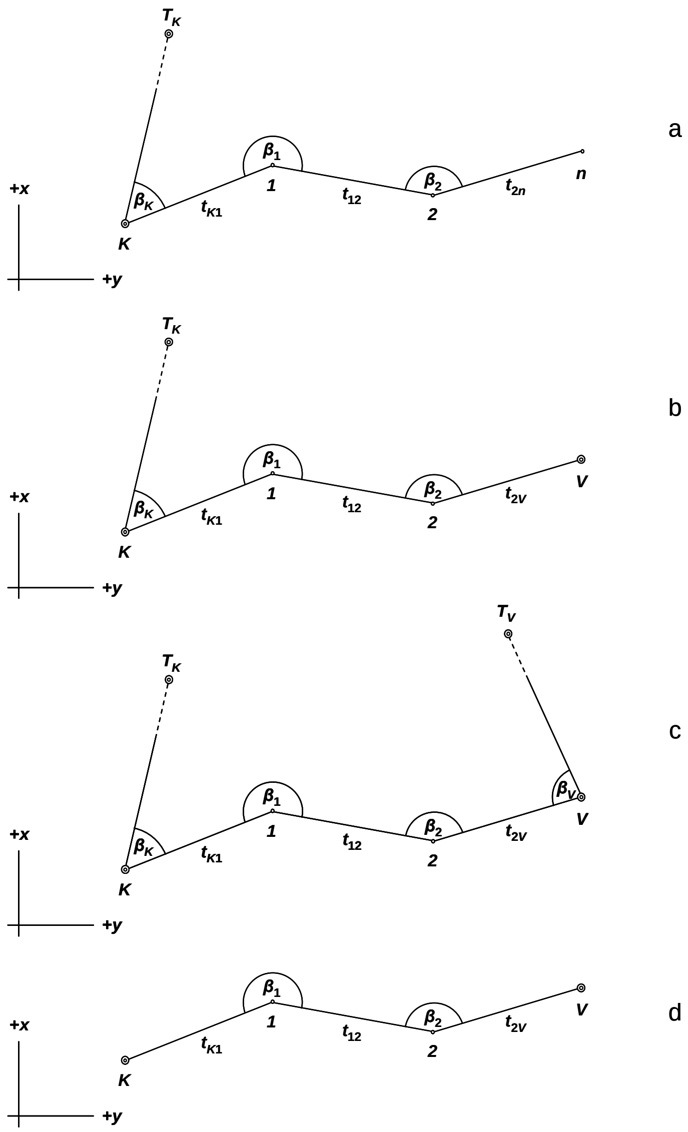
2. előadás: Sokszögelés, sokszögvonal-típusok. Hibakeresés, hossz- és keresztirányú záróhiba.

2.1 A sokszögelés alapgondolata

Határozzuk meg egy új pont koordinátáit úgy, hogy egy közeli ismert ponton megmérjük az új pont irányának legalább egy adott pont irányával bezárt szögét és az új pont távolságát az alapponttól. Az iránysorozat tájékozása után a tájékozott irányértéket irányszögnek tekintve első geodéziai alapfeladattal kiszámíthatjuk az új pont koordinátáit. Ez a **poláris pontmeghatározás**. A meghatározott pontot most már adott pontnak tekintve a pontot megelőző (adott) és követő (új) pontra mutató irányok közötti ún. törésszög megmérése és az új távolság meghatározása után irányszögátvitellel és első geodéziai alapfeladattal a következő új pont koordinátái is kiszámíthatók. A leírtakat akárhányszor megismételhetjük.

Alappontokhoz csatlakozás és tájékozás szempontjából a 2-1. ábra szerint megkülönböztetünk szabad, egyszeresen tájékozott, kettősen tájékozott és beillesztett sokszögvonalat.



2-1. ábra.

Sokszögvonal-típusok: a – kezdőpontján csatlakozó és tájékozott (röviden: szabad), b – mindkét végpontján csatlakozó és kezdőpontján tájékozott (röviden: egyszeresen tájékozott), c – mindkét végpontján csatlakozó és tájékozott (röviden: kettősen tájékozott), d – mindkét végpontján csatlakozó, tájékozás nélküli (röviden: beillesztett) sokszögvonalat.

