# Tartók dinamikája
# BMEEOTMAS43

Németh Róbert
Tartószerkezetek Mechanikája Tsz.

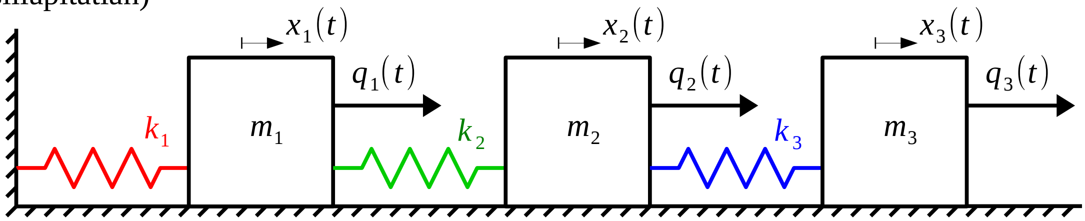
**2. ZH: Többszabadságfokú rendszerek mechanika rezgései**

¤ modell felvétele
¤ mozgás differenciálegyenlete - felírás
- osztályozás

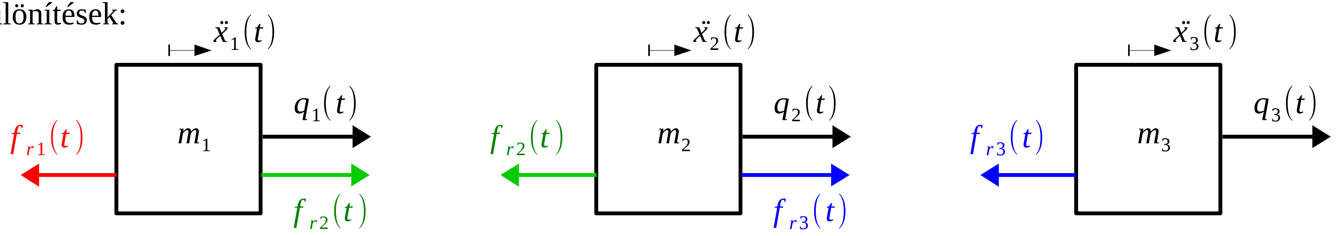
¤ megoldás

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet

Modell (csillapítatlan)




Elkülönítések:




$$m_1 \cdot \ddot{x}_1(t) = q_1(t) - f_{r1}(t) + f_{r2}(t) \qquad m_2 \cdot \ddot{x}_2(t) = q_2(t) - f_{r2}(t) + f_{r3}(t) \qquad m_3 \cdot \ddot{x}_3(t) = q_3(t) - f_{r3}(t)$$

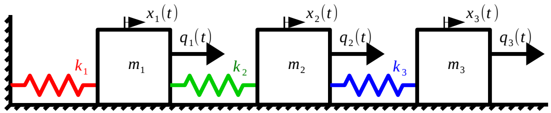
Lineáris rugók:

$$f_{r1}(t) = k_1 \cdot \Delta l_1 \quad = k_1 \cdot x_1(t)$$
$$f_{r2}(t) = k_2 \cdot \Delta l_2 \quad = k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t))$$
$$f_{r3}(t) = k_3 \cdot \Delta l_3 \quad = k_3 \cdot (x_3(t) - x_2(t))$$

A három egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1(t) \quad &+ k_1 \cdot x_1(t) \quad - k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) && &&= q_1(t) \\
m_2 \ddot{x}_2(t) \quad & \qquad\qquad\quad + k_2 \cdot (x_2(t) - x_1(t)) && - k_3 \cdot (x_3(t) - x_2(t)) &&= q_2(t) \\
m_3 \ddot{x}_3(t) \quad & && + k_3 \cdot (x_3(t) - x_2(t)) &&= q_3(t)
\end{aligned}$$

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – mozgásegyenlet




A három egyenletbe behelyettesítve:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1(t) + k_1\cdot x_1(t) - k_2\cdot(x_2(t)-x_1(t)) &&= q_1(t)\\
&m_2\ddot{x}_2(t) + k_2\cdot(x_2(t)-x_1(t)) - k_3\cdot(x_3(t)-x_2(t)) &&= q_2(t)\\
&m_3\ddot{x}_3(t) + k_3\cdot(x_3(t)-x_2(t)) &&= q_3(t)
\end{aligned}
$$

Az egyenletekben a változók együtthatóit kigyűjtve:

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1+k_2)\cdot x_1(t) - k_2\cdot x_2(t) + 0\cdot x_3(t) &&= q_1(t)\\
&m_2\ddot{x}_2(t) - k_2\cdot x_1(t) + (k_2+k_3)\cdot x_2(t) - k_3\cdot x_3(t) &&= q_2(t)\\
&m_3\ddot{x}_3(t) + 0\cdot x_1(t) - k_3\cdot x_2(t) + k_3\cdot x_3(t) &&= q_3(t)
\end{aligned}
$$

Az egyenletek mátrixos alakban is felírhatók:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0\\ 0 & m_2 & 0\\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}}
\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t)\\ \ddot{x}_2(t)\\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{x}}(t)}
+
\underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3\\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(t)\\ q_2(t)\\ q_3(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{q}(t)}
$$

Ahol:

$\boldsymbol{x}(t)$: A szf.-ok elmozdulásvektora

$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$: A szf.-ok gyorsulásvektora

$\boldsymbol{M}$ Tömegmátrix

$\boldsymbol{K}$ Merevségi mátrix (szimmetrikus!!!)

A csillapítatlan rendszer mátrix-differenciálegyenlete:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

Kézírással: $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t)$

$N$ szabadságfok esetén:

$\boldsymbol{x}(t), \ddot{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{q}(t)$ $N$ elemű vektor

$\boldsymbol{M}, \boldsymbol{K}$ $N\times N$ méretű mátrix

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – tömeg- és merevségi mátrix

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

$\boldsymbol{M}$ tömegmátrix: e tárgyban diagonálmátrix lesz,
a szabadságfok pontjába redukált tömeg.

$\boldsymbol{K}$ merevségi mátrix: meghatározható szabadságfokok mozgásegyenlete, ← ezt csináltuk előbb
merevség jelentése,
ellentett jelentése alapján.

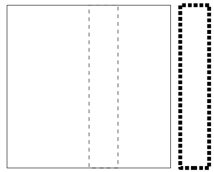
*Merevségi mátrix számítása a merevség jelentése alapján*

Ha a teherfüggvény egy statikus $\boldsymbol{q}$ teher, akkor a mozgásegyenletnek is létezik statikus $\boldsymbol{x}_s$ megoldása.
Mivel ekkor a gyorsulások nullák, ezért a mozgásegyenletből egyensúlyi egyenlet lesz:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{0}+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

Ha az $\boldsymbol{x}_s$ elmozdulásvektor a $j$-edik egységvektor $(\boldsymbol{e}_j)$, akkor a bal oldali művelet elvégzése után a $\boldsymbol{K}$ mátrix $j$-edik oszlopát kapjuk. (Jelöljük ezt $\boldsymbol{k}_j$-vel.)



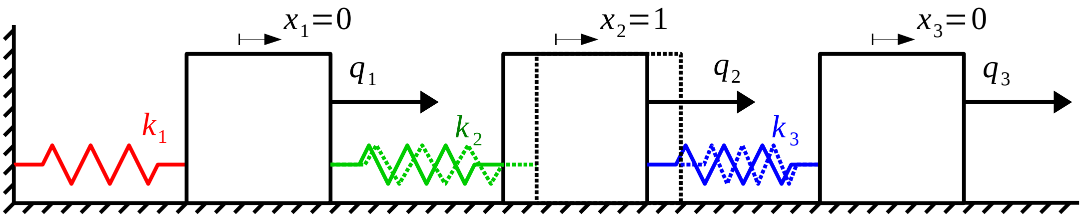
A $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{k}_j=\boldsymbol{q}$ egyensúlyi feltétel alapján ha a $\boldsymbol{k}_j$ vektor egyes elemei hatnak az egyes szabadságfokokra *egyszerre*, akkor az összes szabadsági fok elmozdulása nulla lesz, kivéve a $j$-edik szabadsági fokét, amelyik pedig éppen 1 lesz.

Megfordítva használjuk:
Legyen a $j$-edik szabadságfok elmozdulása 1, miközben az összes többi szabadságfok elmozdulása legyen 0.
Az egyensúly biztosításához a $l$-edik szabadsági fokra működtetendő $q_l$ erő lesz a $\boldsymbol{k}_j$ vektor $l$-edik eleme
azaz a merevségi mátrix $k_{lj}$ eleme ($l$-edik sor, $j$-edik oszlop).

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – merevségi mátrix I.

Megfordítva használjuk:
Legyen a $j$-edik szabadságfok elmozdulása 1, miközben az összes többi szabadságfok elmozdulása legyen 0.
Az egyensúly biztosításához a $l$-edik szabadsági fokra működtetendő $q_l$ erő lesz a $\boldsymbol{k}_j$ vektor $l$-edik eleme
azaz a merevségi mátrix $k_{lj}$ eleme ($l$-edik sor, $j$-edik oszlop).

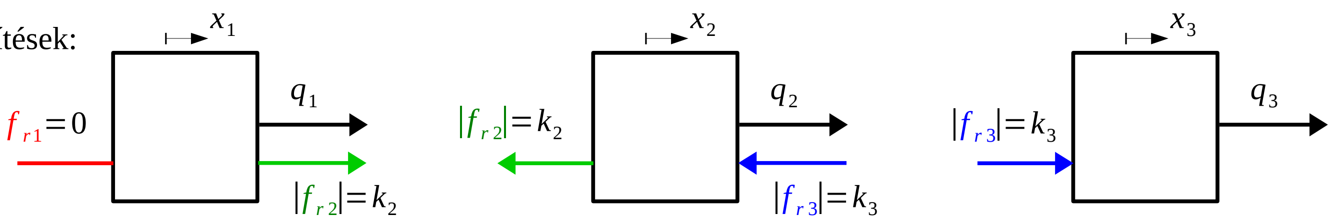
*Példa*: merevségi mátrix második oszlopának számítása




A rugók megnyúlásai: $\Delta l_1=0$, $\Delta l_2=1$, $\Delta l_3=-1$

A rugóerők: $f_{r1}=0$, $f_{r2}=k_2\,(\textit{húzerő})$, $f_{r3}=-k_3\,(\textit{nyomóerő})$

Elkülönítések:




Egyensúlyi egyenletek:

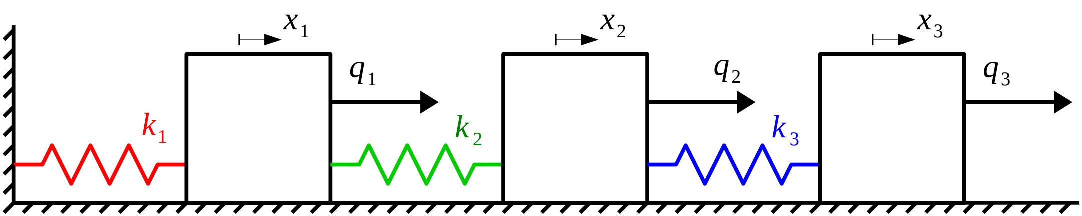
$$0=q_1+k_2 \rightarrow q_1=-k_2$$
$$0=q_2-k_2-k_3 \rightarrow q_2=k_2+k_3$$
$$0=q_3+k_3 \rightarrow q_3=-k_3$$

$$\boldsymbol{k}_2=\begin{bmatrix}-k_2\\ k_2+k_3\\ -k_3\end{bmatrix}$$

*HF*: a másik két oszlop

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2 & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3\\ 0 & -k_3 & k_3\end{bmatrix}$$

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – merevségi mátrix II.




$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}$$

A merevségi mátrix *statikus* használata alapján :az $l$-edik sor $j$-edik oszlopát a $j$-edik szabadságfok elmozdulása miatt az $l$-edik szabadságfokra ható belső erő számítására használjuk.

Nézzük csak a $k_3$ rugó hatását.

A rugó a 2. és 3. szabadságfokot köti össze, ezért

¤ csak akkor keletkezik benne erő, ha a 2., vagy a 3. szabadságfok elmozdul
a többi szabadságfok elmozdulása *nem* befolyásolja az erejét ➔ azokra az oszlopokra nincs hatása

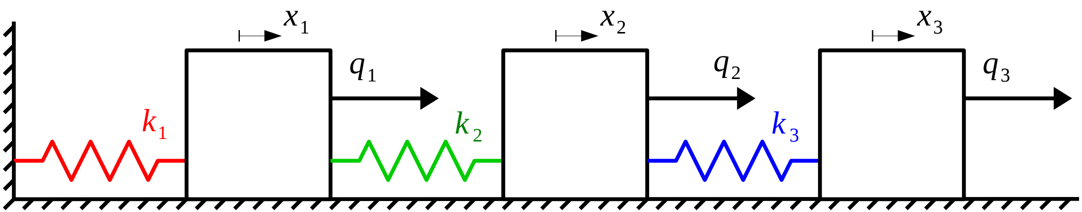
¤ csak a 2. és a 3. szabadságfokra hat a rugóereje
a többi szabadságfokra nem hat az ereje ➔ azokra a sorokra nincs hatása

Valóban, csak a $k_{22}, k_{23}, k_{32}, k_{33}$ elemeket befolyásolja $k_3$.

Ez felhasználható a merevségi mátrix rugalmas elemenkénti összeállítása (*kompilálása*) során.
Egy kezdetben nulla elemeket tartalmazó mátrixhoz elemenként/rugónként hozzáadjuk azok hatását:
a főátlóban levő addigi értékhez mindig hozzáadjuk a rugómerevséget,
a főátlón kívüli elemekből pedig levonjuk a rugómerevséget.

