Mérnöki létesítmények geodéziája

Regresszió számítás alkalmazása mérnöki létesítmények minőség-ellenőrzésében, regressziós egyenes, sík, kör

Siki Zoltán

siki.zoltan@epito.bme.hu

Regresszió számítás

Mérnöki létesítmények ellenőrzése, terveknek megfelelése

Deformációvizsgálat

Geodéziai mérések – pontok helyzete, pontszerű információ

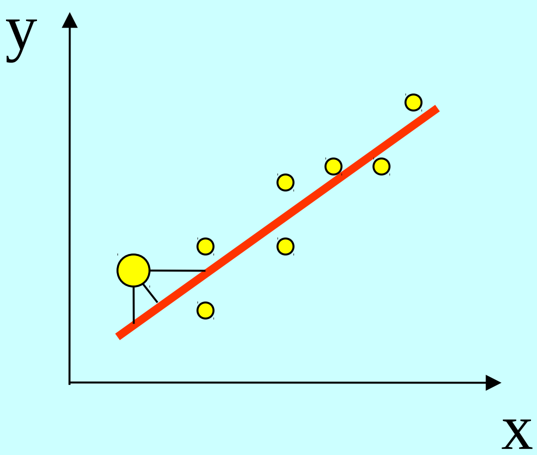
Lineáris regresszió

Regressziós sík

Regressziós görbe, kör

Legkisebb négyzetek módszere (Lagrange multiplikátor)

Lineáris regresszió I.



$$y = m \cdot x + b \quad m = ? \;\; b = ?$$

Korrelációs együttható x és y közötti kapcsolat szorossága

$$r_{x,y} = \frac{c_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad c_{x,y} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

1. Csak az y értékek terheltek hibával

$$y_i + v_i = m \cdot x_i + b \qquad \sum v_i^2 = v^* \cdot v = \min! \Rightarrow \quad d(v^* v) = 2 v^* dv = 0$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ .. & .. \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{bmatrix} \quad v = A \cdot x - l \Rightarrow dv = A \cdot dx$$

Lineáris regresszió I. folyt.

$$2v \cdot dv = 2v \cdot A \cdot dx = 0$$

$$v \cdot A = 0 \; transzponálás \; után \; A' \cdot v = 0$$

$$mivel \; v = A \cdot x - l$$

$$A \cdot v = A' \cdot \left(A \cdot x - l \right) = A' \cdot A \cdot x - A'l = 0$$

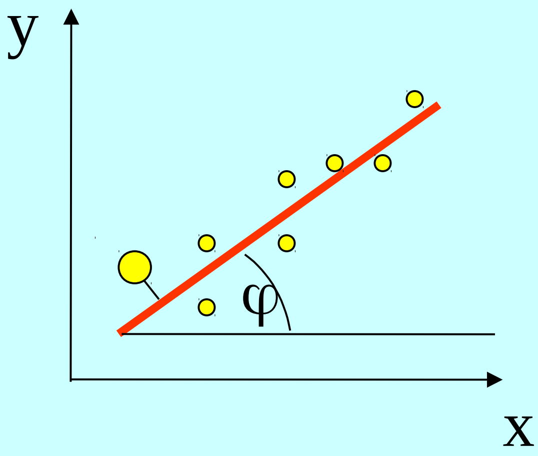
$$x = \left(A' \cdot A \right)^{-1} \cdot \left(A \cdot l \right)$$

$$A' \cdot A = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{bmatrix} A' \cdot l = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} súlyponti \; kr. \; \begin{matrix} \sum xs_i = 0 \\ \sum ys_i = 0 \end{matrix}$$

$$bs = 0 \; ms = \frac{\sum xs_i \cdot ys_i}{\sum xs_i^2} \Rightarrow m = ms \; b = ys - m \cdot xs$$

$$m = r_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \; korrelációs \; együtthatóból \; \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum \left(y_i - \overline{y} \right)^2}{n-1}}$$

Lineáris regresszió II.