2.2 A kettősen tájékozott sokszögvonal

Adottak a kezdő- és a végpont koordinátái: K (y_K, x_K), V(y_V, x_V), valamint a tájékozó pontok koordinátái: $T_K\left(y_{T_K}, x_{T_K}\right)$, $T_V\left(y_{T_V}, x_{T_V}\right)$. Megmértünk $n + 2$ darab törésszöget: β_K, β_1, …, β_n, β_V; megmértünk és a vetület síkjára redukáltunk $n + 1$ darab távolságot t_{K1}, t_{12}, …, t_{nV}. Kiszámítandók az n darab sokszögpont koordinátái. A $2n + 3$ mérési eredményből $2n$ koordináta számítandó, tehát 3 fölös mérésünk van, 3 feltétel írható fel. A számítás lépései:

1. A kezdő- és a végponton mért iránysorozat tájékozása: az eredmény δ'_{K1} és δ'_{Vn}.
2. Tekintsük kezdőponti törésszögnek a δ'_{K1}, a végponti törésszögnek pedig a $360° - \delta'_{Vn}$ értéket. Ekkor a kezdőponti törésszög bal oldali és a végponti törésszög jobb oldali szára egyaránt az x tengellyel párhuzamos egyenes, a törésszögek összege tehát 180º egész k számú többszöröse. A mérési hibák és az alappontok kerethibája miatt ez a **szögfeltétel** nem teljesül, **szögzáróhiba** keletkezik: $d\beta = k \cdot 180° - \sum \beta$. Ha a szögzáróhiba abszolút értéke a megadott hibahatárnál nem nagyobb, akor azt egyenlően osztjuk el a törésszögekre. Egy-egy törésszögre jutó javítás tehát $\dfrac{d\beta}{n+2}$.
3. A javított törésszögekkel és az első oldalt követően oldalankénti irányszögátvitellel sorra kiszámítjuk a sokszögoldalak tájékozott irányértékét. Pontos hibaelosztás és hibátlan számítás mellett az utolsó irányszögátvitel eredménye 0º vagy 180º.
4. A két **koordinátafeltétel** szerint a sokszögoldalak y és x irányú vetületösszege a végpont és a kezdőpont y illetve x koordinátakülönbségével egyenlő kell legyen. A mérési hibák és a kerethiba miatt ebben az esetben is záróhiba keletkezik. A $\Delta y_{i,i+1} = t_{i,i+1} \sin \delta'_{i,i+1}$ és $\Delta x_{i,i+1} = t_{i,i+1} \cos \delta'_{i,i+1}$ oldalvetületek kiszámítása és összegzése után a két **vetületi** (koordináta-) **záróhiba**: $dy = (y_V - y_K) - \sum \Delta y$ és $dx = (x_V - x_K) - \sum \Delta x$. Az ún. **lineáris** záróhiba: $d = \sqrt{dy^2 + dx^2}$. Ha a lineáris záróhiba nem nagyobb a megadott hibahatárnál, akkor annak két összetevőjét **az oldalhosszak arányában** osztjuk el az oldalvetületekre. A $\Delta y_{i,i+1}$ és $\Delta x_{i,i+1}$ oldalvetületek javítása: $\dfrac{dy}{\sum t} t_{i,i+1}$ és $\dfrac{dx}{\sum t} t_{i,i+1}$.
5. A kezdőponttól elindulva a javított oldalvetületekkel sorra kiszámítjuk a sokszögpontok koordinátáit. Utolsóként és ellenőrzésül a végpont koordinátáit is kiszámítjuk.

Az **egyszeresen tájékozott sokszögvonal** esetében szögfeltétel nincs, tehát szögzáróhiba sem számítható.

A **beillesztett sokszögvonal** esetében minden oldalhosszat megmértünk ugyan, de a kezdő- és végponton nem végeztünk szögmérést, emiatt mindössze egy a fölös mérések száma. A számítás lépései:

1. Az első oldal (δ'_{K1}) előzetes tájékozott irányértékét önkényesen (rendszerint zérus értékűre) felvesszük.
2. Szabad sokszögvonalként végigszámoljuk a vonalat, kiszámítjuk a V végpont (V) előzetes helyének koordinátáit.
3. Második geodéziai alapfeladattal kiszámítjuk a kezdő- és a végpont közötti szakasz (a záróoldal) irányát és nagyságát mind az előzetes, mind a végleges végpontra. Az eredmények: $\delta_{K(V)}, \delta_{KV}, t_{K(V)}, t_{KV}$.

4. Ahhoz, hogy az önkényesen indított sokszögvonal a helyére kerüljön, a vonalat kezdőpontja körül $\varphi = \delta_{KV} - \delta_{K(V)}$ szöggel el kell forgatni és $m = \frac{t_{KV}}{t_{K(V)}}$-szeresére nyújtani/zsugorítani kell.
5. Miután valamennyi tájékozott irányértékhez hozzáadtuk φ előjeles értékét, és valamennyi oldalhosszat megszoroztunk m-mel, újra végigszámoljuk a vonalat. A végpont kiszámított koordinátái a számítás élességén belül meg kell egyezzenek az ismert koordinátákkal.

