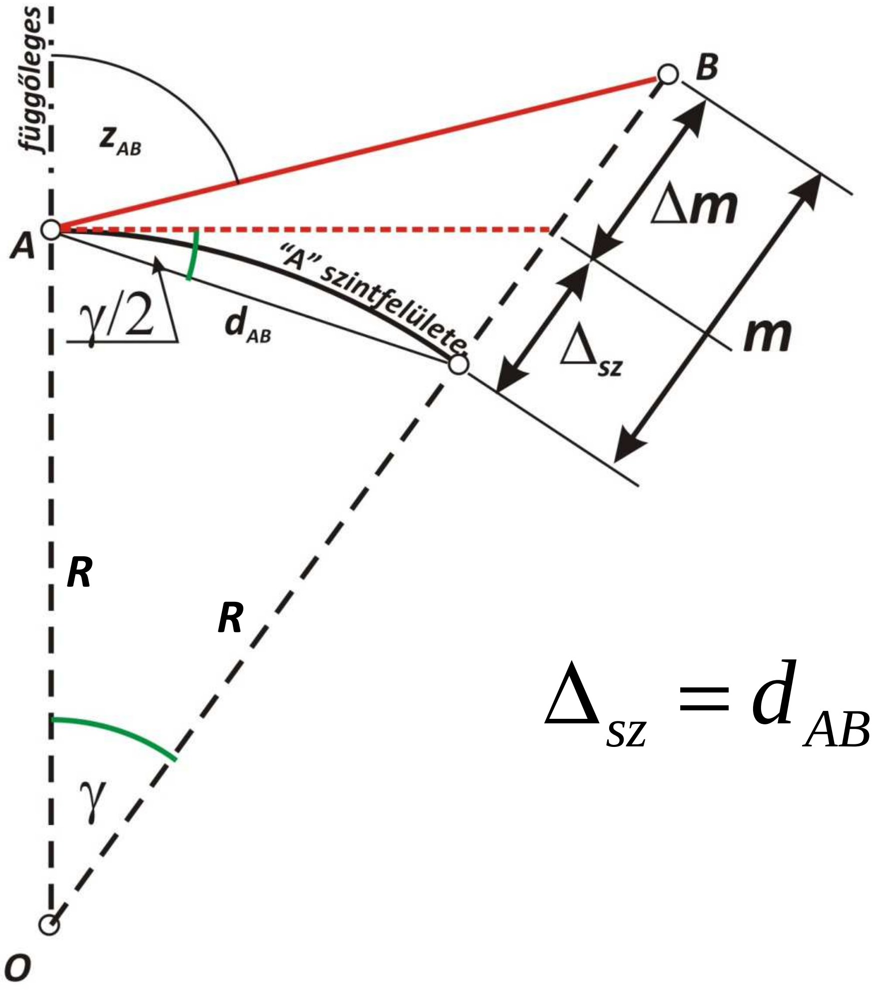


Az *A* pont és a *B* alapfelületi megfelelője közötti húr, valamint az *A* pont horizontja által bezárt szög:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{d_{AB}}{2R}$$

Trigonometriai magasságmérés

A földgörbület hatása



A teljes magasságkülönbség (m) két részből áll össze:

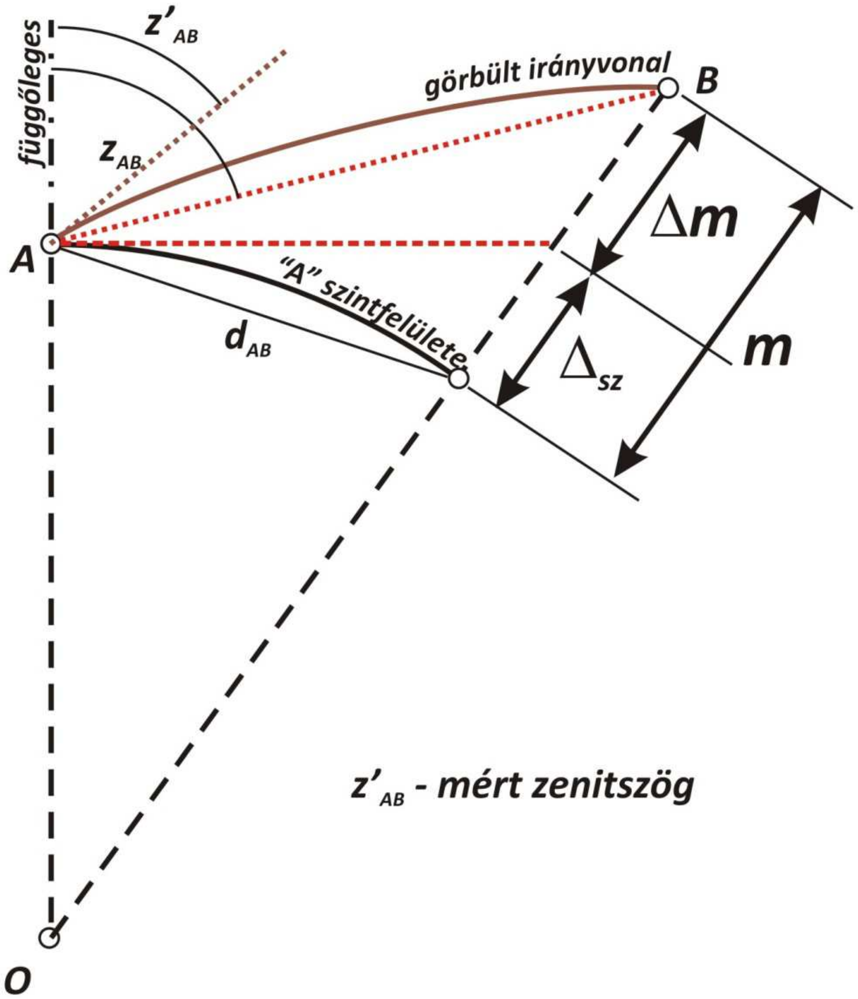
$$m = \Delta m + \Delta_{sz}$$

Ahol Δm a mért magasságkülönbség, míg Δ_{sz} a szintfelület görbültségének hatása (γ <<):

$$\Delta_{sz} = d_{AB} \cdot \tan\frac{\gamma}{2} \approx d_{AB} \cdot \frac{d_{AB}}{2R} = \frac{d_{AB}^{\;2}}{2R}$$

Trigonometriai magasságmérés

A sugárgörbület hatása



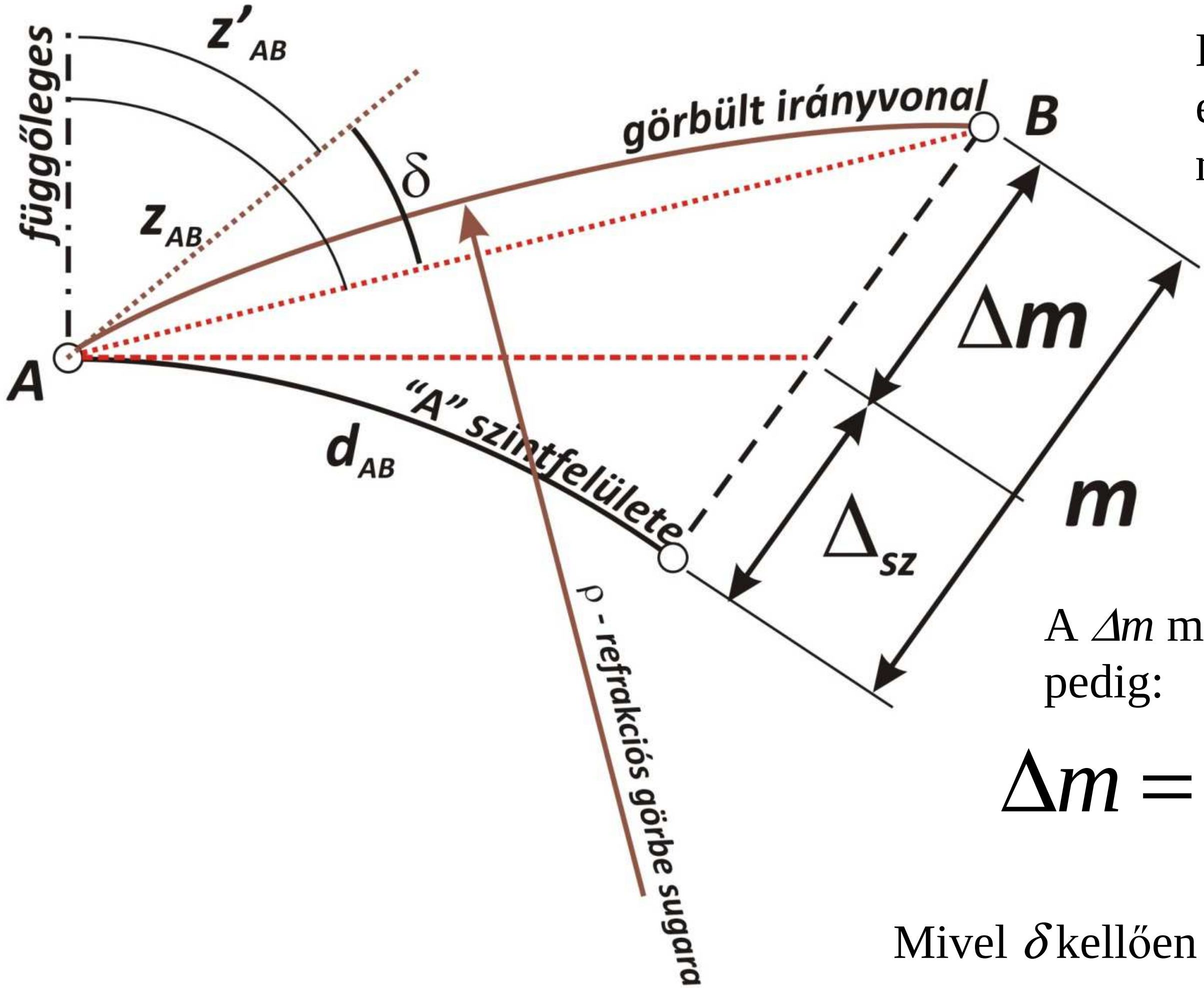
Hogyan befolyásolja méréseinket a refrakció (sugárgörbület)?