*egymással szembe mutató szabadságfokok esetén a főátlón kívül is hozzáadni kellene a merevséget*

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – merevségi mátrix III. (kompilálás)




A kezdeti mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az első rugó csak az első szabadságfokra hat, így az 1,1 elemhez adjuk a merevségét:

$$\begin{bmatrix} 0+k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A második rugó az eslő és a második szabadságfokra hat, így az 1,1 és a 2,2 elemekhez hozzáadjuk a merevségét, az 1,2 és 2,1 elemekből pedig kivonjuk:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & 0-k_2 & 0 \\ 0-k_2 & 0+k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & +k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

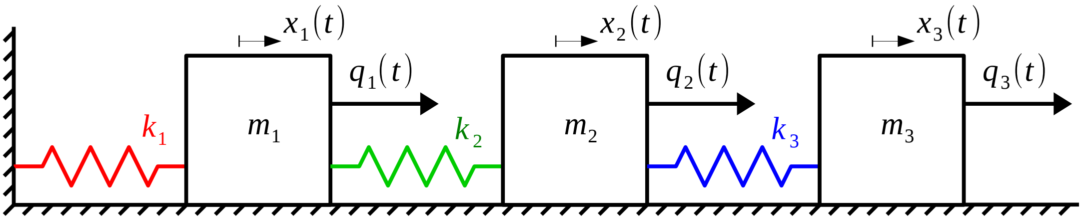
A harmadik rugó a második és a harmadik szabadságfokra hat, így a 2,2 és a 3,3 elemekhez hozzáadjuk a merevségét, a 2,3 és 3,2 elemekből pedig kivonjuk:

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & +k_2+k_3 & 0-k_3 \\ 0 & 0-k_3 & 0+k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & +k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

Nincs több elem, így az utolsó mátrix a merevségi mátrix: $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & +k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet

Modell




Mátrix-differenciálegyenlet: $$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

Ha a teherfüggvény egy statikus $\boldsymbol{q}$ teher, akkor a mozgásegyenletnek is létezik statikus $\boldsymbol{x}_s$ megoldása.
Mivel ekkor a gyorsulások nullák, ezért a mozgásegyenletből egyensúlyi egyenlet lesz:

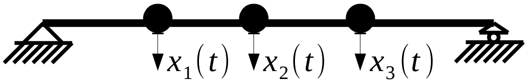
$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{0}+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}$$

Ha az $\boldsymbol{x}_s$ elmozdulásvektor a $j$-edik egységvektor $(\boldsymbol{e}_j)$, akkor a bal oldali művelet elvégzése után a $\boldsymbol{K}$ mátrix $j$-edik oszlopát kapjuk. (Jelöljük ezt $\boldsymbol{k}_j$-vel.)

A $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{k}_j=\boldsymbol{q}$ egyensúlyi feltétel alapján ha a $\boldsymbol{k}_j$ vektor egyes elemei hatnak az egyes szabadságfokokra *egyszerre*, akkor az összes szabadsági fok elmozdulása nulla lesz, kivéve a $j$-edik szabadsági fokét, amelyik pedig éppen 1 lesz.

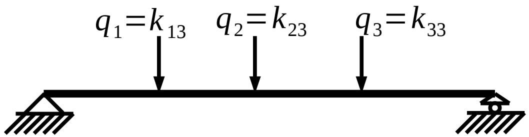
Megfordítva használjuk:
Legyen a $j$-edik szabadságfok elmozdulása 1, miközben az összes többi szabadságfok elmozdulása legyen 0.
Az egyensúly biztosításához a $l$-edik szabadsági fokra működtetendő $q_l$ erő lesz a $\boldsymbol{k}_j$ vektor $l$-edik eleme azaz a merevségi mátrix $k_{lj}$ eleme ($l$-edik sor, $j$-edik oszlop).

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – diszkretizált szerkezet merevségi mátrixa I.

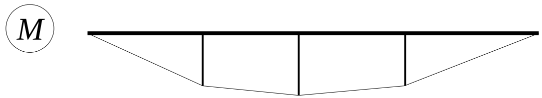



Itt az összes szabadságfok kapcsolódik
→ nem tudunk kompilálni

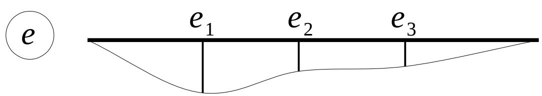
Példa: Számítás a jelentésből kiindulva
*a harmadik oszlop elemei, mint erők működtethetők a szabadsági fokokra*



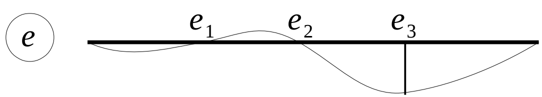

*a három paraméter függvényében számítható egy nyomatéki ábra*




*a három paraméter függvényében számított nyomatéki ábrából számítható a szabadságfokok elmozdulása*

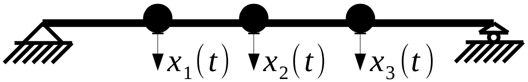



*a merevségi mátrix oszlopainak jelentése miatt*
$e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 1$




→ *a három lineáris egyenletből* $k_{13}, k_{23}, k_{33}$ *meghatározható*

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – diszkretizált szerkezet merevségi mátrixa II.




Paraméteres igénybevételi ábrák helyett:
→ induljunk ki a merevség ellentettjéből

Mátrixszal nem oszthatunk!
Az inverzével (ha van neki) szorozhatunk a megfelelő oldalról (most balról):
$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}\rightarrow\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{q}\rightarrow\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{q}$

Ha $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{q}$, akkor azt megoldva $\boldsymbol{x}_s$-re:

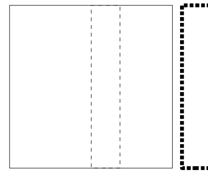
$$\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{K}^{-1}\cdot\boldsymbol{q}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

Az inverz mátrix neve *hajlékonysági mátrix*, jele $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}^{-1}\Leftrightarrow\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}^{-1}$$

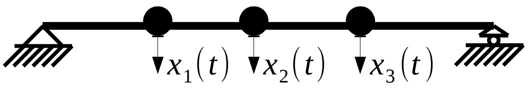


Ha a $\boldsymbol{q}$ tehervektor a $j$-edik egységvektor, akkor a jobb oldali művelet elvégzése után az $\boldsymbol{F}$ mátrix $j$-edik oszlopát kapjuk. (Jelöljük ezt $\boldsymbol{f}_j$-vel.)

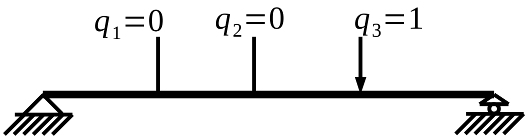
Az $\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{f}_j$ egyensúlyi feltétel alapján ha csak a $j$-edik szabadságfokra hat egy egységerő, a többi szabadságfok pedig terheletlen, akkor az egyes szabadságfokok elmozdulását tartalmazó $\boldsymbol{x}_s$ vektor elemei az $\boldsymbol{f}_j$ vektor elemeivel lesznek azonosak.

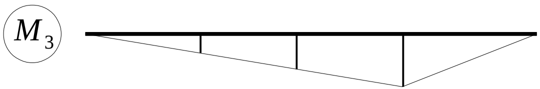
*Használata*:
A $j$-edik szabadságfokra működtetett egységerőből tudjuk számolni $\boldsymbol{f}_j$-t.
Az összes szabadságfokon végég haladva megkapjuk az $\boldsymbol{F}$ mátrixot.
A hajlékonysági mátrix *invertálásával* megkapjuk a merevségi mátrixot.

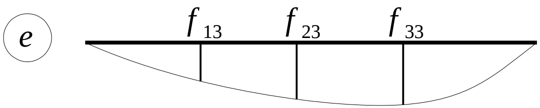
# Többszabadságfokú rendszer rezgése – diszkretizált szerkezet hajlékonysági mátrixa




Példa: Számítás a jelentésből kiindulva
*a harmadik oszlop elemei*

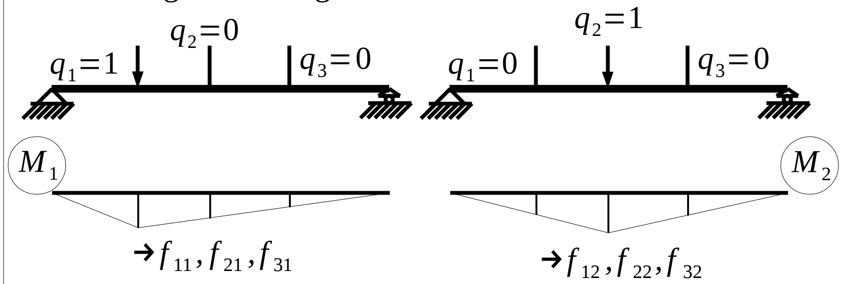



$$\boldsymbol{f}_3=\begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} \dots & \dots & f_{13} \\ \dots & \dots & f_{23} \\ \dots & \dots & f_{33} \end{bmatrix}$$

A teljes mátrixhoz kell még a két másik szabadságfoknak megfelelő két eset:




Csak a szabadságfokok elmozdulására van szükség, nem a teljes elmozdult alakra. Egy-egy pont elmozdulását célszerű a *virtuális erők tételével* számolni.

Az ehhez szükséges virtuális erőrendszereket már felvettük.

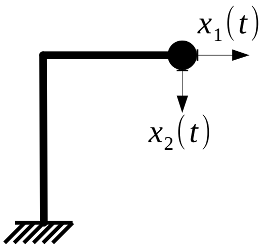
Így aztán például: $f_{12}=\int_L \frac{M_1 M_2}{EI}\,\mathrm{d}l$

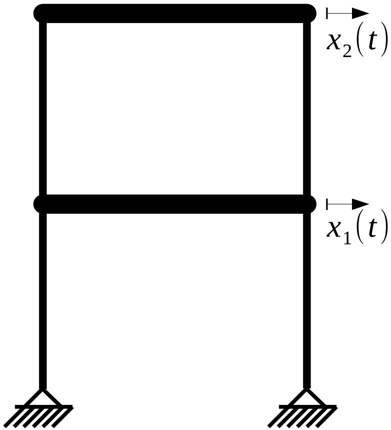
Ebből az előállításból az is látszik, hogy $\boldsymbol{F}$ szimmetrikus lesz, hiszen $f_{lj}=\int_L \frac{M_l M_j}{EI}\,\mathrm{d}l=\int_L \frac{M_j M_l}{EI}\,\mathrm{d}l=f_{jl}$

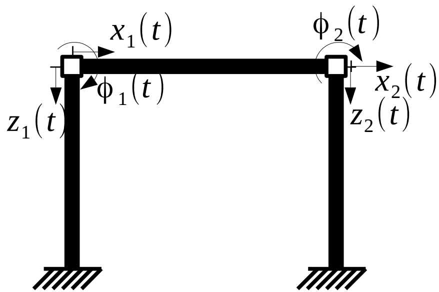
Végül $\boldsymbol{F}$ ismeretében $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}^{-1}$
(és szimmetrikus mátrix inverze szimmetrikus)

# Többszabadságfokú rendszer – modell, mátrix differenciálegyenlet

Modellek:




Mátrix-differenciálegyenlet:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

¤ ha $\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{0}$ ➔ szabadrezgés $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$ homogén DE

¤ ha $\boldsymbol{q}(t)\neq\boldsymbol{0}$ ➔ gerjesztett rezgés $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$ inhomogén DE

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$$

Mátrix-differenciálegyenlet: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$ homogén mátrix-differenciálegyenlet

Keressük a megoldást a hely- (azaz a szabadságfok-) és időfüggés szétválasztásával:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{v}\left(a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right)$$

A gyorsulások vektora így: $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{v}\left(-\omega_0^2 a\cos(\omega_0 t)-\omega_0^2 b\sin(\omega_0 t)\right)$

Behelyettesítve:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}\left(-\omega_0^2\right)\left(a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}\left(a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right)=\boldsymbol{0}$$

Megjegyzések: $\left(a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right)=0$ triviális megoldást jelentene

A mátrix-vektor-szorzásoknál a skalárral szorzás sorrendje tetszőleges

Az időfüggő taggal leosztva: $-\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$

$\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer

Ezt hívják *általánosított sajátértékfeladat* nak is. Másik formája: $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}=\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}$

A szokványos sajátérték-feladat:

$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}=\lambda\,\boldsymbol{v}$, vagy $\left(\boldsymbol{A}-\lambda\,\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ alakú.

Az általánosítás miatt az $\boldsymbol{E}$ egységmátrix helyére az $\boldsymbol{M}$ tömegmátrix került.

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – az általánosított sajátértékfeladat I.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$$

$\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai:

triviális megoldás: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\rightarrow$ minket nem érdekel

nemtriviális megoldás akkor létezik, ha az együtthatómátrix:

sorai lineárisan összefüggők
*szinguláris*
determinánsa nulla

ez a három feltétel ugyanazt jelenti!

Ha létezik nemtiviális megoldás, akkor végtelen sok létezik, hiszen tetszőleges $\alpha$ skalárral az $\alpha\,\boldsymbol{v}$ vektor is megoldás lesz: $\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M}\right)(\alpha\,\boldsymbol{v})=\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}\,\alpha=\boldsymbol{0}\,\alpha=\boldsymbol{0}$

A determiánsra vonatkozó feltétel: $\left|\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M}\right|=0$

Ez kifejtve $\omega_0^2$-re egy $N$-edfokú polinomegyenlet: $\alpha_N\,\omega_0^{2N}+\alpha_{N-1}\omega_0^{2N-2}+\ldots+\alpha_1\,\omega_0^2+\alpha_0=0$

Ennek $\omega_0^2$-re tipikusan $N$ megoldása van.

A pozitív $\omega_0$ gyökök:

$$\omega_{0,1}\leq\omega_{0,2}\leq\omega_{0,3}\leq\ldots\leq\omega_{0,N}$$

(Az egyenlőség többszörös gyökök esetén áll fenn, a továbbiakban feltételezzük, hogy ilyen nem fordul elő.)

Ezek a rendszer *sajátkörfrekvenciái*:

$N$ szabadságfok esetén $N$ darab van.

mindegyikhez másik $\boldsymbol{v}$ sajátvektor tartozik $\rightarrow\boldsymbol{v}_i$

mindegyikhez rendelhető egy periódusidő is: $T_{0,1}=\frac{2\pi}{\omega_{0,1}}\geq T_{0,2}=\frac{2\pi}{\omega_{0,2}}\geq T_{0,3}=\frac{2\pi}{\omega_{0,3}}\geq\ldots\geq T_{0,N}=\frac{2\pi}{\omega_{0,N}}$

A legfontosabb ezek közül: $\omega_{0,1}$ alap-sajátkörfrekvencia, $T_{0,1}$ alap-periódusidő

# Sajátkörfrekvenciák számítása

Példa 1:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\mathrm{t},\ \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}200 & -80\\ -80 & 400\end{bmatrix}\mathrm{kN/m} \quad \rightarrow \quad \det\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\boldsymbol{M}\right)=\begin{vmatrix}200-12\,\omega_0^2 & -80-0\,\omega_0^2\\ -80-0\,\omega_0^2 & 400-8\,\omega_0^2\end{vmatrix}=0$$

A determináns kifejtése: $\left(200-12\,\omega_0^2\right)\left(400-8\,\omega_0^2\right)-\left(-80\right)\left(-80\right)=0$

$$80000-6400\,\omega_0^2+96\,\omega_0^4-6400=0 \quad \rightarrow \quad \omega_{0,12}^2=\frac{6400\pm\sqrt{6400^2-4\cdot 96\cdot 73600}}{\left(2\cdot 96\right)}=\begin{cases}14{,}77\\ 51{,}89\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}\omega_{0,1}=3{,}844\,\mathrm{rad/s}\\ \omega_{0,2}=7{,}204\,\mathrm{rad/s}\end{matrix}$$

---

Példa 2:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}\mathrm{t},\ \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}200 & -120 & 0\\ -120 & 200 & -80\\ 0 & -80 & 400\end{bmatrix}\mathrm{kN/m} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix}200-12\,\omega_0^2 & -120-0\,\omega_0^2 & 0-0\,\omega_0^2\\ -120-0\,\omega_0^2 & 200-8\,\omega_0^2 & -80-0\,\omega_0^2\\ 0-0\,\omega_0^2 & -80-0\,\omega_0^2 & 400-12\,\omega_0^2\end{vmatrix}=0$$

A determináns kifejtése:

$$\left(200-12\,\omega_0^2\right)\left(200-8\,\omega_0^2\right)\left(400-12\,\omega_0^2\right)-\left(200-12\,\omega_0^2\right)\left(-80\right)\left(-80\right)-\left(-120\right)\left(-120\right)\left(400-12\,\omega_0^2\right)=0$$

$$-1152\,\omega_0^6+86400\,\omega_0^4-1830400\,\omega_0^2+8960000=0 \qquad \omega_{0,123}^2=\begin{cases}6{,}982\\ 27{,}48\\ 40{,}54\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}\omega_{0,1}=2{,}642\,\mathrm{rad/s}\\ \omega_{0,2}=5{,}242\,\mathrm{rad/s}\\ \omega_{0,3}=6{,}367\,\mathrm{rad/s}\end{matrix}$$

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – az általánosított sajátértékfeladat II.

