GÖMBHÁROMSZÖGTANI SZÁMÍTÁSOK

A gömb felületén két pont legrövidebb összekötő vonala *főkörív*, vagyis olyan kör íve, amelynek síkja átmegy a gömb középpontján. Egy gömbháromszög *csúcsai* a gömb középpontjából kiinduló három félegyenesnek a gömbfelülettel alkotott metszéspontjaiként adódnak. A gömbháromszög *a, b, c oldalán* a három félegyenes által páronként bezárt három, 180°-nál kisebb szöget értjük. A gömb felületén a gömbháromszög mindegyik oldalának egy-egy főkörív felel meg *(1.ábra).* A gömbháromszög *a, b, c* oldalaival rendre a szemközti *α, β, γ szögei* az oldalának megfelelő főkörívek közötti 180°-nál kisebb szögek, vagy - másképpen kifejezve - a három félegyenes által meghatározott három sík által bezárt szögek. Mind az oldalakat, mind a szögeket *szögértékben* fejezzük ki.

A *gömbháromszög szögeinek összege* mindig nagyobb 180°-nál:

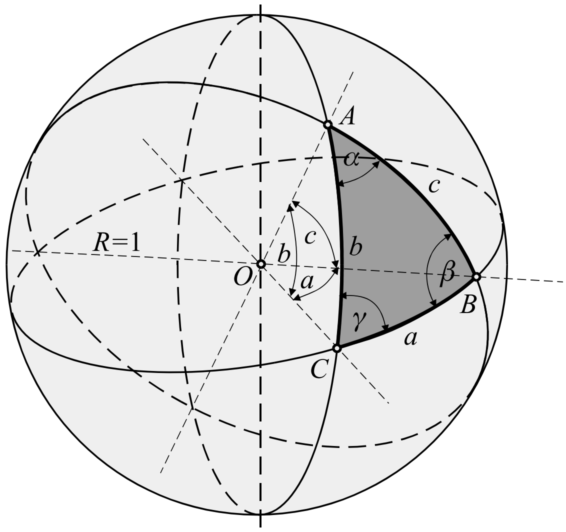
$$180° \langle \ \alpha + \beta + \gamma \langle \ 540°$$

Az $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180°$ különbséget a gömbháromszög *gömbi szögfeleslegének* nevezzük. Az ε az alábbi összefüggésekkel is számítható:

$$\varepsilon = \frac{F}{R^2}\rho,$$

ahol F a gömbháromszög területe, R a gömb sugara, ρ pedig az analitikus szögegység.
Oldalakból:

$$tg\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{tg\frac{s}{2}tg\frac{s-a}{2}tg\frac{s-b}{2}tg\frac{s-c}{2}}, \quad \text{amelyben} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}$$



1.ábra

Oldalakból és szögekből: $$tg\frac{\varepsilon}{2}=\frac{tg\frac{a}{2}tg\frac{b}{2}\sin\gamma}{1+tg\frac{a}{2}tg\frac{b}{2}\cos\gamma}.$$

A valódi gömbi meridián konvergencia két pontot összekötő ortodróma végpontjaiban az azimut és ellenazimut 180°-tól eltérő különbsége:

$$\gamma = \alpha_{BA} - \alpha_{AB} \pm 180^\circ$$

Alapvető összefüggések:

1. $\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}$ (szinusztétel)
2. $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$ (oldal koszinusztétel)
3. $\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$ (szög koszinusztétel)
4. $\sin a\, ctg b = ctg\beta\sin\gamma+\cos a\cos\gamma$,
5. $\sin\alpha\, ctg\beta = ctg b\sin c-\cos\alpha\cos c$.

Ha adva van	akkor a többi alkotórészeket megadó formulák száma
a három oldal: *a*, *b*, *c*,	α(2), β és γ(1)
a három szög: *α*, *β*, *γ*,	*a*(3), *b* és *c*(1)
két oldal és az általuk közbezárt szög: *a*, *b*, *γ*,	β(4), α és c(1)
egy oldal és a rajta lévő két szög: *c*, *α*, *β*,	*b*(5), *a* és γ(1)
két oldal és az egyikkel szemben levő szög: *a*, *b*, *β*	α(1), *c*(Napier), γ(1)
két szög és az egyikkel szemben levő oldal: *α*, *β*, *b*,	*a*(1), *c*(Napier), γ(1)

Napier (Neper) képletek:

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}tg\frac{c}{2}, \qquad tg\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{(\alpha-\beta)}{2}}{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}}tg\frac{c}{2}$$

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{(a-b)}{2}}{\cos\frac{(a+b)}{2}}ctg\frac{\gamma}{2}, \qquad tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{(a-b)}{2}}{\sin\frac{(a+b)}{2}}ctg\frac{\gamma}{2}$$