A mért zenitszög az *A* pont helyi függőlegese és a görbült irányvonal *A* végponti érintője által bezárt szög (z'_{AB}).

Eddigi számításainkban az egyenes irányvonalnak megfelelő z_{AB} szöget használtuk.

Trigonometriai magasságmérés

A sugárgörbület hatása



Ekkor a δ szögeltérés a mért és az egyenes irányvonalnak megfelelő zenitszögek között:

$$\delta = \frac{d_{AB}}{2\rho}$$

A Δm magasságkülönbség pedig:

$$\Delta m = d_{AB} \cdot \cot\left(z'_{AB} + \delta\right)$$

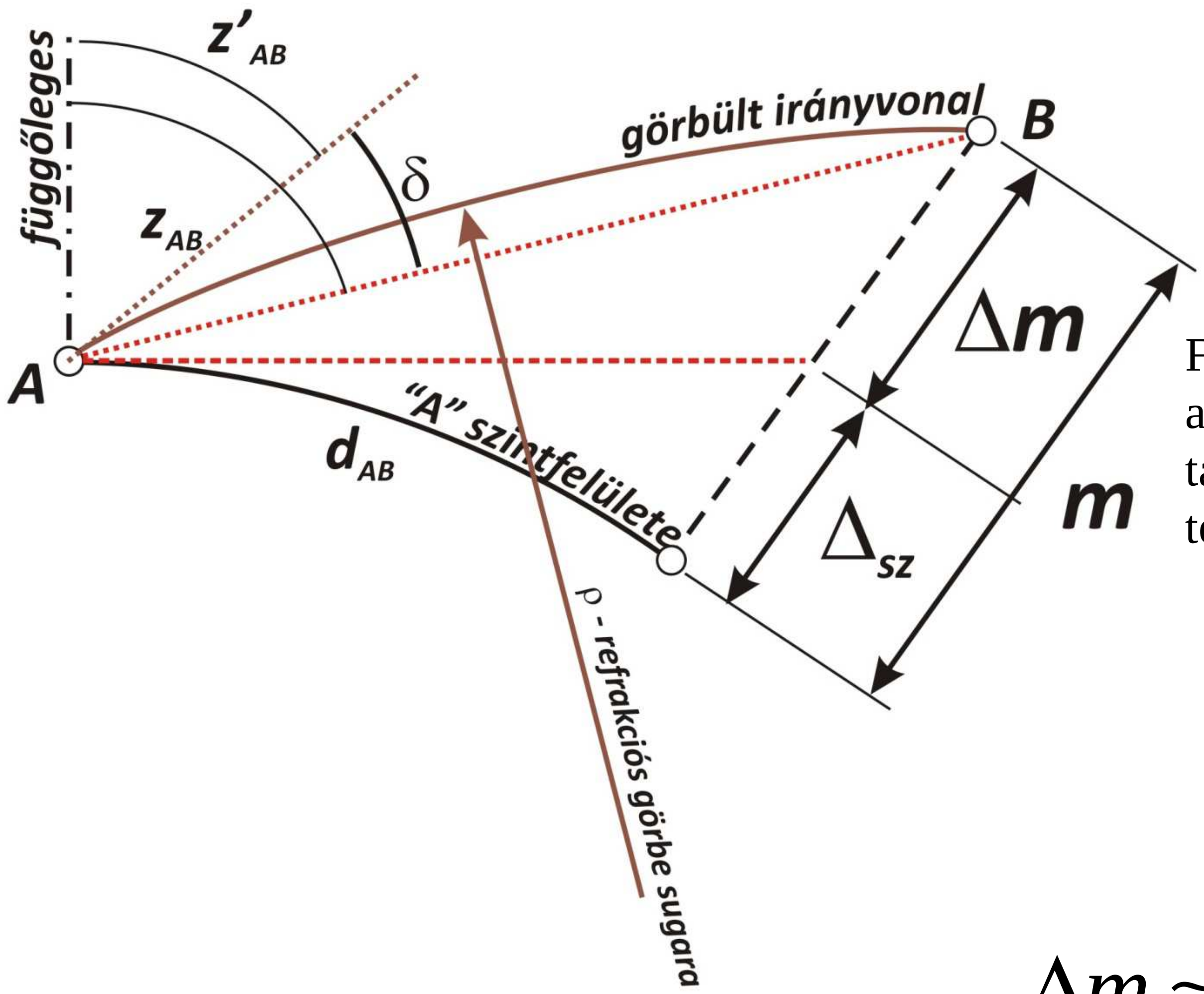
Mivel δ kellően kicsiny:

$$\Delta m \approx d_{AB} \cdot \cot z'_{AB} - d \cdot \delta$$

Legyen a refrakciós görbe sugara ρ!

Trigonometriai magasságmérés

A sugárgörbület hatása



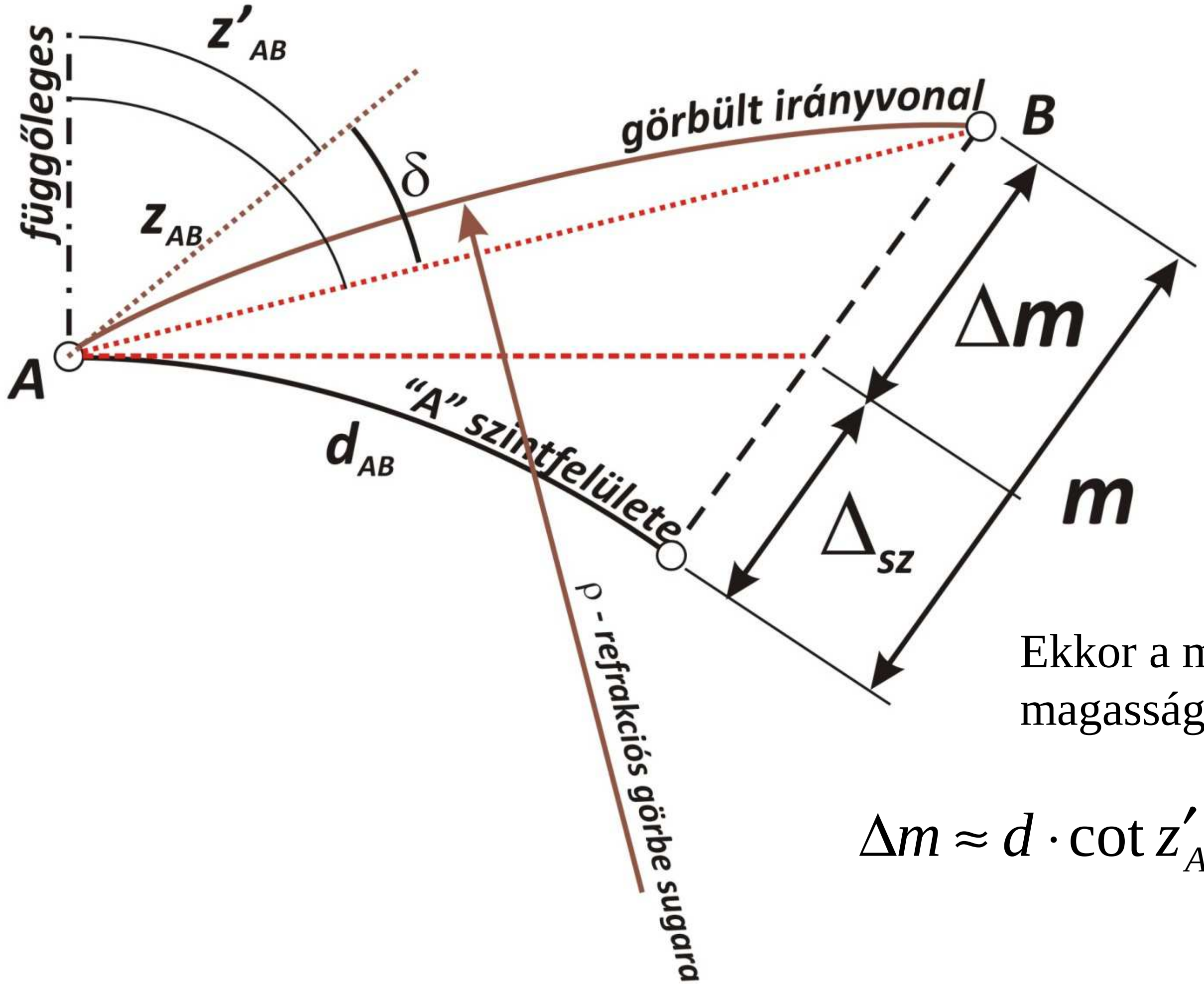
Földi körülmények között a vízszintes és a ferde távolság közel azonosnak tekinthető, így:

$$\delta \approx \frac{d^2}{2\rho}$$

$$\Delta m \approx d \cdot \cot z'_{AB} - \frac{d^2}{2\rho}$$

Trigonometriai magasságmérés

A sugárgörbület hatása



Vezessük be a refrakciós együtthatót:

$$k = \frac{R}{\rho} = +0{,}13$$

Ekkor a mért magasságkülönbség:

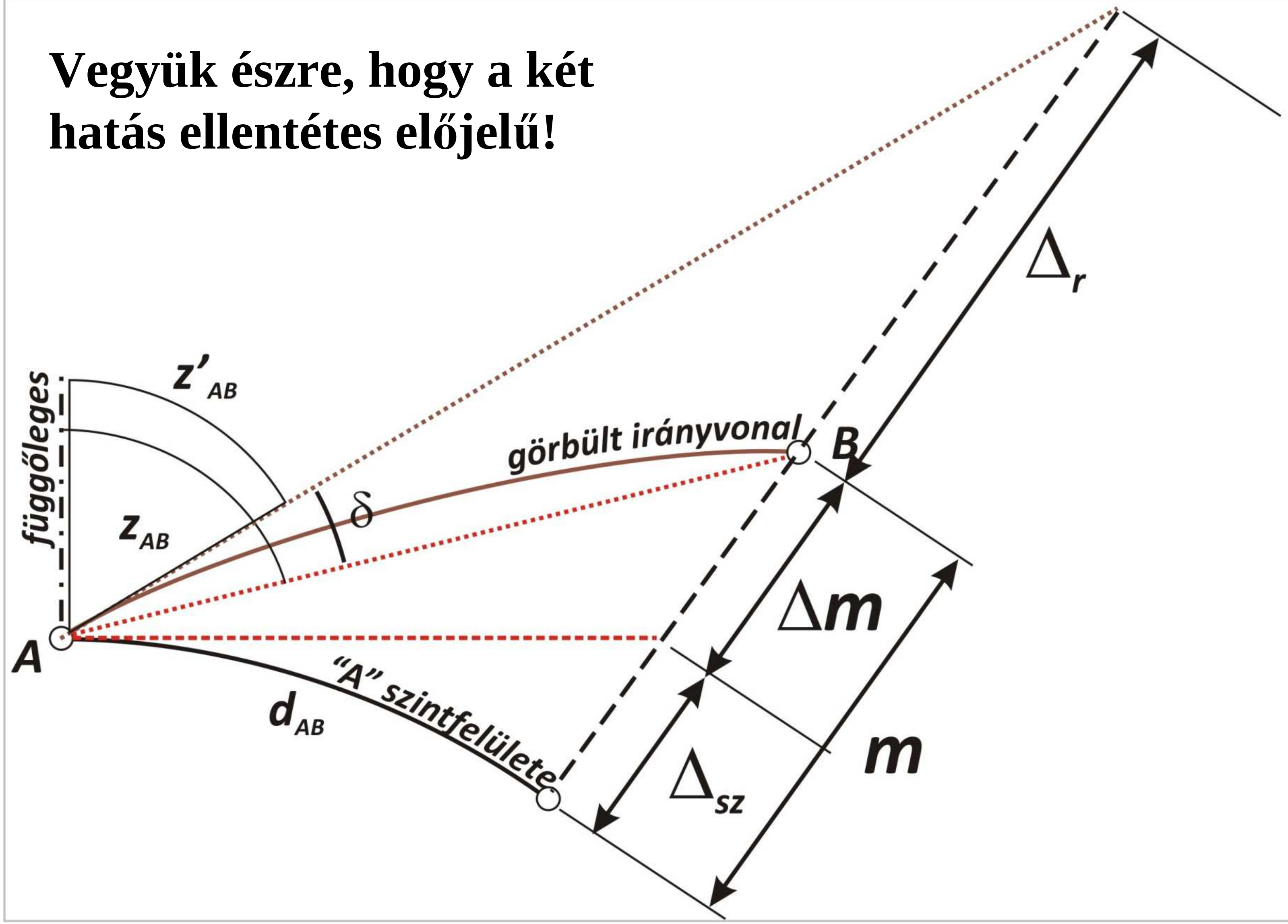
$$\Delta m \approx d \cdot \cot z'_{AB} - \frac{d^2}{2\rho} = d \cdot \cot z'_{AB} - \Delta_r$$

$$\Delta_r = \frac{d^2}{2\rho} = k\,\frac{d^2}{2R}$$

Trigonometriai magasságmérés

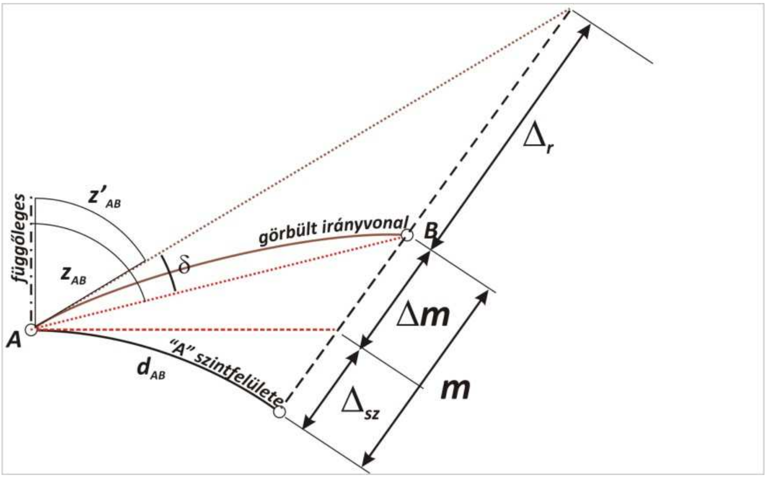
A földgörbület és a refrakció (sugárgörbület) együttes hatása

Vegyük észre, hogy a két hatás ellentétes előjelű!



Trigonometriai magasságmérés

A földgörbület és a refrakció (sugárgörbület) együttes hatása



$$\Delta m = d \cdot \cot z'_{AB} - k\frac{d^2}{2R} \quad = \Delta_r$$

$$\Delta_{sz} = \frac{d^2}{2R}$$

Az A és B pontok magasságkülönbsége (figyelembe véve mindkét hatást):

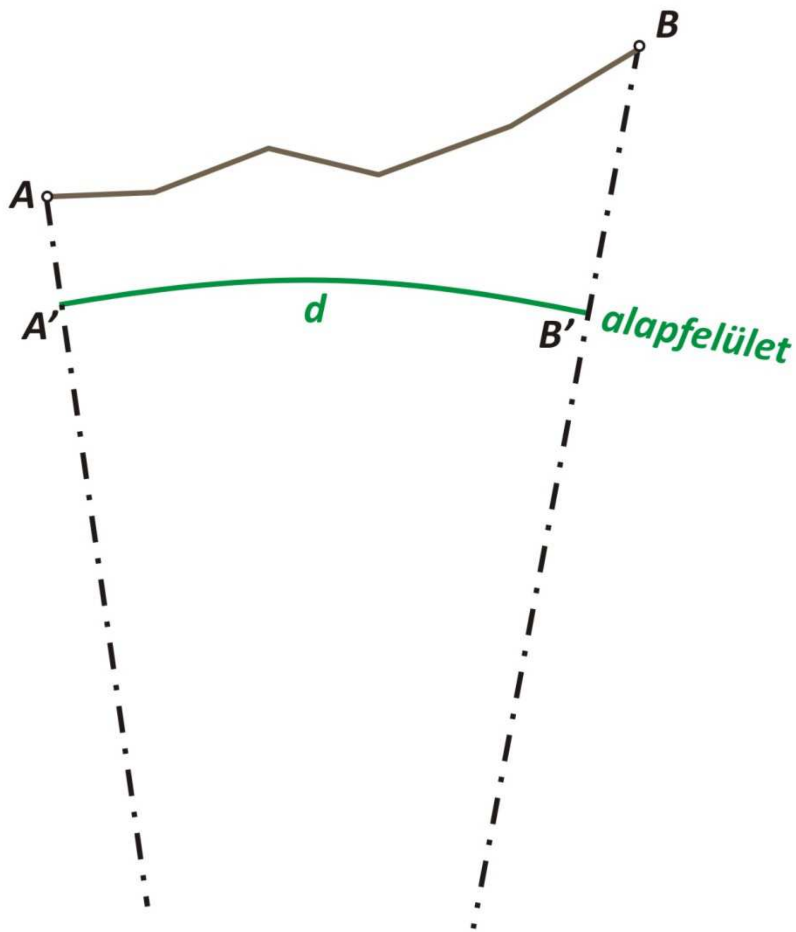
$$m = h - \ell + d \cdot \cot z'_{AB} + (1-k)\frac{d^2}{2R}$$

A trigonometriai magasságmérés alapképlete

Az együttes hatás d ≈ 0,4 km = 400 m távolságon éri el a 0,01 m = 1 cm értéket.