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

$\omega_{0,i}$ ismeretében $\boldsymbol{v}_i$ elemei számítandók:

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega_{0,i}^2\,\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}$$

Ugyan $N$ egyenlet van és $N$ ismeretlen, de az egyenletek nem függetlenek, ezért a megoldás nem egyértelmű.

Ha létezik egy megoldás, akkor végtelen sok létezik, hiszen tetszőleges $\alpha$ skalárral az $\alpha\,\boldsymbol{v}_i$ vektor is megoldás lesz: $\left(\boldsymbol{K}-\omega_{0,i}^2\,\boldsymbol{M}\right)\left(\alpha\,\boldsymbol{v}_i\right)=\left(\boldsymbol{K}-\omega_{0,i}^2\,\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}_i\,\alpha=\boldsymbol{0}\,\alpha=\boldsymbol{0}$

Tegyük egyértelművé a megoldást! Lehetőségek:

$(1)$ Legyen az egyik elem 1. ➔ kézi számításnál ebből könnyű kiindulni

$(2)$ Legyen a legnagyobb elem 1. ➔ gépi számításnál iteratív módszerek vezetnek ilyen eredményre

$(3)$ Legyen a vektor hossza 1 (ún. $L^2$-norma). ➔ $\boldsymbol{v}_i^T\,\boldsymbol{v}_i=1$ ➔ nemlineáris egyenletrendszer

$(4)$ Legyen a vektor a *tömegmátrixra normált*. ➔ $\boldsymbol{v}_i^T\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i=1$ ➔ nemlineáris egyenletrendszer

A célszerű eljárás két lépésből áll:

- Először egy általános sajátvektort számítunk: $\tilde{\boldsymbol{v}}_i$

- Majd ezt normáljuk egy $\alpha_i$ skalárszorzóval: $\boldsymbol{v}_i=\alpha_i\,\tilde{\boldsymbol{v}}_i$, ahol $1=\boldsymbol{v}_i^T\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i=\alpha_i^2\,\tilde{\boldsymbol{v}}_i^T\,\boldsymbol{M}\,\tilde{\boldsymbol{v}}_i$ ➔ $\alpha_i=\dfrac{1}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{v}}_i^T\,\boldsymbol{M}\,\tilde{\boldsymbol{v}}_i}}$

# Sajátvektorok számítása, normálása

Példa 1 első sajátvektora:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}12 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\mathrm{t}\,,\ \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}200 & -80\\ -80 & 400\end{bmatrix}\mathrm{kN/m}\,,\ \begin{matrix}\omega_{0,1}=3{,}844\,\mathrm{rad/s}\\ \omega_{0,2}=7{,}204\,\mathrm{rad/s}\end{matrix}\ \rightarrow\ \begin{bmatrix}200-12\cdot 3{,}844^2 & -80\\ -80 & 400-8\cdot 3{,}844^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

első sorból: $22{,}68\cdot 1-80\,c_1=0\rightarrow c_1=0{,}2835$ második sorból ell.: $(-80)\cdot 1+281.7\cdot 0{,}2835\approx 0$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0{,}2835\end{bmatrix}\ \text{normálás:}\ \tilde{\boldsymbol{v}}_1^T\boldsymbol{M}\,\tilde{\boldsymbol{v}}_1=\begin{bmatrix}1 & 0{,}2835\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0{,}2835\end{bmatrix}=12{,}64\ \rightarrow \boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{12{,}64}}\begin{bmatrix}1\\ 0{,}2835\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}2812\\ 0{,}0797\end{bmatrix}$$

---

Példa 2 harmadik sajátvektora:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{bmatrix}\mathrm{t}\,,\ \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}200 & -120 & 0\\ -120 & 200 & -80\\ 0 & -80 & 400\end{bmatrix}\mathrm{kN/m}\,,\ \begin{matrix}\omega_{0,1}=2{,}642\,\mathrm{rad/s}\\ \omega_{0,2}=5.242\,\mathrm{rad/s}\\ \omega_{0,3}=6{,}367\,\mathrm{rad/s}\end{matrix}\quad \begin{bmatrix}-286{,}5 & -120 & 0\\ -120 & -124{,}3 & -80\\ 0 & -80 & -86{,}46\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_2\\ 1\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

első sorból: $c_2=-0{,}4188$

harmadik sorból: $c_3=-0{,}9253$

második sor ell.:

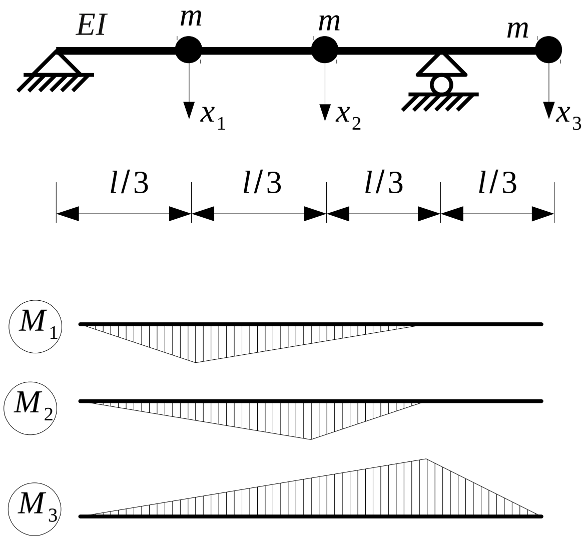
$120\cdot 0{,}4188-124{,}3+80\cdot -0{,}9253\approx 0$

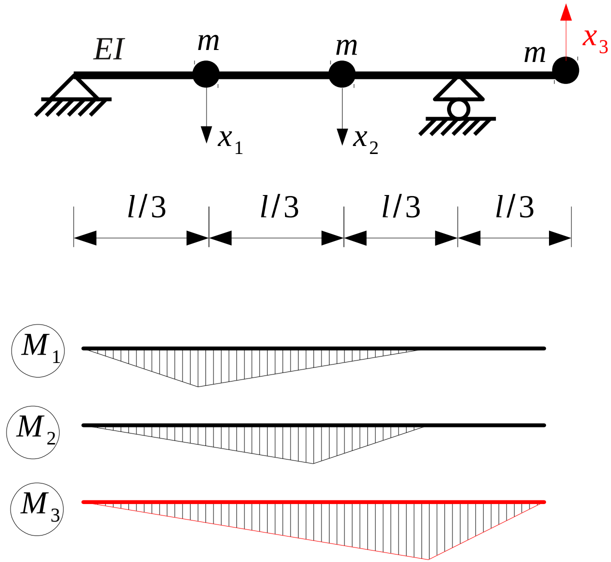
$$\tilde{\boldsymbol{v}}_3=\begin{bmatrix}-0{,}4188\\ 1\\ -0{,}9253\end{bmatrix}\ \text{normálás:}\ \tilde{\boldsymbol{v}}_3^T\boldsymbol{M}\,\tilde{\boldsymbol{v}}_3=20{,}38\ \rightarrow \boldsymbol{v}_3=\frac{1}{\sqrt{20{,}38}}\begin{bmatrix}-0{,}4188\\ 1\\ -0{,}9253\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}0928\\ 0{,}2215\\ -0{,}2050\end{bmatrix}$$

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – szabadságfok iránya I.

Kéttámaszú gerenda, túlnyúló konzollal:

$l = 6$ m támaszköz, $EI = 5000\,\mathrm{kNm}^2$ hajlítómerevség, $m = 2$ t redukált tömegek.

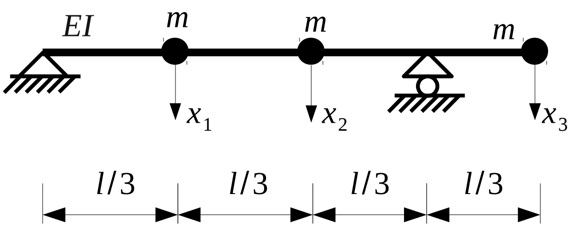


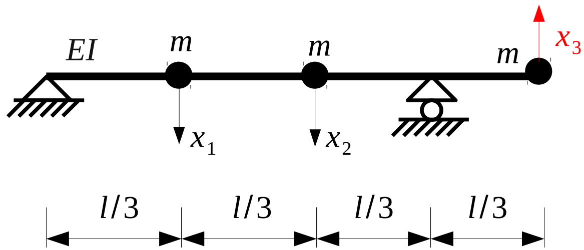




$$\boldsymbol{F} = \frac{6^3}{5000}\,\frac{1}{486}\begin{bmatrix} 8 & 7 & -8 \\ 7 & 8 & -10 \\ -8 & -10 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{6^3}{5000}\,\frac{1}{486}\begin{bmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 24 \end{bmatrix}$$

## Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – szabadságfok iránya II.

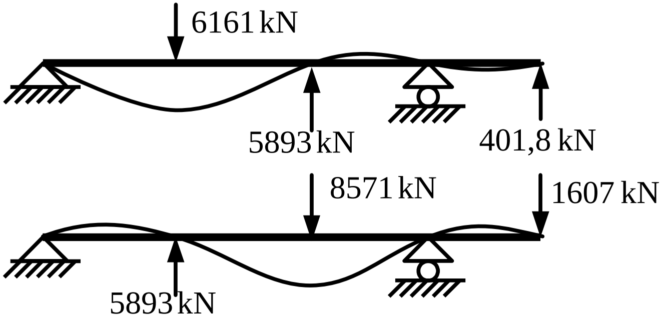


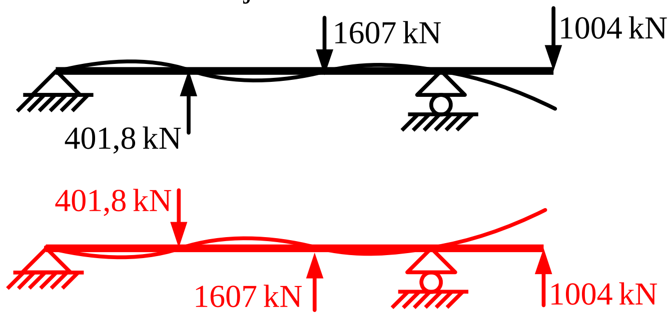

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 6161 & -5893 & -401{,}8 \\ -5893 & 8571 & 1607 \\ -401{,}8 & 1607 & 1004 \end{bmatrix}\text{kN/m} \qquad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}\text{t} \qquad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 6161 & -5893 & 401{,}8 \\ -5893 & 8571 & -1607 \\ 401{,}8 & -1607 & 1004 \end{bmatrix}\text{kN/m}$$

*Emlékeztető*: Merevségi márix oszlopainak jelentése

Az első és a második oszlop ugyanazt a két fizikai erőrendszert jelenti:

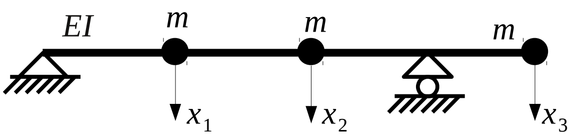


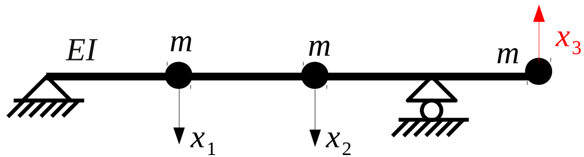

A harmadik oszlop éppen az ellentétes elmozdulást okozó erőrendszert jelenti:




A harmadik sorban a megváltozott előjelszabályt kell érvényesíteni.

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – szabadságfok iránya III.




$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 6161 & -5893 & -401{,}8 \\ -5893 & 8571 & 1607 \\ -401{,}8 & 1607 & 1004 \end{bmatrix} \text{kN/m} \qquad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \text{t} \qquad \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 6161 & -5893 & 401{,}8 \\ -5893 & 8571 & -1607 \\ 401{,}8 & -1607 & 1004 \end{bmatrix} \text{kN/m}$$

Az általánosított sajátértékfeladat megoldásai:

A sajátkörfrekvenciák azonosak (hiszen a fizikai rendszer tulajdonságai):

$$\omega_{0,1}=13{,}05\ \text{rad/s}\,,\ \omega_{0,2}=30{,}30\ \text{rad/s}\,,\ \omega_{0,3}=82{,}34\ \text{rad/s}$$

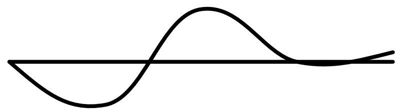
A tömegmátrixra normált sajátvektorok: $\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 0{,}270 & 0{,}483 & 0{,}440 \\ 0{,}306 & 0{,}327 & -0{,}547 \\ -0{,}577 & 0{,}399 & -0{,}084 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 0{,}270 & 0{,}483 & 0{,}440 \\ 0{,}306 & 0{,}327 & -0{,}547 \\ 0{,}577 & -0{,}399 & 0{,}084 \end{bmatrix}$$

A megváltozott irányú szabadságfok esetén ellenkező előjelű.
A rezgésalakok fizikailag ugyanúgy néznek ki a két esetben:

$T_{0,1}=0{,}482\,\text{s}$

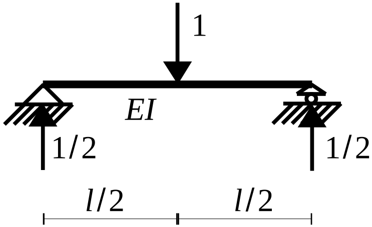
$T_{0,2}=0{,}207\,\text{s}$

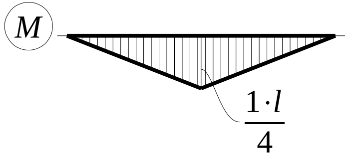


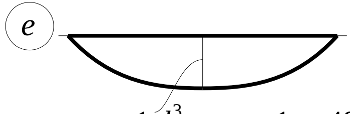
$T_{0,3}=0{,}076\,\text{s}$

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – diszkretizálás hatása I.