v_i – távolság az egyenestől

$$v_{xi} = -v_i \cdot \sin(\phi) \quad v_{yi} = v_i \cdot \cos(\phi)$$

$$y_i + v_{yi} = m \cdot (x_i + v_{xi}) + b \quad m = \tan\phi$$

$$y_i + v_i \cdot \cos\phi = \tan\phi \cdot (x_i - v_i \cdot \sin\phi) + b$$

$$v_i \cdot \cos\phi + v_i \cdot \sin\phi \cdot \tan\phi = b + x_i \cdot \tan\phi - y_i$$ ... v_i kiemelése

$$\frac{v_i}{\cos\phi} = b + x_i \cdot \tan\phi - y_i \Rightarrow v_i = b \cdot \cos\phi + x_i \cdot \sin\phi - y_i \cdot \cos\phi$$

$$\Phi = \sum v_i^2 = \sum \left(b \cdot \cos\phi + x_i \cdot \sin\phi - y_i \cos\phi\right)^2 = \min!$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b} = 2\sum \left(b \cdot \cos\phi + x_i \cdot \sin\phi - y_i \cos\phi\right) \cdot \cos\phi = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 2\sum \left(b \cdot \cos\phi + x_i \cdot \sin\phi - y_i \cos\phi\right) \cdot \left(-b \cdot \sin\phi + x_i \cos\phi + y_i \cdot \sin\phi\right) = 0$$

Lineáris regresszió II. folyt.

$$n \cdot b \cdot \cos\phi + \sum x_i \cdot \sin\phi - \sum y_i \cdot \cos\phi = 0$$

$$\sin\phi \cdot \cos\phi \cdot \left(\sum x_i^2 - \sum y_i^2\right) + \sum x_i \cdot y_i \cdot \sin^2\phi - \cos^2\phi \sum x_i \cdot y_i = 0$$

Súlyponti koordinátákra áttérve:

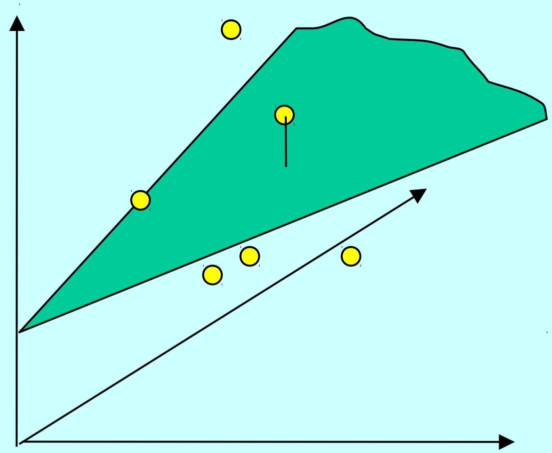
$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \quad \textit{és} \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$n \cdot b \cdot \cos\phi = 0 \Rightarrow b = 0 \; \textit{a súlyponton átmegy}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\phi \cdot \left(\sum xs_i^2 - \sum ys_i^2\right) - \cos 2\phi \sum xs_i \cdot ys_i = 0$$

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \sum xs_i \cdot ys_i}{\sum xs_i^2 - \sum ys_i^2} \Rightarrow m = \tan\phi$$

$$b = ys - m \cdot xs$$



Regressziós sík

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ .. & .. & .. \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ .. \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$z = a \cdot x + b \cdot y + c$$

$$z_i + v_i = a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \qquad \sum v_i^2 = \min!$$

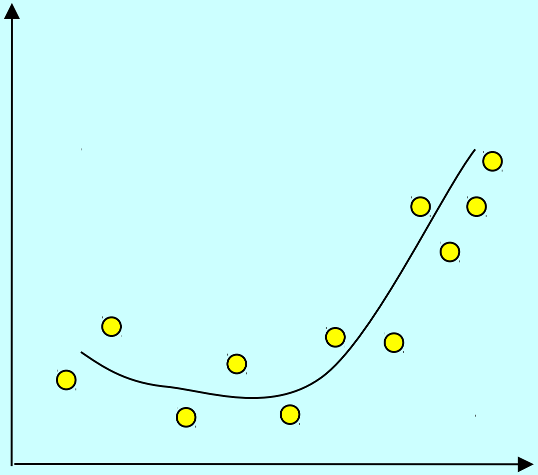
$$v_i = a \cdot x_i + b \cdot y_i + c - z_i$$

$$A'A = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & n \end{bmatrix} \quad A'l = \begin{bmatrix} \sum x_i z_i \\ \sum y_i z_i \\ \sum z_i \end{bmatrix}$$

súlyponti koordinátákra $c = 0$

$$\begin{bmatrix} \sum xs_i^2 & \sum xs_i\, ys_i \\ \sum xs_i\, ys_i & \sum ys_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum xs_i\, zs_i \\ \sum ys_i\, zs_i \end{bmatrix} = 0$$