Távolságok meghatározása

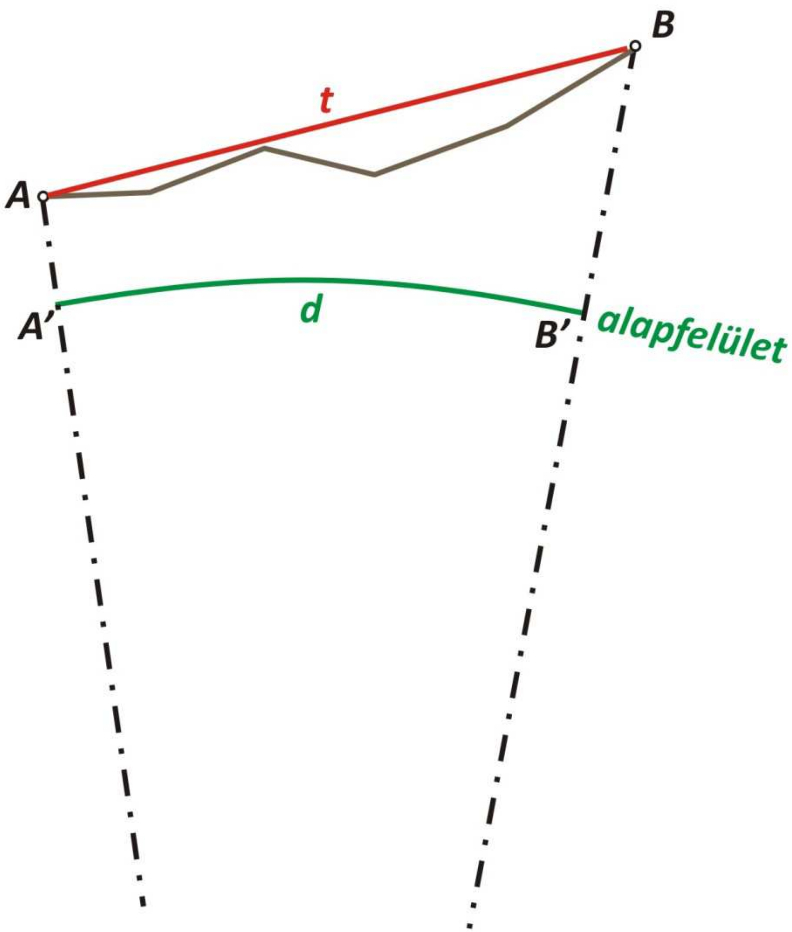
Két pont távolságán a pontok alapfelületi megfelelői közötti legrövidebb felületi vonal hosszát értjük.



Az alapfelületi hossz közvetlenül nem mérhető, helyette a ferde távolságot mérjük.

Távolságok meghatározása

Két pont távolságán a pontok alapfelületi megfelelői közötti legrövidebb felületi vonal hosszát értjük.

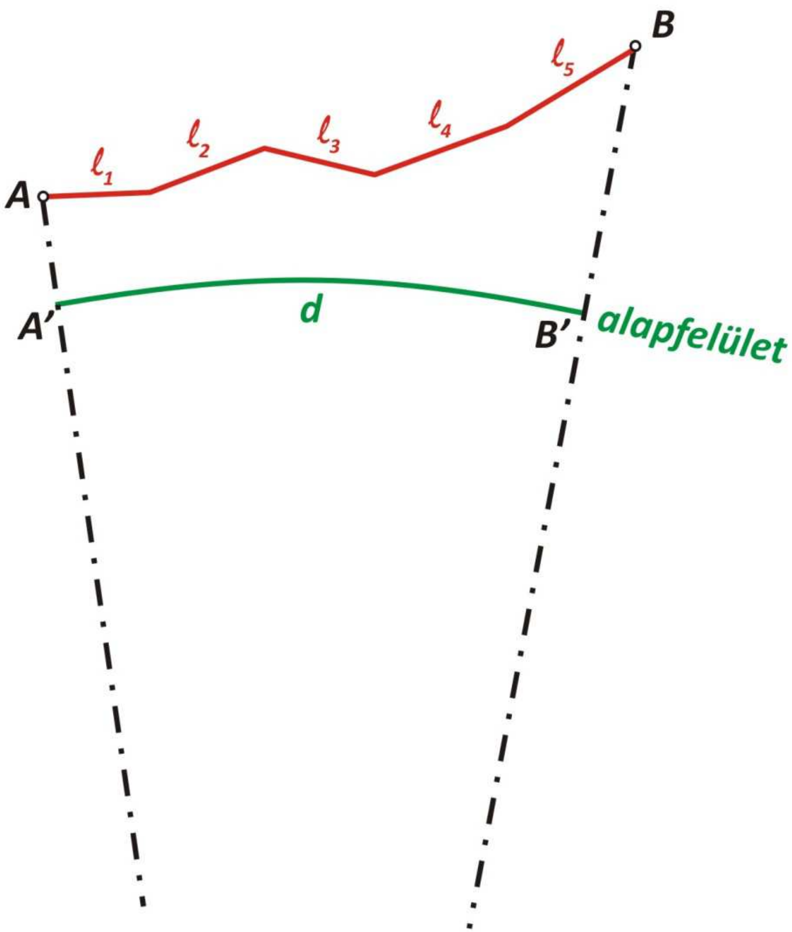


A ferde távolság fogalma kettős értelemben használatos:

- **lehet a végpontok közötti egyenes szakasz hossza;**

Távolságok meghatározása

Két pont távolságán a pontok alapfelületi megfelelői közötti legrövidebb felületi vonal hosszát értjük.



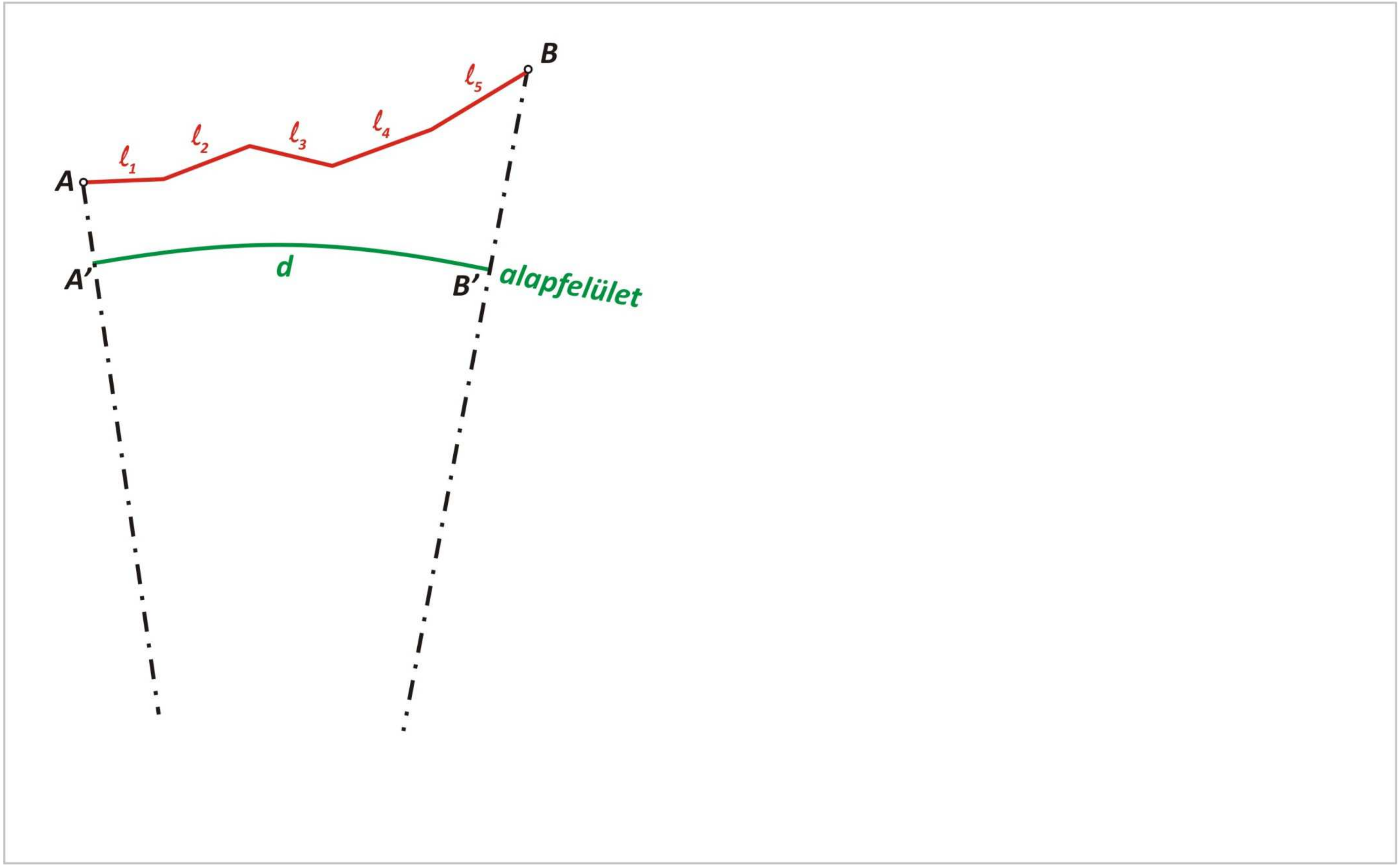
A ferde távolság fogalma kettős értelemben használatos:

- **lehet a végpontok közötti egyenes szakasz hossza;**

- **a végpontokra illesztett függőleges sík és a terep metszésvonala, mint tört vonal mentén mért távolság**