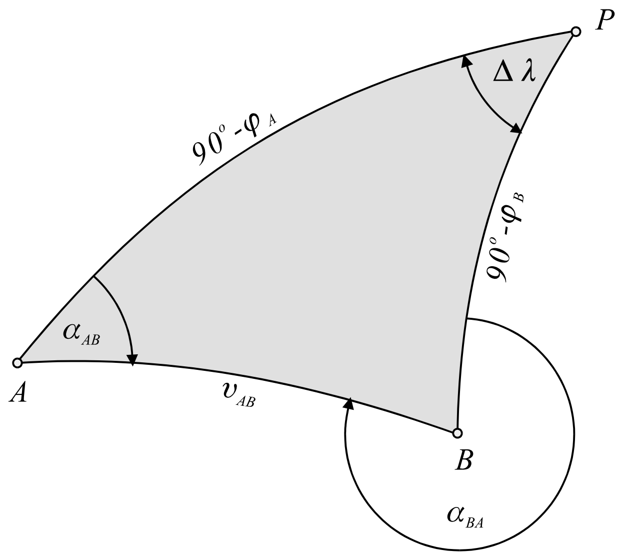
GEODÉZIAI FŐFELADATOK GÖMBÖN

Első geodéziai főfeladat gömbön

$\varphi_A,\ \lambda_A,\ \alpha_{AB},\ s_{AB} \rightarrow \varphi_B,\ \lambda_B,\ \alpha_{BA}$

Adottak: az *A* pont φ_A , λ_A gömbi földrajzi koordinátái, az *A* pontbeli α_{AB} azimut, az *A* és a *B* pontok közötti s_{AB} gömbi ívhossz és a gömb *R* sugara *(2. ábra)*.

Számítandók: a *B* pont φ_B , λ_B gömbi földrajzi koordinátái és a *B* pontbeli α_{BA} azimut.



2. ábra

Megoldás:
Az *AB* ívhez tartozó középponti szög:

$$\upsilon°_{AB} = \frac{s_{AB}}{R}\rho° \quad \text{,ahol } \rho° = \frac{180°}{\pi}\ .$$

.
A *B* pont gömbi földrajzi koordinátái:

$$\sin\varphi_B = \cos\upsilon_{AB}\sin\varphi_A + \sin\upsilon_{AB}\cos\varphi_A\cos\alpha_{AB}\,.$$

$$\sin\Delta\lambda = \frac{\sin\alpha_{AB}\sin\upsilon_{AB}}{\cos\varphi_B}, \qquad \lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda_{AB}\,.$$

Az ellenazimut szinusza:

$$\sin\alpha_{BA} = -\frac{\sin\Delta\lambda_{AB}\cos\varphi_A}{\sin\upsilon_{AB}}.$$

Második geodéziai főfeladat gömbön

φ_A , λ_A , φ_B , λ_B $\rightarrow$ α_{AB} , α_{BA} , s_{AB}

Adottak: az *A* és *B* pontok φ_A , λ_A és φ_B , λ_B gömbi földrajzi koordinátái *(2. ábra)*.

Számítandók: az *A* és *B* pontbeli α_{AB} és α_{BA} azimut és a két pont közti s_{AB} gömbi ív hossza.

Megoldás:
Az *AB* ívhez tartozó középponti szög:

$$\cos \upsilon_{AB} = \sin\varphi_A \sin\varphi_B + \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos\Delta\lambda_{AB} \ ,$$

$$\text{ahol: } \Delta\lambda_{AB} = \lambda_B - \lambda_A \ .$$

A gömbi ívhossz:

$$s_{AB} = \frac{R\upsilon_{AB}}{\rho} .$$

Az *A* és *B* pontbeli azimutok szinuszai:

$$\left[\sin\alpha_{AB} = \frac{\sin \Delta\lambda_{AB} \cos\varphi_B}{\sin\upsilon_{AB}} \right] \quad (1)$$

A kiszámított szinusz értékekből csak szemlélet alapján tudjuk eldönteni, hogy az α szögek melyik szögnegyedben vannak. Egyértelművé akkor válik a feladat, ha a $\cos\alpha$-t is kiszámítjuk:

$$\left[\cos\alpha_{AB} = \frac{\sin\varphi_B - \sin\varphi_A \cos\upsilon_{AB}}{\cos\varphi_A \sin\upsilon_{AB}} \right] \quad (2)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(360° - \alpha)$$

Ezután már csak a szögletes zárójelbe tett képleteket használjuk.

Ha α_{AB} (1) $\geq$ 0, akkor $\alpha_{AB} = \alpha_{AB}(2)$, máskor $\alpha_{AB} = 360° - \alpha_{AB}(2)$.

Az α_{BA} számításához a képletekben az *A*, *B* indexeket felcseréljük.