Kéttámaszú gerenda, $l$ támaszköz, $EI$ hajlítómerevség, $\mu$ fajlagos tömeg.
Egyszabadségfokú rendszerként (ismétlés):



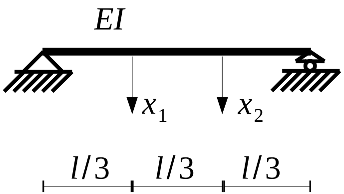



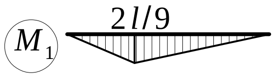

$$f=\frac{1\cdot l^3}{48\,EI}\rightarrow k=\frac{1}{f}=\frac{48\,EI}{l^3}$$

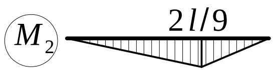
$$m=\frac{\mu\, l/2}{2}+\frac{\mu\, l/2}{2}=\frac{\mu\, l}{2}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{96}\sqrt{\frac{EI}{\mu\, l^4}}=9{,}798\sqrt{\frac{EI}{m_{tot}\, l^3}}$$

$N=2$:




$$\boldsymbol{F}=\frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix}4/243 & 3{,}5/243\\ 3{,}5/243 & 4/243\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}259{,}2 & -226{,}8\\ -226{,}8 & 259{,}2\end{bmatrix}$$

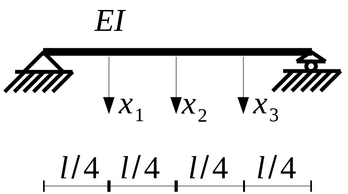
$$\boldsymbol{M}=\frac{m_{tot}}{3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

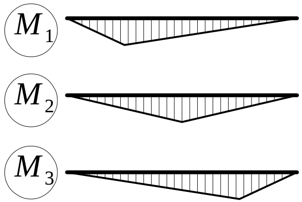
$$\boldsymbol{\Omega}=\sqrt{\frac{EI}{m_{tot}\, l^3}}\begin{bmatrix}9{,}859 & \\ & 38{,}184\end{bmatrix}$$

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – diszkretizálás hatása II.

Kéttámaszú gerenda, $l$ támaszköz, $EI$ hajlítómerevség, $\mu$ fajlagos tömeg.

$N=3:$




$$\boldsymbol{F}=\frac{l^3}{EI}\frac{1}{768}\begin{bmatrix}9 & 11 & 6\\ 11 & 16 & 11\\ 6 & 11 & 9\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}630{,}9 & -603{,}4 & 246{,}9\\ -603{,}4 & 877{,}7 & -603{,}4\\ 246{,}9 & -603{,}4 & 630{,}9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\frac{m_{tot}}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Omega}=\sqrt{\frac{EI}{m_{tot}\,l^3}}\begin{bmatrix}9{,}867 & & \\ & 39{,}19 & \\ & & 83{,}21\end{bmatrix}$$

$N=4:$

$$\boldsymbol{\Omega}=\sqrt{\frac{EI}{m_{tot}\,l^3}}\begin{bmatrix}9{,}870 & & & \\ & 39{,}48 & & \\ & & 88{,}83 & \\ & & & 157{,}9\end{bmatrix}$$

A folytonos gerenda megoldása:

$$\omega_{0,j}=j^2\pi^2\sqrt{\frac{EI}{m_{tot}\,l^3}} \text{ lenne.}$$

Ezt két irányból közelítjük:

¤ a szakaszok tömegének felezésével és a diagonalizálással

¤ a merevség (és így a rezgésalak) statikus alakjával

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – a sajátvektorok jellemzői I.

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega_{0,i}^{2}\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}$$

$\omega_{0,i}$ ismeretében $\boldsymbol{v}_i$ a tömegmátrixra normált sajátvektor

Ekkor: $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^{2}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$ amit balról szorozzunk meg $\boldsymbol{v}_i^{T}$ -vel:

$\boldsymbol{v}_i^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^{2}\boldsymbol{v}_i^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$ A tömegmátrixra normáltság miatt a jobb oldalon a vektor-mátrix-vektor-szorzat értéke 1, amiből:

$$\boldsymbol{v}_i^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^{2}$$

---

$\omega_{0,i}\neq\omega_{0,j}$ ismeretében $\boldsymbol{v}_i$ és $\boldsymbol{v}_i$ tömegmátrixra normált sajátvektorok ismertek

Ekkor: $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^{2}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$ és $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_j=\omega_{0,j}^{2}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j$. Szorozzuk meg balról az első egyenlet $\boldsymbol{v}_j^{T}$ -tal, a másodikat $\boldsymbol{v}_i^{T}$ -tal:

$$\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^{2}\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$$
$$\boldsymbol{v}_i^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_j=\omega_{0,j}^{2}\boldsymbol{v}_i^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j$$

$\boldsymbol{K}$ és $\boldsymbol{M}$ szimmetrikus, így $\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_i^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_j$ és $\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_i^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_j$ ➔

$$\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^{2}\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$$
$$\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,j}^{2}\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$$

Kivonva egymásból a két egyenletet:

$$\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^{2}\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i-\omega_{0,j}^{2}\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$$

$$0=\left(\omega_{0,i}^{2}-\omega_{0,j}^{2}\right)\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$$

Mivel a zárójelben levő kifejezés nem lehet nulla, így

$$\boldsymbol{v}_j^{T}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i=0$$

Más szóval: a sajátvektorok a *tömegmátrixra ortogonálisak* .

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – a sajátvektorok jellemzői II.

$\left(\boldsymbol{K}-\omega_{0,i}^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}$

$\omega_{0,i}\neq\omega_{0,j}$ ismeretében $\boldsymbol{v}_i$ és $\boldsymbol{v}_i$ tömegmátrixra normált sajátvektorok ismertek

Az előzővel azonos lépésekből:

$$\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^2\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i$$
$$\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,j}^2\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i$$

Kivonva az első egyenlet $\omega_{0,j}^2$-szereséből a második egyenlet $\omega_{0,i}^2$-szeresét:

$$\omega_{0,j}^2\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i-\omega_{0,i}^2\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,j}^2\omega_{0,i}^2\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i-\omega_{0,i}^2\omega_{0,j}^2\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i$$
$$\left(\omega_{0,j}^2-\omega_{0,i}^2\right)\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i=0$$

Mivel a zárójelben levő kifejezés nem lehet nulla, így

$$\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i=0$$

Más szóval: a sajátvektorok a *merevségi mátrixra ortogonálisak*.

E négy tulajdonság rövidebben is kifejezhető:

$$\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_j=\delta_{ij}$$
$$\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j=\omega_{0,i}^2\delta_{ij}$$

, ahol $\delta_{ij}$ az ún. *Kroenecker-delta* szimbólum: $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{ha } i=j\\ 0 & \text{ha } i\neq j\end{cases}$

---

Ha a sajátvektorokat a $\boldsymbol{V}=\left[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_N\right]$ mátrixba gyűjtjük, akkor:

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{E}\quad\text{és}\quad\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}^2$$

Itt a diagonál $\boldsymbol{\Omega}$ mátrix alakja: $\boldsymbol{\Omega}=\left\langle\omega_{0,1},\omega_{0,2},\ldots,\omega_{0,N}\right\rangle$, neve *spektrálmátrix*.

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – általános megoldás

A $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$ mátrix-differenciálegyenlet megoldását $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{v}\left(a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right)$ alakban kerestük.

Mivel több megoldást kaptunk, a teljes megoldás ezek kombinációja:

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\left(a_i\cos(\omega_{0,i}t)+b_i\sin(\omega_{0,i}t)\right)$$

Az $i$-edik sajátkörfrekvnciának megfelelő harmonikus függvény szerint a $\boldsymbol{v}_i$ vektor elemei által meghatározott arányban, ilyen alakkal mozognak a szabadságfokok.
A sajátvektorokat ezért *sajátrezgésalak* nak, rezgés *mód* oknak is hívjuk.

---

*Modálanalízis* során az elmozdulásokat az egyes módok lineáris kombinációjaként állítjuk elő:

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i y_i(t)$$

Itt $y_i(t)$ az $i$-edik modális elmozdulás. Mátrixos alakban: $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)$.

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – kezdeti feltételek

A szabadrezgés általános megoldása tehát: $\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\left(a_i\cos(\omega_{0,i}t)+b_i\sin(\omega_{0,i}t)\right)$

Az általános megoldás $2N$ paramétert tartalmaz $(a_i, b_i)$, ezeket a kezdeti feltételek alapján kell meghatározni.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\omega_{0,i}\left(-a_i\sin(\omega_{0,i}t)+b_i\cos(\omega_{0,i}t)\right)$$

A kezdeti időpontban ismert a szabadságfokok helyzete és sebessége:

Pl. $t=0$ pillanatban $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ és $\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{v}_0$

Ez pontosan $2N$ egyenlet a $2N$ ismeretlenhez.

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i a_i=\boldsymbol{x}_0 \text{ és } \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\omega_{0,i}b_i=\boldsymbol{v}_0$$

---

Kezdeti feltételek modálanalízissel:

Szorozzuk be a kezdeti feltételek egyenleteit balról $\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}$-mel:

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i a_i=\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_0 \text{ és } \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\omega_{0,i}b_i=\boldsymbol{v}_j^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_0$$

A sajátvektorok tömegmátrixra való ortogonalitása miatt az összegzésből csak a $j=i$ esetben lesz $0$-tól különböző tag, így:

$$\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i a_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_0 \text{ és } \boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\omega_{0,i}b_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_0$$

A sajátvektorok tömegmátrixra normálása miatt

$\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i=1$, így: $a_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_0$ és $b_i=\dfrac{\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_0}{\omega_{0,i}}$

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\left(\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_0\cos(\omega_{0,i}t)+\frac{\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_0}{\omega_{0,i}}\sin(\omega_{0,i}t)\right)$$

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – ÁSÉF közelítő megoldás

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega_{0,i}^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0}$$

Def.: *Rayleigh*-hányados:
Egy tömegmátrixával és merevségi mátrixával adott $N$ szabadságfokú rendszer esetén egy $N$ elemű $\boldsymbol{v}$ vektor Rayleigh-hányadosát az alábbi képlettel számítjuk:

$$R(\boldsymbol{v})=\frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}}$$

---

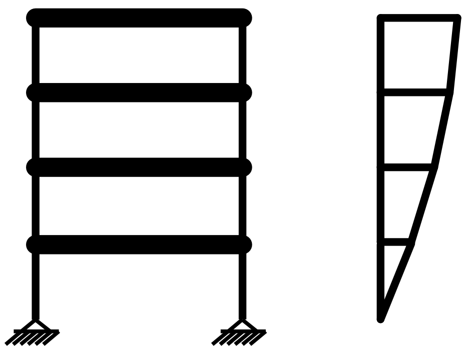
Korábban láttuk, hogy sajátvektorok esetén: $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i=\omega_{0,i}^2\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i$, azaz az $i$-edik sajátvektor Rayleigh-hányadosa az $i$-edik sajátkörfrekvencia négyzete:

$$R(\boldsymbol{v}_i)=\frac{\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_i}{\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i}=\omega_{0,i}^2$$

Minden egyéb $\boldsymbol{v}$ vektor esetén: $\omega_{0,1}^2<R(\boldsymbol{v})<\omega_{0,N}^2$

Az első rezgésalak becslésével az alap sajátkörfrekvencia is becsülhető. A becslés során a szabadságfokok elmozdulásainak rögzítése kinematikai kényszert jelent, ami merevebbé teszi a számolt szerkezetet a ténylegesnél. Ezért is lesz az így kapott sajátkörfrekvencia nagyobb a tényleges legkisebbnél.

Segíthet a becsült alak felvételében, ha ismert a szerkezet helyettesítő kontinuum-modellje és a kontinuum rezgésalakja.



# Általánosított sajátértékfeladat – egyéb megoldási módszerek

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}=\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}$$

Ha $\boldsymbol{K}$ nem szinguláris (úgy illik):
- létezik $\boldsymbol{K}^{-1}$,
- skalárral oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát.

$$\frac{1}{\omega_0^2}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}$$

- Ez már egy egyszerű sajátértékfeladat $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}=\lambda\,\boldsymbol{v})$
- Az együtthatómátrix általában nem szimmetrikus.
- $\boldsymbol{K}$ invertálása időigényes

A megoldás végül ugyanaz kell legyen.

Ha $\boldsymbol{M}$ nem szinguláris:
- létezik $\boldsymbol{M}^{-1}$,

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}=\omega_0^2\,\boldsymbol{v}$$

- Ez már egy egyszerű sajátértékfeladat $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}=\lambda\,\boldsymbol{v})$
- Az együtthatómátrix általában nem szimmetrikus.
- Ha $\boldsymbol{M}$ diagonálmátrix, akkor könnyű invertálni.

A megoldás végül ugyanaz kell legyen.

Az egyszerű sajátértékfeladat iteratív úton is megoldható:

Az $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\ldots\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}$ szorzat többnyire a legnagyobb sajátérték sajátvektorához tart.
Kivéve, ha a kezdeti vektor arra merőleges, akkor a következő legnagyobbéhoz.

A $\frac{1}{\omega_0^2}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}$ típusú felírásnál ez használható $\left(\text{legnagyobb } \frac{1}{\omega_0^2}\rightarrow \text{legkisebb } \omega_0^2\rightarrow\omega_{0,1}\right)$.

# Általánosított sajátértékfeladat – egybeeső sajátkörfrekvenciák

$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}=\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}$

Mi van akkor, ha a $\det\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\right)=0$ egyenletnek $\omega_0^2$-re többszörös gyöke van?

A sajátvektor általában egy irányt (egyetlen dimenziót) jelöl ki az $N$ dimenziós térben.
A többszörös gyök esetén a sajátvektor egy annyi dimenziós altérben van, mint a gyök multiplicitása.
Ebben az altérben is egyértelművé tehetjük a bázist. Hogyan tegyük?

Legyenek az altérben felvett bázisok kölcsönösen ortogonálisak a tömegmátrixra.
Így a modálanalízisnél már külön kezelhetjük ezeket a módokat (igaz, azonos lesz a sajátkörfrekvenciájuk).

Azaz ha $\omega_{0,i}$ egy $k$-szoros gyök, akkor:

$$\omega_{0,i}=\omega_{0,i+1}=\omega_{0,i+2}=\ldots=\omega_{0,i+k-1}$$

$$\boldsymbol{v}_{i+j}^T\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_{i+l}=\delta_{j,l} \qquad j=0,1,\ldots,k-1 \qquad l=0,1,\ldots,k-1$$

$$\boldsymbol{v}_{i+j}^T\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_{i+l}=\delta_{j,l}\,\omega_{0,i}^2$$

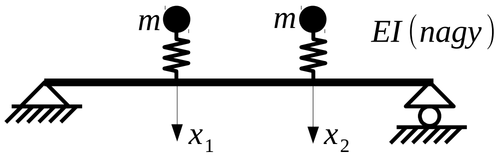
A többi rezgésalakra természetesen szintén ortogonálisak ezek az alakok.