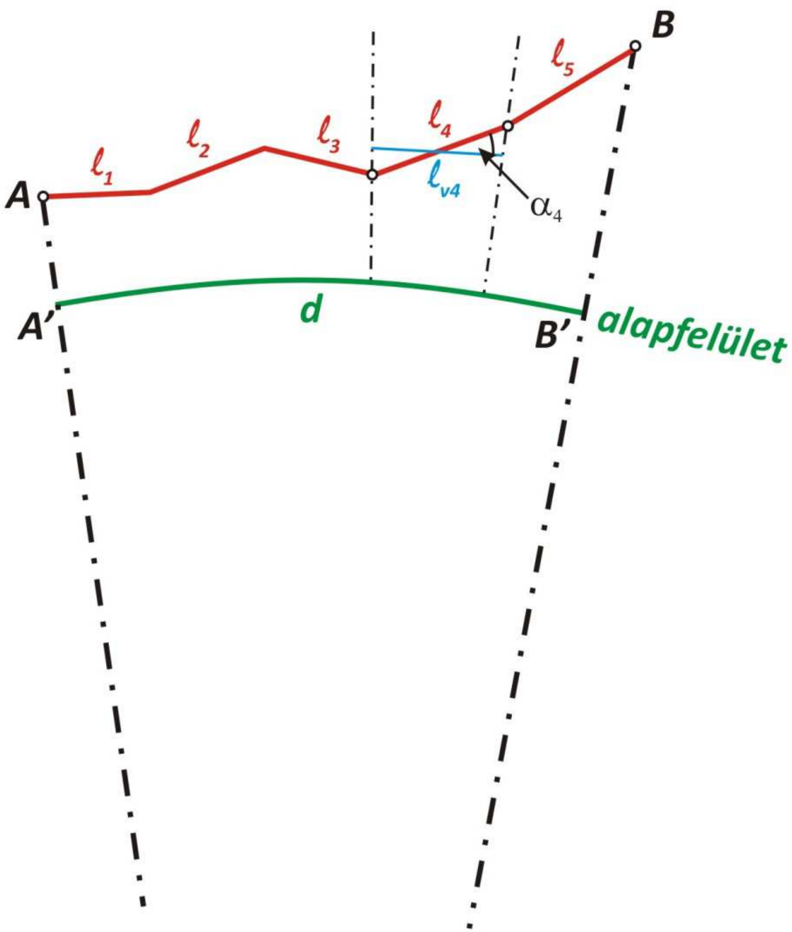
Ferde távolságok redukálása a vízszintesre

A ferde távolság a terep mentén ismert



Ferde távolságok redukálása a vízszintesre

A ferde távolság a terep mentén ismert

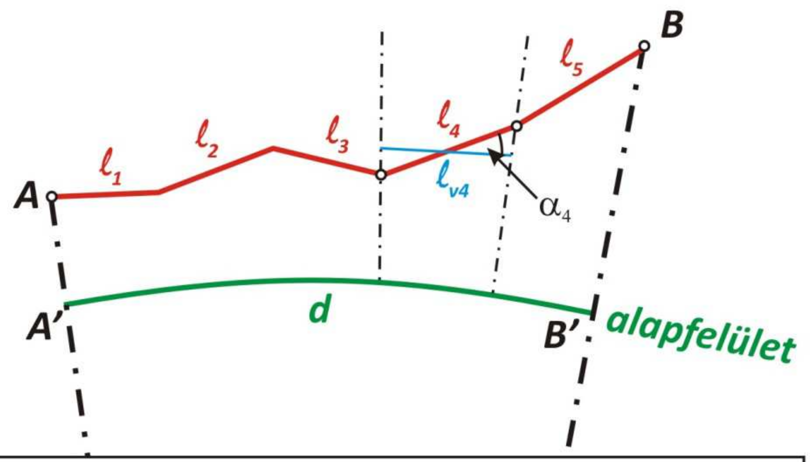


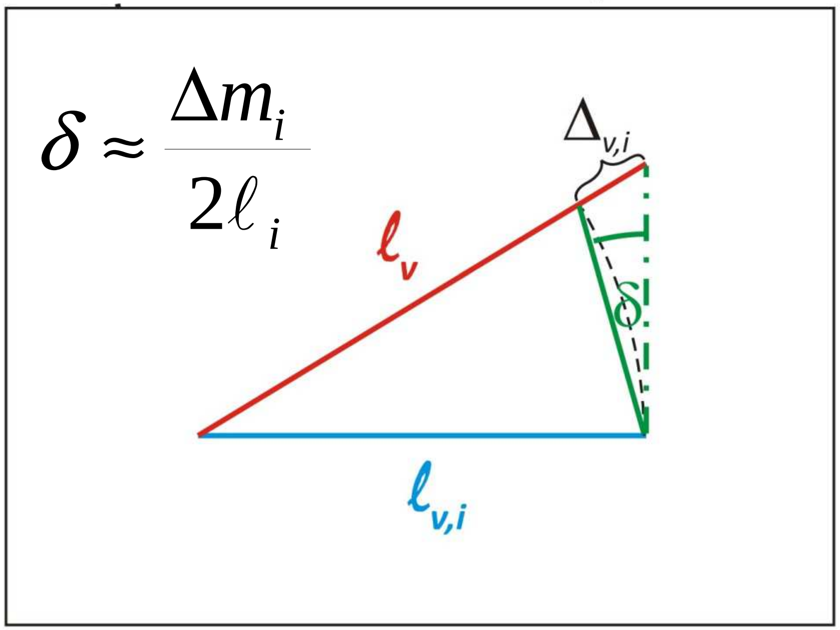
Tfh. ismerjük az ℓ_i távolság vízszintessel bezárt szögét (α_i), így:

$$\ell_{v,i} = \ell_i \cos \alpha_i$$

Ferde távolságok redukálása a vízszintesre

A ferde távolság a terep mentén ismert





Tfh. ismerjük az ℓ_i távolság vízszintessel bezárt szögét (α_i), így:

$$\ell_{v,i} = \ell_i \cos \alpha_i$$

vagy:

$$\ell_{v,i} = \ell_i + \Delta_{v,i}$$

ahol:

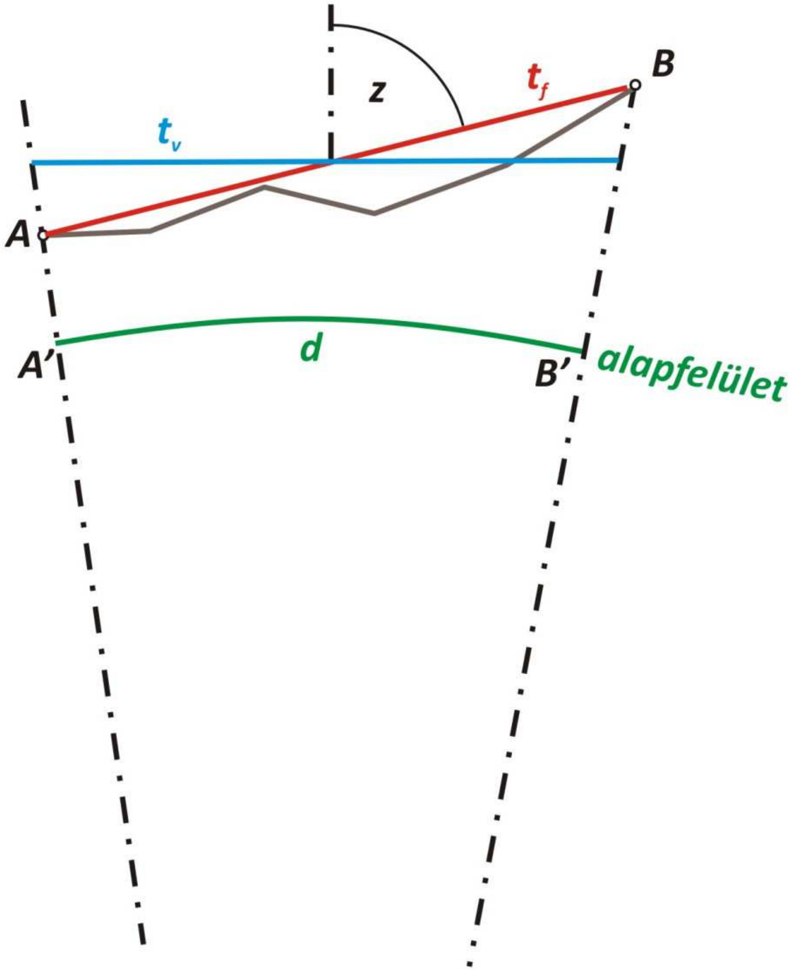
$$\Delta_{v,i} = -\frac{\Delta m_i^2}{2\ell_i}$$

A vízszintes távolság a terep átlagos magasságában:

$$t_v = \sum \ell_{v,i}$$

Ferde távolságok redukálása a vízszintesre

A ferde távolság a két pont között értelmezett



$$t_v = t_f \sin z$$

vagy a magasságkülönbség alapján:

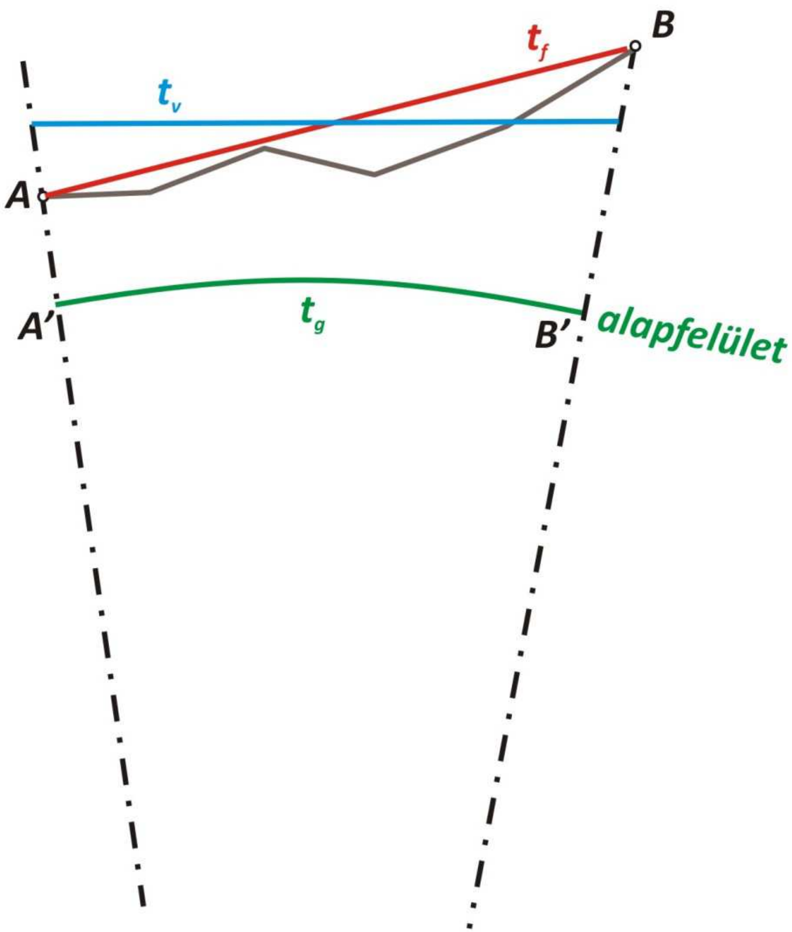
$$t_v = t_f + \Delta_v$$

ahol:

$$\Delta_v = -\frac{\Delta m^2}{2t_f}$$

Távolságok meghatározása

A vízszintes távolság redukálása az alapfelületre

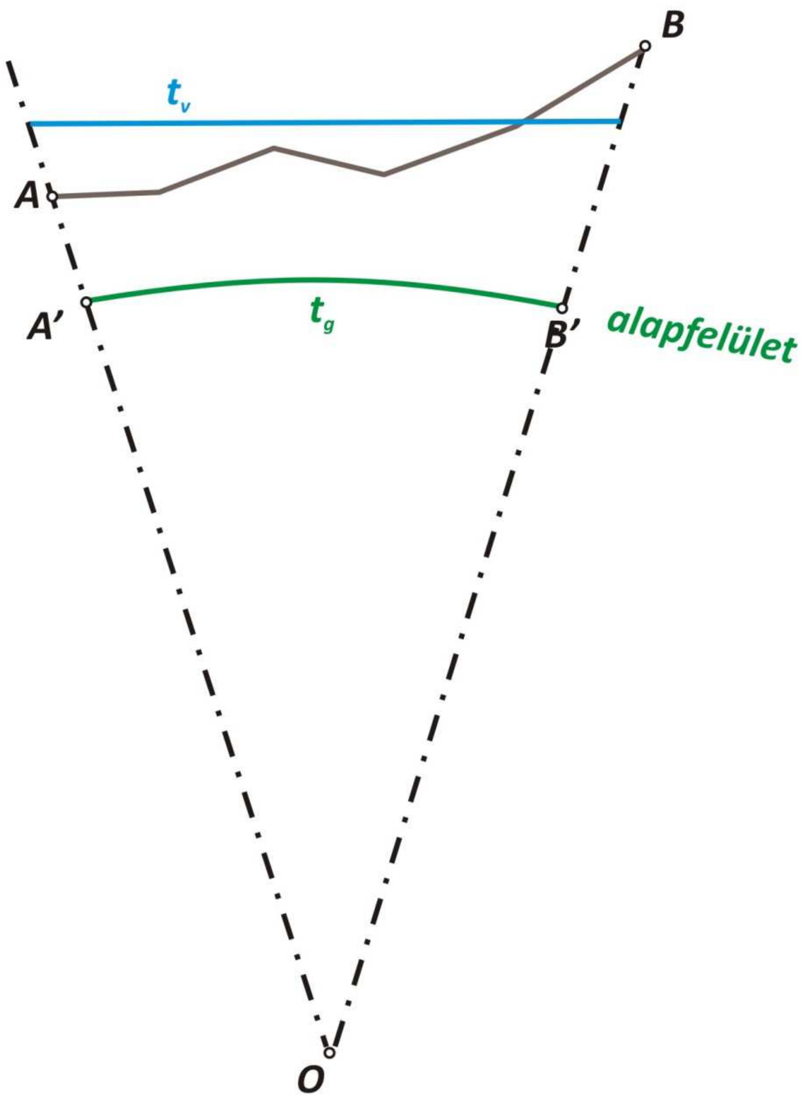


A t_v vízszintes távolság ismeretében határozzuk meg a t_g alapfelületi hosszt!

Ehhez ismerjük a Föld sugarát (R), valamint az A és B pontok közepes tengerszint feletti magasságát (H).

Távolságok meghatározása

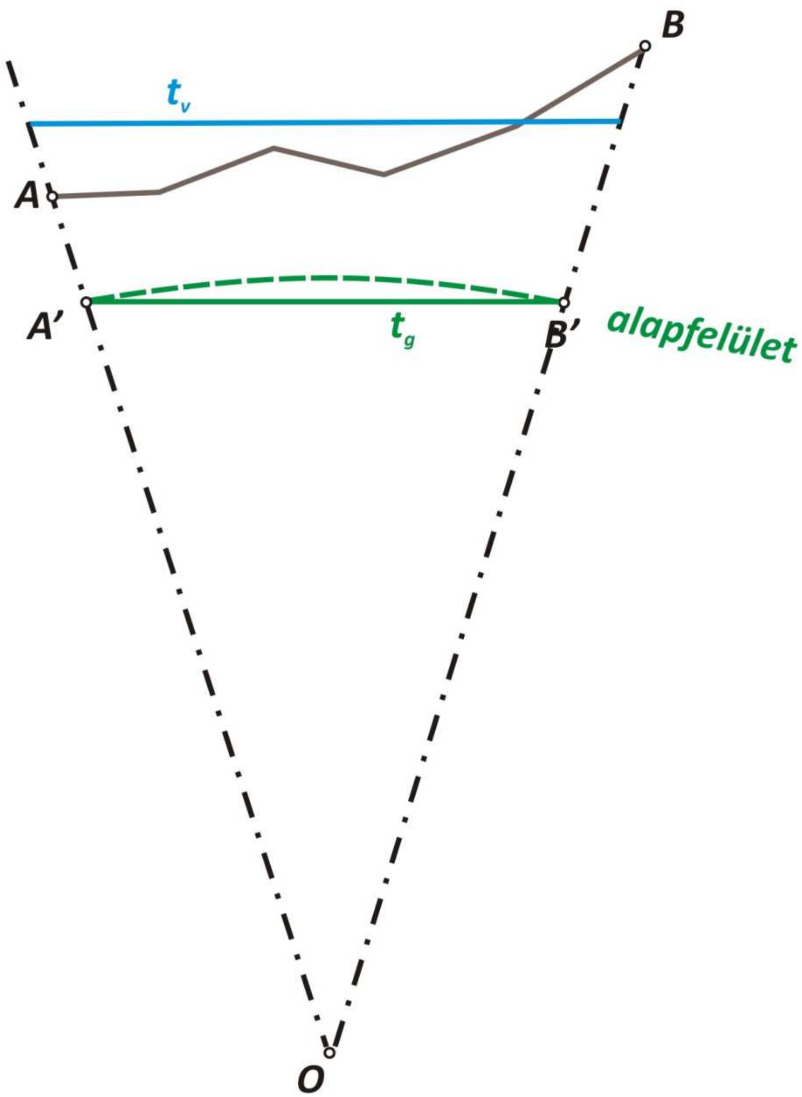
A vízszintes távolság redukálása az alapfelületre



Az alapfelületi hosszt helyettesítsük az *A'B'* húrral!

