9. gyakorlat: Számpéldák az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése témaköréből

A gyakorlathoz szükséges felszerelés hallgatónként:

1 db tudományos zsebszámológép

A gyakorlat tartalma:

Az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése különböző, valamint egyenlő súlyú mérési eredmények esetén. A példák megoldása során lehetőleg használjuk a zsebszámológép statisztikai funkcióit.

A súly és a középhiba összefüggése:

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} = m_2^2 : m_1^2 \qquad m_1 : m_1 = \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}} = \sqrt{p_2} : \sqrt{p_1}$$

Az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése:

Sorszám	A számítás lépései és jelölésük	Különböző súlyok	Azonos (egységnyi) súlyok
1.	kiegyenlített érték $\hat{L}$; $\bar{L}$ (azonos súlyok)	$\hat{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i L_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$	$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i}{n}$
2.	kiegyenlített érték súlya $p_{\hat{L}}$; $p_{\bar{L}}$ (azonos súlyok)	$p_{\hat{L}} = \sum_{i=1}^{n} p_i$	$p_{\bar{L}} = \sum_{i=1}^{n} p_i = n$
3.	javítások v_i ellenőrzés: a számítás élességén belül	$v_i = \hat{L} - L_i$ $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i = 0$	$v_i = \bar{L} - L_i$ $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$
4.	súlyegység középhibája $\bar{\mu}$	$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{n-1}}$	$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$
5.	kiegyenlített érték középhibája $m_{\hat{L}}$; $m_{\bar{L}}$ (azonos súlyok)	$m_{\hat{L}} = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_{\hat{L}}}}$	$m_{\bar{L}} = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_{\bar{L}}}}$
6.	az egyes mérési eredmények középhibája m_i	$m_i = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_i}}$	$m_i = \bar{\mu}$

A gyakorlat előtt elolvasásra javasolt irodalom:

Krauter: Geodézia (15-35. oldal)

A gyakorlathoz kapcsolódó számpéldák:

1. példa

A súly és a középhiba összefüggése

$m_1 = \pm 1{,}9cm \qquad m_2 = \pm 3{,}3cm$

$p_1 = ? \qquad p_2 = ?$

Legyen: $p_2=1$, ugyanis $m_2 > m_1$, így p_1 egynél nagyobb szám lesz, egyszerűbb lesz a későbbi számolás.

$p_1 : 1 = 3{,}3^2 : 1{,}9^2 = 3{,}02 \approx 3cm^{-2}$, vagyis $p_1 = 3cm^{-2} \qquad p_2 = 1cm^{-2}$

2. példa

Két alappont távolságát két különböző távmérőműszerrel határoztuk meg. Az alábbi mérési eredmények, és a középhibák alapján számítsa ki a távolság legvalószínűbb értékét és annak középhibáját.

L_i [m]	m_i [mm]	L_i' [mm]	p_i [mm^{-2}]	$p_i L_i$ [mm^{-1}]	v_i [mm]	$p_i \cdot v_i$ [mm^{-1}]	$p_i \cdot v_i^2$ [-]
316,343	3	**43**	25	**1075**	**-1,74**	**-43,88**	**75,28**
316,339	3	**39**	25	**975**	**+2,26**	**+56,62**	**128,22**
316,348	5	**48**	9	**432**	**-6,74**	**-60,62**	**408,28**
316,336	5	**36**	9	**324**	**+5,26**	**47,38**	**249,45**
$\sum$			**68**	**2806**		**-0,5 ≈ 0**	**861,24**

Az egyszerűbb számítás érdekében a mérési eredményekből csak a megváltozó értékeket – esetünkben a centimétereket és a millimétereket – használjuk.

Az a priori súlyegység középhiba legyen **3×3×5×5=225**, mert így a súlyok egész számok lesznek.

A számítás eredményei:

1. $\hat{L}$ = **316,300+0,04126=316,34126 m**
2. $p_{\hat{L}}$ = **68 mm^{-2}**
3. v_i (a táblázatban), ellenőrzés: **Σ $p_i v_i$ ≈ 0 mm^{-1}**
4. μ = **± 16,94**
5. $m_{\hat{L}}$ = **± 2,05 mm**
6. m_1 = **± 3,39 mm** m_2 = **± 3,39 mm** m_3 = **± 5,65 mm** m_4 = **± 5,65 mm**

Láthatjuk, hogy a kiegyenlített érték középhibája kisebb lett, mint az egyes mérések középhibája.

3. példa

A mérési eredmények azonos súlyúak

L_i [° ' "]	L_i' ["=mp]	v_i [mp^{-1}]	v_i^2 [-]
25-44-15	**15**	**-1,0**	**1,0**
25-44-11	**11**	**+3,0**	**9,0**
25-44-20	**20**	**-6,0**	**36,0**
25-44-10	**10**	**+4,0**	**16,0**
$\sum$	**56**	**0,0**	**62,0**

Az egyszerűbb számítás érdekében a mérési eredményekből csak a megváltozó értékeket – esetünkben a másodperceket – használjuk.

Az számítás eredményei:

1. $\hat{L}$ = **25-44-00 + 14,0" = 25-44-14**
2. $p_{\hat{L}}$ = **4 mp^{-2}**
3. v_i (a táblázatban), ellenőrzés: $\boldsymbol{\Sigma v_i}$ **= 0,0 mp^{-1}**
4. μ = **± 4,5**
5. $m_{\hat{L}}$ = **± 2,2"**
6. $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \mu$ = **± 4,5"**

Láthatjuk, hogy a kiegyenlített érték középhibája kisebb lett, mint az egyes mérések középhibája.

4. példa

Hányszor kell a szöget megmérni, ha azt akarjuk, hogy a középérték középhibája kisebb legyen ±2"-nél?

Egy mérés középhibája: m_{van} = ±4,5"

A középérték szükséges középhibája: m_{kell} = ±2,0"

$$m_{kell} = \frac{m_{van}}{\sqrt{n}}$$

$$n = \frac{m_{van}^2}{m_{kell}^2} = \frac{4{,}5^2}{2{,}0^2} = 5{,}06$$

Vagyis 6-szor kell a szöget megmérnünk.

Minden alkalommal felfelé kell kerekíteni, mert:

$n = 5$ esetén $\overline{m}_{kell} = \dfrac{\overline{m}_{van}}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}5}{\sqrt{5}} = 2{,}01 > 2{,}0$

$n = 6$ esetén $\overline{m}_{kell} = \dfrac{\overline{m}_{van}}{\sqrt{n}} = \dfrac{4{,}5}{\sqrt{6}} = 1{,}84 < 2{,}0$