# Általánosított sajátértékfeladat – közel egybeeső sajátkörfrekvenciák

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}=\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}$$

Vizsgáljunk egy olyan szerkezetet, amelynél a merevségi mátrix struktúrája: $\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k & \varepsilon \\ \varepsilon & k \end{bmatrix}, \quad |\varepsilon| \ll k$

Példák:
Közös merev alapra helyezett gépek
Merev gerendára függesztett ingák




$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{K}-\omega_0^2\,\boldsymbol{M}\right)=0 \rightarrow \left(k-\omega_0^2 m\right)^2-\varepsilon^2=0$$

$$\omega_{0,12}^2=\frac{2km\pm\sqrt{4k^2m^2-4m^2\left(k^2-\varepsilon^2\right)}}{2m^2}=\frac{k}{m}\pm\frac{\varepsilon}{m} \quad \rightarrow$$

$$\omega_{0,1}=\sqrt{\frac{k}{m}}-\epsilon_1=\omega_0-\epsilon_1$$

$$\omega_{0,2}=\sqrt{\frac{k}{m}}+\epsilon_2=\omega_0+\epsilon_2$$

ahol $\epsilon_1 \ll \omega_0$ és $\epsilon_2 \ll \omega_0$

A sajátvektorok: $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2m} \\ 1/\sqrt{2m} \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2m} \\ -1/\sqrt{2m} \end{bmatrix},$

Szabadrezgés, ha $\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_0\cos\left(\omega_{0,1}t\right)+\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_0\cos\left(\omega_{0,2}t\right)$$

Mindkét szf. rezgése egy $\left(\omega_0-\epsilon_1\right)$ és egy $\left(\omega_0+\epsilon_2\right)$ körfrekvenciájú rezgés összege.
Közeli frekvenciájú rezgések összege ➔ lebegés.

## Mit tanultunk eddig?

Többszabadságfokú rendszer mechanikai rezgései:
- modell
- mátrixok (tömeg-, merevségi, hajlékonysági)

Mozgás mátrix-differenciálegyenlete

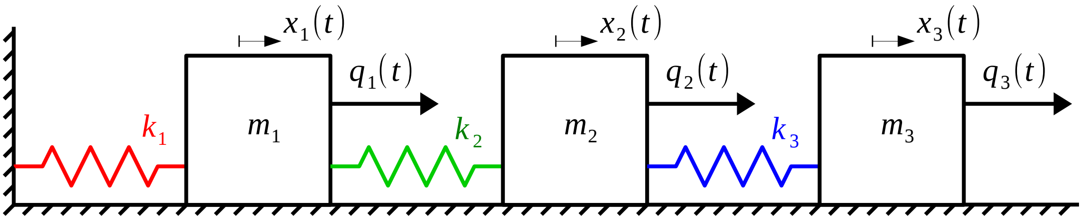
Szabadrezgés:
- sajátkörfrekvenciák
- sajátvektorok

## Mi következik?

Gerjesztett rezgések
- harmonikus gerjesztőerő
- általános gerjesztőerő
- támaszrezgés
- földrengésvizsgálat

# Többszabadságfokú rendszer rezgése – modell, mozgásegyenlet

Modell




Mátrix-differenciálegyenlet: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$

Ha a tehervektor valamennyi eleme azonos harmonikus függvény szerint írható fel, pl.:

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} q_{1,0}\cos(\omega t) \\ q_{2,0}\cos(\omega t) \\ \vdots \\ q_{N,0}\cos(\omega t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ q_{2,0} \\ \vdots \\ q_{N,0} \end{bmatrix}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

Akkor a mozgásegyenlet egyszerűsödik: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

Megyjegyzések:

A terheletlen szf. esetén $q_{i,0}=0$, azaz harmonikusnak tekinthető bármilyen időfüggéssel.

A harmonikus függvény szokás szerint lehet bármi: $\sin(\omega t), \cos(\omega t), \cos(\omega t-\phi_0)$, stb., de mindegyik szabadságfok esetén ugyanaz.

# Harmonikus erővel gerjesztett többszabadságfokú rendszer– direkt megoldás I.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

inhomogén lineáris
differenciálegyenlet-rendszer

Keressük a megoldást harmonikus alakban:

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\boldsymbol{x}_{g0}\cos(\omega t)$$

A feltételezett megoldás második deriváltja: $\ddot{\boldsymbol{x}}_g(t)=\boldsymbol{x}_{g0}(-\omega^2)\cos(\omega t)$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_{g0}(-\omega^2)\cos(\omega t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_{g0}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{x}_{g0}(-\omega^2)\qquad+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_{g0}\qquad=\boldsymbol{q}_0$$

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{x}_{g0}=\boldsymbol{q}_0$$ inhomogén lineáris egyenletrendszer

A lineáris egyenletrendszer megoldása:
- ha létezik az együtthatómátrix inverze, akkor szorozzunk be vele balról:

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})^{-1}(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{x}_{g0}=(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{q}_0 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{x}_{g0}=(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{q}_0$$

Mikor létezik az inverz?

$$\left.\begin{array}{l}\text{nem szinguláris}\\ \text{determinánsa nem 0}\\ \text{sorai lin. függetlenek}\end{array}\right\}\rightarrow \omega \text{ nem a rendszer sajárkörfrekvenciája}$$

# Harmonikus erővel gerjesztett többszabadságfokú rendszer– direkt megoldás II.

$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{x}_{g0}=\boldsymbol{q}_0$ Ha $\omega\neq\omega_{0,i}$: $\rightarrow$ $\boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0$

Mi van akkor, ha $\omega=\omega_{i,0}$?

A megoldás létének feltétele: $\varrho\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)=\varrho\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|\boldsymbol{q}_0\right)$ (az együtthatómátrix rangja a tehervektorral kiegészítve nem változik.)

Nincs megoldás, ha: $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0\neq 0$

(ilyenkor *rezonancia* alakul ki az $i$-edik alakkal)

Van megoldás, ha: $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0=0$

A tehervektor nem befolyásolja a rezonáns rezgésalakot.

A kialakuló rezgés ortogonális erre az alakra.

Tipikus esetben a megoldás: $\boldsymbol{x}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

A teljes megoldáshoz most is hozzájönne még a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\boldsymbol{x}(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\left(a_i\cos(\omega_{0,i}t)+b_i\sin(\omega_{0,i}t)\right)$$

A szabadrezgéses rész idővel lecsillapodna, a maradék $\boldsymbol{x}_g(t)$ az állandósult rezgésrész.

# Harmonikus erővel gerjesztett többszabadságfokú rendszer– modálanalízis I.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

Tegyük fel, hogy már megoldottuk az általánosított sajátértékfeladatot, azaz ismertek a sajátkörfrekvenciák $(\omega_{0,i})$ és a tömegmátrixra normált sajátvektorok $(\boldsymbol{v}_i)$.

Keressük az $\boldsymbol{x}_g(t)$ megoldást a sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,y_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)$$

ahol $y_{g,i}(t)$ az $i$-edik modális koordináta (gerjesztés miatti)

Mivel a sajátvektorok időfüggetlenek, így az idő szerinti második derivált:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\ddot{y}_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)$$

Behelyettesítve a mátrix-differenciálegyenletbe: $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

Szorozzuk be mindkét oldalt balról $\boldsymbol{V}^T$-vel: $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

A sajátvektorok ortogonalitása és normálása miatt: $\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}_g(t)=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$

Ennek az $i$-edik sorában: $\ddot{y}_{g,i}(t)+\omega_{0,i}^2\,y_{g,i}(t)=f_i\cos(\omega t)$

ahol $f_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0$ a tehervektor vetülete a rezgésalakra

A differenciálegyenlet-rendszer *szétesik* $N$ darab közönséges differenciálegyenletté.

# Harmonikus erővel gerjesztett többszabadságfokú rendszer– modálanalízis II.

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i y_{g,i}(t)$$

Az $i$-edik közönséges differenciálegynlet: $\ddot{y}_{g,i}(t)+\omega_{0,i}^2 y_{g,i}(t)=f_i\cos(\omega t)$

Egy egységnyi tömegű $(m=1)$, $\omega_{0,i}^2$ merevségű $(k=\omega_{0,i}^2)$ egyszabadságfokú rendszer differenciálegyenlete, amit az $f_i$ amplitúdójú harmonikus erő gerjeszt.

$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=q_0\cos(\omega t)$$

$$x_g(t)=\frac{q_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega t)$$

A harmonikus erővel gerjesztett egyszabadságfokú rendszereknél tanultak szerint:

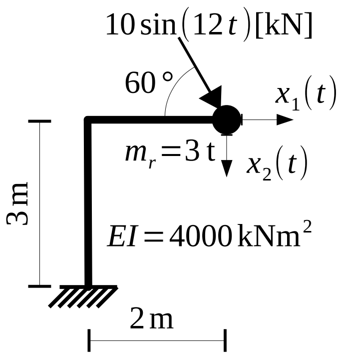
Az $i$-edik modális amplitúdó: $y_{g0,i}=\frac{f_i}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$ ➔ $y_{g,i}(t)=f_i\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$

A gerjesztés miatti harmonikus válasz: $\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$

Mindegyik $\boldsymbol{v}_i$ rezgésalakot szorozni kell:

- a tehervektor vetületével $(\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0)$
- a sajátkörfrekvenciának megfelelő előjeles rezonanciatényező-szerű taggal
- a közös harmonikus taggal
- a sajátkörfrekvencia négyzetének reciprokával ➔ a magasabb módok hatása általában kisebb lesz

# Direkt megoldás – példa I.




$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}=\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}9 & 9\\9 & 14{,}67\end{bmatrix}\rightarrow\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1150 & -705{,}9\\-705{,}9 & 705{,}9\end{bmatrix}\mathrm{kN/m},$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\mathrm{t},\ \boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix}10\cdot\cos 60°\cdot\sin(12t)\\10\cdot\sin 60°\cdot\sin(12t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\8{,}660\end{bmatrix}\sin(12t)=\boldsymbol{q}_0\sin(\omega t)$$

---

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0 \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{x}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\sin(\omega t)$$

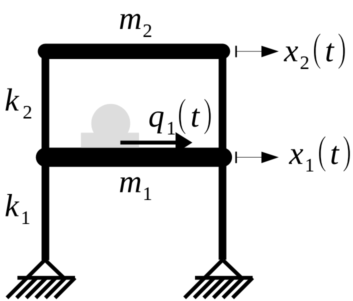
$$\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1150-12^2 3 & -705{,}9\\-705{,}9 & 705{,}9-12^2 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}718{,}3 & -705{,}9\\-705{,}9 & 273{,}9\end{bmatrix}$$

$$\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}=\frac{1}{718{,}3\cdot273{,}9-(-705{,}9)\cdot(-705{,}9)}\begin{bmatrix}273{,}9 & 705{,}9\\705{,}9 & 718{,}3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}9083 & 2{,}341\\2{,}341 & -2{,}382\end{bmatrix}\cdot10^{-3}$$

$$x_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}q_0=10^{-3}\cdot\begin{bmatrix}-0{,}9083 & 2{,}341\\2{,}341 & -2{,}382\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\8{,}660\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-24{,}82\\-32{,}34\end{bmatrix}\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$x_g(t)=\begin{bmatrix}-24{,}82\\-32{,}34\end{bmatrix}\cdot\sin(12t)\,\mathrm{mm}$$

# Direkt megoldás – példa II.




$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0}\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

---

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{(k_1+k_2-\omega^2 m_1)(k_2-\omega^2 m_2)-k_2^2}\begin{bmatrix} k_2-\omega^2 m_2 & k_2 \\ k_2 & k_1+k_2-\omega^2 m_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\frac{q_{0,1}}{k_1 k_2-(k_1 m_2+k_2 m_2+k_2 m_1)\omega^2+m_1 m_2\omega^4}\begin{bmatrix} (k_2-\omega^2 m_2) \\ k_2 \end{bmatrix}$$

A nevező nullává válik, ha:

$$\omega=\frac{(k_1 m_2+k_2 m_2+k_2 m_1)\pm\sqrt{(k_1 m_2+k_2 m_2+k_2 m_1)^2-4k_1 k_2 m_1 m_2}}{2m_1 m_2}$$

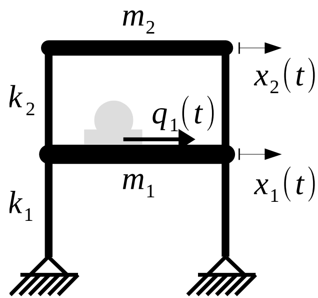
ez a két sajátkörfrekvencia: $\omega_{0,1}, \omega_{0,2}$

# Direkt megoldás – példa III.

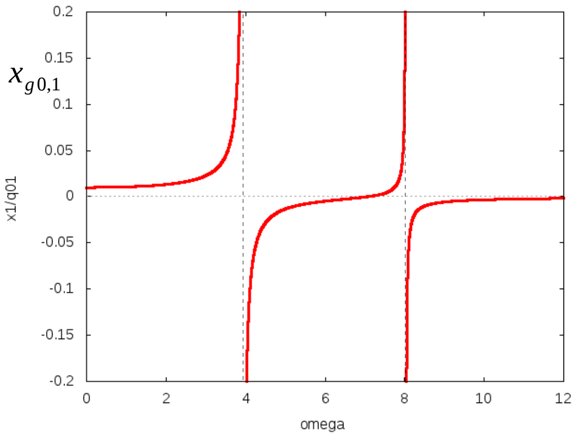
$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},$$

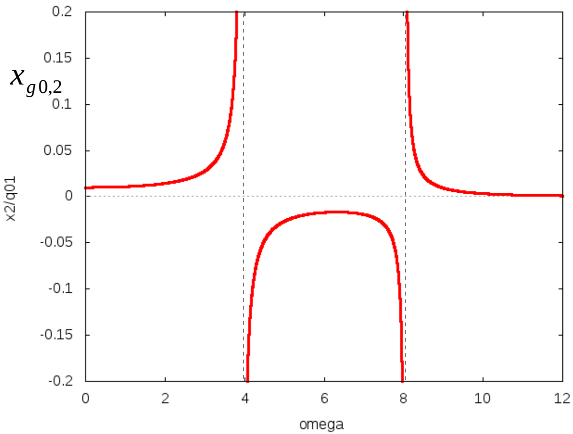
$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0}\cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{1,0} \\ 0 \end{bmatrix}\cos(\omega t)=\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\frac{q_{0,1}}{k_1 k_2-(k_1 m_2+k_2 m_2+k_2 m_1)\omega^2+m_1 m_2 \omega^4}\begin{bmatrix} (k_2-\omega^2 m_2) \\ k_2 \end{bmatrix}$$




Pl.: $k_1=100, k_2=50, m_1=5, m_2=1, \omega_{0.1}=3{,}938\ \mathrm{rad/s}, \omega_{0.2}=8{,}031\ \mathrm{rad/s}$




A rezonancia frekvenciájánál végtelen amplitúdók.

Ha $\omega=\sqrt{k_2/m_2}$, akkor az első szabadságfok amplitúdója 0.