Távolságok meghatározása

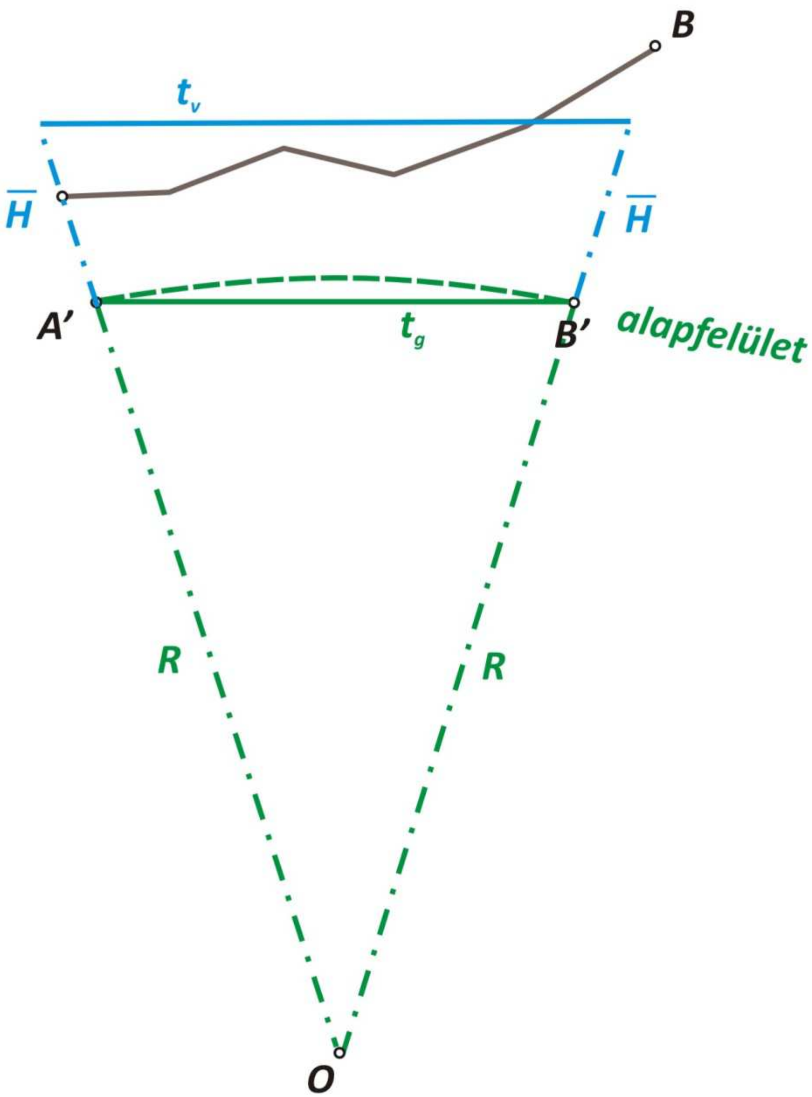
A vízszintes távolság redukálása az alapfelületre



Az alapfelületi hosszt helyettesítsük az *A'B'* húrral!

Távolságok meghatározása

A vízszintes távolság redukálása az alapfelületre



$$\frac{t_g}{t_v} = \frac{R}{R+H}$$

$$\Downarrow$$

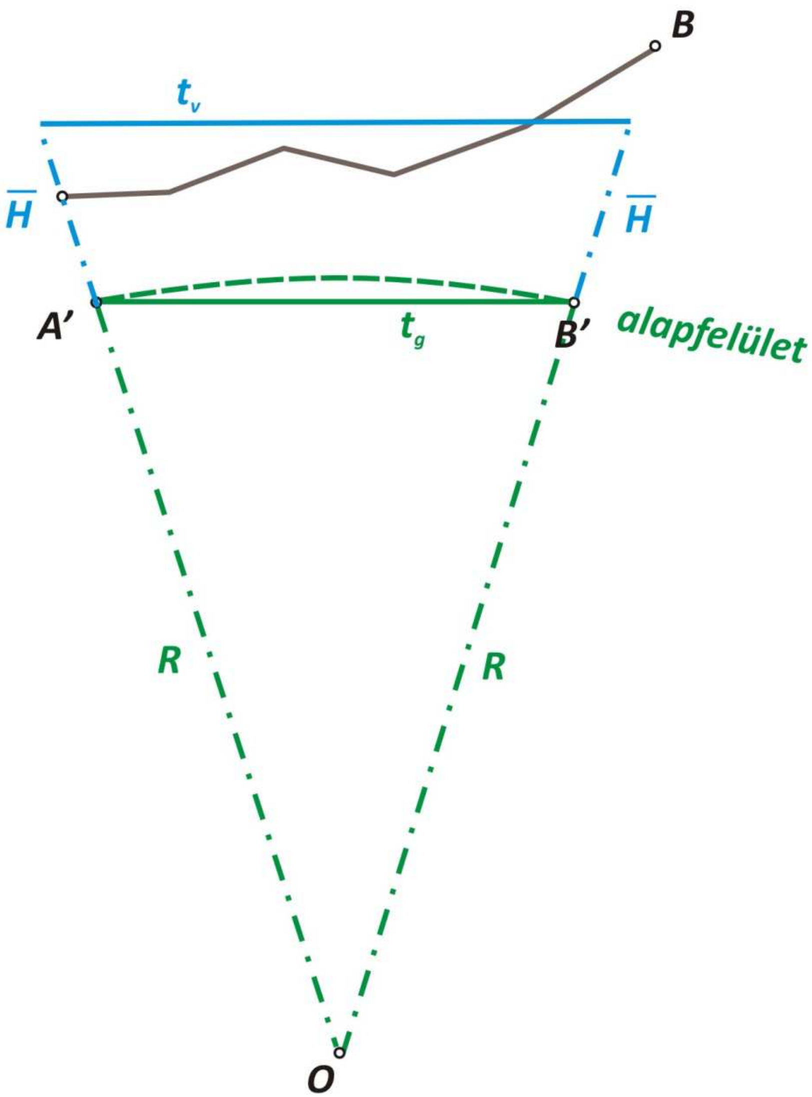
$$\frac{t_g}{t_v} = \frac{R+H-H}{R+H} = 1 - \frac{H}{R+H}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{t_g}{t_v} \approx 1 - \frac{H}{R}$$

Távolságok meghatározása

A vízszintes távolság redukálása az alapfelületre



Így az alapfelületi hossz:

$$t_g = t_v - t_v \frac{H}{R} = t_v + \Delta_v$$

A redukció pedig:

$$\Delta_v = -\frac{H}{R} t_v$$

Távolságok meghatározása

Közvetlen távolság meghatározáskor **(hosszmérés)** egy ismert hosszúságú mérőeszközt fektetünk ismételten a távolság egyenesére.

A távolság közvetett meghatározásakor **(távmérés)** a távolsággal geometriai vagy fizikai kapcsolatban álló mennyisége(ke)t mérünk, és a kapcsolatot kifejező képletekkel számítjuk ki a távolságot.

Mérőszalag komparálása

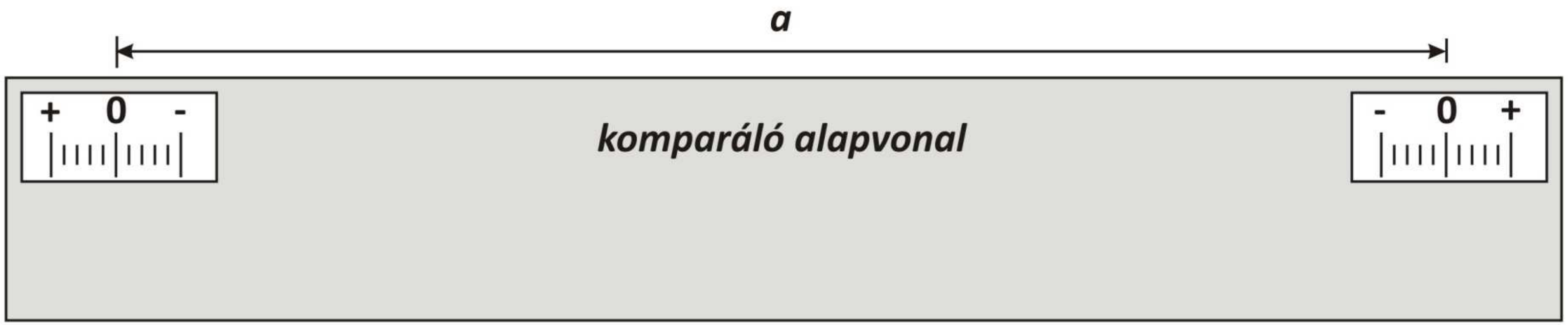
Milyen hosszú ténylegesen a mérőszalag?

A mérőszalag hossza függ:

• a szalagra ható húzóerő nagyságától, ezért komparáláskor és hosszméréskor egyforma (rendszerint 10 kg tömeg súlyának megfelelő 100 N) erővel kell feszíteni a szalagot;

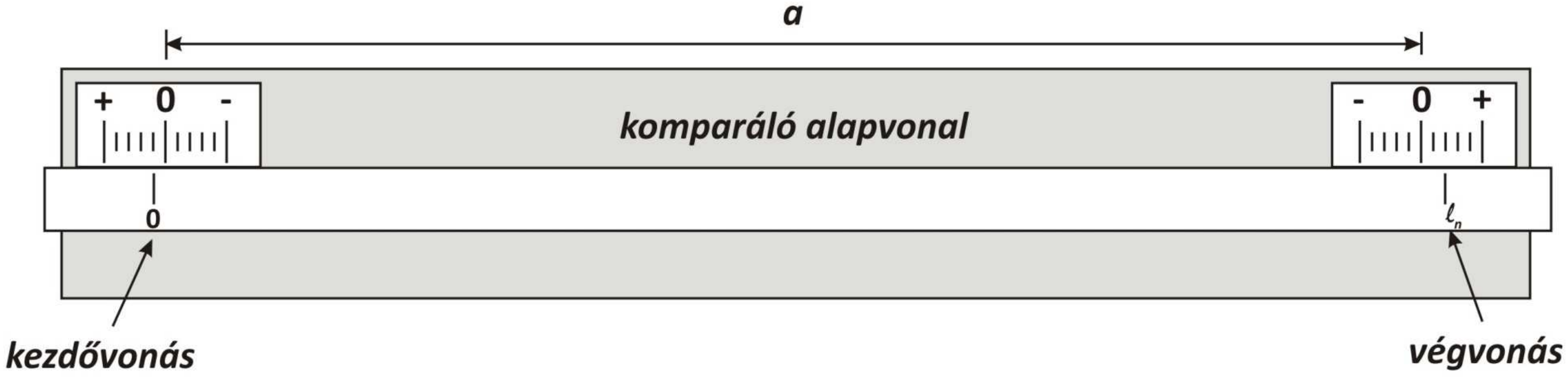
• a szalag hőmérsékletétől, ezért meg kell mérjük a szalag hőmérsékletét mind komparáláskor (t_k), mind hosszméréskor (t_m).