Regressziós polinom

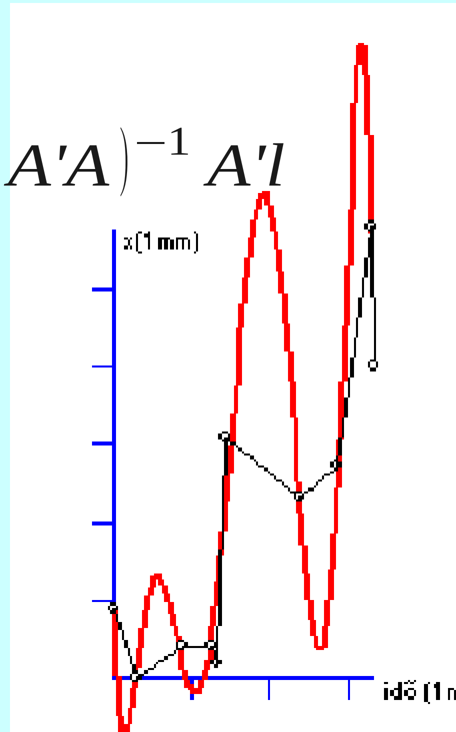


$$y=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n=\sum a_i x^i$$

$$y_i+v_i=a_0+a_1\cdot x_i+a_2\cdot x_i^2+\ldots+a_n\cdot x_i^n$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & .. & x_1^n \\ 1 & x_2 & .. & x_2^n \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & x_m & .. & x_m^n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$v=Ax-l \quad x=\left(A'A\right)^{-1}A'l$$



Rosszul kondicionált egyenletrendszer

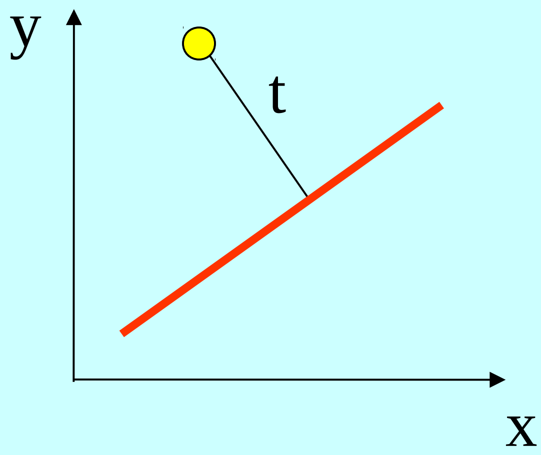
Távolság számítás

Pont-egyenes távolság

$$t_i = \frac{a \cdot x_i + b \cdot y_i + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