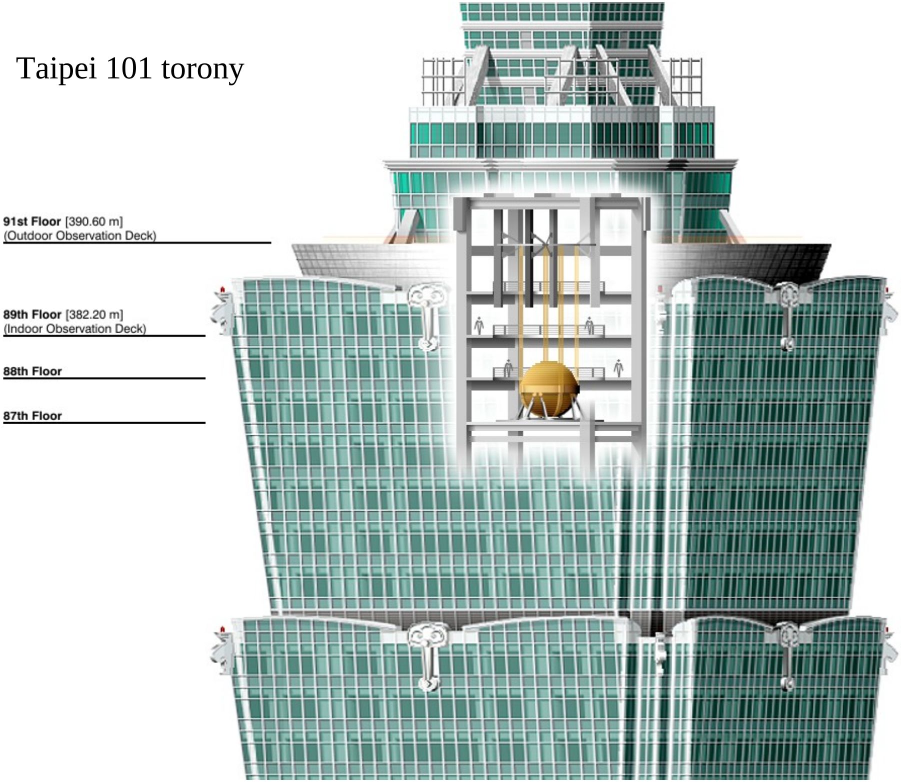
Ez $k_2$, ill. $m_2$ hangolásával érhető el, neve *dinamikus rezgéscsillapítás*.

Ha az $m_2$ tömeg viszonylag kicsi → kicsi $k_2$, viszonylag nagy amplitúdó

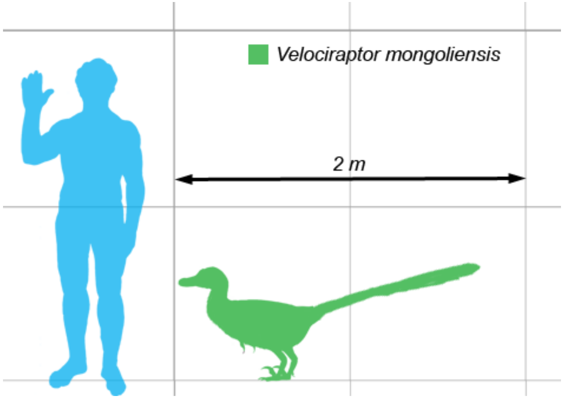
Ha az $m_2$ tömeg nagyobb → nagyobb $k_2$, kisebb amplitúdó, de nagyobb önsúly!

# Dinamikus rezgéscsillapítás - példák

Taipei 101 torony



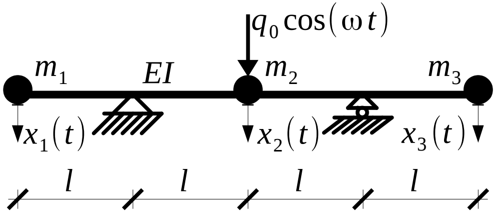

Futó állatok




Forrás:
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Taipei_101_Tuned_Mass_Damper.png
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gepardjagt1_(Acinonyx_jubatus).jpg
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Vraptor-scale.png

# Megoldás modálanalízissel – példa

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$




Számítsuk ki $\boldsymbol{x}_{g0}$-t, ha

$EI=5600\,\mathrm{kNm}^2, l=2{,}4\,\mathrm{m}$,

$m_1=m_3=2{,}5\,\mathrm{t}, m_2=2m_1$

$q_0=15\,\mathrm{kN/m}, \omega=15{,}59\,\mathrm{rad/s}$

A tömegmátrix:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2{,}5&0&0\\0&5&0\\0&0&2{,}5\end{bmatrix}\mathrm{t}$$

A hajlékonysági mátrix:

$$\boldsymbol{F}=\frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix}1&-1/4&1/3\\-1/4&1/6&-1/4\\1/3&-1/4&1\end{bmatrix}$$

A tehervektor amplitúdója:

$$\boldsymbol{q}_0=\begin{bmatrix}0\\15\\0\end{bmatrix}\mathrm{kN}$$

A merevségi mátrix:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}651&1042&43{,}4\\1042&5556&1042\\43{,}4&1042&651\end{bmatrix}\mathrm{kN/m}$$

A sajátkörfrekvenciák:

$\omega_{0,1}=10{,}26\,\mathrm{rad/s}, \omega_{0,2}=15{,}59\,\mathrm{rad/s}, \omega_{0,3}=35{,}83\,\mathrm{rad/s}$

A tömegmátrixra normált sajátvektorok:

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-0{,}413\\0{,}171\\-0{,}413\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-0{,}447\\0{,}000\\0{,}447\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0{,}171\\0{,}413\\0{,}171\end{bmatrix}$$

A tehervektor vetülete a rezgésalakokra:

$\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{q}_0=2{,}567, \quad \boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{q}_0=0, \quad \boldsymbol{v}_3^T\boldsymbol{q}_0=6{,}198$

(az összegzésben csak $i=1$ és $i=3$ számít)

A modális amplitúdók:

$$y_{g0,1}=2{,}567\frac{1}{10{,}26^2}\frac{1}{1-\frac{15{,}59^2}{10{,}26^2}}=-0{,}01863$$

$$y_{g0,3}=6{,}198\frac{1}{35{,}83^2}\frac{1}{1-\frac{15{,}59^2}{35{,}83^2}}=0{,}00596$$

$$\boldsymbol{x}_{g0}=\begin{bmatrix}-0{,}413\\0{,}171\\-0{,}413\end{bmatrix}\cdot(-0{,}01863)+\begin{bmatrix}0{,}171\\0{,}413\\0{,}171\end{bmatrix}\cdot(0{,}00596)=\begin{bmatrix}0{,}00871\\-0{,}00072\\0{,}00871\end{bmatrix}\mathrm{m}$$

Megj.: bár $\omega=\omega_{0,2}$, de a rezonáns alak nem volt gerjesztve.

A kapott eredmény megoldása a $(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}_{g0}=\boldsymbol{q}_0$ egyenletnek.

# Általános erővel való gerjesztés - modálanalízis

Mátrix-differenciálegyenlet: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{q}(t)$

Az elmozdulásfüggvény a tömegmátrixra normált sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)$ ahol $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots\boldsymbol{v}_N]$ a sajátvektorok mátrixa

$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)$ $\boldsymbol{y}(t)$ az $y_j(t)$ modális koordinátákból képzett vektor

Így a DE: $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{q}(t)$

Szorozzuk be mindkét oldalt belről $\boldsymbol{V}^T$-vel:

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{q}(t)$$

A sajátvektorok ortogonalitása miatt a hármas mátrixszorzatok diagonálmátrixok és a tömegmátrixra normálás miatt:

$$\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}=\boldsymbol{E}\,,\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Omega}^2$$

Amiből a DE átírható

$\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{f}(t)$ ahol $f_j(t)=\boldsymbol{v}_j^T\,\boldsymbol{q}(t)$ a teher modális vetülete

A diagonálmátrixok miatt a differenciálegyenlet-rendszer szétesik, a $j$-edik sorból:

$$\ddot{y}_j+\omega_{0,j}^2\,y_j(t)=f_j(t)$$

Ez egy $m\,\ddot{x}(t)+k\,x(t)=q(t)$ egyenlet, ahol $m=1, k=\omega_{0,j}^{2,}\ldots$

Az egyszabadságfokú rendszereknél tanultak szerint oldandó meg $y_j(t)$-re.

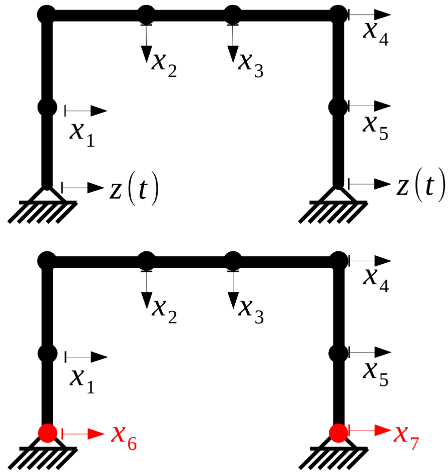
Végül a modális megoldásokból kapható a gerjesztésre adott válasz: $\boldsymbol{x}(t)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{v}_j\cdot y_j(t)$

# Támaszrezgés – I.

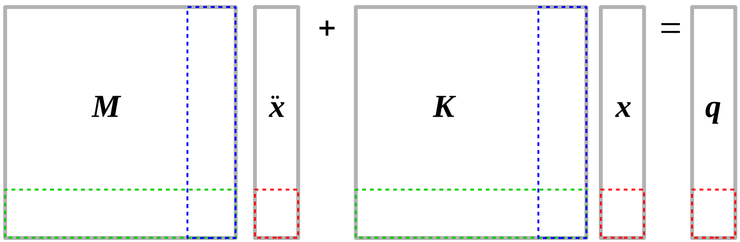
Egyszabadságfokú rendszereknél láttuk, hogy a támaszrezgés is egy gerjesztésként kezelhető.

Hogyan számítható a tehervektor a támasz mozgásából?

Eddig elhanyagolhattuk a diszkretizálás miatt a támaszokba kerülő tömegeket, mert a föld úgysem mozog. És mégis. → *Külső* szabadságfokok.



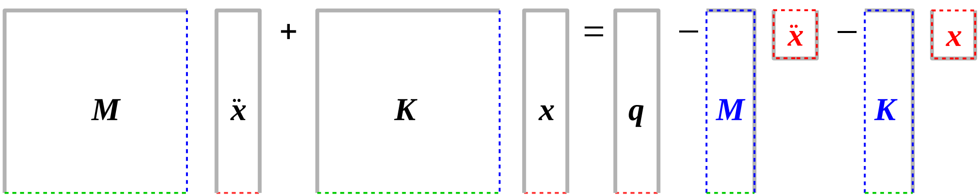

A kiegészített rendszer mozgásegyenletének sémája:




¤ $\boldsymbol{q}$ utolsó soraiban a reakciók vannak → $\boldsymbol{x}$ és $\ddot{\boldsymbol{x}}$ ismeretében utólag számíthatók az utolsó sorokból.

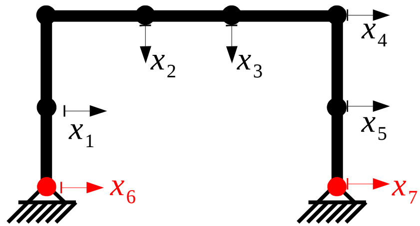
Ha nincs támaszmozgás: $\boldsymbol{x}$ és $\ddot{\boldsymbol{x}}$ utolsó soraiban nullák vannak → $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{K}$ utolsó oszlopai nem csinálnak semmit

Ha van támaszmozgás: $\boldsymbol{x}$ és $\ddot{\boldsymbol{x}}$ utolsó sorai ismertek → $\boldsymbol{M}$ és $\boldsymbol{K}$ utolsó oszlopaival szorozva átvihetők a jobb oldalra



# Támaszrezgés – II.

Tegyük fel, hogy az összes támasz azonos irányba mozog az azonos $z(t)$ függvény szerint, és más teher nincs.




Ekkor az elmozdulások vektora két részre bontható:

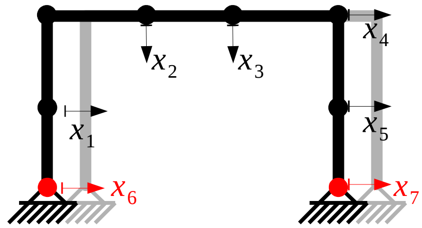
$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_m(t)+\boldsymbol{u}(t)$$

ahol: $\boldsymbol{x}_m(t)$: a merevtest-szerű elmozdulás

$\boldsymbol{u}(t)$: az alakváltozásokat okozó elmozdulás (amiből az igénybevételek lesznek)

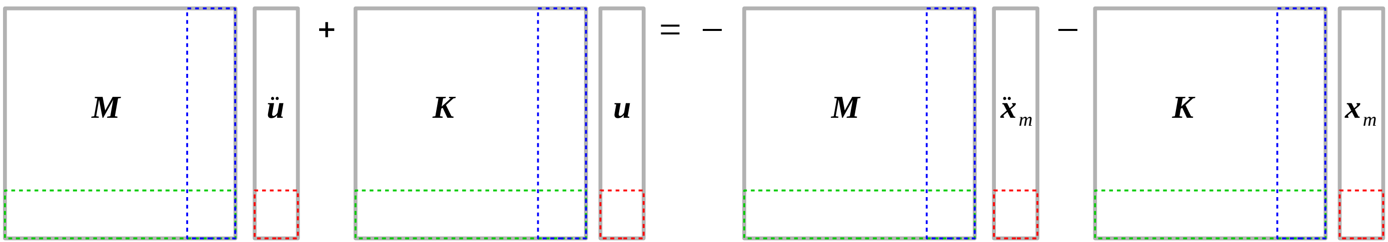
A merevtest-szerű elmozdulást állítsuk elő $\boldsymbol{x}_m(t)=z(t)\boldsymbol{i}$ alakban, ahol az $\boldsymbol{i}$ mutató vektor azt jelzi, hogy a támaszok egységnyi statikus elmozdítása a támaszmozgás irányába mekkora elmozdulást okoz az egyes szabadságfokokban.

Példánkban: $\boldsymbol{i}^T=[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$



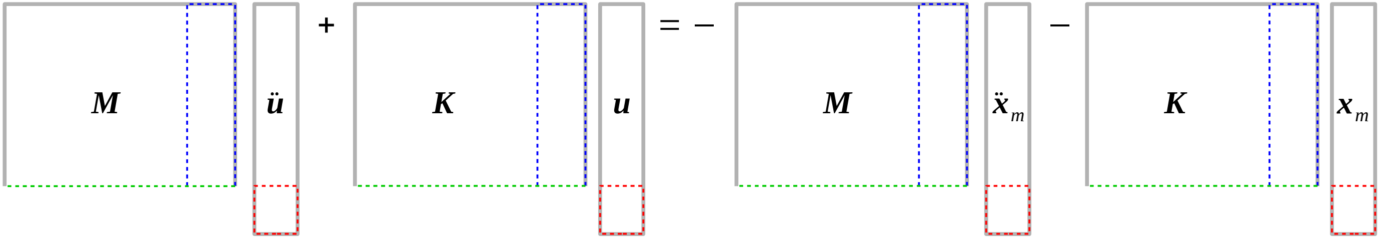

A mutató vektor időfüggetlen, így: $\ddot{\boldsymbol{x}}_m(t)=\ddot{z}(t)\boldsymbol{i}$

A mozgásegyenlet sémája az ismeretlenek egy oldalra rendezése után:

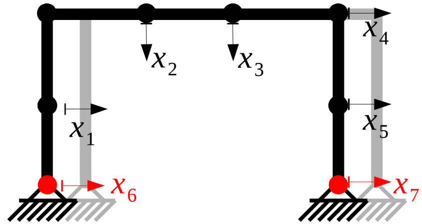



Az utolsó sorok most is a reakciók számítására szolgálnak.