Mérőszalag komparálása



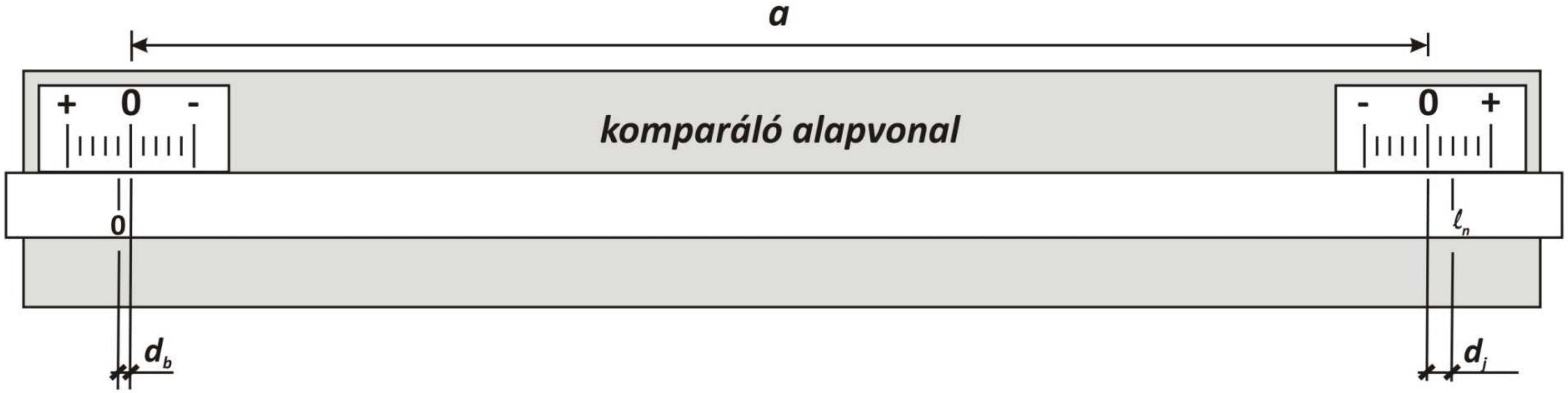
A szalag hosszát komparálással határozzuk meg. Ehhez egy ismert, a szalag hosszával közel azonos hosszúságú komparáló alapvonalra van szükségünk.

Mérőszalag komparálása



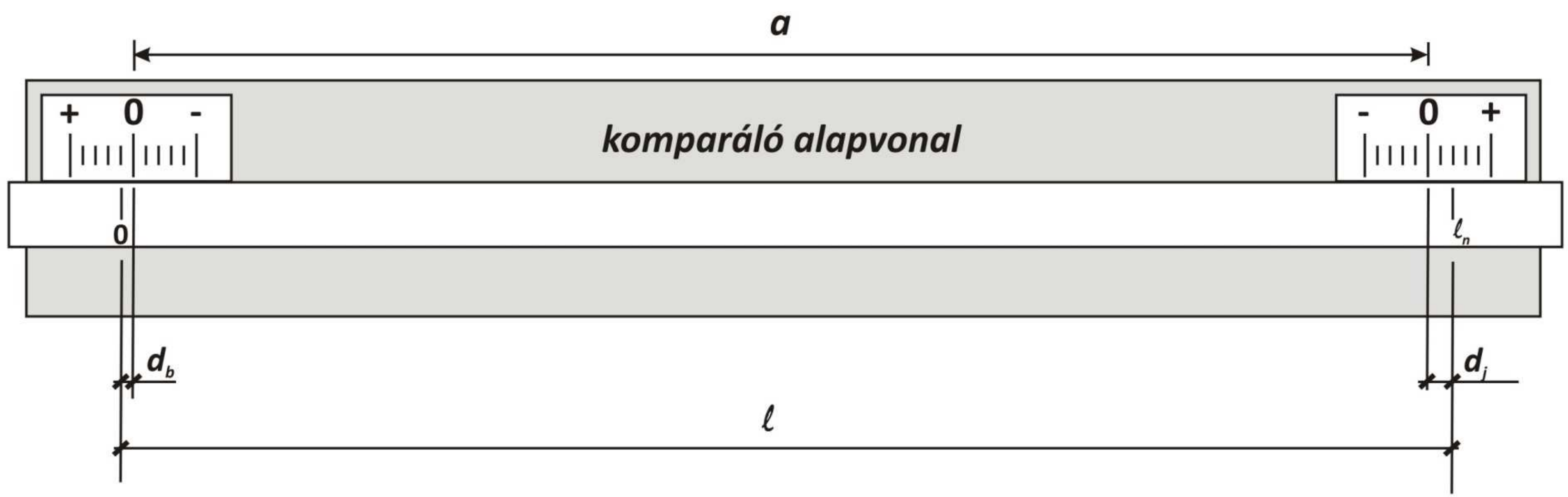
Fektessük fel a mérőszalagot az alapvonalra, feszítsük meg az előírt feszítőerővel, majd mérjük meg a hőmérsékletet.

Mérőszalag komparálása



Egyidőben mérjük meg a szalag kezdő-, és végvonásának helyzetét az alapvonalhoz képest.

Mérőszalag komparálása



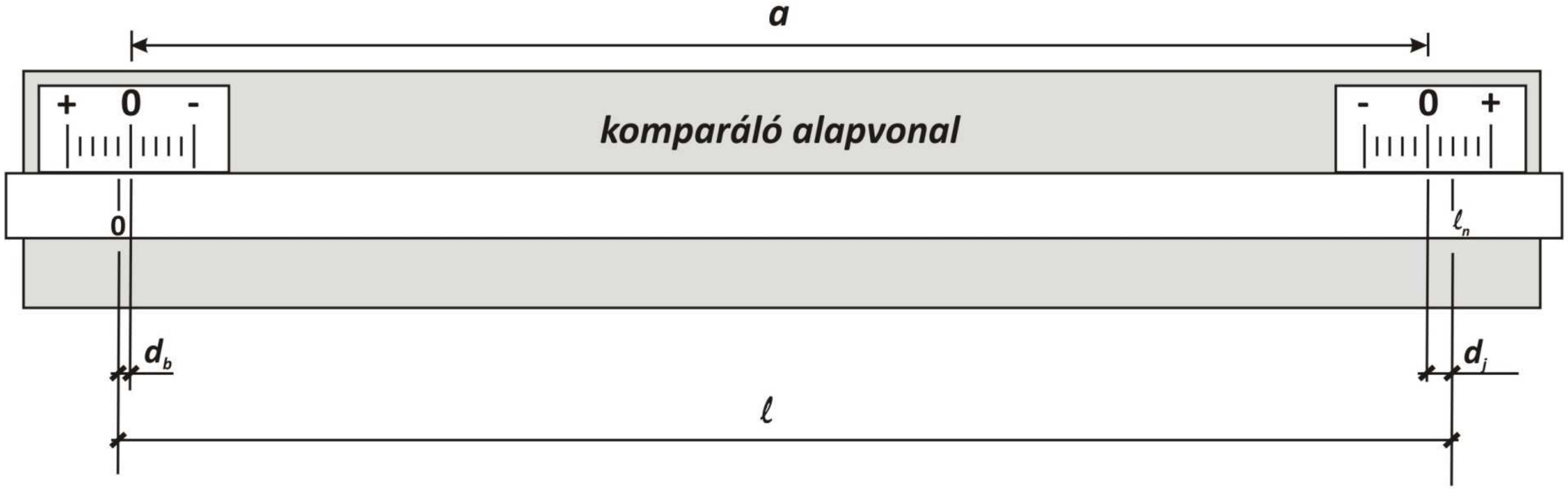
Egyetlen mérésből az ℓ hossz és az ***a*** alapvonalhossz különbsége:

$$d = d_b + d_j$$

N db ismételt mérésből az ℓ hossz és az ***a*** alapvonalhossz különbsége:

$$\Delta\ell = \frac{\sum d_i}{n}$$

Mérőszalag komparálása



A szalag tényleges hossza:

$$\ell = a + \Delta\ell$$

Szalagmérések javításai

Komparálási javítás (a komparált és a névleges hossz közötti különbséget veszi figyelembe):

$$\delta_k = \ell - (\ell)$$

ahol ℓ a komparált hossz, (ℓ) pedig a névleges hossz.

Hőmérsékleti javítás (a szalag hőtágulásából eredő hosszváltozását veszi figyelembe):

$$\delta_t = \alpha(t_m - t_k)(\ell)$$

$$\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-5} \,/\, °C$$

(acél)

A javított hossz tehát:

$$\ell = (\ell) + \delta_k + \delta_t$$

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

Geodézia I. (BSc)

Itt az ötödik előadás vége