egyenes egyenlet

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

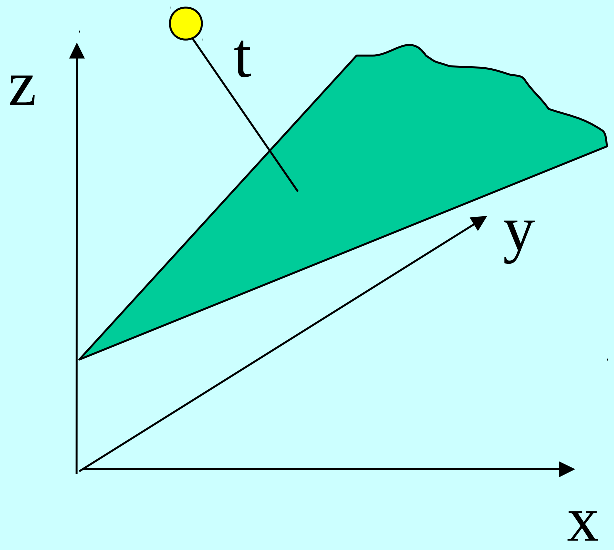


Pont-sík távolság

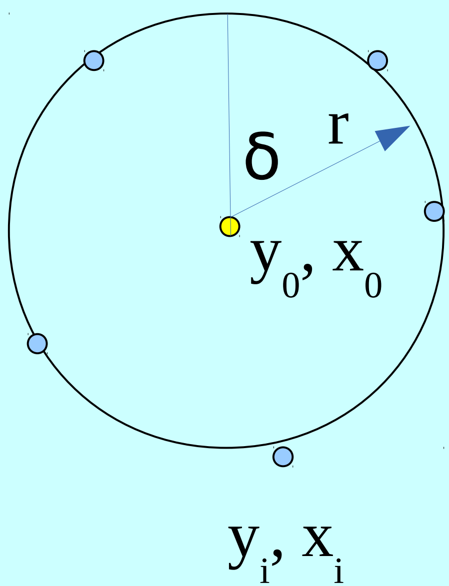
$$t_i = \frac{a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

sík egyenlet

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$



Kiegyenlítő kör I.



$(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2 = r^2$

Nem lineáris összefüggések

Ismeretlenek y_0, x_0, r

Megoldás iterációval

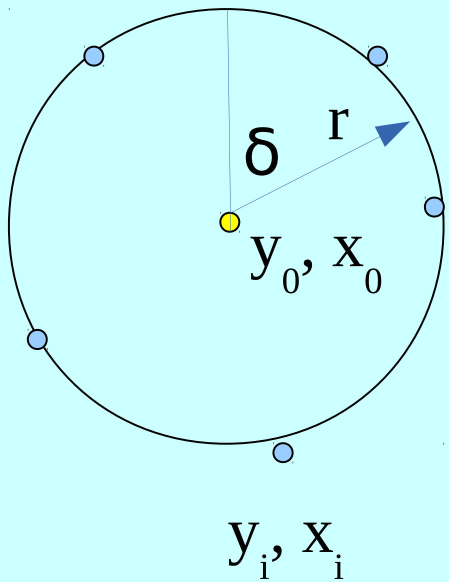
Iterációs megoldás a kör paraméteres egyenlete alapján

$y = y_0 + r * \sin(\delta)$ $\quad$ $x = x_0 + r * \cos(\delta)$

Előzetes középpont, sugár és középponti szögek számítása

Kiegyenlítés y_0, x_0, r értékekre (lineáris feladat)

Kiegyenlítő kör II.



$$(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x\,x_0 + x_0^{\,2} + y^2 - 2y\,y_0 + y_0^{\,2} = r^2$$

$$y^2 + x^2 - 2x_0\,x - 2y_0\,y + x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - r^2 = 0$$

$$a_1 = -2x_0$$

$$a_2 = -2y_0$$

$$a_3 = x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - r^2$$

$$y^2 + x^2 + a_1\,x + a_2\,y + a_3 = 0$$

Mi a „csalás” ebben? a_1, a_2, a_3 nem függetlenek

Pontonként egy egyenlet $y_i^{\,2} + x_i^{\,2} + a_1\,x_i + a_2\,y_i + a_3 = 0$

a_1, a_2, a_3 ismeretlenek

$x_0 = -0.5\,a_1$, $y_0 = -0.5\,a_2$, $r = ((a_1^{\,2}+a_2^{\,2}) / 4 - a_3)^{1/2}$

Periodikus függvények

Például idősorok elemzése, éves/évszakos/napos periódusok
Pl. a mérés időpontja és a pont magassága közötti periódusosság

Fourier sor

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_i\cdot\cos n x-\sum b_i\cdot\sin n x$$

Feltételezzük, hogy évesnél hosszabb periódus nincsen

$$x=(t-t_0)\cdot\frac{2\pi}{365}$$

t a mérés időpontja nap egységben
t_0 az első mérés időpontja napokban

Ismeretlenek az a_i, b_i együtthatók (lineáris egyenletrendszer)