# Támaszrezgés – III.

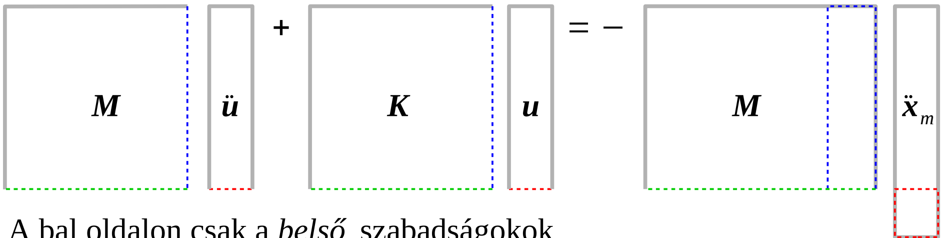



A támaszok elmozdulását a merevtest-szerű mozgás tartalmazza, az $\boldsymbol{u}(t)$ vektorban a külső szabadságfokok helyén nulla lesz.




A merevtest-szerű mozgásból nem keletkeznek alakváltozások, így igénybevételek sem ➔ a $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}_m$ szorzat nullvektor lesz.

Ami marad:



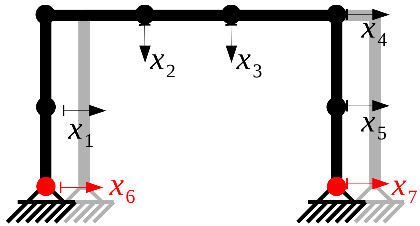

A bal oldalon csak a *belső* szabadságokok

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}}_m(t)=-\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{i}\,\ddot{z}(t)$$

Vezessük be az $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{i}$ vektort. (és ne hagyjuk ki a *külső* szf.-okat)

Az azonos támaszmozgással gerjesztett többszabadságfokú rendszer mátrix-differenciálegyenlete az alakváltozásokra: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$

# Támaszrezgés – harmonikus támaszmozgás




Támaszrezgés esetén az alakváltozásokra vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\ddot{z}(t)$$

Ahol $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{i}$, (a tömegmátrixot kiegészítjük a *külső* szabadságfokokkal is)
és az $\boldsymbol{i}$ mutatóvektor adja meg a támaszok egységnyi mozgása esetén
az összes szf. merevtestszerű elmozdulását.

Ha pl. a támaszok azonos mozgása azonos *harmonikus* függvény szerinti: $z(t)=z_0\cos(\omega t)$

akkor az egyenlet jobb oldala: $\boldsymbol{m}\omega^2 z_0\cos(\omega t)$

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{m}\omega^2 z_0\cos(\omega t)$$

A modálanalízises megoldás szerint:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

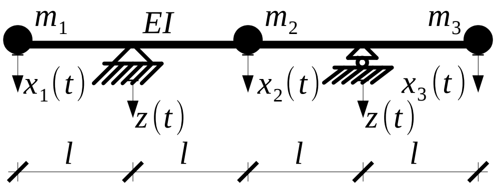
$$\boldsymbol{x}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{q}_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

A direkt megoldással:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{m}\omega^2 z_0\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{x}_g(t)=\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)^{-1}\boldsymbol{q}_0\cos(\omega t)$$

# Támaszrezgés – harmonikus támaszmozgás példa I.




Számítsuk ki a maximális igénybevételeket az önsúlyból és az állandósult rezgésből, ha $z(t)=2\cdot\cos(20t)$[cm], és

$EI=5600\,\mathrm{kNm}^2, l=2{,}4\,\mathrm{m}$,

$m_1=m_3=2{,}5\,\mathrm{t}, m_2=2m_1$

A tömegmátrix:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2{,}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2{,}5\end{bmatrix}\mathrm{t}$$

A merevségi mátrix:

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}651 & 1042 & 43{,}4\\ 1042 & 5556 & 1042\\ 43{,}4 & 1042 & 651\end{bmatrix}\mathrm{kN/m}$$

A sajátkörfrekvenciák:

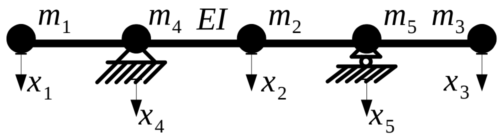
$\omega_{0,1}=10{,}26\,\mathrm{rad/s}, \omega_{0,2}=15{,}59\,\mathrm{rad/s}, \omega_{0,3}=35{,}83\,\mathrm{rad/s}$

A tömegmátrixra normált sajátvektorok:

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-0{,}413\\ 0{,}171\\ -0{,}413\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-0{,}447\\ 0{,}000\\ 0{,}447\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0{,}171\\ 0{,}413\\ 0{,}171\end{bmatrix}$$

A tehervektor: $\boldsymbol{q}(t)=-\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{i}\,\ddot{z}(t)$

A külső szabadságfokokkal kiegészített szerkzet:




A tömegmátrix figyelembe veendő sorai:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2{,}5 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathrm{t}$$

A mutatóvektor: $\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

A támaszrezgés irányába mozgó tömegekből a szabadságfokok terhe:

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}2{,}5\\ 5\\ 2{,}5\end{bmatrix}\mathrm{t}$$

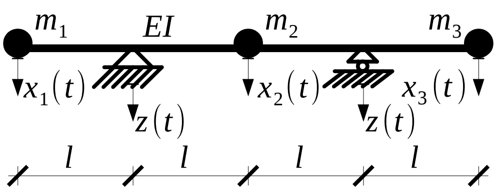
A direkt megoldásból:

$$\boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix}651-20^2\,2{,}5 & 1042 & 43{,}4\\ 1042 & 5556-20^2\,5 & 1042\\ 43{,}4 & 1042 & 651-20^2\,2{,}5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2{,}5\\ 5\\ 2{,}5\end{bmatrix}\cdot 20^2\cdot 0{,}02$$

$$\boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix}-0{,}00904\\ 0{,}0165\\ -0{,}00904\end{bmatrix}$$

HF: $\boldsymbol{u}_g(t)$ modálanalízissel

# Támaszrezgés – harmonikus támaszmozgás példa II.



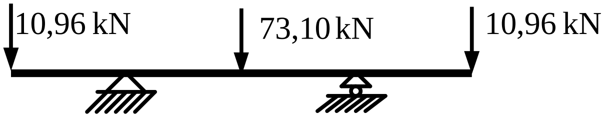

Számítsuk ki a maximális igénybevételeket az önsúlyból és az állandósult rezgésből, ha
$z(t)=2\cdot\cos(20t)$[cm], és
$EI=5600\,\text{kNm}^2, l=2{,}4\,\text{m}$,
$m_1=m_3=2{,}5\,\text{t}, m_2=2m_1$

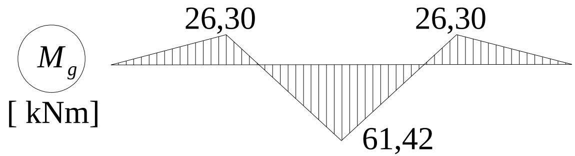
$$\boldsymbol{u}_g(t)=\boldsymbol{u}_{g0}\cos(\omega t)=\begin{bmatrix}-0{,}00904\\0{,}0165\\-0{,}00904\end{bmatrix}\cos(20t)$$

Hogyan lesz az elmozdulásból igénybevétel?

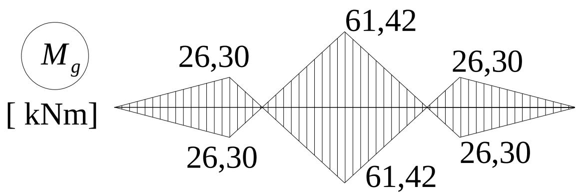
Az $\boldsymbol{u}_{g0}$ amplitúdót létrehozó statikus erők:

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix}10{,}96\\73{,}10\\10{,}96\end{bmatrix}\text{kN}$$

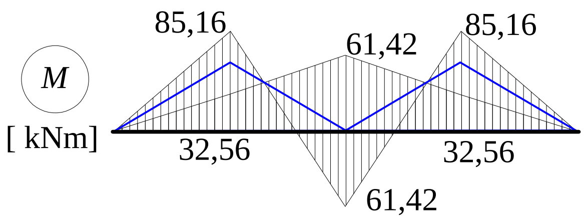


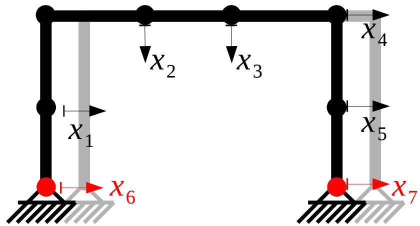

Az állandósult rezgés $\cos(20t)$ tagja miatt ez $+1$-gyel és $-1$-gyel is szorzódhat:




Az $m_i g$ önsúlyok miatti nyomatéki ábrához hozzáadva:



# Támaszrezgés – általános támaszmozgás I.




Támaszrezgés esetén az alakváltozásokra vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

Megoldás modálanalízissel:

Már megoldottuk az általánosított sajátértékfeladatot, azaz ismertek a sajátkörfrekvenciák $(\omega_{0,i})$ és a tömegmátrixra normált sajátvektorok $(\boldsymbol{v}_i)$.

Keressük az $\boldsymbol{u}_g(t)$ megoldást a sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,y_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)$$

ahol $y_{g,i}(t)$ az $i$-edik modális koordináta (gerjesztés miatti)

Mivel a sajátvektorok időfüggetlenek, így az idő szerinti második derivált:

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,\ddot{y}_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)$$

Behelyettesítve a mátrix-differenciálegyenletbe: $\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$

Szorozzuk be mindkét oldalt balról $\boldsymbol{V}^T$-vel: $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{V}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$

A sajátvektorok ortogonalitása és normálása miatt: $\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$

# Támaszrezgés – általános támaszmozgás II.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t)+\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}(t)=-\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\,y_{g,i}(t)=\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{y}_g(t)$$

$$\boldsymbol{E}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_g(t)+\boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{y}_g(t)=-\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$$

Ennek az $i$-edik sorában: $\ddot{y}_{g,i}(t)+\omega_{0,i}^2\,y_{g,i}(t)=f_i(t)$

ahol $f_i=-\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(t)$
a teher vetülete a rezgésalakra

A differenciálegyenlet-rendszer *szétesik*
$N$ darab közönséges differenciálegyenletté.

$\Gamma_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}$ a tömeg vetülete a rezgésalakra.
(modális részvétel}

Egy egységnyi tömegű $(m=1)$, $\omega_{0,i}^2$ merevségű $\left(k=\omega_{0,i}^2\right)$ egyszabadságfokú rendszer differenciálegyenlete, amit az $f_i(t)$ erő gerjeszt.

Duhamel-integrál:

$$x(t)=\int_0^t\frac{q(\tau)}{m\cdot\omega_0}\cdot\sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau$$

Az egyszabadságfokú rendszereknél tanultak szerint:

$$y_{g,i}(t)=\int_0^t\frac{-\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)d\tau=-\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\int_0^t\frac{\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)d\tau$$

Így a teljes megoldás:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\int_0^t\frac{\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}}\sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right)d\tau$$

Másodlagos mennyiségek szintén időfüggően számíthatók.

# Támaszrezgés – általános támaszmozgás, válaszspektrum I.

Az $i$-edik sajátrezgésmód válasza: $y_{g,i}(t) = -\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m} \int_0^t \frac{\ddot{z}(\tau)}{\omega_{0,i}} \sin\left(\omega_{0,i}(t-\tau)\right) \mathrm{d}\,\tau$

A szélsőértéket az integrálkifejezés maximuma befolyásolja.
Egy előírt teher esetén ez a sajátkörfrekvencia-függő szélsőérték a válaszspektrum.

Ha a támaszmozgás tervezési válaszspektrumként van megadva (pl. $S_d(T_{0,i})$ pszeudo-gyorsulás tervezési válaszspektrumként), akkor az $i$-edik mód maximális kitérése:

$$y_{g,i}^{max} = \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m} \frac{S_d(T_{0,i})}{\omega_{0,i}^2}$$

A pszeudogyorsulásból elmozdulás válaszspektrumot kell számolunk.
Az előjelre $\pm$-ként kell majd a végén gondolnunk.

Az $i$-edik módból származó legnagyobb elmozdulások: $\boldsymbol{u}_g^{i,max} = \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m} \frac{S_d(T_{0,i})}{\omega_{0,i}^2}$

Az ekkora elmozdulást okozó *helyettesítő statikus erők* a aszabadságfokokon:

$$\boldsymbol{f}_g^{i,max} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_g^{i,max} = \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m} \frac{S_d(T_{0,i})}{\omega_{0,i}^2}$$

Vegyük észre, hogy:

mivel $\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_i = \omega_{0,i}^2 \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i$, így a helyettesítő statikus erő: $\boldsymbol{f}_g^{i,max} = \omega_{0,i}^2 \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m} \frac{S_d(T_{0,i})}{\omega_{0,i}^2} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m} S_d(T_{0,i})$

A bevezetett modális részvétellel $\left(\Gamma_i = \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m}\right)$:

$$\boldsymbol{f}_g^{i,max} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i \Gamma_i S_d(T_{0,i})$$

# Támaszrezgés – általános támaszmozgás, válaszspektrum II.

Az $\boldsymbol{f}_g^{i,max} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i\,S_d(T_{0,i})$ teherből statikus módon számított igénybevétel lehet pozitív, vagy negatív előjelű.

Az összes rezgésalakhoz számíthatunk helyettesítő statikus terhet, abból pedig modális igénybevétel-szélsőértékeket ( $C^{i,max}$ ). Hogyan összegezhetjük az egyes rezgésmódokban számított maximumokat? Pár lehetőség:

$ABSSUM -$ Az abszolútértékek összege: $C^{max} = \sum_i^N |C^{i,max}|$

Felső határ, csak akkor igaz, ha elég hosszú ideig tart a rezgés ahhoz, hogy az *összes* mód maximuma *egyszerre* lépjen fel. (Ez tipikusan valószínűtlen → nem gazdaságos.)

$SRSS -$ A négyzetösszeg négyzetgyöke: $C^{max} = \sqrt{\sum_i^N C^{i,max2}}$

A nagyobb igénybevételek hatása nagyobb, de korlátozottan használható, csak egymástól távoli sajátkörfrekvenciák esetén.