Fontos megjegyezni, hogy a távolságmeghatározás pontosságára tájékoztatást kapunk azáltal, hogy m értékének az egységhez közelinek kell lennie. Az elforgatás φ szöge viszont –360º és +360º között tetszőleges lehet. A számítás tehát nem mutatja ki a szögmérés esetleges durva hibáját, emiatt a törésszögeket gondosan kell megmérni.

2.3 Hibakeresés

A **szögmérésben** elkövetett egyetlen durva hiba helye megkereshető a kettősen tájékozott sokszögvonalban, amelyben szögfeltétel írható fel (szögzáróhiba számítható). A hibakeresés során szabad sokszögvonalként $K \rightarrow V$ és $V \rightarrow K$ irányban egyaránt végigszámoljuk a vonalat. A durva szögmérési hibát azon a sokszögponton vétettük, amelyre a kétféle számítás közel azonos eredményt (koordinátapárt) ad.

A **távolságmeghatározásban** elkövetett durva hiba helye minden sokszögvonaltípusban megkereshető, amelyben koordinátafeltételek írhatók fel. A hibakereséshez kiszámítjuk a lineáris záróhiba $\delta_d = \arctan \frac{dy}{dx}$ irányszögét. Az a sokszögoldal gyanús, amelynek tájékozott irányértéke közel azonos vagy közel ellentétes a záróhiba irányszögével.

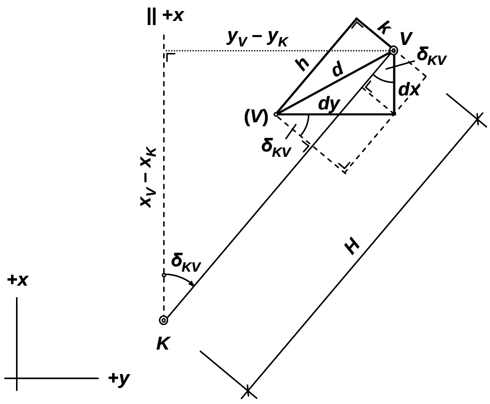
2.4 Hossz- és keresztirányú záróhiba

A sokszögvonal dy és dx koordináta-záróhibáiból számított d lineáris záróhibát érdemes hosszirányú és keresztirányú összetevőre is felbontani, mert a hosszirányú záróhiba nagysága a távolságmeghatározás, a keresztirányú záróhibáé a szögmérés pontosságát jellemzi. A hosszirányú záróhiba a H záróoldallal párhuzamos, a keresztirányú záróhiba a záróoldalra merőleges.

A 9-2. ábra alapján $h = dy \sin\delta_{KV} + dx \cos\delta_{KV}$, és $k = dy \cos\delta_{KV} - dx \sin\delta_{KV}$.

Minthogy $\sin\delta_{KV} = \frac{y_V - y_K}{H}$ és $\cos\delta_{KV} = \frac{x_V - x_K}{H}$,

$$h = \frac{1}{H}\left[dy(y_V - y_K) + dx(x_V - x_K)\right] \text{ és } k = \frac{1}{H}\left[dy(x_V - x_K) + dx(y_V - y_K)\right].$$

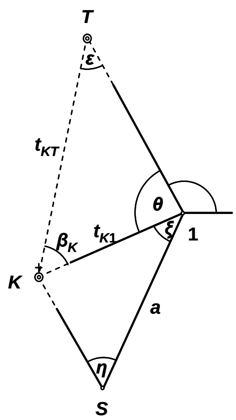


2-2. ábra. A sokszögvonal *h* hosszirányú és *k* keresztirányú záróhibája

2.5 Csatlakozás magasponthoz

Tételezzük fel, hogy a sokszögvonal kezdőpontja műszerállásra nem alkalmas ún. magaspont. Ilyenkor a kezdőponti törésszöget és az első sokszögoldal hosszát közvetett úton határozzuk meg.

A 2-3. ábra szerint kitűzünk egy *S* segédpontot, megmérjük az *a* távolságot, továbbá a ξ és az η szögeket, majd szinusztétellel kiszámítjuk a t_{K1} oldalhosszat. Ezután második geodéziai alapfeladattal kiszámítjuk a δ_{KT} irányszöget és a t_{KT} távolságot, majd az ugyancsak megmért θ szög felhasználásával szinusztétellel kiszámítjuk az ε szöget, végül a háromszög harmadik szögeként a β_K kezdőponti törésszöget.



2-3. ábra. Sokszögvonal csatlakozása magasponthoz

Ha az 1 jelű sokszögponton egynél több tájékozó irányt mértünk, akkor az ellentmondások feloldására az irányértékeket mint külpontos iránymérés eredményeit a *K* kezdőpontra központosítjuk. A tájékozás elvégzése után kezdőponti törésszögnek a δ'_{K1} tájékozott irányértéket tekintjük.

Az előadás anyaga az ajánlott irodalomban:

Krauter: Geodézia; 9.1.2 fejezetrész.