$CQC -$ Teljes négyzetes kombináció: $C^{max} = \sqrt{\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{\rho}\, \boldsymbol{C}}$
A csillapítás hatását is figyelembe veszi.
Csillapítatlan esetben $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{E}$ és azonos $SRSS$-sel.

# Többszabadságfokú rendszer szabadrezgése – diszkretizálás hatása III.

Hány szabadságfok elég? (szempontok)

¤ Attól függ.

¤ A legmagasabb sajátkörfrekvencia képes legyen *időben követni* a terhet.

¤ Támaszrezgésnél a modális részvételekből elegendő* tömeg jelenjen meg a számításban.

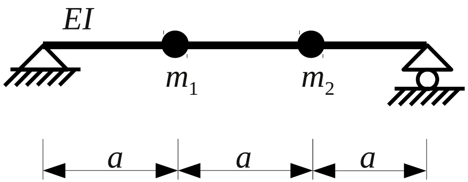
A modális tömeg: $m_i = \Gamma_i^2$

*: a szabványok előírják, hogy a teljes tömeg 90-95-98%-a

$$m_i = (\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{m})^2 = (\boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{i})^2 = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{i}$$

A számításban figyelembe vett *hatékony* tömeg: $m_{eff} = \sum m_i = \boldsymbol{i}^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{V}\, \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{i}$

# Válaszspektrum – példa




$a=2{,}0\,\mathrm{m}\,,\, m_1=1{,}2\,\mathrm{t}\,,\, m_2=2{,}0\,\mathrm{t}\,,\, EI=1250\,\mathrm{kNm}^2$

$M^b_{max}=?$, $M^j_{max}=?$, ha a teher $S_d=\begin{cases} 1+15\cdot T_0\ [\mathrm{m/s^2}] & \text{ha } T_0<0{,}10\,\mathrm{s} \\ 2{,}5\ [\mathrm{m/s^2}] & \text{ha } 0{,}10\,\mathrm{s}<T_0<0{,}5\,\mathrm{s} \\ \dfrac{1{,}25}{T_0}\ [\mathrm{m/s^2}] & \text{ha } 0{,}5\,\mathrm{s}<T_0<2{,}5\,\mathrm{s} \\ \dfrac{3{,}125}{T_0^2}\ [\mathrm{m/s^2}] & \text{ha } 2{,}5\,\mathrm{s}<T_0 \end{cases}$

---

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1{,}2 & 0\\ 0 & 2{,}0\end{bmatrix}\mathrm{t} \qquad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}2{,}844\cdot10^{-3} & 2{,}489\cdot10^{-3}\\ 2{,}489\cdot10^{-3} & 2{,}844\cdot10^{-3}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K}=\boldsymbol{F}^{-1}=\begin{bmatrix}1500 & -1313\\ -1313 & 1500\end{bmatrix}\mathrm{kN/m}$$

*ÁSÉF* megoldása: $\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}10{,}80 & 0\\ 0 & 43{,}40\end{bmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{V}=\begin{array}{c} \quad\ \boldsymbol{v}_1 \qquad\qquad \boldsymbol{v}_2 \\ \begin{bmatrix}-0{,}54657 & -0{,}73116\\ -0{,}56635 & 0{,}42337\end{bmatrix}\end{array}$

Rezgésmódonként a helyettesítő statikus teher: $\boldsymbol{f}_g^{i,max}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i\,S_d\left(T_{0,i}\right)$

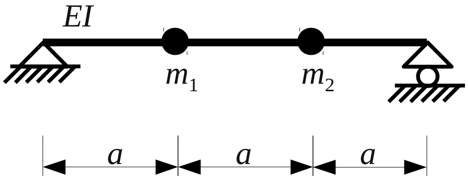
$$T_{0,1}=\frac{2\pi}{\omega_{0,1}}=0{,}5817\,\mathrm{s}\rightarrow S_{d,1}=2{,}149\,\mathrm{m/s^2}$$

$$T_{0,2}=\frac{2\pi}{\omega_{0,2}}=0{,}1448\,\mathrm{s}\rightarrow S_{d,2}=2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$$

$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}1{,}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2{,}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}2\\2{,}0\end{bmatrix}$$

# Válaszspektrum – példa

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1{,}2 & 0\\ 0 & 2{,}0\end{bmatrix}\text{t} \qquad \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}-0{,}54657 & -0{,}73116\\ -0{,}56635 & 0{,}42337\end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} S_{d,1}=2{,}149\,\text{m/s}^2\\ S_{d,2}=2{,}5\,\text{m/s}^2\end{array}$$




Rezgésmódonként a helyettesítő statikus teher:

$$\boldsymbol{f}_g^{i,max}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_i\,\Gamma_i\,S_d\left(T_{0,i}\right)$$

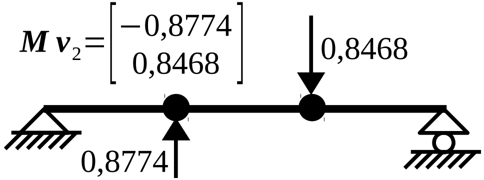
$$\boldsymbol{m}=\begin{bmatrix}1{,}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2{,}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}2\\2{,}0\end{bmatrix}$$

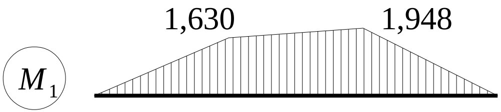
$$\Gamma_1=\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{m}=-0{,}54657\cdot 1{,}2-0{,}56635\cdot 2{,}0=-1{,}789$$

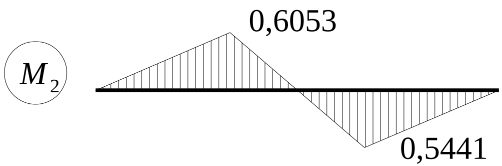
$$\Gamma_2=\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{m}=-0{,}73116\cdot 1{,}2+0{,}42337\cdot 2{,}0=-0{,}0306$$

$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-0{,}6559\\ -1{,}133\end{bmatrix}$$


$$\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-0{,}8774\\ 0{,}8468\end{bmatrix}$$




$$M_1^b=-1{,}630\cdot\left(-1{,}789\right)\cdot 2{,}149=6{,}267\,\text{kNm}$$

$$M_1^j=-1{,}948\cdot\left(-1{,}789\right)\cdot 2{,}149=7{,}489\,\text{kNm}$$

$$M_2^b=-0{,}6053\cdot\left(-0{,}0306\right)\cdot 2{,}5=0{,}046\,\text{kNm}$$

$$M_2^j=0{,}5441\cdot\left(-0{,}0306\right)\cdot 2{,}5=-0{,}042\,\text{kNm}$$

Összegzés:

a $b$ keresztmetszetben:

$$M_b^{ABSSUM}=6{,}267+0{,}046=6{,}313\,\text{kNm}$$

$$M_b^{SRSS}=\sqrt{6{,}267^2+0{,}046^2}=6{,}267\,\text{kNm}$$

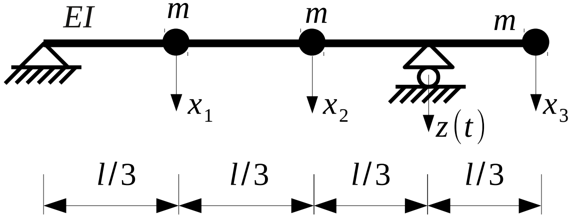
a $j$ keresztmetszetben:

$$M_j^{ABSSUM}=7{,}489+0{,}042=7{,}531\,\text{kNm}$$

$$M_j^{SRSS}=\sqrt{7{,}489^2+0{,}042^2}=7{,}489\,\text{kNm}$$

# Támaszrezgés – példa I.

Kéttámaszú gerenda, túlnyúló konzollal.
Számítsuk ki a konzolvég rezgésének amplitúdóját, ha $z(t)=0{,}04\cos(20t)$ [cm]!
$l=6$ m támaszköz, $EI=5000\,\mathrm{kNm}^2$ hajlítómerevség, $m=2$ t redukált tömegek.



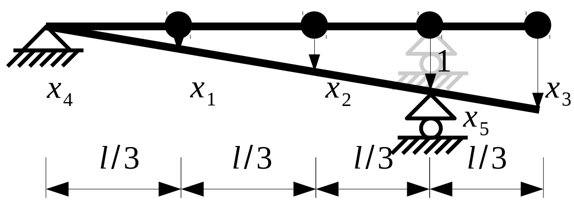

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}6161 & -5893 & -401{,}8\\ -5893 & 8571 & 1607\\ -401{,}8 & 1607 & 1004\end{bmatrix}\mathrm{kN/m} \qquad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}\mathrm{t}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0{,}270 & 0{,}483 & 0{,}440\\ 0{,}306 & 0{,}327 & -0{,}547\\ -0{,}577 & 0{,}399 & -0{,}084\end{bmatrix}$$

$\omega_{0,1}=13{,}05\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_{0,2}=30{,}30\,\mathrm{rad/s}$, $\omega_{0,3}=82{,}34\,\mathrm{rad/s}$

Modálanalízissel megoldva:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

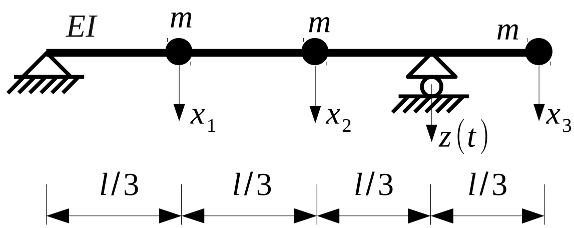



Az $\boldsymbol{m}$ vektorhoz a kiegészített merevségi mátrixot kell szorozni a mutató vektorral:

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3\\ 2/3\\ 4/3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3\\ 4/3\\ 8/3\end{bmatrix}$$

# Támaszrezgés – példa II.

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0{,}270 & 0{,}483 & 0{,}440\\ 0{,}306 & 0{,}327 & -0{,}547\\ -0{,}577 & 0{,}399 & -0{,}084\end{bmatrix}$$




| $i$ | $\Gamma_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}$ | $\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$ | $\Gamma_i\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $-0{,}9517$ | $-4{,}352\cdot 10^{-3}$ | $0{,}06627$ |
| 2 | $1{,}824$ | $1{,}931\cdot 10^{-3}$ | $0{,}05635$ |
| 3 | $-0{,}6601$ | $0{,}157\cdot 10^{-3}$ | $-0{,}00166$ |

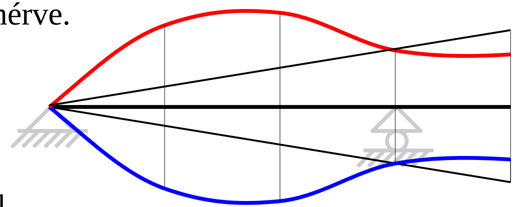
$$\omega_{0,1}=13{,}05\,\mathrm{rad/s}\,,\ \omega_{0,2}=30{,}30\,\mathrm{rad/s}\,,\ \omega_{0,3}=82{,}34\,\mathrm{rad/s}$$

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\left(0{,}06627\cdot\begin{bmatrix}0{,}270\\0{,}306\\-0{,}577\end{bmatrix}+0{,}05635\cdot\begin{bmatrix}0{,}483\\0{,}327\\0{,}399\end{bmatrix}-0{,}00166\cdot\begin{bmatrix}0{,}440\\-0{,}547\\-0{,}084\end{bmatrix}\right)\cos(20t)=\begin{bmatrix}0{,}0444\\0{,}0396\\-0{,}0156\end{bmatrix}\cos(20t)$$

Ez a rugalmas alakváltozások vektora a merevtestszerű mozgáshoz képest mérve.
A mozdulatlan koordinátarendszerben:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{i}\,z(t)+\boldsymbol{u}_g(t)$$



$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\4/3\end{bmatrix}0{,}04\cos(20t)+\begin{bmatrix}0{,}0444\\0{,}0396\\-0{,}0156\end{bmatrix}\cos(20t)=\begin{bmatrix}0{,}0577\\0{,}0663\\0{,}0377\end{bmatrix}\cos(\omega t)[\mathrm{cm}]$$

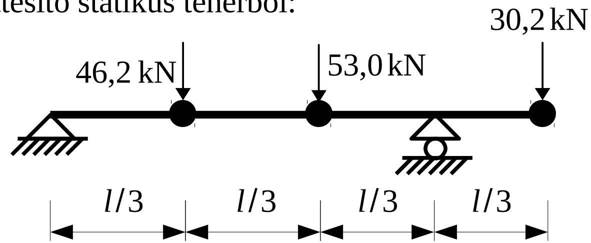
# Támaszrezgés – példa III.

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix} 0{,}270 & 0{,}483 & 0{,}440 \\ 0{,}306 & 0{,}327 & -0{,}547 \\ -0{,}577 & 0{,}399 & -0{,}084 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix} 0{,}0444 \\ 0{,}0396 \\ -0{,}0156 \end{bmatrix}$$

Igénybevételek számítása

¤ A legnagyobb elmozdulásokkal azonos elmozdulást okozó helyettesítő statikus teherből:

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}_{g0}=\begin{bmatrix} 6161 & -5893 & -401{,}8 \\ -5893 & 8571 & 1607 \\ -401{,}8 & 1607 & 1004 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}0444 \\ 0{,}0396 \\ -0{,}0156 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 46{,}2 \\ 53{,}0 \\ 30{,}2 \end{bmatrix}\text{kN}$$




¤ A rezgésalakok igénybevételeiből az összegzésnek megfelelő tényezőkkel képzett kombinációban:

$$\boldsymbol{u}_g(t)=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}\,\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}\cos(\omega t)$$

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 91{,}9 \\ 104{,}2 \\ -196{,}6 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 887 \\ 601 \\ 733 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 5970 \\ -7420 \\ -1140 \end{bmatrix}$$

| $i$ | $\Gamma_i=\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{m}$ | $\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$ | $\Gamma_i\omega^2 z_0\frac{1}{\omega_{0,i}^2}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0,i}^2}}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | −0,9517 | $-4{,}352\cdot 10^{-3}$ | 0,06627 |
| 2 | 1,824 | $1{,}931\cdot 10^{-3}$ | 0,05635 |
| 3 | −0,6601 | $0{,}157\cdot 10^{-3}$ | −0,00166 |

Pl.: a jobb oldali támasz fölötti hajlítónyomaték az egyes módokból:

$M_1=-2\cdot(-196{,}6)=393$

$M_2=-2\cdot(733)=-1470$

$M_3=-2\cdot(-1140)=+2280$

A kombináció: $393\cdot 0{,}06627-1470\cdot 0{,}05635+2280\cdot(-0{,}00166)=-60{,}6\,\text{kNm}$,

de lehet $60{,}6\,\text{kNm}$, ha $\cos(\omega t)=-1$

Tehát itt nem az abszolútértékek összege!

# Összefoglalás

*tszf . rendszer mátrixai*

*szabadrezgés*

*ált . sajátértékfeladat megoldása*

*gerjesztett rezgés*

*direkt megoldás*

*modálanalízis*

*támaszrezgés*

*válaszspektrum használata*